MODERNA EM AÇÃO

MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

VOLUME
II

ENSINO MÉDIO
2º ANO

Organizadora:
Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Mara Regina Garcia Gay

Área de conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Componente curricular:
Matemática

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
PNLD 2026 - ENSINO MÉDIO
Código da coleção:
0015 P26 01 01 202 814

MODERNA

MODERNA EM AÇÃO

MATEMÁTICA

VOLUME II

ENSINO MÉDIO – 2º ANO

Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Mara Regina Garcia Gay
Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Especialista em Educação Matemática: Fundamentos Teóricos e Metodológicos pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Licenciada em Pedagogia pela Universidade Iguaçu (RJ). Professora. Editora.

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição
São Paulo, 2024

MODERNA

Elaboração dos originais:

Mara Regina Garcia Gay
Bacharel e licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Especialista em Educação Matemática: Fundamentos Teóricos e Metodológicos pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Licenciada em Pedagogia pela Universidade Iguaçu (RJ). Professora. Editora.

Carlos Eduardo Marques
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Mateus Coqueiro Daniel de Souza
Mestre em Ciências no Programa: Mestrado Profissional em Ensino de Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Paulo César Rodrigues dos Santos
Bacharel em Sistemas de Informação pela Universidade de São Paulo. Editor.

Fabio Martins de Leonardo
Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editor.

Juliana Ikeda
Licenciada em Matemática pela Universidade de São Paulo. Editora.

Renata Martins Fortes Gonçalves
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Editora.

Selene Coletti
Licenciada em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Prof. José Augusto Vieira" (MG). Professora.

Tatiana Aleixo Bologna
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (PR). Editora e professora.

Organização dos objetos digitais: Mara Regina Garcia Gay
Elaboração dos objetos digitais: Mara Regina Garcia Gay, Mateus Coqueiro Daniel de Souza

Edição de texto: Carlos Eduardo Marques, Mateus Coqueiro Daniel de Souza, Paulo César Rodrigues dos Santos
Assistência editorial: Ivan Kuvasney Lima, Cintia Alessandra Valle Burkert Machado
Preparação de texto: Magna Reimberg Teobaldo, Mariane de Mello Genaro Feitosa
Gerência de planejamento editorial e revisão: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero, Mônica Rodrigues de Lima
Revisão: Alessandra A. Felix, Ana Cortazzo, Edna Lunna, Érika Kurihara, Renato da Rocha, Rita de Cássia Sam, Sirlene Prignolato, Tatiana Malheiro
Gerência de *design*, produção gráfica e digital: Patricia Costa
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Vinicius Rossignol
Capa: Everson de Paula, Paula Miranda Santos
Foto: Parsadanov/Shutterstock
Ilustrações de vinhetas: Bruno Tonel, Vinicius Rossignol
Coordenação de produção gráfica: Aderson Oliveira
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine, Rafael Migliatti de Oliveira
Editoração eletrônica: Setup Bureau Editoração Eletrônica LTDA
Coordenação de pesquisa iconográfica: Flávia Aline de Morais
Pesquisa iconográfica: Pamela Rosa
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Moderna em ação matemática / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Mara Regina Garcia Gay. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2024.

2° ano : ensino médio : volume II
Componente curricular: Matemática.
Área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-16-13971-1 (aluno)
ISBN 978-85-16-13972-8 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Gay, Mara Regina Garcia.

24-225589 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados.

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Canal de atendimento: 0303 663 3762
www.moderna.com.br
2024
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Esta obra foi criada especialmente para você, estudante, que deseja entender e dominar conceitos matemáticos, envolvidos em diferentes contextos, de forma clara e acessível. Este projeto foi pensado para oferecer uma coleção de Matemática que a relacione com aspectos da realidade social, econômica e cultural do país, priorizando a compreensão, o incentivo à leitura e a atribuição de significado aos temas e conceitos abordados.

Em cada volume, estão presentes avaliações diagnósticas (uma no início e outra no meio do volume) que permitem a você identificar o que já sabe sobre determinados temas. No início de cada capítulo, há uma situação contextualizada, que, por meio de imagens e textos, busca despertar seu interesse para o que será estudado. Em seguida, a teoria é explorada com exemplos, atividades resolvidas e atividades propostas. Ao final de cada capítulo, a seção *Para finalizar* oferece recursos de verificação do aprendizado.

As seções *Trabalho e juventudes*, *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares* complementam e enriquecem a obra.

Esperamos que tanto você, estudante, quanto o professor encontrem nesta obra os recursos para o bom desenvolvimento da aprendizagem. Nosso objetivo é tornar o aprendizado de Matemática envolvente e significativo. Que este livro seja uma ferramenta valiosa tanto em sala de aula quanto para o estudo em casa, ajudando a despertar a curiosidade e o interesse pelos conceitos matemáticos e pela presença da ciência Matemática na vida. Desejamos que cada página contribua para o sucesso e o desenvolvimento de todos os envolvidos.

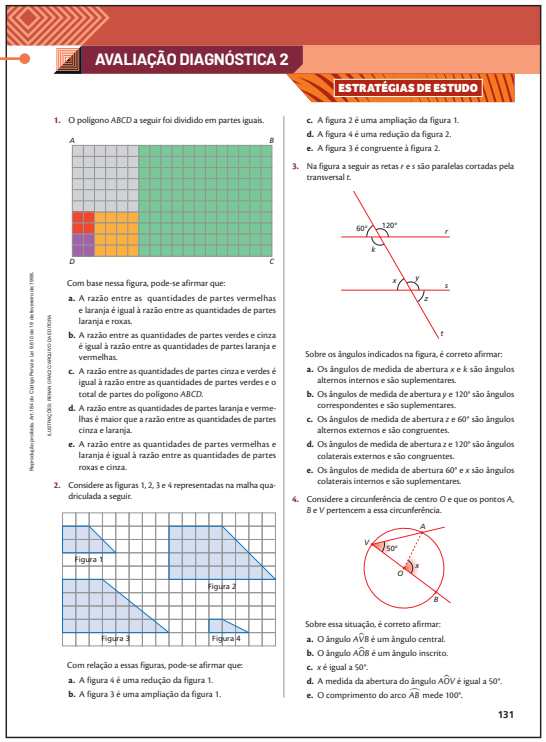
Os editores

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ORGANIZAÇÃO DA OBRA

Avaliação diagnóstica

Nesta seção, que aparece em dois momentos no volume, você vai verificar seus conhecimentos sobre os conteúdos estudados anteriormente.



AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

1. O polígono *ABCD* a seguir foi dividido em partes iguais.

Com base nessa figura, pode-se afirmar que:

a. A razão entre as quantidades de partes vermelhas e laranja é igual à razão entre as quantidades de partes laranja e roxas.
b. A razão entre as quantidades de partes verdes e cinza é igual à razão entre as quantidades de partes laranja e vermelhas.
c. A razão entre as quantidades de partes cinza e verdes é igual à razão entre as quantidades de partes verdes e o total de partes do polígono *ABCD*.
d. A razão entre as quantidades de partes laranja e vermelhas é maior que a razão entre as quantidades de partes cinza e laranja.
e. A razão entre as quantidades de partes vermelhas e laranja é igual à razão entre as quantidades de partes roxas e cinza.

2. Considere as figuras 1, 2, 3 e 4 representadas na malha quadriculada a seguir.

Com relação a essas figuras, pode-se afirmar que:

a. A figura 4 é uma redução da figura 1.
b. A figura 3 é uma ampliação da figura 1.
c. A figura 2 é uma ampliação da figura 1.
d. A figura 4 é uma redução da figura 2.
e. A figura 3 é congruente à figura 2.

3. Na figura a seguir as retas *r* e *s* são paralelas cortadas pela transversal *t*.

Sobre os ângulos indicados na figura, é correto afirmar:

a. Os ângulos de medida de abertura *x* e *k* são ângulos alternos internos e são suplementares.
b. Os ângulos de medida de abertura *y* e 120° são ângulos correspondentes e são suplementares.
c. Os ângulos de medida de abertura *z* e 60° são ângulos alternos externos e são congruentes.
d. Os ângulos de medida de abertura *z* e 120° são ângulos colaterais externos e são congruentes.
e. Os ângulos de medida de abertura 60° e *x* são ângulos colaterais internos e são suplementares.

4. Considere a circunferência de centro *O* e os pontos *A*, *B* e *V* pertencem a essa circunferência.

Sobre essa situação, é correto afirmar:

a. O ângulo $A\hat{V}B$ é um ângulo central.
b. O ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo inscrito.
c. *x* é igual a 50°.
d. A medida da abertura do ângulo $A\hat{O}V$ é igual a 50°.
e. O comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 100°.

131

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: ARQUIVO ORIGINAL DA EDITORA

Abertura de capítulo

O tema do capítulo é introduzido por meio de uma imagem motivadora e um breve texto.

Capítulo 7

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA SEM ESCALA; CORES FANTASIA.

OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Aplicações da Trigonometria

Você já se perguntou como os astrônomos fizeram para calcular a medida da distância entre a Terra e a Lua? E entre a Terra e o Sol?

Resolver problemas de Astronomia, como descobrir essas medidas de distância entre a Terra, o Sol e a Lua, sempre despertou o interesse do ser humano. Desse tipo de especulação nasceu a Trigonometria, parte da Matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas de comprimento dos lados e as medidas de abertura dos ângulos de um triângulo.

O grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.), considerado por muitos o primeiro grande astrônomo da História, usou as ideias da Trigonometria ao estabelecer um método geométrico para investigar a razão entre as medidas de distância Terra-Sol e Terra-Lua.

Seus cálculos partiram da observação de que, quando a Lua está no quarto crescente – ocasião em que exatamente metade dela aparece iluminada pelo Sol –, a abertura do ângulo $\hat{L}$, do triângulo cujos vértices coincidem com a posição do Sol (S), da Lua (*L*) e da Terra (T), mede 90°, conforme mostrado na ilustração anterior.

Aplicando os conhecimentos da época, Aristarco observou que β, medida da abertura do ângulo formado entre as linhas de vista da Terra ao Sol e da Terra à Lua, é igual a 87°. A partir disso, com conceitos trigonométricos, concluiu que a razão entre as medidas de distância Terra-Sol e Terra-Lua $\left(\frac{TS}{TL}\right)$ estaria entre 18 e 20, o que significa que a medida de distância Terra-Sol era de 18 a 20 vezes a medida de distância Terra-Lua.

Atualmente, sabemos que a medida de distância Terra-Sol é cerca de 400 vezes a medida de distância Terra-Lua. A grande diferença entre esse valor e o encontrado por Aristarco está relacionada ao ângulo entre as linhas de vista da Terra ao Sol e da Terra à Lua cuja medida de abertura correta é de aproximadamente 89,83°. Mesmo assim, o raciocínio de Aristarco foi perfeito.

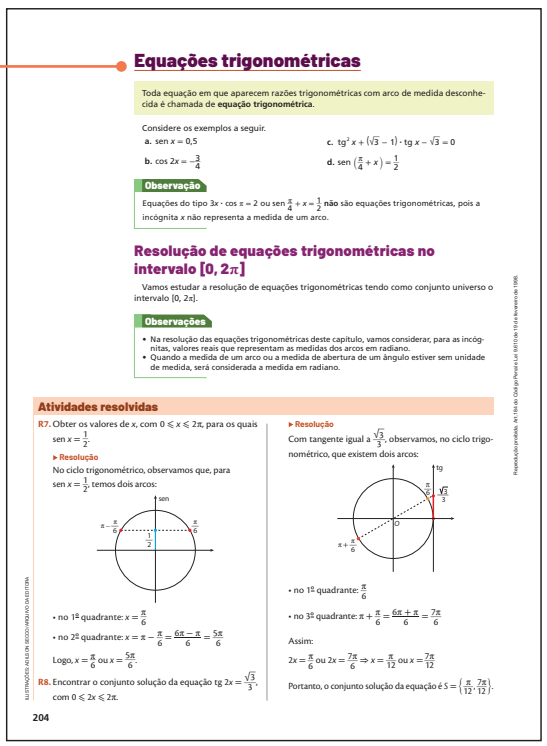
Neste capítulo, estudaremos conceitos básicos da Trigonometria no triângulo retângulo e verificaremos que ela tem grande aplicação no cálculo de medidas de distância inacessíveis: na Astronomia, como fez Aristarco; na Topografia, para determinar a medida de altura de morros, montanhas e colinas; na Engenharia, para estabelecer a medida de comprimento de uma rampa etc.

153

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
LILIAN PACCE/ARQUIVO DA EDITORA

Apresentação de conteúdos

Os conteúdos são apresentados com linguagem clara e objetiva, acompanhados de exemplos e atividades resolvidas.



Equações trigonométricas

Toda equação em que aparecem razões trigonométricas com arco de medida desconhecida é chamada de **equação trigonométrica**.

Considere os exemplos a seguir.

a. $\operatorname{sen} x = 0{,}5$
b. $\cos 2x = -\frac{3}{4}$
c. $\operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1) \cdot \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$
d. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}$

Observação

Equações do tipo $3x \cdot \cos \pi = 2$ ou $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + x = \frac{1}{2}$ **não** são equações trigonométricas, pois a incógnita *x* não representa a medida de um arco.

Resolução de equações trigonométricas no intervalo $[0, 2\pi]$

Vamos estudar a resolução de equações trigonométricas tendo como conjunto universo o intervalo $[0, 2\pi]$.

Observações

- Na resolução das equações trigonométricas deste capítulo, vamos considerar, para as incógnitas, valores reais que representam as medidas dos arcos em radiano.
- Quando a medida de um arco ou a medida de abertura de um ângulo estiver sem unidade de medida, será considerada a medida em radiano.

Atividades resolvidas

R7. Obter os valores de *x*, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, para os quais $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

▸ Resolução

No ciclo trigonométrico, observamos que, para $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, temos dois arcos:

- no 1º quadrante: $x = \frac{\pi}{6}$
- no 2º quadrante: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

R8. Encontrar o conjunto solução da equação $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, com $0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi$.

▸ Resolução

Com tangente igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$, observamos, no ciclo trigonométrico, que existem dois arcos:

- no 1º quadrante: $\frac{\pi}{6}$
- no 3º quadrante: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Assim:

$2x = \frac{\pi}{6}$ ou $2x = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{7\pi}{12}$

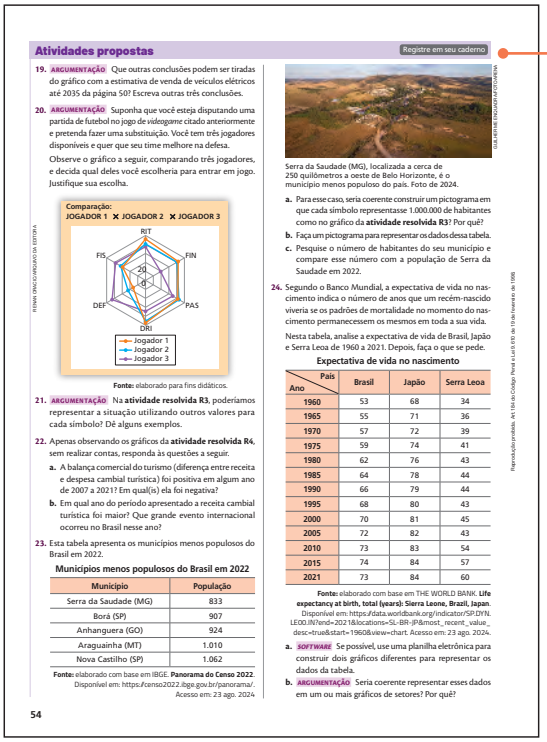
Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12}\right\}$.

204

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: ACERVO ORIGINAL DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Atividades propostas

Registre em seu caderno

19. ARGUMENTAÇÃO Que outras conclusões podem ser tiradas do gráfico com a estimativa de venda de veículos elétricos até 2035 da página 50? Escreva outras três conclusões.

20. ARGUMENTAÇÃO Suponha que você esteja disputando uma partida de futebol no jogo de *videogame* citado anteriormente e pretenda fazer uma substituição. Você tem três jogadores disponíveis e quer que seu time melhore na defesa.

Observe o gráfico a seguir, comparando três jogadores, e decida qual deles você escolheria para entrar em jogo. Justifique sua escolha.

Fonte: elaborado para fins didáticos.

21. ARGUMENTAÇÃO Na **atividade resolvida R3**, poderíamos representar a situação utilizando outros valores para cada símbolo? Dê alguns exemplos.

22. Apenas observando os gráficos da **atividade resolvida R4**, sem realizar contas, responda às questões a seguir.

a. A balança comercial do turismo (diferença entre receita e despesa cambial turística) foi positiva em algum ano de 2007 a 2021? Em qual(is) ela foi negativa?

b. Em qual ano do período apresentado a receita cambial turística foi maior? Que grande evento internacional ocorreu no Brasil nesse ano?

23. Esta tabela apresenta os municípios menos populosos do Brasil em 2022.

Municípios menos populosos do Brasil em 2022

Município	População
Serra da Saudade (MG)	833
Borá (SP)	907
Anhanguera (GO)	924
Araguainha (MT)	1.010
Nova Castilho (SP)	1.062

Fonte: elaborado com base em IBGE. **Panorama do Censo 2022**. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 23 ago. 2024.

Serra da Saudade (MG), localizada a cerca de 250 quilômetros a oeste de Belo Horizonte, é o município menos populoso do país. Foto de 2024.

a. Para esse caso, seria coerente construir um pictograma em que cada símbolo representasse 1.000.000 de habitantes como no gráfico da **atividade resolvida R3**? Por quê?

b. Faça um pictograma para representar os dados dessa tabela.

c. Pesquise o número de habitantes do seu município e compare esse número com a população de Serra da Saudade em 2022.

24. Segundo o Banco Mundial, a expectativa de vida no nascimento indica o número de anos que um recém-nascido viveria se os padrões de mortalidade no momento do nascimento permanecessem os mesmos em toda a sua vida.

Nesta tabela, analise a expectativa de vida de Brasil, Japão e Serra Leoa de 1960 a 2021. Depois, faça o que se pede.

Expectativa de vida no nascimento

País / Ano	Brasil	Japão	Serra Leoa
1960	53	68	34
1965	55	71	36
1970	57	72	39
1975	59	74	41
1980	62	76	43
1985	64	78	44
1990	66	79	44
1995	68	80	43
2000	70	81	45
2005	72	82	43
2010	73	83	54
2015	74	84	57
2021	73	84	60

Fonte: elaborado com base em THE WORLD BANK. **Life expectancy at birth, total (years): Sierra Leone, Brazil, Japan**. Disponível em: https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.LEOO.IN?end=2021&locations=SL-BR-JP&most_recent_value_desc=true&start=1960&view=chart. Acesso em: 23 ago. 2024.

a. SOFTWARE Se possível, use uma planilha eletrônica para construir dois gráficos diferentes para representar os dados da tabela.

b. ARGUMENTAÇÃO Seria coerente representar esses dados em um ou mais gráficos de setores? Por quê?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades propostas

São propostas atividades em ordem crescente de dificuldade. Algumas delas recebem *tags* especiais, conforme a legenda a seguir:

EM DUPLA
Você fará a atividade com um colega.

EM GRUPO
Mais de um colega resolverá a atividade com você.

ARGUMENTAÇÃO
Ao resolver a atividade, você desenvolverá sua capacidade de pensar criticamente e articular ideias de maneira clara e convincente.

SOFTWARE
Você terá oportunidade de utilizar determinados *softwares* educativos.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL
Você resolverá problemas que envolvem a criação ou a análise de um algoritmo, passo a passo, que leva à solução.

ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS
Você criará questões ou enunciados de problemas.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
Ao resolver a atividade, você conhecerá fatos históricos ligados à Matemática.

Trabalho e juventudes

Nesta seção, você vai explorar temas como profissões, tributos, igualdade de condições, inclusão, segurança no trabalho, entre outros.

TRABALHO E JUVENTUDES

Os analistas de dados são fundamentais em diversos setores por possibilitarem que as informações disponíveis se tornem úteis para a empresa.

ODS 9

Analista de dados

Diariamente, as empresas acumulam grande quantidade de informações sobre vendas, perfis de clientes, dados da concorrência, número de acessos a *sites*, entre outras. O avanço tecnológico torna possível coletar um número cada vez maior de dados. O volume e a velocidade de coleta deles podem se tornar tão grandes que impossibilitariam seu tratamento por meio de *softwares* convencionais, e é nesse âmbito que os analistas de dados são necessários.

O analista de dados é o profissional responsável por transformar dados brutos em informações significativas que ajudam as empresas na tomada das melhores decisões para os negócios. Na prática, o trabalho do analista de dados consiste em:

- definir os objetivos da análise, compreendendo as necessidades e os requisitos da empresa;
- analisar dados presentes em bancos de dados, planilhas, registros de transações etc.;
- selecionar informações relevantes de tudo o que existe armazenado;
- comunicar as informações de maneira clara por meio, por exemplo, de tabelas ou gráficos.

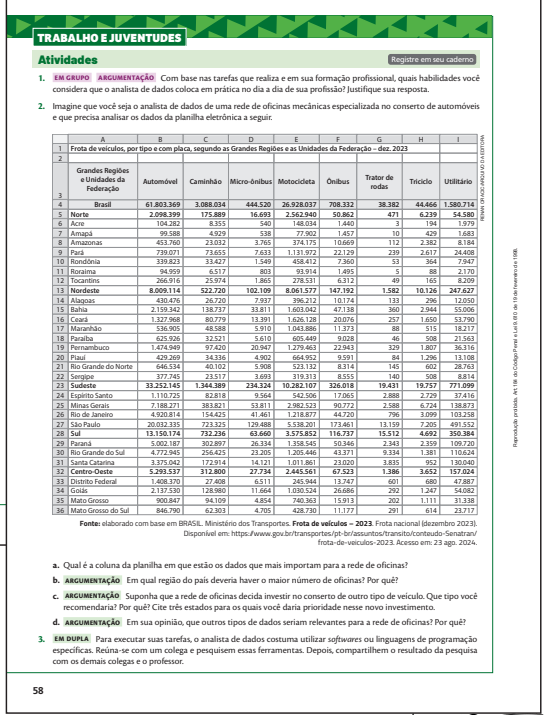
Esse profissional é apto a trabalhar em uma ampla variedade de setores, como instituições financeiras, empresas de varejo, agências governamentais, entre outros. Em instituições financeiras, o analista de dados auxilia na identificação de riscos e oportunidades de investimentos ou na averiguação de fraudes. Em empresas de varejo, ele detecta preferências e padrões dos clientes, ajusta a estratégia de precificação ou prevê a demanda. Já nas agências governamentais, ele investiga dados sobre população, economia, saúde pública, segurança e outros aspectos que interferem na tomada de decisões políticas.

O analista de dados, geralmente, tem formação em cursos ligados à área da Tecnologia da Informação, como: Análise de Sistemas, Sistemas de Informação, Ciência da Computação e setores relacionados. Também podem ter formação em outros campos das Ciências Exatas, como Estatística ou Matemática.

Observação

O trabalho do analista de dados está diretamente ligado à Lei Geral de Proteção de Dados (LGPD), que foi publicada em 14 de agosto de 2018 e entrou em vigor em setembro de 2020. A LGPD regula o tratamento de dados pessoais no Brasil, garantindo a privacidade e proteção das informações dos indivíduos. Ela estabelece regras sobre como os dados podem ser coletados, armazenados e utilizados, assegurando que as empresas e profissionais, como analistas de dados, sigam práticas éticas e transparentes para proteger os direitos dos titulares dos dados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



TRABALHO E JUVENTUDES

Atividades

Registre em seu caderno

1. EM GRUPO ARGUMENTAÇÃO Com base nas tarefas que realiza e em sua formação profissional, quais habilidades você considera que o analista de dados coloca em prática no dia a dia de sua profissão? Justifique sua resposta.

2. Imagine que você seja o analista de dados de uma rede de oficinas mecânicas especializada no conserto de automóveis e que precisa analisar os dados da planilha eletrônica a seguir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Frota de veículos, por tipo e com placa, segundo as Grandes Regiões e as Unidades da Federação – dez. 2023								
2									
3	Grandes Regiões e Unidades da Federação	Automóvel	Caminhão	Micro-ônibus	Motocicleta	Ônibus	Trator de rodas	Triciclo	Utilitário
4	**Brasil**	**61.803.369**	**3.088.034**	**444.520**	**26.928.037**	**708.332**	**38.382**	**44.466**	**1.580.714**
5	**Norte**	**2.098.399**	**175.889**	**16.693**	**2.562.940**	**50.862**	**471**	**6.239**	**54.580**
6	Acre	104.282	8.355	540	148.034	1.440	3	194	1.979
7	Amapá	99.588	4.929	538	77.902	1.457	10	429	1.683
8	Amazonas	453.760	23.032	3.765	374.175	10.669	112	2.382	8.184
9	Pará	739.071	73.655	7.633	1.131.972	22.129	239	2.617	24.408
10	Rondônia	339.823	33.427	1.549	438.412	7.360	53	364	7.947
11	Roraima	94.959	6.517	803	93.914	1.495	5	88	2.170
12	Tocantins	266.916	25.974	1.865	278.531	6.312	49	165	8.209
13	**Nordeste**	**8.009.114**	**522.720**	**102.109**	**8.061.577**	**147.192**	**1.582**	**10.126**	**247.627**
14	Alagoas	430.476	26.720	7.937	396.212	10.174	133	296	12.050
15	Bahia	2.159.342	138.737	33.811	1.603.042	47.138	360	2.944	55.006
16	Ceará	1.327.968	80.779	13.391	1.626.128	20.076	257	1.650	53.790
17	Maranhão	536.905	48.588	5.910	1.043.886	11.373	88	515	18.217
18	Paraíba	625.926	32.521	5.610	605.449	9.028	46	508	21.563
19	Pernambuco	1.474.949	97.420	20.947	1.279.463	22.943	329	1.807	36.316
20	Piauí	429.269	34.336	4.902	664.952	9.591	84	1.296	13.108
21	Rio Grande do Norte	646.534	40.102	5.908	523.132	8.314	145	602	28.763
22	Sergipe	377.745	23.517	3.693	319.313	8.555	140	508	8.814
23	**Sudeste**	**33.252.145**	**1.344.389**	**234.324**	**10.282.107**	**326.018**	**19.431**	**19.757**	**771.099**
24	Espírito Santo	1.110.725	82.818	9.564	542.506	17.065	2.888	2.729	37.416
25	Minas Gerais	7.188.271	383.821	53.811	2.982.523	90.772	2.588	6.724	138.873
26	Rio de Janeiro	4.920.814	154.425	41.461	1.218.877	44.720	796	3.099	103.258
27	São Paulo	20.032.335	723.325	129.488	5.538.201	173.461	13.159	7.205	491.552
28	**Sul**	**13.150.174**	**732.236**	**63.660**	**3.575.852**	**116.737**	**15.512**	**4.692**	**350.384**
29	Paraná	5.002.187	302.897	26.334	1.358.545	50.346	2.343	2.359	109.720
30	Rio Grande do Sul	4.772.945	256.425	23.205	1.205.446	43.371	9.334	1.381	110.624
31	Santa Catarina	3.375.042	172.914	14.121	1.011.861	23.020	3.835	952	130.040
32	**Centro-Oeste**	**5.293.537**	**312.800**	**27.734**	**2.445.561**	**67.523**	**1.386**	**3.652**	**157.024**
33	Distrito Federal	1.408.370	27.408	6.511	245.944	13.747	601	680	47.887
34	Goiás	2.137.530	128.980	11.664	1.030.524	26.686	292	1.247	54.082
35	Mato Grosso	900.847	94.109	4.854	740.363	15.913	202	1.111	31.338
36	Mato Grosso do Sul	846.790	62.303	4.705	428.730	11.177	291	614	23.717

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério dos Transportes. **Frota de veículos – 2023**. Frota nacional (dezembro 2023). Disponível em: https://www.gov.br/transportes/pt-br/assuntos/transito/conteudo-Senatran/frota-de-veiculos-2023. Acesso em: 23 ago. 2024.

a. Qual é a coluna da planilha em que estão os dados que mais importam para a rede de oficinas?

b. ARGUMENTAÇÃO Em qual região do país deveria haver o maior número de oficinas? Por quê?

c. ARGUMENTAÇÃO Suponha que a rede de oficinas decida investir no conserto de outro tipo de veículo. Que tipo você recomendaria? Por quê? Cite três estados para os quais você daria prioridade nesse novo investimento.

d. ARGUMENTAÇÃO Em sua opinião, que outros tipos de dados seriam relevantes para a rede de oficinas? Por quê?

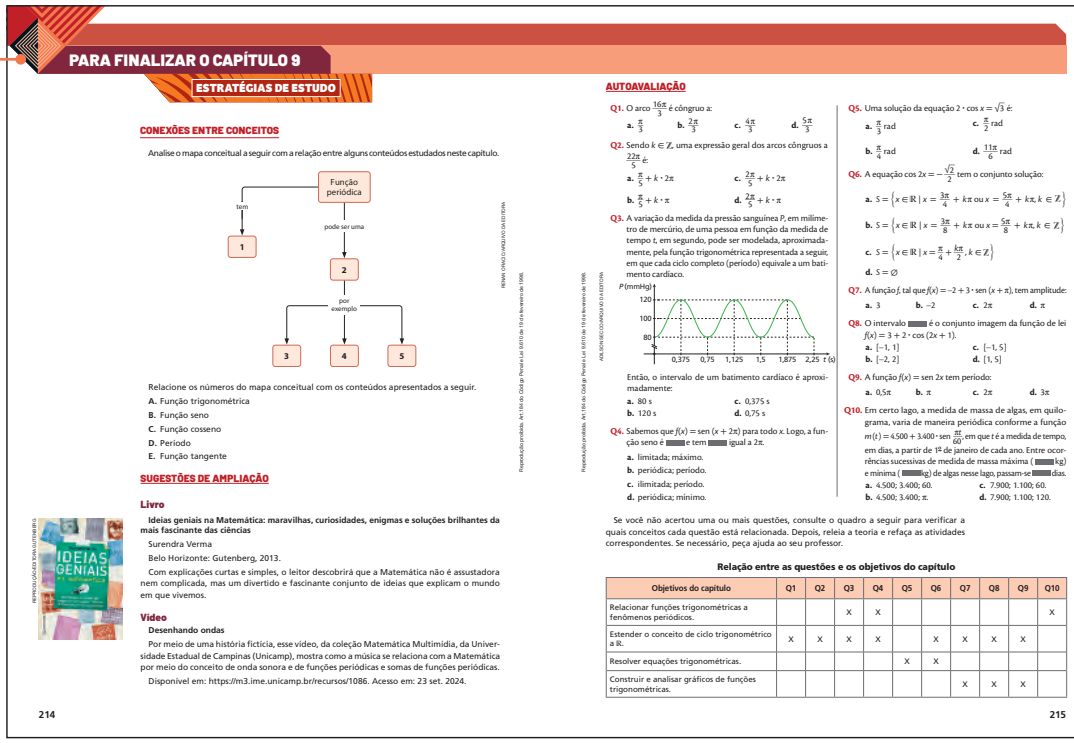
3. EM DUPLA Para executar suas tarefas, o analista de dados costuma utilizar *softwares* ou linguagens de programação específicas. Reúna-se com um colega e pesquisem essas ferramentas. Depois, compartilhem o resultado da pesquisa com os demais colegas e o professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para finalizar o capítulo

Esta seção se subdivide nas subseções *Conexões entre conceitos*, *Sugestões de ampliação* e *Autoavaliação*.

- *Conexões entre conceitos*: para você identificar palavras/termos que completam corretamente um mapa conceitual.
- *Sugestões de ampliação*: são indicados recursos complementares, como livros, *sites*, jogos, *softwares* e videoaulas, para enriquecer o que foi estudado.
- *Autoavaliação*: apresenta questões que possibilitarão identificar suas dificuldades e facilidades no estudo.



PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 9

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Função trigonométrica
B. Função seno
C. Função cosseno
D. Período
E. Função tangente

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

Ideias geniais na Matemática: maravilhas, curiosidades, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências

Surendra Verma

Belo Horizonte: Gutenberg, 2013.

Com explicações curtas e simples, o leitor descobrirá que a Matemática não é assustadora nem complicada, mas um divertido e fascinante conjunto de ideias que explicam o mundo em que vivemos.

Vídeo

Desenhando ondas

Por meio de uma história fictícia, esse vídeo, da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), mostra como a música se relaciona com a Matemática por meio do conceito de onda sonora e de funções periódicas e somas de funções periódicas.

Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086. Acesso em: 23 set. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. O arco $\frac{16\pi}{3}$ é côngruo a:
a. $\frac{\pi}{3}$ b. $\frac{2\pi}{3}$ c. $\frac{4\pi}{3}$ d. $\frac{5\pi}{3}$

Q2. Sendo $k \in \mathbb{Z}$, uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{22\pi}{5}$ é:
a. $\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi$ c. $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi$
b. $\frac{\pi}{5} + k \cdot \pi$ d. $\frac{2\pi}{5} + k \cdot \pi$

Q3. A variação da medida da pressão sanguínea P, em milímetro de mercúrio, de uma pessoa em função da medida de tempo t, em segundo, pode ser modelada, aproximadamente, pela função trigonométrica representada a seguir, em que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.

Então, o intervalo de um batimento cardíaco é aproximadamente:
a. 80 s c. 0,375 s
b. 120 s d. 0,75 s

Q4. Sabemos que $f(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$ para todo x. Logo, a função seno é [redacted] e tem [redacted] igual a 2π.
a. limitada; máximo.
b. periódica; período.
c. ilimitada; período.
d. periódica; mínimo.

Q5. Uma solução da equação $2 \cdot \cos x = \sqrt{3}$ é:
a. $\frac{\pi}{3}$ rad c. $\frac{\pi}{2}$ rad
b. $\frac{\pi}{4}$ rad d. $\frac{11\pi}{6}$ rad

Q6. A equação $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tem o conjunto solução:
a. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
d. $S = \varnothing$

Q7. A função f, tal que $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen}(x + \pi)$, tem amplitude:
a. 3 b. −2 c. 2π d. π

Q8. O intervalo [redacted] é o conjunto imagem da função de lei $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos(2x + 1)$.
a. [−1, 1] c. [−1, 5]
b. [−2, 2] d. [1, 5]

Q9. A função $f(x) = \text{sen } 2x$ tem período:
a. $0{,}5\pi$ b. π c. 2π d. 3π

Q10. Em certo lago, a medida de massa de algas, em quilograma, varia de maneira periódica conforme a função $m(t) = 4.500 + 3.400 \cdot \text{sen}\frac{\pi t}{60}$, em que t é a medida de tempo, em dias, a partir de 1º de janeiro de cada ano. Entre ocorrências sucessivas de medida de massa máxima ([redacted] kg) e mínima ([redacted] kg) de algas nesse lago, passam-se [redacted] dias.
a. 4.500; 3.400; 60. c. 7.900; 1.100; 60.
b. 4.500; 3.400; π. d. 7.900; 1.100; 120.

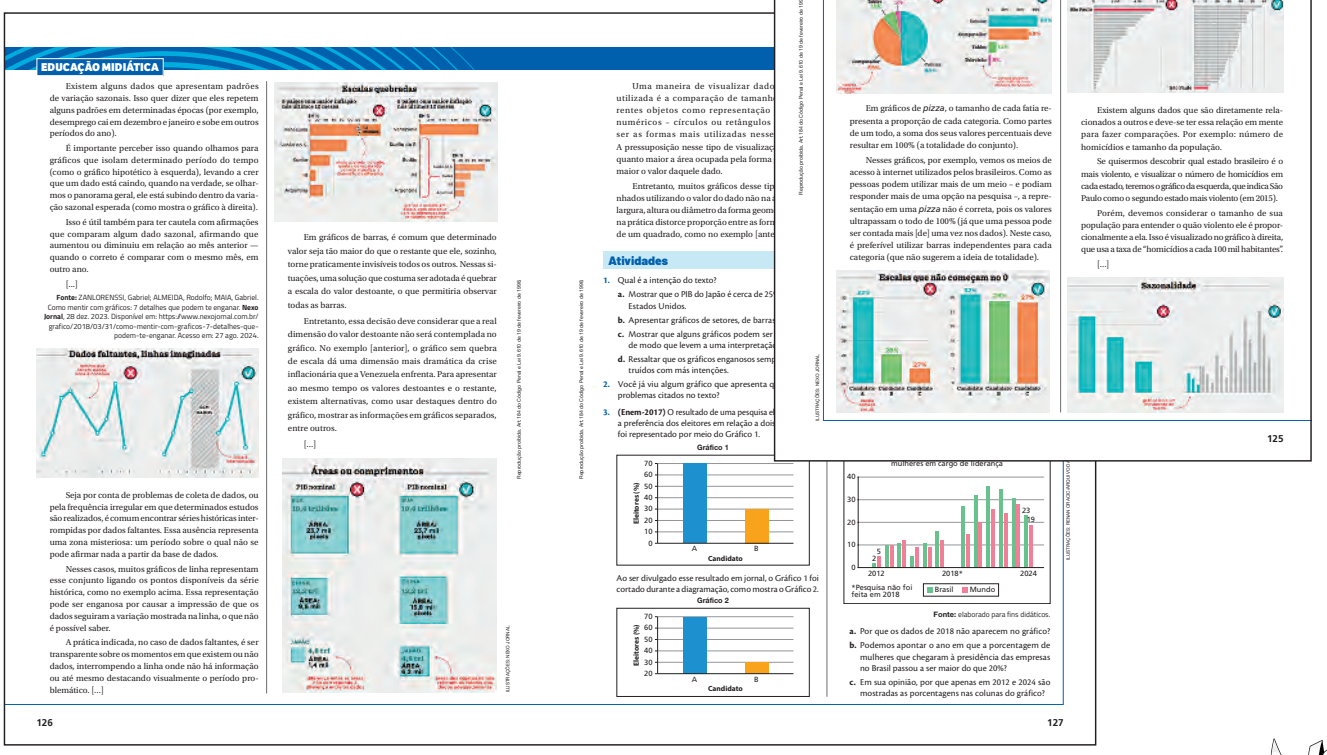
Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.			X	X						X
Estender o conceito de ciclo trigonométrico a $\mathbb{R}$.	X	X	X	X		X	X	X	X	
Resolver equações trigonométricas.					X	X				
Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.							X	X	X	

Educação midiática

Nesta seção, você vai explorar temas importantes para navegar no mundo digital de forma crítica e consciente.



EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

ODS 16

Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar

Escalas enganosas, declarações imprecisas e contas que não fecham: existem diversas maneiras de levar a interpretações erradas por meio de gráficos. Conheça algumas.

A visualização de dados pode ser uma ferramenta útil para apresentar um conjunto de dados, e traduzir visualmente informações numéricas. Mas ela também pode ser usada de maneira enganosa (mesmo que bem-intencionada). Veja abaixo alguns detalhes frequentes em gráficos enganosos e como notá-los:

Em gráficos de *pizza*, o tamanho de cada fatia representa a proporção de cada categoria. Como partes de um todo, a soma dos seus valores percentuais deve resultar em 100% (a totalidade do conjunto).

Nesses gráficos, por exemplo, vemos os meios de acesso à internet utilizados pelos brasileiros. Como as pessoas podem utilizar mais de um meio – e podiam responder mais de uma opção na pesquisa –, a representação em uma *pizza* não é correta, pois os valores ultrapassam o todo de 100% (já que uma pessoa pode ser contada mais [de] uma vez nos dados). Neste caso, é preferível utilizar barras independentes para cada categoria (que não sugerem a ideia de totalidade).

Em uma pesquisa de intenção de votos de uma eleição hipotética, o candidato A tem 32% das intenções de voto, enquanto o candidato B tem 28% e o candidato C tem 27%. A diferença entre os valores é pequena.

No entanto, se esses valores forem mostrados em um gráfico de barras cuja escala não começa no 0, essa diferença é dramatizada, dando uma impressão de que é muito maior do que realmente é. No geral, é importante se manter atento para os valores de uma escala.

[...]

Existem alguns dados que são diretamente relacionados a outros e deve-se ter essa relação em mente para fazer comparações. Por exemplo: número de homicídios e tamanho da população.

Se quisermos descobrir qual estado brasileiro é o mais violento, e visualizar o número de homicídios em cada estado, teremos o gráfico da esquerda, que indica São Paulo como o segundo estado mais violento (em 2015).

Porém, devemos considerar o tamanho de sua população para entender o quão violento ele é proporcionalmente a ela. Isso é visualizado no gráfico à direita, que usa a taxa de "homicídios a cada 100 mil habitantes".

[...]

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Existem alguns dados que apresentam padrões de variação sazonais. Isso quer dizer que eles repetem alguns padrões em determinadas épocas (por exemplo, desemprego cai em dezembro e janeiro e sobe em outros períodos do ano).

É importante perceber isso quando olhamos para gráficos que isolam determinado período do tempo (como o gráfico hipotético à esquerda), levando a crer que um dado está caindo, quando na verdade, se olharmos o panorama geral, ele está subindo dentro da variação sazonal esperada (como mostra o gráfico à direita).

Isso é útil também para ter cautela com afirmações que comparam algum dado sazonal, afirmando que aumentou ou diminuiu em relação ao mês anterior — quando o correto é comparar com o mesmo mês, em outro ano.

[...]

Fonte: ZANLORENSSI, Gabriel; ALMEIDA, Rodolfo; MAIA, Gabriel. Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar. **Nexo Jornal**, 28 dez. 2023. Disponível em: https://www.nexojornal.com.br/grafico/2018/03/31/como-mentir-com-graficos-7-detalhes-que-podem-te-enganar. Acesso em: 27 ago. 2024.

Seja por conta de problemas de coleta de dados, ou pela frequência irregular em que determinados estudos são realizados, é comum encontrar séries históricas interrompidas por dados faltantes. Essa ausência representa uma zona misteriosa: um período sobre o qual não se pode afirmar nada a partir da base de dados.

Nesses casos, muitos gráficos de linha representam esse conjunto ligando os pontos disponíveis da série histórica, como no exemplo acima. Essa representação pode ser enganosa por causar a impressão de que os dados seguiram a variação mostrada na linha, o que não é possível saber.

A prática indicada, no caso de dados faltantes, é ser transparente sobre os momentos em que existem ou não dados, interrompendo a linha onde não há informação ou até mesmo destacando visualmente o período problemático. [...]

Em gráficos de barras, é comum que determinado valor seja tão maior do que o restante que ele, sozinho, torne praticamente invisíveis todos os outros. Nessas situações, uma solução que costuma ser adotada é quebrar a escala do valor destoante, o que permitiria observar todas as barras.

Entretanto, essa decisão deve considerar que a real dimensão do valor destoante não será contemplada no gráfico. No exemplo [anterior], o gráfico sem quebra de escala dá uma dimensão mais dramática da crise inflacionária que a Venezuela enfrenta. Para apresentar ao mesmo tempo os valores destoantes e o restante, existem alternativas, como usar destaques dentro do gráfico, mostrar as informações em gráficos separados, entre outros.

[...]

Uma maneira de visualizar dado
utilizada é a comparação de tamanh
rentes objetos como representação
numéricos - círculos ou retângulos
ser as formas mais utilizadas nesse
A pressuposição nesse tipo de visualiza
quanto maior a área ocupada pela forma
maior o valor daquele dado.

Entretanto, muitos gráficos desse tip
nhados utilizando o valor do dado não na
largura, altura ou diâmetro da forma geom
na prática distorce proporção entre as for
de um quadrado, como no exemplo [ante

Atividades

1. Qual é a intenção do texto?
   a. Mostrar que o PIB do Japão é cerca de 25
   Estados Unidos.
   b. Apresentar gráficos de setores, de barra
   c. Mostrar que alguns gráficos podem ser
   de modo que levem a uma interpretaçã
   d. Ressaltar que os gráficos enganosos sem
   truídos com más intenções.
2. Você já viu algum gráfico que apresenta q
   problemas citados no texto?
3. **(Enem-2017)** O resultado de uma pesquisa el
   a preferência dos eleitores em relação a doi
   foi representado por meio do Gráfico 1.

Gráfico 1

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2

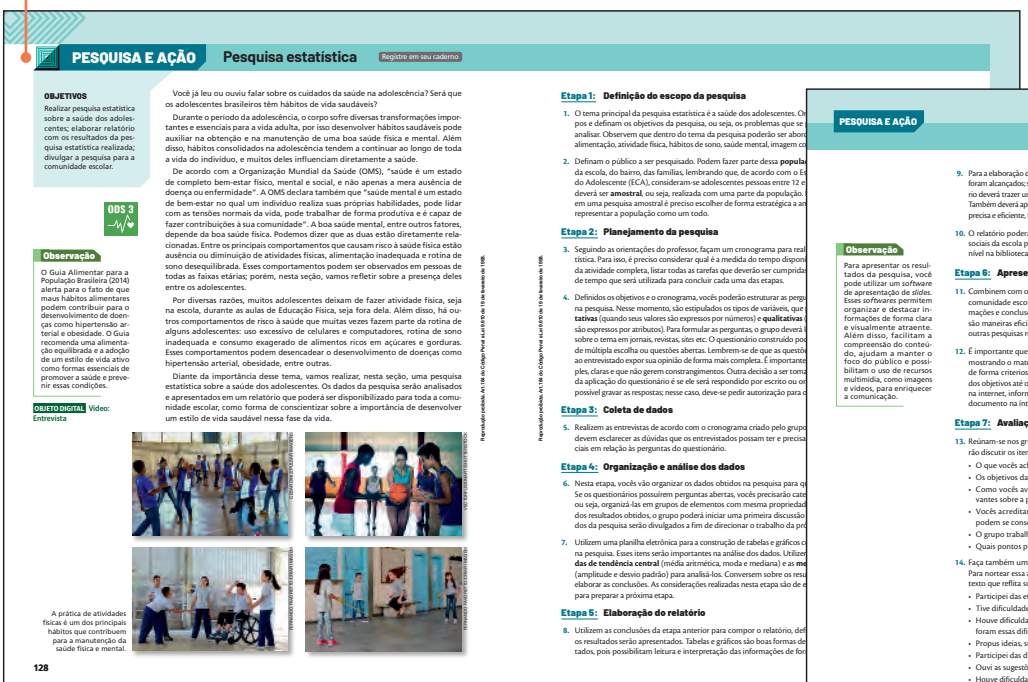
Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Por que os dados de 2018 não aparecem no gráfico?
b. Podemos apontar o ano em que a porcentagem de mulheres que chegaram à presidência das empresas no Brasil passou a ser maior do que 20%?
c. Em sua opinião, por que apenas em 2012 e 2024 são mostradas as porcentagens nas colunas do gráfico?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Pesquisa e ação

Nesta seção, você vai se reunir com os colegas para elaborar um projeto e apresentar um produto em diferentes meios, usando linguagens diversas, como vídeos, jornais e outros recursos.



PESQUISA E AÇÃO

Pesquisa estatística

Registre em seu caderno

OBJETIVOS

Realizar pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes; elaborar relatório com os resultados da pesquisa estatística realizada; divulgar a pesquisa para a comunidade escolar.

ODS 3

Observação

O Guia Alimentar para a População Brasileira (2014) alerta para o fato de que maus hábitos alimentares podem contribuir para o desenvolvimento de doenças como hipertensão arterial e obesidade. O Guia recomenda uma alimentação equilibrada e a adoção de um estilo de vida ativo como formas essenciais de promover a saúde e prevenir essas condições.

OBJETO DIGITAL Vídeo: Entrevista

Você já leu ou ouviu falar sobre os cuidados da saúde na adolescência? Será que os adolescentes brasileiros têm hábitos de vida saudáveis?

Durante o período da adolescência, o corpo sofre diversas transformações importantes e essenciais para a vida adulta, por isso desenvolver hábitos saudáveis pode auxiliar na obtenção e na manutenção de uma boa saúde física e mental. Além disso, hábitos consolidados na adolescência tendem a continuar ao longo de toda a vida do indivíduo, e muitos deles influenciam diretamente a saúde.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), "saúde é um estado de completo bem-estar físico, mental e social, e não apenas a mera ausência de doença ou enfermidade". A OMS declara também que "saúde mental é um estado de bem-estar no qual um indivíduo realiza suas próprias habilidades, pode lidar com as tensões normais da vida, pode trabalhar de forma produtiva e é capaz de fazer contribuições à sua comunidade". A boa saúde mental, entre outros fatores, depende da boa saúde física. Podemos dizer que as duas estão diretamente relacionadas. Entre os principais comportamentos que causam risco à saúde física estão ausência ou diminuição de atividades físicas, alimentação inadequada e rotina de sono desequilibrada. Esses comportamentos podem ser observados em pessoas de todas as faixas etárias; porém, nesta seção, vamos refletir sobre a presença deles entre os adolescentes.

Por diversas razões, muitos adolescentes deixam de fazer atividade física, seja na escola, durante as aulas de Educação Física, seja fora dela. Além disso, há outros comportamentos de risco à saúde que muitas vezes fazem parte da rotina de alguns adolescentes: uso excessivo de celulares e computadores, rotina de sono inadequada e consumo exagerado de alimentos ricos em açúcares e gorduras. Esses comportamentos podem desencadear o desenvolvimento de doenças como hipertensão arterial, obesidade, entre outras.

Diante da importância desse tema, vamos realizar, nesta seção, uma pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes. Os dados da pesquisa serão analisados e apresentados em um relatório que poderá ser disponibilizado para toda a comunidade escolar, como forma de conscientizar sobre a importância de desenvolver um estilo de vida saudável nessa fase da vida.

A prática de atividades físicas é um dos principais hábitos que contribuem para a manutenção da saúde física e mental.

Etapa 1: Definição do escopo da pesquisa

1. O tema principal da pesquisa estatística é a saúde dos adolescentes. Os[illegible] pos e definam os objetivos da pesquisa, ou seja, os problemas que se [illegible] analisar. Observem que dentro do tema da pesquisa poderão ser abor[illegible] alimentação, atividade física, hábitos de sono, saúde mental, imagem co[illegible]

2. Definam o público a ser pesquisado. Podem fazer parte dessa **popula[illegible]** da escola, do bairro, das famílias, lembrando que, de acordo com o E[illegible] do Adolescente (ECA), consideram-se adolescentes pessoas entre 12 e[illegible] deverá ser **amostral**, ou seja, realizada com uma parte da população. [illegible] em uma pesquisa amostral é preciso escolher de forma estratégica a ar[illegible] representar a população como um todo.

Etapa 2: Planejamento da pesquisa

3. Seguindo as orientações do professor, façam um cronograma para real[illegible] tística. Para isso, é preciso considerar qual é a medida do tempo disponí[illegible] da atividade completa, listar todas as tarefas que deverão ser cumpridas [illegible] de tempo que será utilizada para concluir cada uma das etapas.

4. Definidos os objetivos e o cronograma, vocês poderão estruturar as pergu[illegible] na pesquisa. Nesse momento, são estipulados os tipos de variáveis, que [illegible] **tativas** (quando seus valores são expressos por números) e **qualitativas** [illegible] são expressos por atributos). Para formular as perguntas, o grupo deverá l[illegible] sobre o tema em jornais, revistas, sites etc. O questionário construído po[illegible] de múltipla escolha ou questões abertas. Lembrem-se de que as questõ[illegible] ao entrevistado expor sua opinião de forma mais completa. É importante[illegible] ples, claras e que não gerem constrangimentos. Outra decisão a ser toma[illegible] da aplicação do questionário é se ele será respondido por escrito ou or[illegible] possível gravar as respostas; nesse caso, deve-se pedir autorização para o[illegible]

Etapa 3: Coleta de dados

5. Realizem as entrevistas de acordo com o cronograma criado pelo grupo[illegible] devem esclarecer as dúvidas que os entrevistados possam ter e precisa[illegible] cias em relação às perguntas do questionário.

Etapa 4: Organização e análise dos dados

6. Nesta etapa, vocês vão organizar os dados obtidos na pesquisa para q[illegible] Se os questionários possuírem perguntas abertas, vocês precisarão cate[illegible] ou seja, organizá-las em grupos de elementos com mesma propriedad[illegible] dos resultados obtidos, o grupo poderá iniciar uma primeira discussão [illegible] dos da pesquisa serão divulgados a fim de direcionar o trabalho da pr[illegible]

7. Utilizem uma planilha eletrônica para a construção de tabelas e gráficos c[illegible] na pesquisa. Esses itens serão importantes na análise dos dados. Utilizem **das de tendência central** (média aritmética, moda e mediana) e as **me**[illegible] (amplitude e desvio padrão) para analisá-los. Conversem sobre os resu[illegible] elaborar as conclusões. As considerações realizadas nesta etapa são de e[illegible] para preparar a próxima etapa.

Etapa 5: Elaboração do relatório

8. Utilizem as conclusões da etapa anterior para compor o relatório, def[illegible] os resultados serão apresentados. Tabelas e gráficos são boas formas de[illegible] tados, pois possibilitam leitura e interpretação das informações de for[illegible]

128

PESQUISA E AÇÃO

Observação

Para apresentar os resultados da pesquisa, você pode utilizar um *software* de apresentação de slides. Esses *softwares* permitem organizar e destacar informações de forma clara e visualmente atraente. Além disso, facilitam a compreensão do conteúdo, ajudam a manter o foco do público e possibilitam o uso de recursos multimídia, como imagens e vídeos, para enriquecer a comunicação.

9. Para a elaboração do relatório é importante verificar, inicialmente, se os objetivos definidos foram alcançados; se não foram, é preciso avaliar o que pode ter inviabilizado isso. O relatório deverá trazer um breve histórico do problema, além de relatar cada etapa do processo. Também deverá apresentar gráficos e tabelas para fornecer informações ao leitor, de maneira precisa e eficiente, bem como comentários e discussões acerca dos problemas levantados.

10. O relatório poderá ser impresso ou digital. Se for digital, pode-se publicá-lo nas redes sociais da escola para que todos possam acessá-lo; se for impresso, poderá ficar disponível na biblioteca da escola.

Etapa 6: Apresentação

11. Combinem com o professor o dia e o local para apresentar os resultados da pesquisa à comunidade escolar. Nesse dia, vocês poderão mostrar ao público as principais informações e conclusões do relatório. Tabelas e gráficos enriquecem a apresentação, pois são maneiras eficientes de comunicar os resultados. É interessante, também, mostrar outras pesquisas referentes a essa temática, a fim de comparar e discutir os resultados.

12. É importante que todos os integrantes do grupo participem da apresentação não só mostrando o material, mas fazendo intervenções em momentos adequados. Relatem, de forma criteriosa, como foi elaborada cada etapa da pesquisa, desde a delimitação dos objetivos até o preparo da apresentação. Caso o relatório tenha sido disponibilizado na internet, informem as redes sociais da escola para que os interessados possam ler o documento na íntegra.

Etapa 7: Avaliação e síntese do trabalho realizado

13. Reúnam-se nos grupos para avaliar o trabalho realizado. Nesse momento, vocês poderão discutir os itens a seguir e outros que julgarem pertinentes.
- O que vocês acharam da pesquisa estatística realizada?
- Os objetivos da pesquisa ficaram claros?
- Como vocês avaliam o relatório? Foram apresentadas todas as informações relevantes sobre a pesquisa?
- Vocês acreditam que, ao ler o relatório, os leitores, em especial os adolescentes, podem se conscientizar sobre o tema?
- O grupo trabalhou de forma colaborativa?
- Quais pontos poderiam ser melhorados?

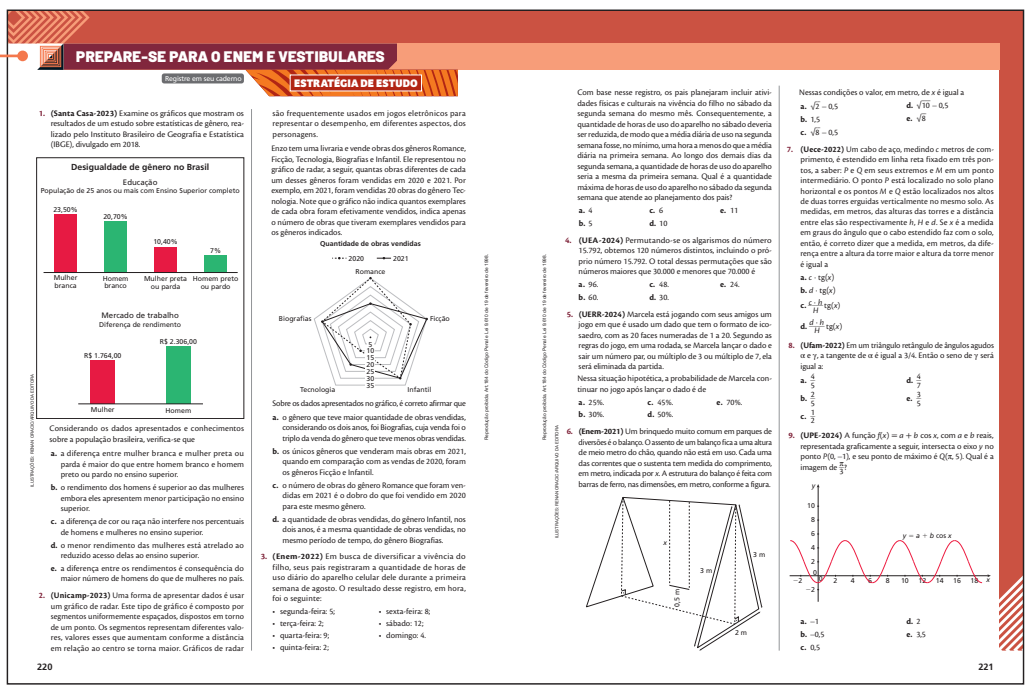
14. Faça também uma avaliação sobre sua participação nas diversas etapas da pesquisa. Para nortear essa autoavaliação, responda às questões a seguir e, ao final, produza um texto que reflita sua participação no trabalho.
- Participei das etapas de realização da pesquisa estatística?
- Tive dificuldade em trabalhar de forma colaborativa?
- Houve dificuldades durante a organização e a análise dos dados da pesquisa? Quais foram essas dificuldades?
- Propus ideias, sugestões e mudanças durante o processo?
- Participei das discussões, da pesquisa e da elaboração do relatório?
- Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
- Houve dificuldades durante o trabalho? Quais foram as dificuldades? Como busquei resolvê-las?
- Compreendi a importância das pesquisas estatísticas e como elas podem auxiliar na análise e na solução de problemas?
- O que aprendi durante a realização das etapas desta seção?

130

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Prepare-se para o Enem e vestibulares

Nesta seção, você resolverá questões que o prepararão para prestar o Enem e vestibulares.



PREPARE-SE PARA O ENEM E VESTIBULARES

Registre em seu caderno

ESTRATÉGIA DE ESTUDO

1. **(Santa Casa-2023)** Examine os gráficos que mostram os resultados de um estudo sobre estatísticas de gênero, realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), divulgado em 2018.

Considerando os dados apresentados e conhecimentos sobre a população brasileira, verifica-se que

a. a diferença entre mulher branca e mulher preta ou parda é maior do que entre homem branco e homem preto ou pardo no ensino superior.

b. o rendimento dos homens é superior ao das mulheres embora eles apresentem menor participação no ensino superior.

c. a diferença de cor ou raça não interfere nos percentuais de homens e mulheres no ensino superior.

d. o menor rendimento das mulheres está atrelado ao reduzido acesso delas ao ensino superior.

e. a diferença entre os rendimentos é consequência do maior número de homens do que de mulheres no país.

2. **(Unicamp-2023)** Uma forma de apresentar dados é usar um gráfico de radar. Este tipo de gráfico é composto por segmentos uniformemente espaçados, dispostos em torno de um ponto. Os segmentos representam diferentes valores, valores esses que aumentam conforme a distância em relação ao centro se torna maior. Gráficos de radar são frequentemente usados em jogos eletrônicos para representar o desempenho, em diferentes aspectos, dos personagens.

Enzo tem uma livraria e vende obras dos gêneros Romance, Ficção, Tecnologia, Biografias e Infantil. Ele representou no gráfico de radar, a seguir, quantas obras diferentes de cada um desses gêneros foram vendidas em 2020 e 2021. Por exemplo, em 2021, foram vendidas 20 obras do gênero Tecnologia. Note que o gráfico não indica quantos exemplares de cada obra foram efetivamente vendidos, indica apenas o número de obras que tiveram exemplares vendidos para os gêneros indicados.

Sobre os dados apresentados no gráfico, é correto afirmar que

a. o gênero que teve maior quantidade de obras vendidas, considerando os dois anos, foi Biografias, cuja venda foi o triplo da venda do gênero que teve menos obras vendidas.

b. os únicos gêneros que venderam mais obras em 2021, quando em comparação com as vendas de 2020, foram os gêneros Ficção e Infantil.

c. o número de obras do gênero Romance que foram vendidas em 2021 é o dobro do que foi vendido em 2020 para este mesmo gênero.

d. a quantidade de obras vendidas, do gênero Infantil, nos dois anos, é a mesma quantidade de obras vendidas, no mesmo período de tempo, do gênero Biografias.

3. **(Enem-2022)** Em busca de diversificar a vivência do filho, seus pais registraram a quantidade de horas de uso diário do aparelho celular dele durante a primeira semana de agosto. O resultado desse registro, em hora, foi o seguinte:
- segunda-feira: 5;
- terça-feira: 2;
- quarta-feira: 9;
- quinta-feira: 2;
- sexta-feira: 8;
- sábado: 12;
- domingo: 4.

Com base nesse registro, os pais planejaram incluir atividades físicas e culturais na vivência do filho no sábado da segunda semana do mesmo mês. Consequentemente, a quantidade de horas de uso do aparelho no sábado deveria ser reduzida, de modo que a média diária de uso na segunda semana fosse, no mínimo, uma hora a menos do que a média diária na primeira semana. Ao longo dos demais dias da segunda semana, a quantidade de horas de uso do aparelho seria a mesma da primeira semana. Qual é a quantidade máxima de horas de uso do aparelho no sábado da segunda semana que atende ao planejamento dos pais?

a. 4 **c.** 6 **e.** 11
b. 5 **d.** 10

4. **(UEA-2024)** Permutando-se os algarismos do número 15.792, obtemos 120 números distintos, incluindo o próprio número 15.792. O total dessas permutações que são números maiores que 30.000 e menores que 70.000 é

a. 96. **c.** 48. **e.** 24.
b. 60. **d.** 30.

5. **(UERR-2024)** Marcela está jogando com seus amigos um jogo em que é usado um dado que tem o formato de icosaedro, com as 20 faces numeradas de 1 a 20. Segundo as regras do jogo, em uma rodada, se Marcela lançar o dado e sair um número par, ou múltiplo de 3 ou múltiplo de 7, ela será eliminada da partida.
Nessa situação hipotética, a probabilidade de Marcela continuar no jogo após lançar o dado é de

a. 25%. **c.** 45%. **e.** 70%.
b. 30%. **d.** 50%.

6. **(Enem-2021)** Um brinquedo muito comum em parques de diversões é o balanço. O assento de um balanço fica a uma altura de meio metro do chão, quando não está em uso. Cada uma das correntes que o sustenta tem medida do comprimento, em metro, indicada por x. A estrutura do balanço é feita com barras de ferro, nas dimensões, em metro, conforme a figura.

Nessas condições o valor, em metro, de x é igual a

a. $\sqrt{2} - 0{,}5$ **d.** $\sqrt{10} - 0{,}5$
b. 1,5 **e.** $\sqrt{8}$
c. $\sqrt{8} - 0{,}5$

7. **(Uece-2022)** Um cabo de aço, medindo c metros de comprimento, é estendido em linha reta fixado em três pontos, a saber: P e Q em seus extremos e M em um ponto intermediário. O ponto P está localizado no solo plano horizontal e os pontos M e Q estão localizados nos altos de duas torres eguidas verticalmente no mesmo solo. As medidas, em metros, das alturas das torres e a distância entre elas são respectivamente h, H e d. Se x é a medida em graus do ângulo que o cabo estendido faz com o solo, então, é correto dizer que a medida, em metros, da diferença entre a altura da torre maior e altura da torre menor é igual a

a. $c \cdot \operatorname{tg}(x)$
b. $d \cdot \operatorname{tg}(x)$
c. $\frac{c-h}{H}\operatorname{tg}(x)$
d. $\frac{d-h}{H}\operatorname{tg}(x)$

8. **(Ufam-2022)** Em um triângulo retângulo de ângulos agudos α e γ, a tangente de α é igual a 3/4. Então o seno de γ será igual a:

a. $\frac{4}{5}$ **d.** $\frac{4}{7}$
b. $\frac{2}{5}$ **e.** $\frac{3}{5}$
c. $\frac{1}{2}$

9. **(UPE-2024)** A função $f(x) = a + b \cos x$, com a e b reais, representada graficamente a seguir, intersecta o eixo y no ponto $P(0, -1)$, e seu ponto de máximo é $Q(\pi, 5)$. Qual é a imagem de $\frac{\pi}{3}$?

a. −1 **d.** 2
b. −0,5 **e.** 3,5
c. 0,5

220 221

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

OBJETO DIGITAL Título do Objeto Digital

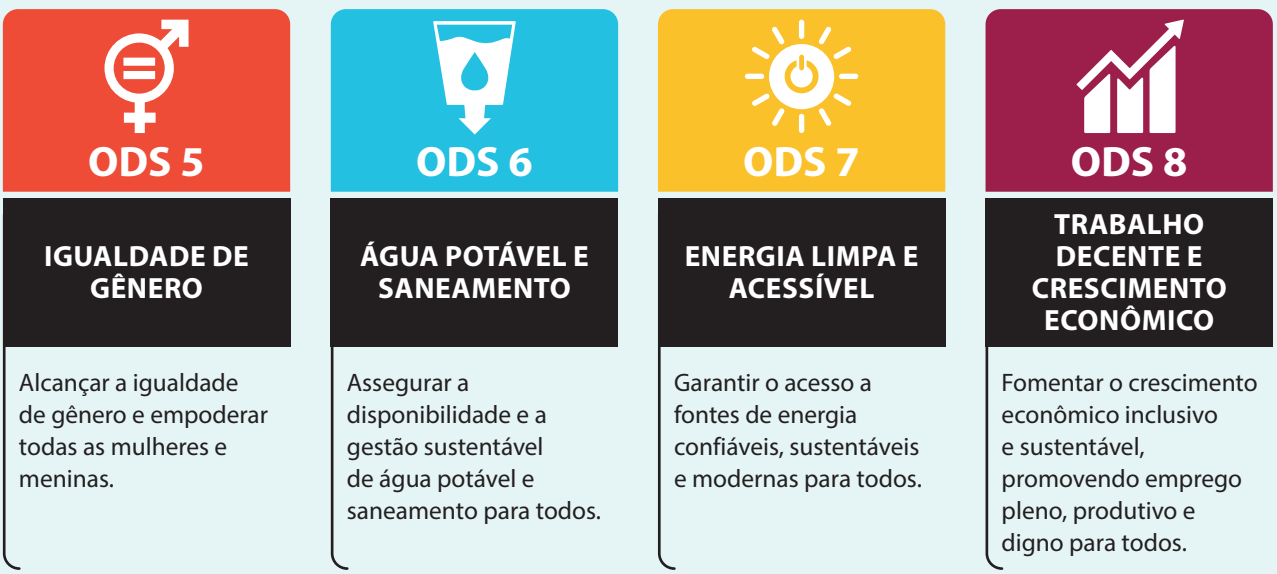
Identifica os Objetos Educacionais Digitais.

OBJETIVOS DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Vamos conhecer os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável**?

Em 2015, na sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova York, nos Estados Unidos, foi assinada a **Agenda 2030**, que estabeleceu 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) que visam orientar metas globais a serem alcançadas até 2030, com a finalidade de enfrentar os desafios ambientais, políticos e econômicos do presente e assegurar dignidade a todas as pessoas.

Os 193 Estados-membros da ONU, incluindo o Brasil, comprometeram-se a implementar esse plano de ação global em colaboração com governos, empresas, instituições e sociedade civil. O monitoramento e a avaliação dessas ações exigem cooperação e engajamento de todos os setores da sociedade.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

ODS 9

INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA

Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e incentivar a inovação.

ODS 10

REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES

Reduzir as desigualdades no interior dos países e entre países.

ODS 11

CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS

Tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis.

ODS 12

CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS

Garantir padrões de consumo e de produção sustentáveis.

ODS 13

AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA

Adotar medidas urgentes para combater as alterações climáticas e os seus impactos.

ODS 14

VIDA NA ÁGUA

Conservar e usar de forma responsável os oceanos, os mares e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.

ODS 15

VIDA TERRESTRE

Proteger e restaurar ecossistemas terrestres, gerenciar florestas, combater a desertificação, reverter a degradação do solo e preservar a biodiversidade.

ODS 16

PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES

Fomentar sociedades pacíficas e inclusivas, garantir o acesso à justiça e construir instituições eficazes e responsáveis em todos os níveis.

ODS 17

PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO

Reforçar os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.

Fonte: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil**. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 22 set. 2024.

Neste livro, indicaremos os ODS sempre que houver propostas, temas ou conceitos que possam ser conectados a eles.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

SUMÁRIO

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1 12

Capítulo 1 **Organização e apresentação de dados** 13

Coleta de dados 14

Alguns conceitos estatísticos 14

O censo demográfico e a coleta de dados por amostragem 16

Organização e apresentação de dados 18

A necessidade da organização de dados 18

Organizando e apresentando dados em tabelas 21

Organizando e apresentando dados em gráficos 25

TRABALHO E JUVENTUDES – Pais não podem tirar licença-paternidade em 67 nações 34

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 1 35

Capítulo 2 **Análise de dados** 37

Distribuição e frequências 38

Frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas 38

Tabela de frequências para dados agrupados em intervalos 41

Histograma e diagrama de ramo e folhas 44

Outras representações gráficas 48

TRABALHO E JUVENTUDES – Analista de dados 57

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 2 59

Capítulo 3 **Medidas estatísticas** 61

Medidas de tendência central 62

Média aritmética 62

Moda 64

Mediana 64

Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos 67

Medidas de dispersão 70

Amplitude 71

Desvio médio 71

Variância e desvio padrão 72

Medidas de dispersão para dados agrupados em intervalos 76

Box-plot 77

Diagrama de dispersão 82

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 3 87

Capítulo 4 **Análise combinatória** 89

Contagem 90

Situações envolvendo problemas de contagem 90

Princípio multiplicativo 92

Fatorial de um número natural 95

Permutações 97

Permutações simples 97

Permutação com elementos repetidos 98

Arranjo simples 100

Combinação simples 102

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 4 105

Capítulo 5 **Probabilidade** 107

Experimento aleatório, espaço amostral e evento 108

Evento simples, evento certo e evento impossível 109

Probabilidade 110

Eventos complementares 113

Probabilidade da intersecção de dois eventos 113

Probabilidade da união de dois eventos 114

Probabilidade condicional 117

Eventos independentes 118

Frequência relativa e probabilidade 120

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 5 123

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar 125

PESQUISA E AÇÃO – Pesquisa estatística 128

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2 131

Capítulo 6 **A semelhança e os triângulos** 132

Proporcionalidade entre segmentos 133

Feixe de retas paralelas e retas transversais 133

Teorema fundamental da proporcionalidade 135

Teorema de Tales 136

Semelhança 138

Semelhança de polígonos 138

Semelhança de triângulos 141

Casos de semelhança de triângulos 142

Relações métricas no triângulo retângulo 145

Explorando o teorema de Pitágoras 146

Demonstrando o teorema de Pitágoras 147

A semelhança e o teorema de Pitágoras: outras relações métricas no triângulo retângulo 148

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 6 151

Capítulo 7 **Trigonometria no triângulo retângulo** 153

Razões trigonométricas 154

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando razões em triângulos retângulos usando o computador ... 154
Seno, cosseno e tangente de um ângulo ... 155
Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos ... 157
Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis ... 159
Uso da calculadora e da tabela trigonométrica ... 162
Tabela de razões trigonométricas ... 163
TRABALHO E JUVENTUDES – Inclusão no mercado de trabalho: lei de cotas para pessoas com deficiência completa 29 anos ... 166
PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 7 ... 167

Capítulo 8 **Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer** ... 169
Arcos de uma circunferência ... 170
Medida de comprimento de um arco ... 170
Medida angular de um arco ... 170
Relação entre grau e radiano ... 172
Ciclo trigonométrico ... 173
Simetria no ciclo trigonométrico ... 174
Seno, cosseno e tangente ... 176
Seno e cosseno de um arco ... 176
Tangente de um arco ... 179
Relação fundamental da Trigonometria ... 181
Trigonometria em um triângulo qualquer ... 183
Lei dos senos ... 183
Lei dos cossenos ... 185
PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 8 ... 187

Capítulo 9 **Funções trigonométricas** ... 189
Funções periódicas ... 189
Definição de função periódica ... 190
Ciclo trigonométrico ... 191
A função de Euler ... 192
Arcos côngruos ... 193
A função seno ... 194
Características da função seno ... 196
A função cosseno ... 198
Características da função cosseno ... 200
A função tangente ... 201
Características da função tangente ... 203
Equações trigonométricas ... 204
Resolução de equações trigonométricas no intervalo $[0, 2\pi]$ ... 204
Resolução de equações trigonométricas no conjunto universo $U = \mathbb{R}$ ... 205
Construção de gráficos ... 207
Transladando o gráfico ... 207
Alterando a amplitude ... 209
Alterando o período ... 212
TRABALHO E JUVENTUDES – Eletricista ... 213
PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 9 ... 214

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – Inteligência Artificial na Educação ... 216
PESQUISA E AÇÃO – Maquete ... 217
PREPARE-SE PARA O ENEM E VESTIBULARES ... 220
RESPOSTAS ... 222
LISTA DE SIGLAS ... 231
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS ... 232

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUMÁRIO DOS OBJETOS EDUCACIONAIS DIGITAIS

Infográfico clicável: Conquistas de direitos da população LGBTQIA+ ... 13
Infográfico clicável: Economia de água ... 42
Mapa clicável: Densidade demográfica ... 51
Infográfico clicável: Transição energética ... 55
Infográfico clicável: Pessoas idosas no Brasil ... 61
Mapa clicável: Povos indígenas e famílias linguísticas ... 67
Carrossel de imagens: Situações que envolvem possibilidades ... 90
Vídeo: Placa de automóvel ... 93
***Podcast*:** Uma conversa sobre probabilidade ... 110
Vídeo: Entrevista ... 128
***Podcast*:** Quilombo: uma forma de resistência ... 138
Carrossel de imagens: Câmara escura ... 144
Carrossel de imagens: Aplicações da Trigonometria ... 153
Vídeo: Razão seno ... 155
***Podcast*:** Inclusão no mercado de trabalho ... 166
***Podcast*:** As ondas de rádio na comunicação humana ... 190
Vídeo: A roda-gigante e a função do tipo trigonométrica ... 194

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

1. Em janeiro de 2026, Mara realizou uma pesquisa com estudantes dos 1os anos A e B para saber se estavam satisfeitos com os serviços prestados pela prefeitura do município em que vivem. Os dados coletados foram registrados assim:

1º ano A

Satisfeitos: ☒ ☒ ☒ ⧄ Insatisfeitos: ☒ ☒ ☐

1º ano B

Satisfeitos: ☒ ☒ ⌊ Insatisfeitos: ☒ ☒ ☒ ☒

Os dados da pesquisa foram organizados em uma tabela. A tabela de qual alternativa é a mais adequada? **1.** Alternativa **e.**

a.

Satisfação dos estudantes do 1º ano A com os serviços prestados pela prefeitura em janeiro de 2026

Satisfeitos	23
Insatisfeitos	16

Fonte: elaborado para fins didáticos.

b.

Satisfação dos estudantes dos 1os anos A e B com os serviços prestados pela prefeitura em janeiro de 2026

Turma \ Satisfação	Satisfeitos	Insatisfeitos
1º ano A	14	16
1º ano B	23	24

Fonte: elaborado para fins didáticos.

c.

Satisfação dos estudantes dos 1os anos A e B com os serviços prestados pela prefeitura em janeiro de 2026

Turma \ Satisfação	Satisfeitos	Insatisfeitos
1º ano A	23	24
1º ano B	14	16

Fonte: elaborado para fins didáticos.

d.

Turma \ Satisfação	Satisfeitos	Insatisfeitos
1º ano A	23	16
1º ano B	14	24

e.

Satisfação dos estudantes dos 1os anos A e B com os serviços prestados pela prefeitura em janeiro de 2026

Turma \ Satisfação	Satisfeitos	Insatisfeitos
1º ano A	23	16
1º ano B	14	24

Fonte: elaborado para fins didáticos.

2. Que tipo de gráfico é mais adequado para representar a medida da área desmatada de uma região ao longo do tempo? **2.** Alternativa **d.**

a. Gráfico de barras verticais.
b. Gráfico de barras horizontais.
c. Gráfico de setores.
d. Gráfico de linhas.
e. Pictograma.

3. Que tipo de gráfico é mais adequado para representar a distribuição percentual da população brasileira por cor ou raça? **3.** Alternativa **c.**

a. Gráfico de barras verticais.
b. Gráfico de barras horizontais.
c. Gráfico de setores.
d. Gráfico de linhas.
e. Pictograma.

4. Analise as medidas de massa dos jogadores do time de basquete de Carlos, obtidas após o último jogo da equipe.

66,5 kg	68 kg	100 kg	67,4 kg	68,6 kg

Que medida de tendência central melhor representa esse conjunto de dados? **4.** Alternativa **b.**

a. Média aritmética.
b. Mediana.
c. Moda.
d. Média aritmética ponderada.
e. Amplitude.

5. Uma pessoa tem 3 chapéus e 4 coletes. Quantas combinações possíveis ela pode fazer com os chapéus e os coletes? **5.** Alternativa **a.**

a. 12
b. 7
c. 3
d. 4
e. 81

6. Qual é a probabilidade de obter duas "caras" ao lançar duas moedas honestas simultaneamente? **6.** Alternativa **a.**

a. 25%
b. $\frac{1}{2}$
c. 0,75
d. 4
e. 1

7. Uma urna tem 6 bolas azuis e 5 bolas verdes. Se uma bola verde foi sorteada sem reposição, qual é a probabilidade da próxima bola sorteada ser verde? **7.** Alternativa **c.**

a. $\frac{1}{11}$
b. $\frac{5}{11}$
c. 0,4
d. 0,6
e. $\frac{6}{11}$

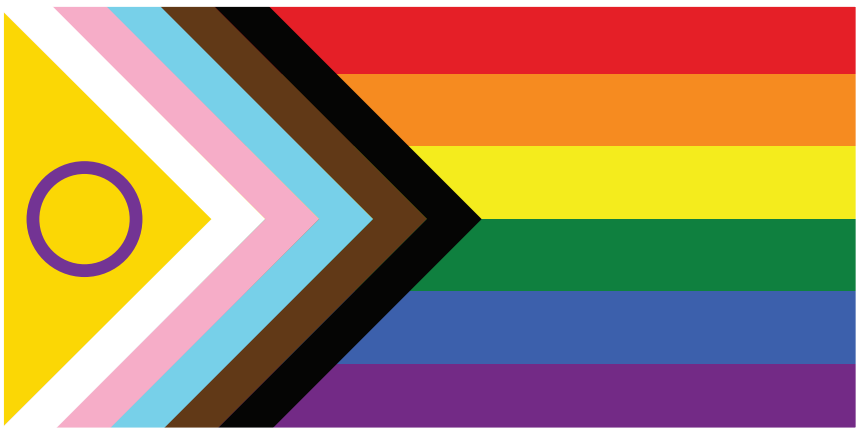
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Capítulo 1

ORGANIZAÇÃO E APRESENTAÇÃO DE DADOS

ODS 10

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.



MAXIM STUDIO/SHUTTERSTOCK

Bandeira símbolo do orgulho LGBTQIA+.

OBJETO DIGITAL

Infográfico clicável: Conquistas de direitos da população LGBTQIA+

O infográfico enriquece o texto de abertura do capítulo ao apresentar aos estudantes parte da história e da luta do movimento LGBTQIA+, promovendo o desenvolvimento da **competência geral 9** e dialogando com o **TCT Educação em Direitos Humanos**.

Leia o texto a seguir, que traz dados sobre a violência contra a população LGBTI+ no Brasil em 2021.

Violência contra a população LGBTI+ no Brasil

A população brasileira LGBTI+ tem sido vitimada por diferentes formas de mortes violentas desde a colonização do país, mesmo antes das denominações atuais de sexualidade e gênero. [...]

Entre 2000 e 2021, 5.362 (cinco mil e trezentas e sessenta e duas) pessoas morreram em função do preconceito e da intolerância de parte da população e devido ao descaso das autoridades responsáveis pela efetivação de políticas públicas capazes de conter os casos de violência. Em 2021, registramos um total de 316 mortes de pessoas LGBTI.

[...]

[Em 2021] Dentre os seis segmentos analisados [gay; lésbica; bissexual; travesti e mulher transexual; homem trans e pessoa transmasculina; e outras pessoas vitimadas pela LGBTIfobia], dois grupos foram os mais violentados, reunindo um pouco mais de 90% dos casos: a população de homens gays, representando 45,89% do total (145 mortes); e as travestis e mulheres trans, com 44,62% dos casos (141 mortes). Foram encontrados ainda casos contra mulheres lésbicas, com 3,80% das mortes (12 casos); os homens trans e pessoas transmasculinas corresponderam a 2,53% dos casos (oito mortes); as pessoas bissexuais equivaleram a menos de um por cento (três mortes); e as pessoas identificadas como outros segmentos também corresponderam a menos de um por cento dos casos (três mortes). Houve, ainda, quatro pessoas cujo segmento (orientação sexual e/ou identidade de gênero) não foi identificado, representando 1,27% do total.

[...]

Fonte: OBSERVATÓRIO DE MORTES E VIOLÊNCIAS LGBTI+ NO BRASIL. **Mortes e violências contra LGBTI+ no Brasil**: dossiê 2021. Florianópolis: Acontece Arte e Política LGBTI+; ANTRA (Associação Nacional de Travestis e Transexuais); ABGLT (Associação Brasileira de Lésbicas, Gays, Bissexuais, Travestis, Transexuais e Intersexos), 2022. Disponível em: https://observatoriomorteseviolenciaslgbtibrasil.org/wp-content/uploads/2022/05/Dossie-de-Mortes-e-Violencias-Contra-LGBTI-no-Brasil-2021-ACONTECE-ANTRA-ABGLT-1.pdf. Acesso em: 15 ago. 2024.

Os dados presentes no texto anterior não apenas revelam a extensão do problema da violência contra a população LGBTI+ no Brasil, como também podem contribuir para a formulação de políticas públicas e programas de prevenção. A análise desses dados possibilita, por exemplo, identificar os grupos que estão necessitando de mais apoio e proteção. Além disso, esses dados podem ajudar a sensibilizar a sociedade e as autoridades sobre a urgência de abordar essa questão e promover uma cultura de respeito e inclusão.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Em que outras situações os dados estatísticos são importantes?

Questão. Resposta pessoal. Incentive os estudantes a compartilhar suas opiniões.

Considere agora outra situação.

Rosa foi contratada recentemente como coordenadora pedagógica de uma escola. Para analisar e aprimorar o desempenho das turmas, ela quer conhecer o perfil dos estudantes do Ensino Médio com os quais trabalhará. Ela sabe que, no total, são 500 estudantes matriculados. Como Rosa poderá traçar esse perfil?

Frequentemente, lidamos com situações que exigem estudo para que possam ser mais bem compreendidas ou para que possamos planejar as decisões. E, para estabelecer conclusões adequadas, realizar previsões confiáveis ou tomar decisões acertadas, é preciso que os dados coletados se transformem em informações significativas.

A Estatística, cujo objetivo principal é auxiliar na tomada de decisões em situações de incerteza, é uma metodologia científica para obtenção, organização e análise de dados originados nas mais diversas áreas do conhecimento e em fatos cotidianos.

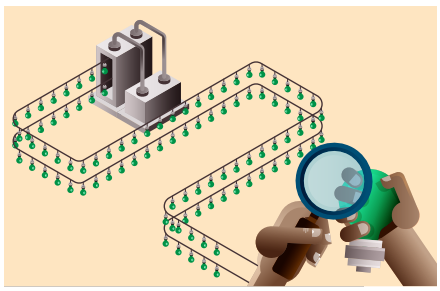
Os resultados de uma investigação estatística podem provocar transformações importantes, como a mudança de conceitos ou procedimentos de *marketing*, a reformulação ou mesmo a retirada de produtos do mercado, assim como levar à criação de novas estratégias de ação industrial e mercadológica.

Em uma pesquisa de aceitação de um produto por um grupo de pessoas, por exemplo, os resultados podem fornecer informações para ampliar a venda desse produto. Já no caso de Rosa, a pesquisa sobre o perfil dos estudantes pode auxiliar na adaptação do planejamento escolar aos interesses e às necessidades dos estudantes em questão.

Neste capítulo, aplicando conceitos matemáticos e estatísticos, vamos estudar algumas formas de obter, organizar e apresentar dados de maneira a facilitar a análise de uma situação.

Coleta de dados

Alguns conceitos estatísticos



CÁSSIO BITTENCOURT/ARQUIVO DA EDITORA

Representação esquemática do teste de uma amostra de lâmpadas em uma empresa.

Uma empresa fabricante de uma conhecida marca de luminárias faz um controle de qualidade dos produtos antes de colocá-los no mercado. Por exemplo, no caso de lâmpadas, entre as diversas características avaliadas estão: durabilidade, intensidade luminosa, eficiência energética e resistência a diferentes medidas de temperatura. Em geral, para cada tipo de lâmpada, a empresa testa uma **amostra**, isto é, uma parte das lâmpadas fabricadas, uma vez que testar todas elas levaria muito tempo e seria bastante caro. Os dados colhidos, devidamente analisados, possibilitam fazer previsões para a totalidade da produção.

Para a análise de um conjunto de dados de naturezas diversas, após a definição do problema a ser estudado, o primeiro passo é a coleta de dados, na qual são utilizados conceitos estatísticos. A aplicação desses conceitos costuma ser muito útil na tomada de decisão em várias situações.

População

População é o conjunto de todos os elementos ou resultados sob investigação em uma pesquisa.

No estudo sobre uma população, o interesse do pesquisador é direcionado à verificação de um aspecto que seja comum a todos os "indivíduos", ou seja, a cada um dos dados pertencentes à população. Esse aspecto, chamado de **variável**, é a característica ou a propriedade a ser estudada na população.

Amostra

Amostra é um subconjunto finito formado por elementos da população.

Para obter resultados confiáveis, é necessário que a amostra seja:

- representativa, isto é, tenha as características essenciais da população;
- imparcial, ou seja, que cada elemento da população tenha a mesma chance de ser escolhido para compor a amostra.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Quando a amostra é representativa e imparcial, os resultados obtidos com a observação dos elementos de uma amostra são considerados válidos para toda a população.

Algumas situações exigem que seja consultada toda a população sob investigação. Esse tipo de pesquisa é chamado de **recenseamento** ou pesquisa censitária. Entretanto, o recenseamento nem sempre é viável, pois, embora seus resultados sejam de alta confiabilidade, a pesquisa de uma população grande, além de demorada e custosa, pode se desatualizar rapidamente.

A necessidade de recorrer a uma amostra muitas vezes ocorre em função de o processo de teste de dados ser destrutivo. Por exemplo, para testar o bom funcionamento de um lote de buzinas de automóvel, podemos acionar cada uma delas, sem que isso afete seu desempenho futuro. Porém, se acionarmos todos os extintores de incêndio de um lote cuja carga queremos testar, não sobrarão extintores carregados para serem utilizados ou comercializados.

Variável

Variável é uma característica (atributo) estudada em todos os elementos de uma população ou de uma amostra.

As variáveis podem ser classificadas em qualitativas ou quantitativas.

- **Variável qualitativa**: seus valores são expressos por atributos não numéricos (qualidade do elemento pesquisado). Por exemplo: cor dos olhos, grau de escolaridade, time de futebol preferido e classe social.

  Uma variável qualitativa pode ser **ordinal** ou **nominal**.

  Variável qualitativa ordinal: quando seus valores podem ser ordenados. Por exemplo: grau de escolaridade, classe social e classificação do grau de dificuldade das questões de uma prova em fácil, médio ou difícil.

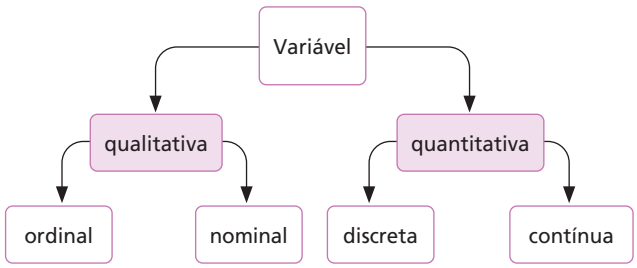
  Variável qualitativa nominal: quando seus valores não podem ser ordenados. Por exemplo: cor dos olhos, gênero e time de futebol preferido.

- **Variável quantitativa**: seus valores são expressos por números. Por exemplo: medida de altura, medida de massa, idade e número de irmãos.

  Uma variável quantitativa pode ser **discreta** ou **contínua**.

  Variável quantitativa discreta: quando é proveniente de contagem, ou seja, é expressa por um número inteiro. Por exemplo: número de irmãos, quantidade de computadores e número de animais.

  Variável quantitativa contínua: quando é proveniente de medida, ou seja, é expressa por um número real (inteiro ou não). Por exemplo: medida de massa, idade, medida de altura, medida de temperatura e medida de volume.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade resolvida

R1. A coordenadora Rosa, da situação apresentada no início deste capítulo, elaborou um questionário para conhecer o perfil dos estudantes do Ensino Médio com os quais trabalhará. O questionário apresentado a seguir tem como objetivo pesquisar as variáveis que considera mais relevantes nesse caso. A coordenadora decidiu fazer sua pesquisa com uma amostra de 50 estudantes, escolhidos aleatoriamente entre os 500 estudantes da escola. Determinar a população, a amostra e as variáveis dessa pesquisa, classificando-as.

Questionário – perfil dos estudantes

1. Ano/Turma:
2. Sexo:
3. Quantos anos você tem?
4. Quantos irmãos você tem?
5. Você tem celular?
6. Você tem computador em casa?
7. De que tipo de música você gosta?
8. Que medida de tempo, em média, você costuma usar redes sociais por dia?

▶ Resolução

A população é constituída por todos os 500 estudantes da escola, e a amostra é formada pelos 50 estudantes escolhidos aleatoriamente.

No questionário, o item "ano/turma" é uma característica pesquisada e representa uma variável que qualifica o entrevistado segundo uma ordem; logo, é uma variável qualitativa ordinal. Outras variáveis, como "posse de celular", "posse de computador", "sexo" e "preferência musical", apenas nomeiam, não podendo ser ordenadas: são variáveis qualitativas nominais.

Há variáveis que podem ser quantificadas, isto é, representadas por números. No caso "número de irmãos", indicado por um número inteiro, é uma variável quantitativa discreta. Já a "idade" e a "medida de tempo média de uso de redes sociais" são medidas continuamente por um número real e por isso são variáveis quantitativas contínuas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

O censo demográfico e a coleta de dados por amostragem

ODS 9

A cada 10 anos aproximadamente, o IBGE realiza o censo demográfico no Brasil. Agentes credenciados procuram visitar todas as residências para coletar dados sobre os habitantes. Continuamente, o IBGE também realiza a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua), cujo objetivo é visitar determinado número de domicílios para coletar dados sobre a força de trabalho e sobre temas relevantes para a compreensão da realidade brasileira. A PNAD Contínua divulga informações conjunturais (mensais e trimestrais) e estruturais (anuais e em períodos variáveis).

Observação

A partir do 2º trimestre de 2020, devido à pandemia de covid-19, o IBGE mudou a metodologia de coleta da PNAD Contínua, substituindo as entrevistas presenciais por telefônicas para garantir a segurança. Essa mudança, que durou até o 2º trimestre de 2021, reduziu a taxa de aproveitamento da amostra, complicando a mensuração de alguns indicadores.

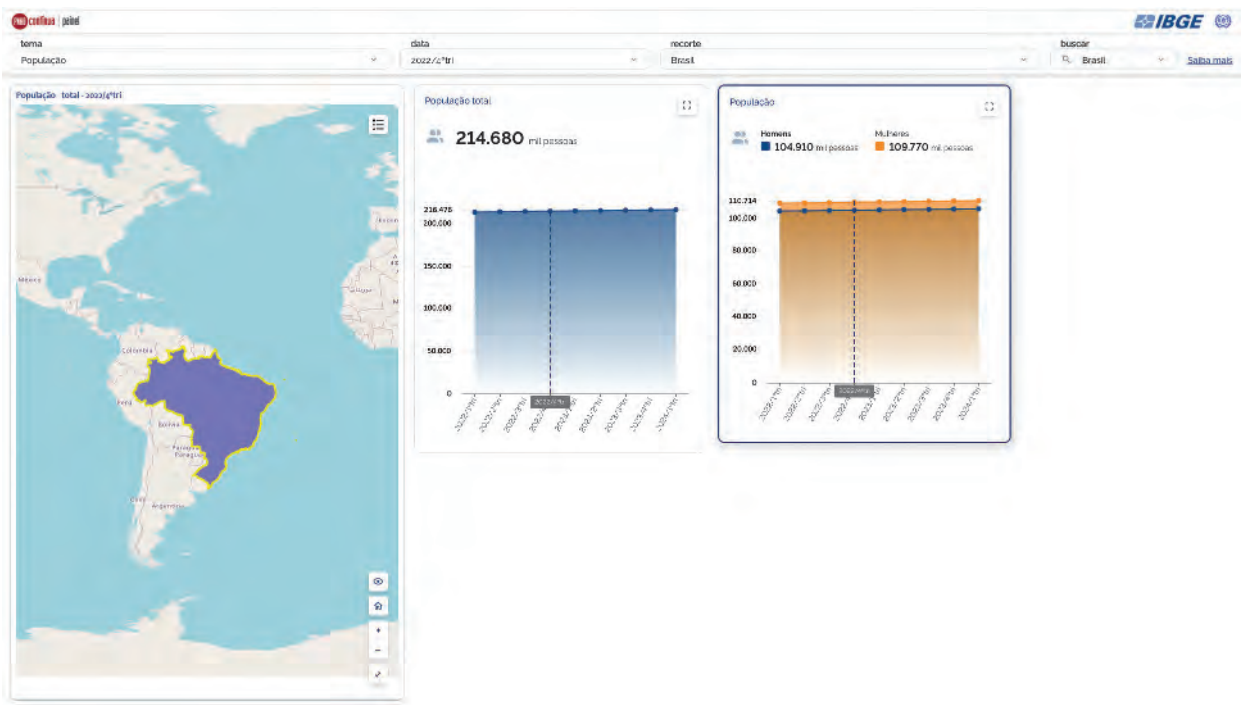
PNAD Contínua

A PNAD Contínua, implementada em 2012, substituiu a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), de periodicidade anual, que era realizada desde 1967. Seu principal objetivo é produzir informações contínuas sobre a inserção da população no mercado de trabalho e de características como idade, sexo e nível de instrução, bem como permitir o estudo do desenvolvimento socioeconômico do país por meio da produção de dados anuais sobre outras formas de trabalho, trabalho infantil, migração, entre outros temas. Os resultados podem ajudar na formulação de políticas públicas ou mostrar tendências econômicas, culturais e sociais.

A PNAD Contínua é realizada por meio de uma amostra de domicílios, de forma a garantir a representatividade dos resultados para os níveis geográficos em que é produzida. A pesquisa foi planejada para ter periodicidade de coleta trimestral, ou seja, a amostra total de domicílios é coletada em um período de 3 meses. A amostra é planejada de tal forma que haja rotação dos domicílios selecionados no esquema 1-2(5). Nesse esquema, o domicílio é entrevistado 1 mês e sai da amostra por 2 meses seguidos, sendo essa sequência repetida 5 vezes.

A imagem a seguir apresenta a estimativa feita pela PNAD Contínua, em setembro de 2022, para a população do Brasil no 4º trimestre de 2022.

REPRODUÇÃO/IBGE



Fonte: IBGE. **PNAD Contínua – painel**. Disponível em: https://painel.ibge.gov.br/pnadc/. Acesso em: 15 ago. 2024.

Em sua opinião, por que o número estimado para a população brasileira na PNAD Contínua do 4º trimestre de 2022 não é o mesmo obtido pelo Censo (203.080.756) realizado neste mesmo ano?

Questão. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes cheguem à conclusão de que os dados informados pela PNAD Contínua apresentam estimativas da população brasileira, pois as entrevistas não são realizadas no Brasil todo, diferentemente do que é feito pelo Censo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Censo

O censo é realizado pelo IBGE desde 1940; e o último deveria ter ocorrido em 2020, mas foi adiado por conta da pandemia de covid-19 e aconteceu em 2022.

Uma operação como a do censo movimenta milhares de pessoas. Leia as informações a seguir a respeito das etapas que foram realizadas, e as que ainda estão em andamento, para o Censo 2022.

Discussão interna: reuniões realizadas com especialistas do IBGE, que consideram as áreas temáticas investigadas no Censo, com o objetivo de determinar a abrangência temática da primeira versão do questionário.

Consulta pública: consultas realizadas à sociedade com a finalidade de orientar a elaboração do Censo para que ele retrate as demandas necessárias. Entre março e maio de 2018, o IBGE disponibilizou em seu portal uma consulta aberta a toda população, em que as pessoas podiam responder a perguntas, comentar e fazer sugestões.

Consulta a usuários: em novembro de 2018, o IBGE realizou uma reunião com os principais usuários dos dados do Censo visando que este fosse capaz de fornecer informações necessárias para o desenvolvimento da sociedade.

Consulta à comissão consultiva: para definições a respeito dos questionários e metodologias, o IBGE consultou especialistas da sociedade civil que prestam assessorias.

Testes do Censo 2022: foram realizados diversos testes com o objetivo de garantir que os questionários, os aplicativos e os sistemas funcionassem de maneira correta.

Atualização da base territorial: realização da atualização da cartografia dos territórios brasileiros para ser usada como referência.

Pesquisa urbanística do entorno dos domicílios: obtenção de informações a respeito de características da vizinha de cada tipo de domicílio.

Coleta do Censo demográfico 2022: iniciou-se no dia 1º de agosto de 2022 e foi concluída em 28 de fevereiro de 2023, sendo realizada também pela internet e por telefone. Ao todo, foram 183.021 recenseadores realizando entrevistas nas 27 Unidades federativas do país. A partir disso, os dados começaram a ser apurados.

Divulgação dos resultados: começaram a ser divulgados em 2022 e, na data em que este livro estava sendo elaborado, essa divulgação ainda não tinha sido finalizada. A previsão é que ela terminaria em 2025.

Fonte: elaborado com base em IBGE. **Censo 2022**. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/etapas.html. Acesso em: 16 ago. 2024.

EDNEI MARX/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades propostas

1. Uma empresa de confecções planeja abrir uma filial em um município com 125.000 habitantes. Para fazer uma pesquisa sobre a viabilidade do projeto, contratou uma agência de publicidade. A agência informou que consultará 800 pessoas da região.

a. Qual é o tamanho da população da pesquisa?

b. Qual é o tamanho da amostra?

c. Cite quatro possíveis variáveis que podem ser objetos dessa pesquisa.

1 a. 125.000

1 b. 800

1 c. Resposta pessoal.

2. Classifique as variáveis listadas a seguir em qualitativa (ordinal ou nominal) ou quantitativa (discreta ou contínua).

a. Número de respostas certas em uma prova.

b. Procedência dos estudantes de uma universidade.

c. Opinião das pessoas sobre o serviço público (ruim, regular, bom).

d. Níveis de poluição do ar no município (ruim, regular, bom).

e. Temperatura medida durante uma reação química.

f. Raça dos cachorros de um canil.

g. Classe social de uma população (baixa, média, alta).

2 a. Quantitativa discreta.

2 b. Qualitativa nominal.

2 c. Qualitativa ordinal.

2 d. Qualitativa ordinal.

2 e. Quantitativa contínua.

2 f. Qualitativa nominal.

2 g. Qualitativa ordinal.

3. **EM GRUPO** **ARGUMENTAÇÃO** Pesquise dados sobre a violência contra a população LGBTQIA+ no Brasil e compartilhe com os colegas. Depois, responda: Em sua opinião, como podemos criar ambientes mais seguros e inclusivos para pessoas LGBTQIA+ no Brasil? Converse com os colegas.

3. Resposta pessoal.

4. **EM GRUPO** Reúna-se em grupo de três estudantes e pensem em seis questões que considerem importantes para figurar no questionário da coordenadora Rosa, apresentado na **atividade resolvida R1**. Em seguida, comparem as questões feitas com as dos colegas. Existem questões parecidas? E diferentes? Quais questões vocês acham que são mais interessantes para o caso da coordenadora pedagógica? Justifiquem.

4. Respostas pessoais.

5. **ARGUMENTAÇÃO** Se quisermos pesquisar a eficiência de uma marca de palito de fósforo, convém testar uma amostra ou a população toda? Por quê?

SHUTTERB/SHUTTERSTOCK

5. Convém testar uma amostra, porque o teste destrói o palito de fósforo.

6. **EM DUPLA** Que variáveis você consideraria para escolher entre diversos modelos de *smartphone*? Cite pelo menos duas variáveis quantitativas e duas qualitativas. Compare sua resposta com a de um colega.

6. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar, por exemplo, memória e medida de tempo de duração da bateria como variáveis quantitativas; sistema operacional e marca como variáveis qualitativas.

7. Espera-se que os estudantes compreendam que o fato de a escolha ter sido aleatória significa que ela foi feita ao acaso, como em um sorteio cujo resultado é incerto.

7. Na situação da **atividade resolvida R1**, a coordenadora Rosa decidiu fazer uma pesquisa com uma amostra de 50 estudantes, escolhidos **aleatoriamente** entre os 500 estudantes da escola. Explique o que significa dizer que a escolha dos estudantes da amostra tenha sido feita aleatoriamente. Se necessário, procure no dicionário o significado do termo "aleatório".

8. Em relação à PNAD Contínua e ao Censo, realizados pelo IBGE, responda às questões a seguir.

a. Indique três variáveis pesquisadas no censo demográfico brasileiro.

b. Pesquise como o resultado da PNAD Contínua pode ajudar na formulação de políticas públicas de modo a promover ações que contribuam na melhoria da qualidade de vida dos brasileiros.

9. Para verificar a abrangência, entre pessoas idosas, de uma campanha de vacinação contra a gripe realizada no ano passado, em determinado município, pretende-se entrevistar um grupo de pessoas idosas ali residentes.

a. Escreva algumas características que você considera importantes de serem levadas em conta para que esse grupo possa ser usado como uma amostra representativa, ou seja, para que os resultados obtidos na pesquisa com esse grupo possam ser considerados válidos para toda a população de pessoas idosas do município.

b. Se a prefeitura desse município precisa saber exatamente o número de pessoas idosas que tomaram a vacina no ano passado, independentemente da medida de tempo necessária para realizar a pesquisa, o método escolhido é o ideal? Justifique.

10. Leia o texto a seguir, reproduzido de um *site* de notícias.

9 a. Exemplo de resposta: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.

9 b. Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistadas todas as pessoas idosas.

10 a. Os jovens brasileiros.

10 b. Jovens que participaram das entrevistas da PNAD Contínua.

10 c. Entre 2012 e 2022.

Em 2022, 10,9 milhões de jovens não estudavam, nem trabalhavam

É o menor valor absoluto da série histórica aberta pelo IBGE em 2012

No ano passado [2022], 10,9 milhões de jovens com idade entre 15 e 29 anos, o correspondente a 22,3%, não estudavam, nem trabalhavam. É o menor valor absoluto da série histórica iniciada em 2012 pelo Instituto Brasileiro de Estatística e Geografia (IBGE). O dado consta da Síntese de Indicadores Sociais 2023: uma análise das condições de vida da população brasileira, divulgada nesta quarta-feira (6) pelo instituto.

Anteriormente, o menor valor havia sido apurado em 2014 (11,2 milhões). O total de jovens vem se reduzindo na população brasileira. Em 2012, eram 51,9 milhões, que representavam 33,6% da população em idade de trabalhar. Entre 2012 e 2022, o número de jovens diminuiu 5,9%, somando 48,9 milhões de pessoas, em consonância com o processo de envelhecimento populacional no país.

[...]

Em 2016 e em 2020, os percentuais de jovens que não estudam e não estão ocupados aumentaram e os de jovens ocupados diminuíram em decorrência das crises econômicas e da pandemia de covid-19. Em 2021 e em 2022, com o aumento dos jovens ocupados, o percentual de jovens que não estudam e não trabalham diminuiu.

[...]

Fonte: CAMPOS, Ana Cristina. Em 2022, 10,9 milhões de jovens não estudavam, nem trabalhavam. **Agência Brasil**, 6 dez. 2023. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2023-12/em-2022-109-milhoes-de-jovens-nao-estudavam-nem-trabalhavam. Acesso em: 26 abr. 2024.

A fonte de dados dessa notícia é a Síntese de Indicadores Sociais 2023: uma análise das condições de vida da população brasileira, produzida e divulgada pelo IBGE com base na PNAD Contínua dos anos de 2012 a 2022.

a. Qual é a população em investigação na pesquisa?

b. Qual é a amostra da pesquisa?

c. Qual foi o período de realização da pesquisa no Brasil?

d. **EM DUPLA** **ARGUMENTAÇÃO** Converse com um colega sobre a seguinte questão: Vocês acham que os dados da pesquisa obtidos para o Brasil podem ser generalizados para todos os jovens brasileiros? Por quê?

10 d. Espera-se que os estudantes percebam que, como a amostra foi composta apenas de jovens que participaram das entrevistas da PNAD Contínua, os resultados podem não refletir com exatidão a realidade do Brasil, mas provavelmente apresentam uma boa estimativa.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Organização e apresentação de dados

A necessidade da organização de dados

Você é capaz de ler este texto?

De aorcdo com uma pqsieusa de uma uinrvesriddae ignlsea, não ipomtra em qual odrem as lrteas de uma plravaa etãso, a úncia csioa iprotmatne é que a piremria e a útmlia lrteas etejasm no lgaur crteo. O rseto pdoe ser uma ttaol bçguana que vcoê cnosguee anida ler sem pobrlmea. Itso é poqrue nós não lmeos cdaa ltrea szoinha, mas a plravaa cmoo um tdoo. Lgeal, não é msemo?

Autor desconhecido

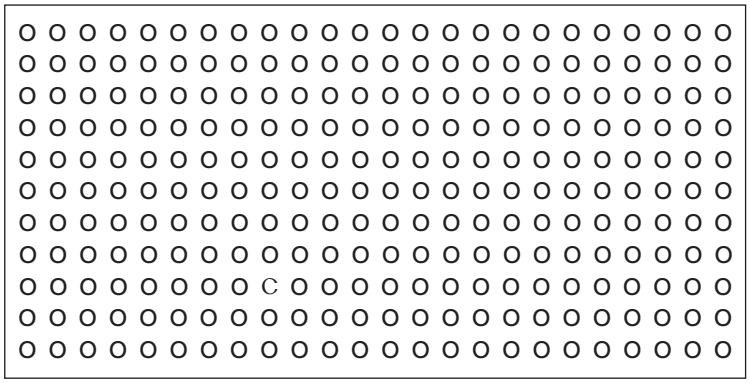
LIGIA DUQYE/ARQUIVO DA EDITORA

8 a. Exemplos de resposta: número de pessoas que residem no domicílio, escolaridade, sexo, ocupação, número de filhos, tipo de domicílio etc.

8 b. Exemplo de resposta: A PNAD Contínua divulga, de forma periódica, informações importantes sobre diversos setores, como: educação, moradia, mobilidade urbana, entre outros, permitindo que sejam adotadas políticas públicas para cada um deles.

A leitura do texto é possível por causa da familiaridade com o todo (a palavra). Nesse caso, a organização das letras, nos parâmetros convencionados para a linguagem, é feita inconscientemente, de modo que conseguimos entender as palavras e, em consequência, ler o texto. Mas isso não acontece com dados numéricos e outras modalidades de informação que nos são menos familiares.

A tendência de ver o todo pode ser útil em casos como o do texto anterior, mas pode criar dificuldade se for para descobrir um elemento diferente em meio a um padrão. Observe.



Em meio ao padrão (O), encontrar uma irregularidade (C) é uma tarefa que exige concentração ou tal irregularidade passa despercebida.

Na primeira situação apresentada, verificamos que a forma de organização e apresentação das letras, embora não impeça a leitura do texto, pode dificultá-la. Na segunda situação, os símbolos poderiam ser dispostos de tal modo que a irregularidade (C) fosse identificada com mais facilidade.

Em situações que trabalham com dados obtidos por meio de uma pesquisa, como dados numéricos, por exemplo, a forma de organizar e apresentar esses dados também pode dificultar ou facilitar a compreensão do resultado da pesquisa realizada.

Considere a situação a seguir.

Uma empresa faz serviço de entrega no município de São Paulo. Seu departamento de recursos humanos está aplicando um teste para selecionar candidatos a uma vaga no departamento de logística. O teste consiste em apresentar um estudo para adequar a frota de veículos da empresa às regras do rodízio vigentes no município de São Paulo. Para isso, os candidatos devem fazer um levantamento das placas de todos os veículos da empresa, exceto das motos, e verificar o final de cada uma para saber quantos não podem trafegar na região e no horário do rodízio em cada dia da semana.

Observação

O sistema de rodízio de veículos, adotado há alguns anos para reduzir o número de automóveis em circulação nos horários de pico no centro expandido de São Paulo, amenizou o problema de trânsito do município.

Este quadro relaciona os dias de circulação proibida nos horários de pico (das 7 h às 10 h e das 17 h às 20 h) de acordo com o final da placa do veículo.

Relação entre os dias de circulação proibida nos horários de pico de acordo com o final da placa

Dia da semana	Final da placa
2ª feira	1 ou 2
3ª feira	3 ou 4
4ª feira	5 ou 6
5ª feira	7 ou 8
6ª feira	9 ou 0

Os candidatos A e B apresentaram as seguintes formas de organização dos finais de placa:

Candidato A

9	1	1	2	8	3	2	0	6	9	2	2
3	2	7	1	1	4	1	5	1	5	7	7
9	0	8	8	8	7	7	3	5	1	7	6
8	2	0	6	7	8	0	4	1	2	4	5
8	5	4	6	1	1	3	4	1	6	9	9
0	2	5	5	2	0	2	5	4	7	5	4
4	5	7	2	3	0	3	8	7	9	3	1
3	3	5	9	4	1	3	1	8	4	7	7
9	9	3	0	0	9	4	1	1	4	6	9
6	2	4	5	8	9	9	6	8	5	0	4

Candidato B

2ª feira:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2				
3ª feira:	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3				
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	
4ª feira:	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5		
	6	6	6	6	6	6	6	6							
5ª feira:	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8				
6ª feira:	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9		
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observando a representação de cada um, podemos destacar:

- o candidato A dispôs os dados na ordem em que eles foram encontrados;
- o candidato B usou uma linha para cada um dos dois finais de placa que não poderiam circular em cada dia da semana.

Já os candidatos C e D organizaram os dados em tabelas. Observe.

Candidato C

Distribuição da frota de acordo com o final da placa

Dia da semana	Final da placa	Quantidade
2ª feira	1	16
2ª feira	2	12
3ª feira	3	11
3ª feira	4	14
4ª feira	5	13
4ª feira	6	8
5ª feira	7	12
5ª feira	8	11
6ª feira	9	13
6ª feira	0	10

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Candidato D

Distribuição da frota de acordo com o final da placa

Dia da semana	Final da placa	Quantidade
2ª feira	1 ou 2	28
3ª feira	3 ou 4	25
4ª feira	5 ou 6	21
5ª feira	7 ou 8	23
6ª feira	9 ou 0	23

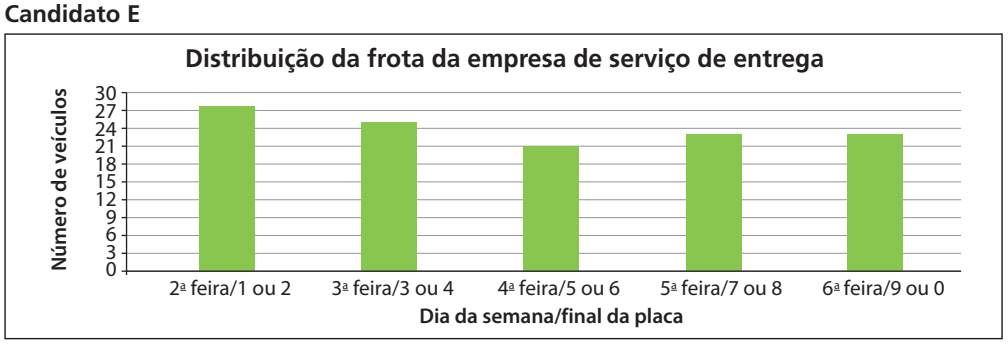
Fonte: elaborado para fins didáticos.

Notamos que:

- o candidato C indicou a quantidade de veículos para cada final de placa e organizou os dados conforme o dia da semana que não podem circular nos horários de pico;
- o candidato D fez um levantamento do total de veículos que não podem circular nos horários de pico de cada dia da semana.

O candidato E apresentou o gráfico a seguir, contendo o número de veículos indisponíveis nos horários de pico de cada dia da semana.

Candidato E



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Algumas das maneiras apresentadas pelos candidatos comunicam melhor as informações que outras, isto é, transformam os dados em informações de leitura mais fácil e mais adequada. Por exemplo, a organização de dados feita pelos candidatos D e E possibilita ao departamento de logística perceber mais facilmente que deve programar menos entregas para as segundas-feiras do que para as quartas-feiras, conseguindo, assim, um uso mais racional da frota da empresa.

Observação

O rodízio de veículos vigente no município de São Paulo também contribui para a diminuição da poluição e do desgaste da infraestrutura das vias públicas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Organizando e apresentando dados em tabelas

As tabelas são de grande utilidade tanto na organização de dados quanto na apresentação de resultados. A representação facilita a verificação de informações e a observação do comportamento de variáveis, o que favorece a averiguação de padrões, regularidades ou tendências.

Às vezes, interessa ao pesquisador verificar se existe alguma relação entre duas variáveis. Por exemplo, em sua pesquisa sobre o perfil dos estudantes, a coordenadora pedagógica Rosa poderia verificar o estilo musical preferido deles de acordo com o sexo. Uma relação como essa fica evidente em uma **tabela de dupla entrada**, como a exemplificada a seguir.

Preferência musical segundo o sexo

Sexo \ Estilo musical	*Funk*	MPB	*Pop*	*Rap*	*Rock*	Samba	Sertanejo	Total
Masculino	4%	5%	7%	11%	10%	6%	3%	46%
Feminino	9%	10%	6%	12%	8%	5%	4%	54%
Total	13%	15%	13%	23%	18%	11%	7%	100%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

A tabela evidencia, por exemplo, que o estilo preferido por ambos os sexos é o *rap* (23%) ou que, entre o sexo feminino, o estilo menos popular é o sertanejo (4%).

Nesse tipo de tabela, uma variável ocupa a linha, e a outra variável ocupa a coluna. A parte central apresenta o percentual de escolhas das duas variáveis; a última linha e a última coluna determinam, respectivamente, o total de cada coluna e de cada linha.

De modo geral, uma tabela estatística deve sempre ter:

- **título**, que indica o tema do qual trata;
- **fonte**, que apresenta a entidade (pessoa física ou jurídica) responsável pelo fornecimento ou pela organização dos dados apresentados ou que indica o local em que as informações se encontram (artigo, *site*, livro etc.). Geralmente, a fonte aparece logo abaixo da tabela.

Observe os exemplos:

a.

Número de medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos de Verão da Juventude ← Título da tabela

Ano \ Tipo de medalha	Ouro	Prata	Bronze	Total
2010	3	3	1	7
2014	6	8	1	15
2018	2	4	9	15

Fonte: elaborado com base em COB. **Time Brasil**: participações. Disponível em: https://www.cob.org.br/time-brasil/participacoes. Acesso em: 18 ago. 2024. ← Fonte da tabela

b.

Países mais populosos do mundo em 2022 ← Título da tabela

Posição	País	Número de habitantes
1º	Índia	1.417.173.173
2º	China	1.412.175.000
3º	Estados Unidos	333.287.557
4º	Indonésia	275.501.339

Fonte: IBGE. **Países**. Disponível em: https://paises.ibge.gov.br/#/. Acesso em: 18 ago. 2024. ← Fonte da tabela

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Distribuição de frequências

Para analisar os dados coletados em uma pesquisa, convém organizá-los, como já ressaltamos. Pode-se, por exemplo, dispor os dados em ordem crescente ou decrescente, no caso de uma variável quantitativa, ou agrupá-los em categorias similares, no caso de uma variável qualitativa.

Retomando as organizações elaboradas pelos candidatos A e B (página 19), verificamos que o candidato A apenas coletou os finais de placas, obtendo um conjunto de dados que precisam ser organizados. Na organização proposta pelo candidato B, é feita uma separação das ocorrências verificadas, de tal modo que elas foram separadas e agrupadas de acordo com os dias da semana. Assim, agrupando as ocorrências de final de placas 1 ou 2, por exemplo, verifica-se que existem 28 ocorrências.

O agrupamento das ocorrências deve ser feito de acordo com o objetivo da pesquisa. A quantidade de vezes que determinada ocorrência aparece em cada grupo é chamada de **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência**.

Há situações em que se deseja comparar a frequência absoluta de um grupo com a soma de todas as frequências absolutas. Para isso, calculamos a razão entre a frequência absoluta de cada grupo e o total de elementos pesquisados, obtendo a **frequência relativa**.

Como a frequência relativa é uma razão entre a parte e o todo, ela é expressa por um número racional entre 0 e 1. Multiplicando esse número por 100%, tem-se a **frequência percentual**.

Vamos retomar a forma de representação do candidato D à vaga de emprego da empresa de serviço de entrega e incluir na tabela as colunas correspondentes a essas frequências, com valores arredondados.

Observação

Em uma distribuição de frequências, como a da tabela, a soma das frequências relativas é sempre igual a 1, e a soma das frequências percentuais é sempre igual a 100%.

Distribuição da frota de acordo com o final da placa

Dia da semana	Final da placa	Frequência absoluta	Frequência relativa	Frequência percentual
2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
Total		120	1,0000	100,00%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Quando temos de calcular a frequência relativa e a frequência percentual com os dados organizados em muitos grupos, os cálculos podem ser trabalhosos, o que pode acarretar erros que atrapalhariam a interpretação dos resultados. Por isso, podemos usar outros recursos que auxiliam nesses cálculos, como planilhas eletrônicas ou calculadoras. Usando uma planilha eletrônica, observe como poderíamos obter a frequência relativa e a frequência percentual para cada linha da tabela do exemplo anterior.

Para montar a tabela, vamos utilizar cinco colunas da planilha: A, B, C, D e E.

- Preenchemos as colunas A, B e C com os dias da semana, os finais das placas e as frequências absolutas, respectivamente.
- As colunas D e E serão utilizadas, respectivamente, para as frequências relativas e as frequências percentuais.

Campo que mostra a célula selecionada. A célula C7 é a célula que está na coluna C e na linha 7.

Campo que mostra a fórmula associada à célula.

Letras que indicam as colunas da planilha.

Números que indicam as linhas da planilha.

C7	*Fórmula*	=SOMA(C2:C6)		
	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28		
3	3ª feira	3 ou 4	25		
4	4ª feira	5 ou 6	21		
5	5ª feira	7 ou 8	23		
6	6ª feira	9 ou 0	23		
7	**Total**		120		

Para calcular a frequência absoluta total, digitamos, na célula correspondente, a fórmula:
=SOMA(C2:C6)
(Adiciona os valores das células C2, C3, C4, C5 e C6.)

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe o procedimento para preencher os dados da coluna D.

D2	*Fórmula*	=C2/$C$7		
	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	
3	3ª feira	3 ou 4	25		
4	4ª feira	5 ou 6	21		
5	5ª feira	7 ou 8	23		
6	6ª feira	9 ou 0	23		
7	**Total**		120		

Na célula D2, digitamos a fórmula:

=C2/$C$7

(Calcula a razão entre os valores das células C2 e C7.)

O $ é utilizado na fórmula para fixar a coluna C e a linha 7. Assim, quando a fórmula da célula D2 for copiada para outras células, a célula C7 ficará fixa na fórmula.

D2	*Fórmula*	=C2/$C$7		
	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	
7	**Total**		120		

Não é necessário repetir a fórmula para cada célula da coluna. Basta selecionar a primeira célula, levar o cursor até a quina da seleção e, com o botão esquerdo do *mouse* clicado, arrastar a seleção até a célula D6.

Esse procedimento copia a fórmula da célula D2 para as células D3 a D6, substituindo C2, respectivamente, por C3, C4, C5 e C6.

Agora, observe como preencher os dados da coluna E.

E2	*Fórmula*	=D2		
	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	
7	**Total**		120		

Inicialmente, digitamos na célula E2 a fórmula:
=D2

(Repete o valor calculado na célula D2.)

Depois, com o botão direito do *mouse*, selecionamos o item de formatação para que a célula mostre o valor em porcentagem (o que é equivalente a multiplicar o valor da célula por 100%).

E2	*Fórmula*	=D2		
	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120		

Selecionamos a célula E2 e arrastamos a seleção até a célula E6. As células de E3 a E6 são preenchidas, então, com os valores correspondentes de D3 a D6 em porcentagem.

Para calcular a frequência relativa total e a frequência percentual total, basta repetirmos o procedimento realizado para calcular a frequência absoluta total.

E7	*Fórmula*	=SOMA(E2:E6)		
	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120	1,0000	100,00%

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

16 b. Espera-se que os estudantes percebam que será necessária a medida da área territorial da Índia, que não é fornecida no livro, mas pode ser encontrada facilmente em atlas ou *sites* confiáveis na internet (um deles é o *site* do IBGE).

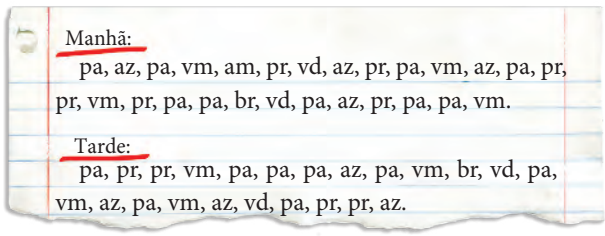
17 b. Espera-se que os estudantes percebam que o critério utilizado não facilita esse tipo de análise. Para essa análise, seria melhor que a tabela estivesse organizada em ordem crescente ou decrescente, de acordo com os valores das vendas em 2024.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

11. Pedro, interessado em saber qual a cor mais comum dos veículos que transitavam na rua de sua casa, permaneceu por meia hora, em dois períodos do dia, manhã e tarde, anotando as cores de cada veículo. As cores – branca (br), prata (pa), amarela (am), vermelha (vm), azul (az), preta (pr) e verde (vd) – foram anotadas à medida que os veículos passavam.

Observe na imagem as anotações de Pedro em cada período.


Manhã:
pa, az, pa, vm, am, pr, vd, az, pr, pa, vm, az, pa, pr, pr, vm, pr, pa, pa, br, vd, pa, az, pr, pa, pa, vm.

Tarde:
pa, pr, pr, vm, pa, pa, pa, az, pa, vm, br, vd, pa, vm, az, pa, vm, az, vd, pa, pr, pr, az.

LIGIA DUQUE/ARQUIVO DA EDITORA

11. Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. Construa, se possível em uma planilha eletrônica, uma tabela de frequências das cores para cada uma das frequências: absoluta, relativa e percentual.

b. Que cor apresentou maior frequência percentual no período da manhã? E à tarde? E no dia? E qual cor apresentou a menor frequência percentual nesses períodos?

12. A tabela a seguir apresenta a relação entre duas variáveis da pesquisa realizada pela coordenadora Rosa.

Posse de computador segundo o sexo

Tem computador / Sexo	Sim	Não	Total
Masculino	18	5	23
Feminino	20	7	27
Total	38	12	50

Fonte: elaborado para fins didáticos.

12 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

a. Reconstrua a tabela substituindo os valores absolutos pelos respectivos valores percentuais em relação ao número de elementos da amostra.

b. Em relação ao total de elementos de cada grupo, quem tem, percentualmente, mais computadores: os meninos ou as meninas? 12 b. Os meninos.

13. Pesquise tabelas de dupla entrada em jornais e revistas, indique e classifique suas variáveis. Depois, analise a relação entre elas. 13. Resposta pessoal.

14. ARGUMENTAÇÃO Em sua opinião, qual dos cinco candidatos à vaga no departamento de logística, mostrados no início do tópico, apresentou os dados de uma maneira menos organizada? Por quê?

15. EM GRUPO Qual é seu estilo musical preferido? Colete dados de todos os colegas de sua turma para essa variável e organize os dados em uma tabela de dupla entrada.

15. Resposta pessoal.

16. A **densidade demográfica** de um local é a razão entre o número de habitantes e a medida da área territorial desse local.

Agora, responda, analisando a tabela "Países mais populosos do mundo em 2022", apresentada anteriormente.

a. Qual era a densidade demográfica da Índia em 2022? Se necessário, faça uma pesquisa para responder a essa pergunta.

b. Você conseguiu responder ao item anterior sem pesquisar? De que dados a respeito da Índia você precisa para calcular sua densidade? Esses dados foram fornecidos no livro? Em caso negativo, onde você pode encontrar essas informações?

17. Na tabela a seguir estão apresentados os dados de uma pesquisa sobre os ramos de atividade e os valores, em bilhão de reais, relacionados às vendas efetuadas pelas principais empresas localizadas em um estado.

Vendas das principais empresas estaduais

Empresa	Ramo de atividade	Vendas de 2023 (em bilhões de reais)	Vendas de 2024 (em bilhões de reais)
Sabor	Alimentos	28,6	25,7
Refrescando	Bebidas	17,5	19,8
Moradias	Construção civil	17,2	16,4
Extrações	Mineração	30,3	34,5
Metálicas	Siderurgia	25,1	20,6
Fale mais	Telefonia	16,7	17,9

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Considerando os dados da tabela, faça o que se pede.

a. Identifique e classifique as variáveis apresentadas na tabela. 17 a. Ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta.

b. ARGUMENTAÇÃO Uma agência de pesquisa organizou a tabela apresentando os dados coletados em ordem alfabética em relação ao ramo de atividade da empresa. Esse critério facilitará a análise dos dados se for necessário verificar quais empresas apresentam os melhores e os piores resultados em relação às vendas de 2024? Justifique. 17 c. A empresa Extrações, com aproximadamente 13,9%.

c. Qual das empresas obteve maior crescimento, em porcentagem, nas vendas de 2023 para 2024?

14. O candidato A, pois apenas apresentou os finais de placas dos veículos da empresa, sem organizar esses dados.

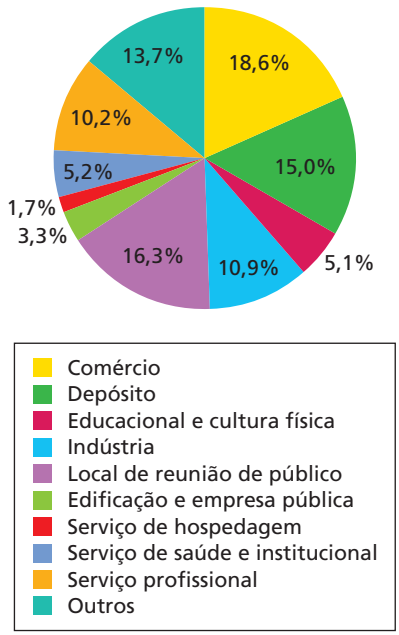
16 a. Aproximadamente 431 hab./km^2.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Organizando e apresentando dados em gráficos

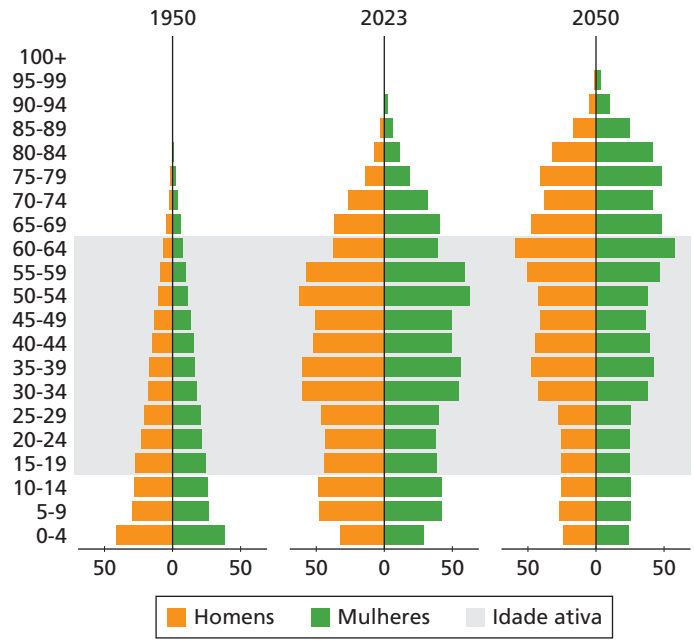
A representação gráfica é outra forma muito comum de apresentação de dados. Ela é frequentemente usada em jornais, em revistas, na internet ou em outros meios de comunicação. Observe, por exemplo, as representações gráficas a seguir.

Notícias de incêndios estruturais por ocupação



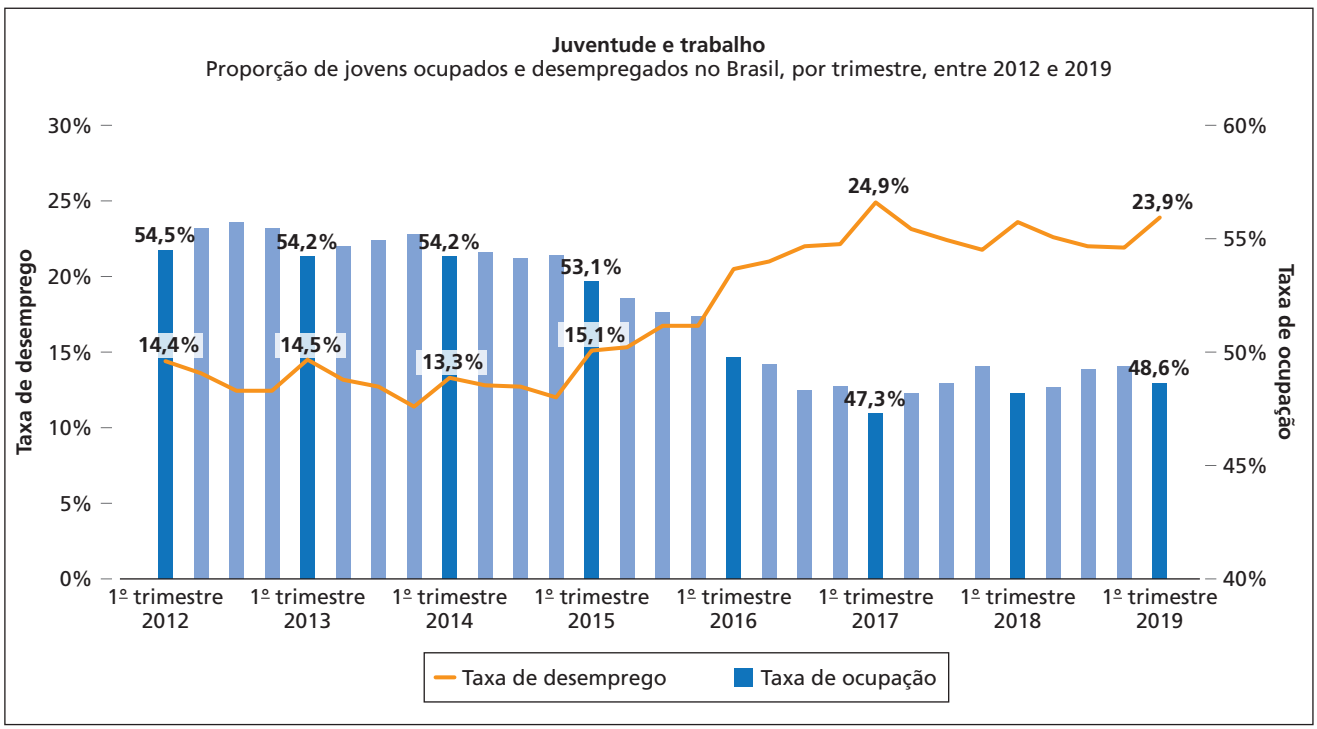
Fonte: elaborado com base em ESTATÍSTICAS 2022. **Instituto Sprinkler Brasil (ISB)**, 2022. Disponível em: https://sprinklerbrasil.org.br/instituto-sprinkler-brasil/estatisticas/estatisticas-2022/. Acesso em: 16 ago. 2024.

Distribuição da população da China por idade e sexo
(em milhões)



Fonte: elaborado com base em SENRA, Ricardo. Por que real tamanho da população da Índia é um mistério. **BBC News Brasil**, 23 abr. 2023. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/articles/cd1zj7km820o. Acesso em: 16 ago. 2023.

Juventude e trabalho
Proporção de jovens ocupados e desempregados no Brasil, por trimestre, entre 2012 e 2019

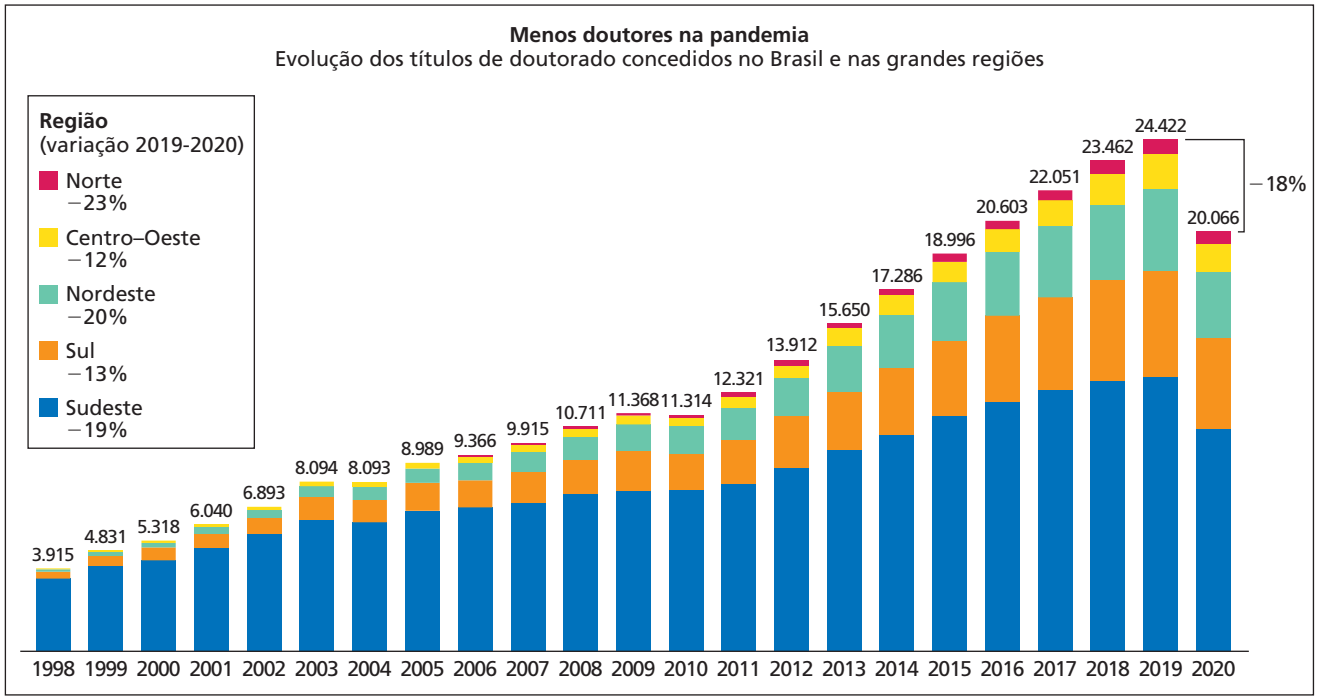


Fonte: elaborado com base em QUEIROZ, Christina. Desafios da juventude no Brasil. **Pesquisa Fapesp**, São Paulo, ed. 316, jun. 2022. Disponível em: https://revistapesquisa.fapesp.br/desafios-da-juventude-no-brasil/. Acesso em: 16 ago. 2024.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORAGIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Fonte: elaborado com base em MARQUES, Fabrício. Crise na geração de recursos humanos. **Pesquisa Fapesp**, São Paulo, ed. 315, maio 2022. Disponível em: https://revistapesquisa.fapesp.br/crise-na-geracao-de-recursos-humanos/. Acesso em: 16 ago. 2024.

Quando empregados corretamente, os gráficos podem evidenciar, em uma forma visual eficiente e atraente, os dados e as informações que precisam transmitir.

A escolha do tipo de gráfico mais adequado para representar um conjunto de dados depende de vários fatores, como a natureza e o comportamento da variável ou dos objetivos de quem o apresenta.

Assim como as tabelas, um gráfico deve sempre ter **título** e **fonte**.

A seguir, vamos estudar alguns tipos de gráfico e a conveniência do uso de cada um.

Gráfico de barras (verticais ou horizontais)

Talvez pela facilidade de construção ou pela simplicidade para a observação das relações apresentadas, os gráficos de barras são representações muito usuais e aplicam-se para as variáveis tanto qualitativas quanto quantitativas.

No **gráfico de barras verticais**, também chamado de **gráfico de colunas**, o eixo horizontal apresenta a variável em estudo, e, no eixo vertical, são representados os valores das respectivas frequências (absoluta, relativa ou percentual, conforme a variável) ou os valores de uma variável quantitativa. As colunas (retângulos) têm medidas de larguras iguais, e a medida de altura de cada uma é proporcional à respectiva frequência ou ao respectivo valor numérico.

As considerações referentes ao gráfico de colunas aplicam-se ao **gráfico de barras horizontais**, apenas com os eixos invertidos.

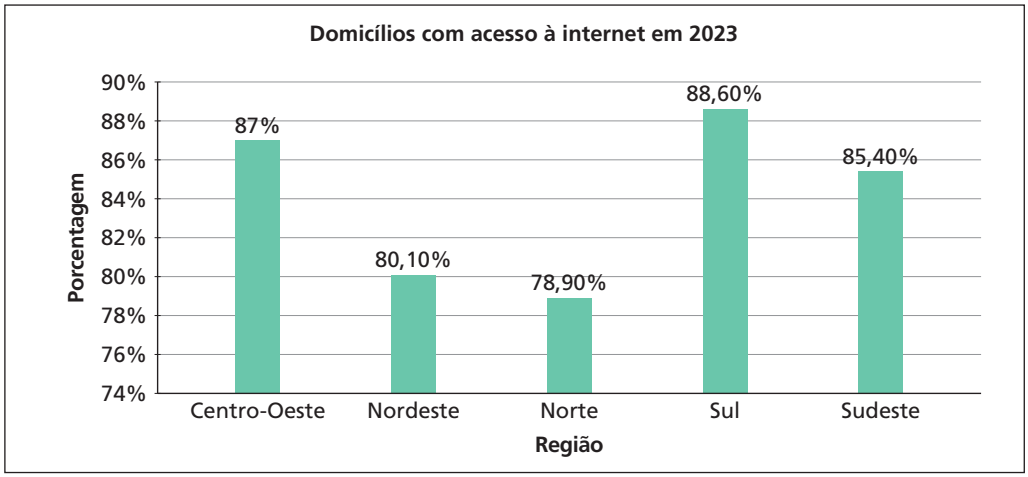
Vamos representar os dados da tabela a seguir em um gráfico de barras verticais e um gráfico de barras horizontais.

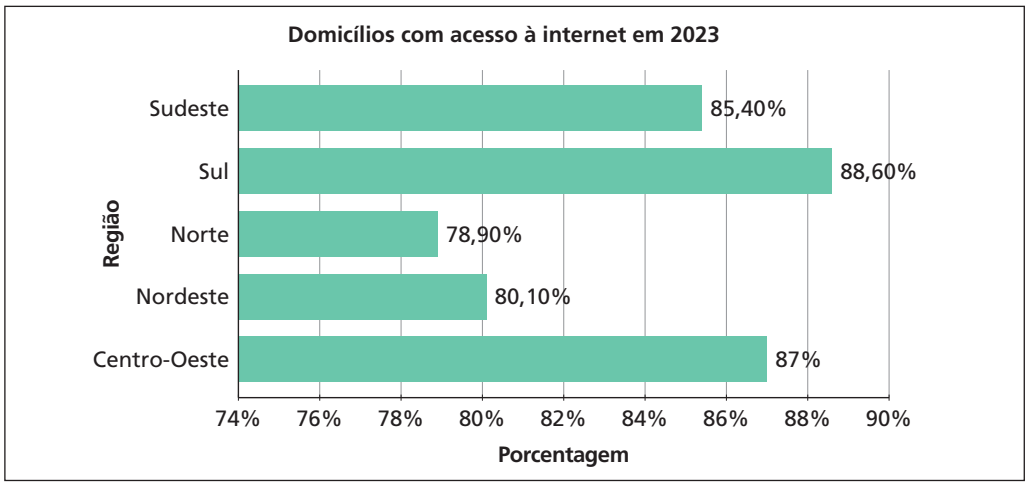
Domicílios com acesso à internet em 2023

Região	Porcentagem
Centro-Oeste	87%
Nordeste	80,10%
Norte	78,90%
Sul	88,60%
Sudeste	85,40%

Fonte: elaborado com base em CETIC.BR. **Portal de dados**. Disponível em: https://data.cetic.br/cetic/explore/?pesquisa_id=1&unidade=Domic%C3%ADlios. Acesso em: 16 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.





ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborados com base em CETIC.BR. **Portal de dados**. Disponível em: https://data.cetic.br/cetic/explore/?pesquisa_id=1&unidade=Domic%C3%ADlios. Acesso em: 16 ago. 2024.

Gráfico de setores

Os **gráficos de setores** apresentam os dados em um círculo, no qual cada setor ou "fatia" indica a frequência (absoluta ou relativa) de um valor observado.

A medida da abertura do ângulo central de cada setor é proporcional à frequência correspondente.

No caso da frequência absoluta, a medida da abertura do ângulo central de cada setor é obtida por meio da igualdade:

$$\frac{\text{frequência absoluta}}{\text{total das frequências absolutas}} = \frac{\text{medida da abertura do ângulo central}}{360°}$$

Para a frequência percentual, a medida é obtida pela aplicação da taxa percentual de cada frequência em relação a 360°.

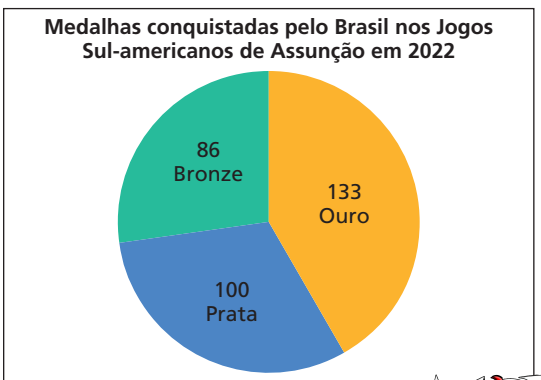
Considere o exemplo a seguir.

Observe como os dados da tabela a seguir podem ser representados em um gráfico de setores.

Medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Sul-americanos de Assunção em 2022

Tipo de medalha	Quantidade
Ouro	133
Prata	100
Bronze	86

Fonte: elaborados com base em OLYMPICS.COM. **Jogos Sul-americanos 2022**: confira as medalhas do Brasil. Disponível em: https://olympics.com/pt/noticias/jogos-sul-americanos-2022-confira-as-medalhas-do-brasil. Acesso em: 16 ago. 2024.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nesse caso, o número total de medalhas é 319, pois 133 + 100 + 86 = 319.

Então, para determinar a medida x da abertura do ângulo central do setor que representa cada medalha, fazemos:

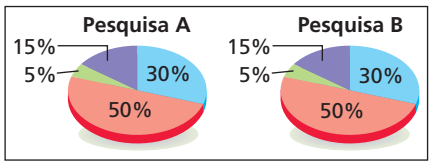
- Ouro:
$\frac{133}{319} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = \frac{133 \cdot 360°}{319} \simeq 150°$
- Prata:
$\frac{100}{319} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 360°}{319} \simeq 113°$
- Bronze:
$\frac{86}{319} = \frac{x}{360°} \Rightarrow x = \frac{86 \cdot 360°}{319} \simeq 97°$

Observação

O gráfico de setores é recomendado quando se deseja comparar o valor de cada categoria com o total. Porém, seu uso não é adequado quando uma dessas categorias apresenta frequência igual a zero (já que, nesse caso, essa "fatia" não aparece) ou quando a soma das frequências percentuais é maior que 100% (quando os entrevistados podem dar mais de uma resposta a uma pergunta).

Atividade resolvida

R2. Duas instituições coletaram dados envolvendo uma mesma variável quantitativa discreta, conforme mostram os gráficos a seguir.



ADILSON SECCO/ROUVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Em ambas as pesquisas, o índice 50% representa a mesma quantidade de objetos? E 5%? E 15%? E 30%? Justificar.

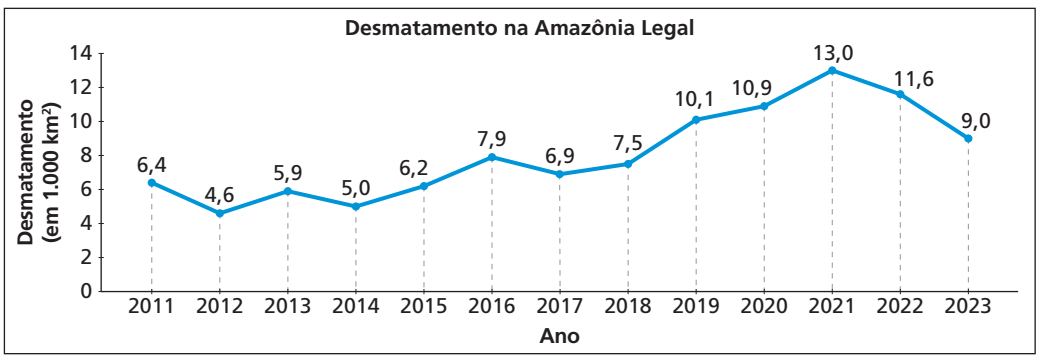
▶ **Resolução**

Não podemos afirmar que esses índices representam a mesma quantidade de objetos em ambas as pesquisas, pois o enunciado do problema não indica o número de objetos que participaram das pesquisas; uma mesma taxa percentual aplicada a totais diferentes resulta em valores diferentes.

Gráfico de linha

Um **gráfico de linha**, ou **gráfico de segmentos**, mostra o comportamento de um conjunto de dados em intervalos geralmente uniformes. Os valores associados a cada intervalo são representados por um conjunto de pontos conectados por uma linha de segmentos consecutivos. Cada ponto tem sua medida de altura representada no eixo vertical, e o respectivo intervalo é exibido no eixo horizontal. Esse tipo de gráfico é muito usado quando se deseja comparar valores ao longo de um período.

Observe o exemplo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado com base em INPE. **Monitoramento do Desmatamento da Floresta Amazônica Brasileira por Satélite**. Disponível em: http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes. Acesso em: 16 ago. 2024.

ODS 15

Observando esse gráfico, é possível perceber a variação do desmatamento anual na **Amazônia Legal** no período de 2011 a 2023. Note que a maior taxa de desmatamento desse período ocorreu em 2021 e a menor, em 2012.

Amazônia Legal: de acordo com o Instituto de Pesquisa Ambiental da Amazônia (Ipam), Amazônia Legal é uma área que engloba nove estados brasileiros (Acre, Amapá, Amazonas, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima, Tocantins e parte do estado do Maranhão) pertencentes à Bacia Amazônica e que, consequentemente, possui em seu território trechos da Floresta Amazônica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

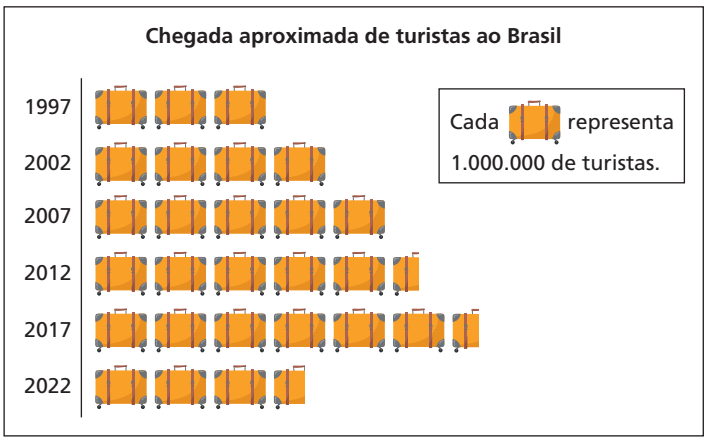
Pictograma

O **pictograma**, tipo de gráfico muito usado pela mídia em razão do forte apelo visual, é constituído por imagens relacionadas ao tema em estudo.

Observe o exemplo.

Chegada de turistas ao Brasil

Ano	Número de turistas
1997	2.849.749
2002	3.784.898
2007	5.025.834
2012	5.676.843
2017	6.588.770
2022	3.630.031



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fontes: elaborado com base em BRASIL. Ministério do Turismo. **Dados e fatos**. Disponível em: http://basededados.turismo.gov.br/; BRASIL. Ministério do Turismo. **Relatório de gestão – Ano base 2022**. Disponível em: https://www.gov.br/turismo/pt-br/acesso-a-informacao/transparencia-e-prestacao-de-contas/relatorio-de-gestao. Acessos em: 16 ago. 2024.

Observe que o gráfico foi elaborado com valores aproximados, o que é bastante comum na construção de pictogramas. Nesse pictograma, como cada símbolo representa 1.000.000 de turistas, então (metade de um símbolo) representa 500.000 turistas.

Para 2017, por exemplo, foram usados seis símbolos inteiros mais metade de um símbolo, o que indica o valor aproximado de 6.500.000 turistas nesse ano.

Para construir um pictograma, é fundamental que:

- todos os símbolos tenham o mesmo tamanho e valor;
- os espaços entre eles sejam sempre iguais;
- o critério de arredondamento não induza a uma falsa interpretação dos dados.

Atividade resolvida

R3. Cinco amigos estão disputando um jogo de *videogame*. A tabela mostra a quantidade de pontos feita por cada um deles ao final de uma partida. Construir um pictograma para representar os dados da tabela.

Pontuação dos jogadores durante uma partida de *videogame*

Jogador	Quantidade de pontos
Felipe	1.640
Lara	1.800
Mariana	1.370
Eduardo	1.000
Rafael	1.200

Fonte: elaborado para fins didáticos.

▶ **Resolução**

Para construir o pictograma, temos de definir o símbolo que será usado e também a quantidade de pontos que cada símbolo representará.

Analisando os dados da tabela, verificamos que os valores estão entre 1.000 e 1.800 e são próximos de um múltiplo de 200. Desse modo, podemos estabelecer que cada símbolo representará 200 pontos. Para determinar quantos símbolos serão usados para cada jogador, precisaremos arredondar alguns valores: 1.640 será arredondado para 1.600 e 1.370 para 1.400. Assim, temos:

TEOART/SHUTTERSTOCK

Fonte: elaborado para fins didáticos.

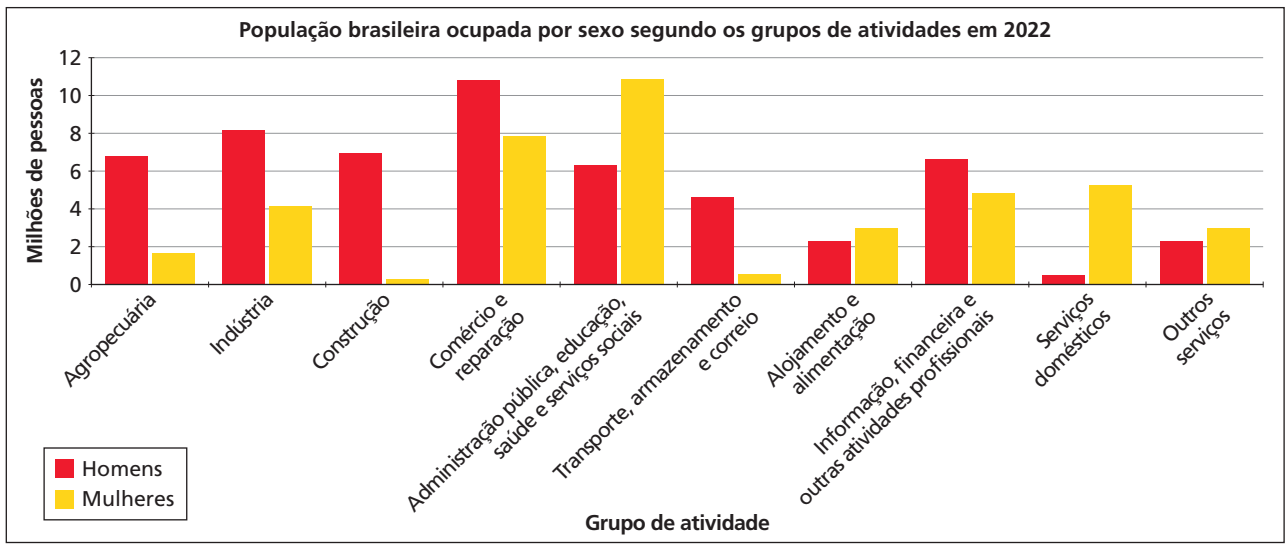
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Gráfico múltiplo

Em algumas situações, é necessário representar simultaneamente duas ou mais características da amostra. Para facilitar a comparação entre características distintas, podemos construir um **gráfico múltiplo.**

Observe os exemplos.

a. Considere o gráfico a seguir.



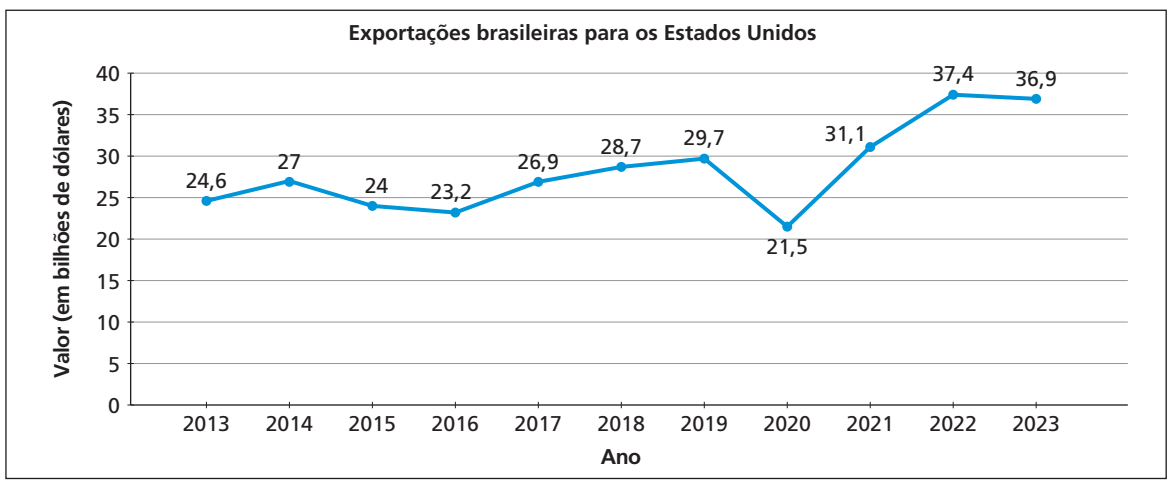
Fonte: elaborado com base em IBGE. **Síntese de indicadores sociais:** uma análise das condições de vida da população brasileira, 2023.

ODS 5

Esse gráfico de colunas múltiplas possui duas colunas para cada grupo de atividade: as colunas em vermelho indicam a quantidade de homens ocupados em cada grupo; as colunas em amarelo indicam a quantidade de mulheres ocupadas em cada grupo.

Observe que, mesmo sem saber o valor exato de pessoas que cada barra representa, é possível comparar a população de homens e mulheres ocupados em cada grupo de atividade, bem como comparar a distribuição dos homens ou das mulheres entre os grupos. Por exemplo, podemos concluir que, em 2022, havia mais mulheres que homens trabalhando em "administração pública, educação, saúde e serviços sociais" e em "serviços domésticos". Também podemos concluir que, mesmo havendo mais homens que mulheres trabalhando em "comércio e reparação", o número de mulheres ocupadas nesse grupo de atividade era maior que o número de mulheres ocupadas em "serviços domésticos".

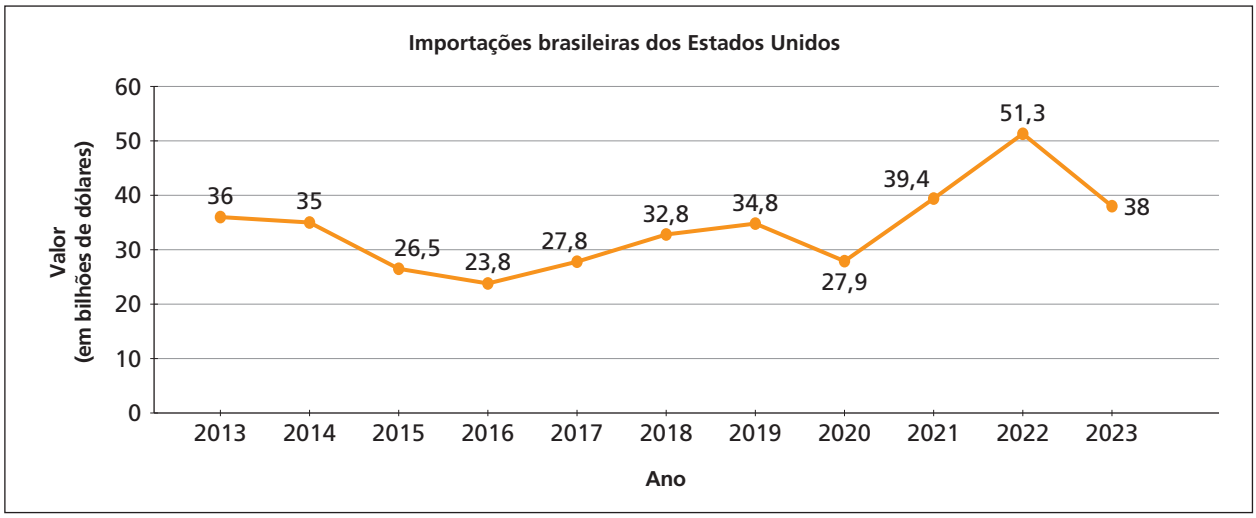
b. Em 2023, os Estados Unidos ficaram em 2º lugar no *ranking* de importações e no de exportações para o Brasil. Observe os gráficos a seguir, que apresentam os valores do comércio exterior entre Brasil e Estados Unidos de 2013 a 2023.



Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços. **ComexVis**. Disponível em: http://comexstat.mdic.gov.br/pt/comex-vis/. Acesso em: 17 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

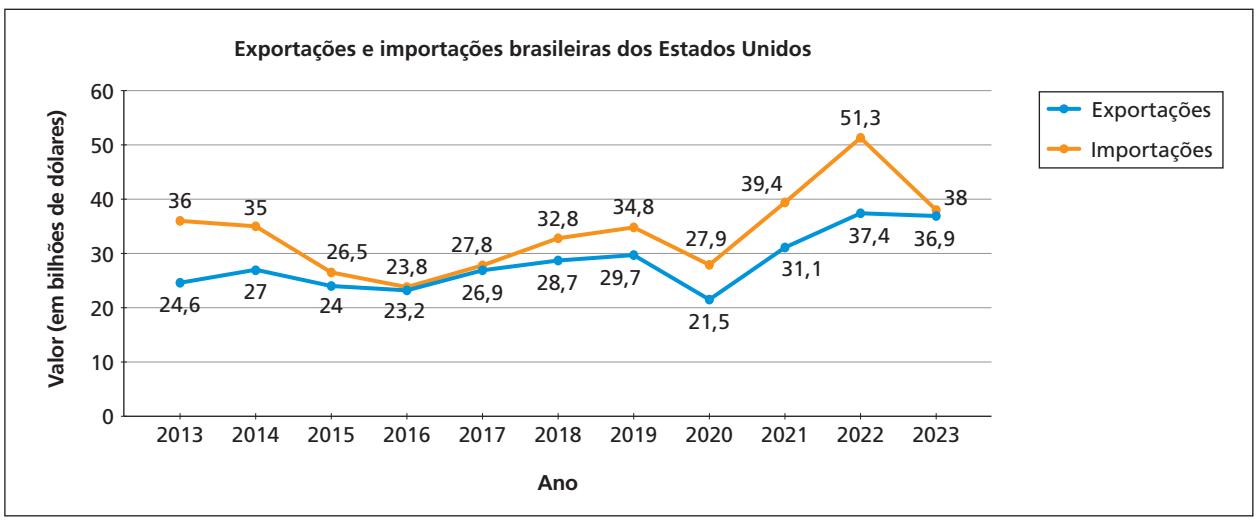
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços. **ComexVis**. Disponível em: http://comexstat.mdic.gov.br/pt/comex-vis/. Acesso em: 17 ago. 2024.

A análise isolada de cada gráfico mostra a evolução do valor de exportações e do valor de importações no decorrer dos anos, mas não favorece uma comparação entre esses valores em um mesmo ano. Essa comparação pode ser favorecida com a organização conjunta de todos os dados em um único gráfico. Observe a seguir.



Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços. **ComexVis**. Disponível em: http://comexstat.mdic.gov.br/pt/comex-vis/. Acesso em: 17 ago. 2024.

Com esse gráfico é possível perceber, por exemplo, que nesse período o valor de exportações sempre foi menor do que o de importações.

19 a. Não. As porcentagens indicadas em cada gráfico são porcentagens do total de domicílios de cada região; logo, não faz sentido somá-las. Para calcular a porcentagem de domicílios com acesso à internet no Brasil, seria necessário saber o total de domicílios com acesso à internet (de todas as regiões) em relação ao total de domicílios do Brasil.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

18. O consumo mensal de energia elétrica da residência de Mariana, em quilowatt-hora (kWh), durante o primeiro semestre do ano passado, foi: 340, 361, 280, 299, 320 e 302. **18.** Resposta no *Suplemento para o professor*.
Considerando os arredondamentos que julgar convenientes, construa um gráfico de barras horizontais.

19. **EM DUPLA** **ARGUMENTAÇÃO** Reúna-se com um colega e conversem sobre as questões a seguir, a respeito dos dados da tabela e dos gráficos "Domicílios com acesso à internet em 2023", apresentados anteriormente.

a. A soma das porcentagens indicadas em cada gráfico representa a porcentagem de domicílios com acesso à internet no Brasil?

b. Com as informações fornecidas, é possível dizer que há mais domicílios com acesso à internet no Centro-Oeste que no Nordeste?

19 b. Não é possível chegar a essa conclusão, pois o gráfico apresenta porcentagens de quantidades de domicílios que não necessariamente são iguais. Poderíamos comparar porcentagens, mas, para comparar os valores absolutos (número de domicílios com acesso à internet) de cada região, seria necessário conhecer o número de domicílios de cada região na ocasião da pesquisa. Por exemplo: 87% de 1.000 é igual a 870, que é menor que 80,1% de 2.500, que é aproximadamente igual a 2.003.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

21. Resposta pessoal. Exemplos de resposta: Havia aproximadamente 11 milhões de homens ocupados em "comércio e reparação"; havia aproximadamente 4 milhões de mulheres ocupadas na "indústria"; o número de homens ocupados em "serviços domésticos" era maior que o número de mulheres ocupadas em "construção"; menos de 8 milhões de homens estavam ocupados em "administração pública, educação, saúde e serviços sociais".

20. Na **atividade resolvida R3**, estabeleceu-se que cada símbolo representaria 200 pontos, mas poderiam ter sido feitas outras escolhas; por exemplo, poderíamos estabelecer que cada símbolo representaria 100 pontos e, nesse caso, o valor 1.640 poderia ser arredondado para 1.650 e representado por 16 símbolos mais metade de um símbolo.

Faça um pictograma com os dados da **atividade resolvida R3** adotando outro valor para cada símbolo.

20. Resposta pessoal.

21. **EM GRUPO** Escreva em seu caderno mais três conclusões que podem ser tiradas com base na análise do gráfico "População brasileira ocupada por sexo segundo os grupos de atividades em 2022", apresentado anteriormente. Compare suas conclusões com as de mais dois colegas.

22. A tabela a seguir apresenta as produções dos maiores produtores de petróleo em 2023.

Maiores produtores de petróleo em 2023

País	Produção (milhões de barris por dia)
Estados Unidos	12,9
Rússia	10,6
Arábia Saudita	9,6
Canadá	4,9
Iraque	4,3
China	4,2
Irã	3,9
Brasil	3,4
Emirados Árabes Unidos	3,3
Kuwait	2,6

Fonte: elaborado com base em IBP – Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás. **Maiores produtores mundiais de petróleo em 2023**. Disponível em: https://www.ibp.org.br/observatorio-do-setor/snapshots/maiores-produtores-mundiais-de-petroleo/#:~:text=Em%202022%2C%20o%20Brasil%20foi,metade%20da%20produ%C3%A7%C3%A3o%20mundial%20total. Acesso em: 18 ago. 2024.

22 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

a. Elabore um pictograma para representar os dados da tabela.

b. **EM GRUPO** Compare seu pictograma com os elaborados por cinco colegas. Escolham o pictograma que vocês acham que melhor representa os dados da tabela. Justifiquem a escolha.

22 b. Resposta pessoal.

c. **ARGUMENTAÇÃO** Para comparar a produção de petróleo dos países, os dados da tabela poderiam ser mais bem representados em um gráfico de linha ou em um gráfico de colunas? Justifique.

d. Observando os dados, podemos concluir que o Brasil produziu mais petróleo em 2022 ou em 2023?

23. Observe a tabela a seguir, que apresenta o número de acidentes e de óbitos causados por escorpião no estado de São Paulo de 2013 a 2023.

Acidentes e óbitos causados por escorpião no estado de São Paulo

Ano	Número de acidentes	Números de óbitos
2013	11.428	3
2014	12.447	2
2015	15.340	7
2016	18.658	7
2017	21.535	7
2018	30.476	13
2019	34.224	9
2020	36.109	7
2021	33.750	7
2022	43.888	11
2023	50.327	7

Fonte: elaborado com base em GOVERNO do estado de São Paulo, CVE – Centro de Vigilância Epidemiológica "Prof. Alexandre Vranjac". **Dados estatísticos**. Disponível em: https://www.saude.sp.gov.br/resources/cve-centro-de-vigilancia-epidemiologica/areas-de-vigilancia/doencas-de-transmissao-por-vetores-e-zoonoses/dados/peconhentos/2024/escorpiao_sh.pdf. Acesso em: 18 ago. 2024.

23 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

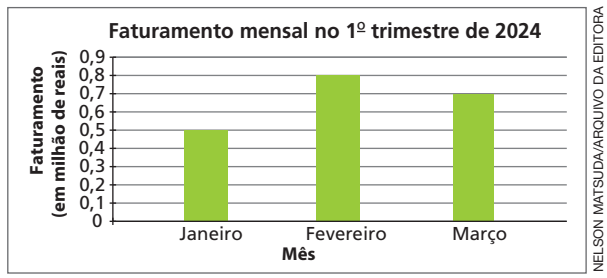
a. Com base nos dados da tabela, construa em seu caderno dois gráficos de linha: um para representar o número de acidentes e um para representar o número de óbitos causados por escorpião no estado de São Paulo.

b. **ARGUMENTAÇÃO** Seria conveniente representar o número de acidentes e de óbitos em um mesmo gráfico de linhas múltiplas? Explique.

ISIS MEDRI/SHUTTERSTOCK

Escorpião da espécie *Tityus serrulatus*, conhecido como escorpião-amarelo. Segundo o Ministério da Saúde, é a espécie que causa mais preocupação em decorrência do alto potencial de gravidade do envenenamento e da expansão em sua distribuição geográfica pelo país.

24. O gráfico a seguir apresenta o faturamento de uma empresa nos três primeiros meses de 2024. Usando régua, compasso e transferidor, represente esses valores em um gráfico de setores considerando a participação, em porcentagem, de cada mês no faturamento trimestral. Atenção! Cuidado ao usar o compasso.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

23 b. Espera-se que os estudantes percebam que não seria conveniente, pois, como os números de acidentes são da ordem das dezenas de milhar e os números de óbitos são da ordem das unidades e das dezenas, a construção do gráfico seria inviável ou não representaria a variação no número de óbitos.

22 c. Em um gráfico de colunas, pois o gráfico de linha é indicado para representar a variação dos valores de uma variável no decorrer de um período, o que não é o caso.

Planilhas eletrônicas na construção de gráficos

24. Resposta no *Suplemento para o professor*.

As planilhas eletrônicas, além de auxiliar na construção de tabelas de frequências, são uma ferramenta muito usada para construir gráficos.

Para construir um gráfico estatístico usando uma planilha eletrônica, inicialmente devemos construir a tabela de frequências na planilha.

22 d. Espera-se que os estudantes percebam que não é possível responder a essa pergunta, pois não há dados referentes ao ano de 2022.

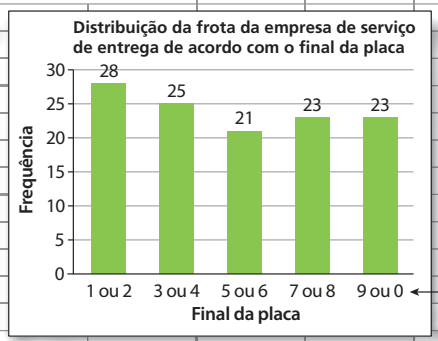
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Vamos usar como exemplo a tabela construída anteriormente em planilha eletrônica sobre a distribuição da frota da empresa de serviço de entrega de acordo com o final da placa.

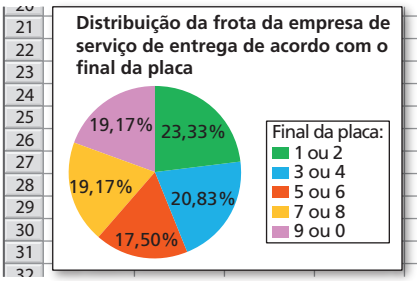
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

C2 | *Fórmula* | 28

	A	B	C	D	E
1	**Dia da semana**	**Final da placa**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	2ª feira	1 ou 2	28	0,2333	23,33%
3	3ª feira	3 ou 4	25	0,2083	20,83%
4	4ª feira	5 ou 6	21	0,1750	17,50%
5	5ª feira	7 ou 8	23	0,1917	19,17%
6	6ª feira	9 ou 0	23	0,1917	19,17%
7	**Total**		120	1,0000	100,00%



Para construir um gráfico de barras, por exemplo, inicialmente devemos selecionar os valores das frequências que queremos usar e, então, selecionamos a opção para inserir gráfico de barras. Há várias opções de gráficos de barras (horizontais, verticais, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar de retângulos).



Depois que o gráfico estiver construído, é necessário arrumar os rótulos do eixo que exibe os finais de placas. Isso pode ser feito manualmente ou selecionando-se o intervalo de B2 a B6 na tabela.

Para construir um gráfico de setores com a frequência percentual, por exemplo, bastaria selecionar na planilha o intervalo de E2 a E6 e, então, selecionar a opção de inserir gráfico de setores.

É possível, ainda, inserir título no gráfico e nome nos eixos, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

25 b. Exemplo de resposta: Em cada um dos anos apresentados, o valor da exportação de soja é maior que o valor da exportação de milho.

26 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

25. Considere a tabela a seguir.

Exportação brasileira (em bilhões de dólares)

Ano	Soja	Milho
2013	22,8	6,3
2014	23,3	3,9
2015	21	5
2016	19,3	3,7
2017	25,7	4,6
2018	33,1	4
2019	26,1	7,3
2020	28,6	5,9
2021	38,6	4,2
2022	46,6	12,2
2023	53,2	13,6

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços. **ComexVis**. Disponível em: http://comexstat.mdic.gov.br/pt/comex-vis. Acesso em: 18 ago. 2024.

25 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

a. Usando uma planilha eletrônica, construa um gráfico de linhas múltiplas para representar os dados dessa tabela.

b. ARGUMENTAÇÃO Observando o gráfico construído, escreva um parágrafo comparando os valores de exportação de soja com os valores de exportação de milho.

26. Resolva usando uma planilha eletrônica.

As notas finais dos 36 estudantes de uma turma foram apresentadas pelo professor em ordem de chamada:

1 – 6,0	10 – 7,0	19 – 4,0	28 – 8,0
2 – 7,0	11 – 5,0	20 – 7,0	29 – 8,0
3 – 5,0	12 – 9,0	21 – 5,0	30 – 7,0
4 – 5,0	13 – 10,0	22 – 6,0	31 – 4,0
5 – 4,0	14 – 6,0	23 – 8,0	32 – 9,0
6 – 6,0	15 – 10,0	24 – 5,0	33 – 7,0
7 – 5,0	16 – 6,0	25 – 8,0	34 – 9,0
8 – 6,0	17 – 7,0	26 – 5,0	35 – 8,0
9 – 8,0	18 – 5,0	27 – 10,0	36 – 8,0

a. Construa uma tabela de frequências (absoluta, relativa e percentual) organizando esses dados para facilitar a observação do comportamento da variável "nota".

b. Qual foi a porcentagem de notas iguais a 6 (nota mínima de aprovação) ou acima dela? E abaixo? **26 b.** 69,44%; 30,56%.

c. Construa um gráfico de barras (horizontais ou verticais) com as frequências absolutas das notas e um gráfico de setores. **26 c.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

d. ARGUMENTAÇÃO Qual dos gráficos construídos você considera melhor para apresentar esse conjunto de notas? Justifique. **26 d.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

27. EM GRUPO ARGUMENTAÇÃO Colete dados de todos os estudantes de sua turma para a variável "atividade de lazer preferida" ou escolha outra variável qualitativa para investigar. Usando os dados coletados, construa, em uma planilha eletrônica, uma tabela com as frequências absoluta e percentual. Em seguida, construa pelo menos dois tipos de gráfico para representar seus dados e apresente os resultados para os colegas. Nesse caso, o gráfico de segmentos é adequado? Justifique.

27. Espera-se que os estudantes percebam as diferenças entre os tipos de gráfico de acordo com a informação que querem transmitir e identifiquem que o gráfico de segmentos não é adequado para o caso de uma variável qualitativa.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Exemplo de resposta: O trabalho plataformizado é um modelo de trabalho caracterizado pela flexibilização, informalidade e mediação de plataformas digitais, e os trabalhadores de plataformas, por serem autônomos, não têm acesso aos benefícios trabalhistas garantidos aos empregados formais, como a licença-paternidade. Além disso, a natureza instável e imprevisível do trabalho plataformizado pode fazer com que os trabalhadores não se sintam seguros para se afastar temporiamente do trabalho e cuidar dos filhos devido à perda de renda.

Pais não podem tirar licença-paternidade em 67 nações

ODS 5 ODS 8 ODS 10

Em outras 54, a legislação cobre somente até uma semana de afastamento. No Brasil, lei permite apenas cinco dias de licença

Segundo a OMS (Organização Mundial da Saúde), a licença-maternidade é essencial para a estabilidade das famílias após o nascimento de uma criança e existe na maioria dos países. Além da segurança financeira, o afastamento permite que a mãe possa cuidar dos filhos em um momento crucial para o desenvolvimento infantil.

A licença-paternidade, porém, não tem a mesma disponibilidade no mundo. A iniciativa é importante para que os pais também participem do início da vida da criança, além de buscar não sobrecarregar a mãe durante o período.

Ao todo, 67 países não têm legislação sobre licença-paternidade, incluindo os Estados Unidos e a Índia. Outras 54 nações cobrem uma semana ou menos, que é o caso do Brasil.

Aqui, empregados CLT podem solicitar apenas cinco dias de folga, enquanto pais atuantes como MEI ou informais não possuem o mesmo direito. A prevalência de trabalhadores informais é mais alta entre as faixas mais baixas de renda.

Já no caso de casais homoafetivos que adotem uma criança, um dos membros do casal pode solicitar o equivalente à licença-maternidade, em quantidade de dias.

Existem também lugares que têm licença parental, ou seja, um período que pode ser compartilhado entre os pais, independentemente do gênero. Na Suécia, pais e mães podem tirar 480 dias de licença compartilhada, sendo 90 deles obrigatoriamente com o pai.

Fonte: SOUZA, C.; PRETTO, N. Pais não podem tirar licença-paternidade em 67 nações. **Nexo Jornal**, 14 ago. 2022. Disponível em: https://www.nexojornal.com.br/grafico/2022/08/14/Pais-n%C3%A3o-podem-tirar-licen%C3%A7a-paternidade-em-67-na%C3%A7%C3%B5es. Acesso em: 18 ago. 2024.

Atividades

Registre em seu caderno

1. **ARGUMENTAÇÃO** Em sua opinião, por que não há licença-paternidade ou, quando ela existe, dura menos que a licença-maternidade em diferentes países?

1. Resposta pessoal.

2. **ARGUMENTAÇÃO** Uma licença-paternidade mais ampla poderia trazer impactos no mercado de trabalho? Justifique.

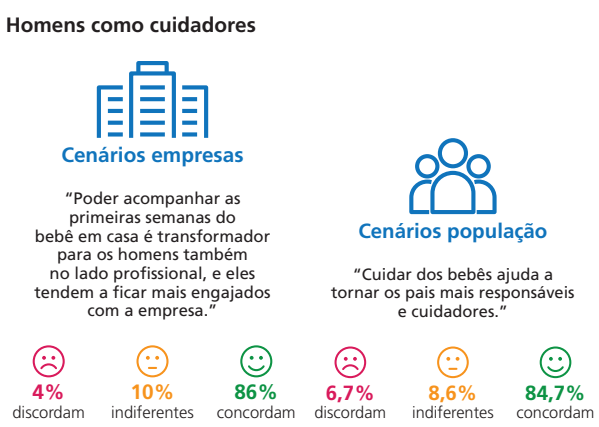
3. O relatório da *Pesquisa licenças maternidade e paternidade nas empresas*, realizada entre 2021 e 2022, traz, entre outras informações, dados a respeito da percepção das empresas e da população sobre o envolvimento masculino no trabalho do cuidado. Analise os gráficos e identifique as afirmações verdadeiras.

3. As afirmações **a** e **c** são verdadeiras.

   a. Mais de $\frac{4}{5}$ da população considera que cuidar dos bebês ajuda os pais a se tornar mais responsáveis e cuidadores.

   b. De cada 100 empresas, 4 consideram que acompanhar o bebê nas primeiras semanas é transformador para os homens do ponto de vista profissional.

   c. $\frac{1}{10}$ das empresas se manteve indiferente à afirmação: "Poder acompanhar as primeiras semanas do bebê em casa é transformador para os homens também no lado profissional, e eles tendem a ficar mais engajados com a empresa".



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado com base em PIRES, C.; ECHEGARAY, F.; MADALOZZO, R. (coord.). **Pesquisa licenças maternidade e paternidade nas empresas**: levantamento 2021-2022. Cotia: Family Talks; São Paulo: 4daddy, 2022. p. 57-58. Disponível em: https://familytalks.org/wp-content/uploads/2024/09/relatorio_pesquisa_parentalidade_nas_empresas.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

4. Pesquise sobre trabalho plataformizado e responda: Quais são as principais barreiras enfrentadas pelos trabalhadores de plataformas em relação à licença-paternidade?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

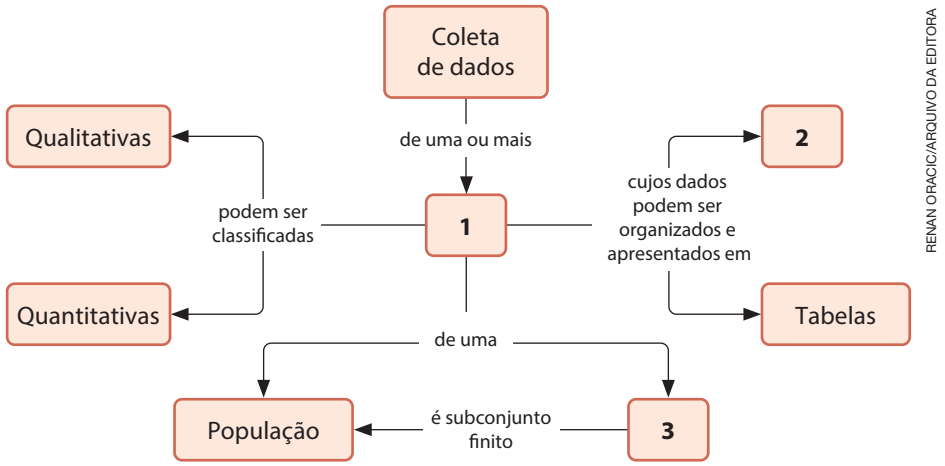
2. Resposta pessoal. Os estudantes podem responder que sim, uma vez que ampliaria as possibilidades para as mulheres, diminuindo a influência do gênero como fator de diferenciação em contratações e salários.

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 1

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

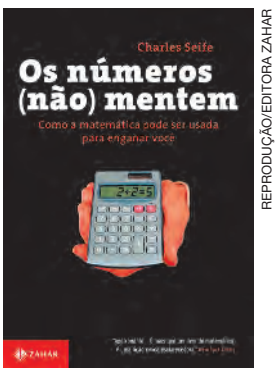
Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Gráficos **B.** Variáveis **C.** Amostra

Conexões entre conceitos.
A – 2; B – 1; C – 3.

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro



REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

Os números (não) mentem: como a Matemática pode ser usada para enganar você

Charles Seife

Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Nesse livro, o jornalista e matemático Charles Seife revela como funciona o perigoso mecanismo de persuasão dos números, mostrando situações em que números suspeitos são usados para confundir e enganar as pessoas. Com uma linguagem leve e acessível, o autor nos ensina a desenvolver a desconfiança necessária para questionar os dados que chegam até nós e o modo como eles são apresentados.

Vídeo

Cada gráfico no seu galho

Por meio de uma história fictícia, esse vídeo, da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), mostra que diferentes tipos de gráfico podem ser usados de acordo com os dados utilizados.

Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1059. Acesso em: 18 ago. 2024.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Uma rede de supermercados, interessada em se instalar em certa região, resolveu fazer uma pesquisa com a população local. Foram apresentadas as variáveis: sexo, medida de tempo de residência na região, satisfação com as redes já instaladas e frequência de compras por mês. As variáveis apresentadas são, respectivamente:

a. quantitativa, quantitativa, quantitativa, qualitativa.
b. quantitativa, quantitativa, qualitativa, qualitativa.
c. qualitativa, quantitativa, qualitativa, quantitativa.
d. qualitativa, quantitativa, quantitativa, quantitativa.

Q1. Alternativa **c**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Q2. Para conhecer melhor seu público, uma companhia de teatro resolveu verificar, aos sábados e aos domingos, no período de um mês, qual é o sexo dos espectadores. Os dados foram organizados em uma tabela, reproduzida a seguir.

Sexo dos espectadores

Dia / Sexo	1ª sem.	1ª sem.	2ª sem.	2ª sem.	3ª sem.	3ª sem.	4ª sem.	4ª sem.
	S	D	S	D	S	D	S	D
M	35	40	32	28	37	28	39	27
F	28	30	30	31	25	35	37	33

Fonte: elaborado para fins didáticos.

O percentual aproximado de homens (M) e mulheres (F) em sábados (S) e em domingos (D), respectivamente, é: **Q2.** Alternativa **b**.

a. 56% e 44%, 49% e 51%.

b. 54% e 46%, 49% e 51%.

c. 44% e 56%, 51% e 49%.

d. 46% e 54%, 51% e 49%.

Q3. O gráfico apresenta o resultado de uma pesquisa.

Fonte: elaborado para fins didáticos.

O setor do gráfico que corresponde a 25% é: **Q3.** Alternativa **c**.

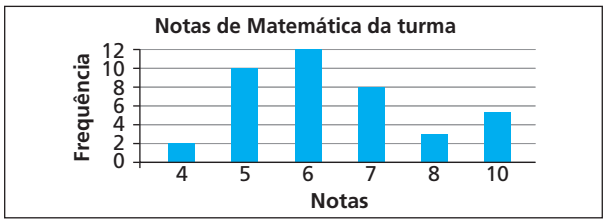
a. 3

b. 1

c. 2

d. 4

Q4. As notas de Matemática de uma turma foram apresentadas pelo professor no gráfico a seguir.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

O número de estudantes na turma, a soma das notas da turma e a razão dessa soma pelo número de estudantes são, respectivamente: **Q4.** Alternativa **d**.

a. 40; 240; 6,0

b. 20; 130; 6,5

c. 20; 260; 6,5

d. 40; 260; 6,5

Q5. Em uma pesquisa, os entrevistados de certo município deveriam atribuir uma nota, de 1 a 10, à educação pública municipal. O resultado é mostrado na tabela a seguir, na qual se verifica a relação entre as variáveis "nota" e "idade".

Nota dada à educação pública municipal

Idade / Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
De 20 a 25	0	0	1	2	2	4	0	1	0	0
De 26 a 30	0	0	0	2	1	4	3	0	0	0
De 31 a 35	0	0	0	0	3	1	0	1	0	0
De 36 a 40	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
De 41 a 45	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
De 46 a 50	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Se tomarmos a nota 5 como um valor que determina qualidade média, qual afirmação está correta? **Q5.** Alternativa **a**.

a. A maioria das pessoas com 31 anos ou mais considera a educação pública municipal de qualidade acima da média.

b. Os jovens até 25 anos atribuem nota máxima à educação pública municipal.

c. Segundo a opinião dos entrevistados, a educação pública municipal está muito ruim.

d. Não é possível perceber relação entre as duas variáveis.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

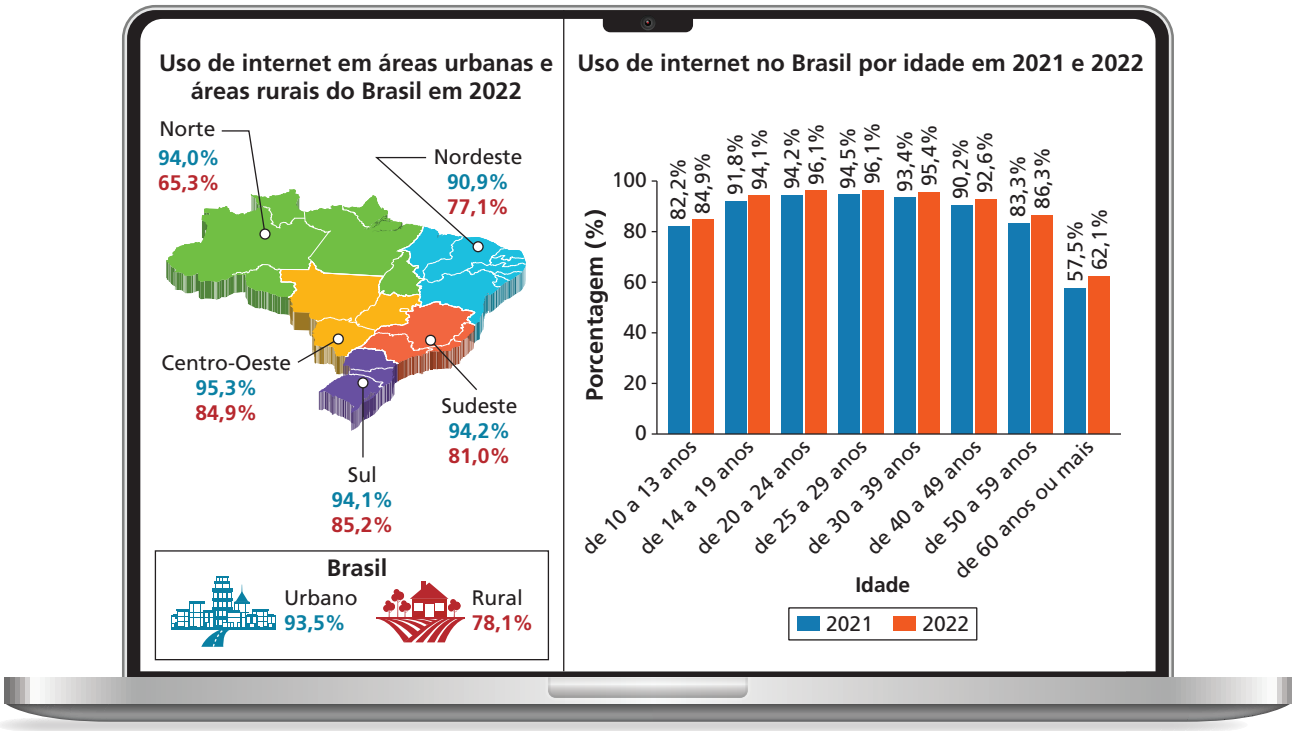
Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Reconhecer população, amostra e variáveis.	X				
Organizar e interpretar dados em tabelas e gráficos.		X	X	X	X

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Capítulo 2

ANÁLISE DE DADOS



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado com base em IBGE. Acesso à internet e à televisão e posse de telefone móvel celular para uso pessoal 2022. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua**. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102040_informativo.pdf. Acesso em: 23 ago. 2024.

De acordo com a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua) realizada pelo IBGE em 2022, o uso da internet em áreas urbanas e rurais do Brasil, como um todo, apresenta alta porcentagem, estando acima de 77%. Com exceção das áreas rurais da Região Norte, essa porcentagem de acesso à internet também está presente nas áreas urbanas e rurais de cada uma das outras regiões.

Especificamente em relação à Região Norte, é notório a diferença entre as porcentagens de uso nas áreas urbanas e rurais, o que indica que ainda há muito o que ser feito para que a internet possa ser utilizada por todos no país.

Considerando que a pesquisa foi realizada com pessoas de 10 anos ou mais, é possível inferir que o acesso à internet cresceu de 2021 para 2022 em todas as faixas etárias da população pesquisada. Além disso, destaca-se que o aumento mais expressivo no uso da internet nesse período ocorreu na faixa etária de 60 anos ou mais; esse fenômeno aponta para uma mudança nos hábitos de navegação dessa parcela da população.

Essa expansão do acesso à internet apresenta diversos benefícios, como mais autonomia e eficácia na comunicação, especialmente quando restrições de mobilidade podem reduzir os encontros presenciais. A internet também proporciona uma ampla gama de comunidades virtuais e de oportunidades educacionais e culturais, como plataformas de aprendizado, acesso a notícias e informações atualizadas.

Diante desse cenário, é imprescindível o fomento à alfabetização digital entre as pessoas idosas, por exemplo, por meio de programas de capacitação e conscientização acerca dos riscos e da segurança *on-line*. Essa abordagem visa assegurar uma experiência digital positiva e segura para todos, reforçando a importância de uma sociedade conectada e inclusiva.

ODS 9 ODS 10

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre estes e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Distribuição e frequências

CHARTS AND BG/SHUTTERSTOCK

Apenas conhecer os preços do modelo de *tablet* pesquisado não facilita analisar o comportamento da variável "Preço". Podemos organizar os dados em uma tabela para inferir, com mais precisão, esse comportamento.

Frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas

Em uma pesquisa sobre preços de um modelo de *tablet*, em 20 lojas do ramo, foram coletados os seguintes valores (em real):

1.000	1.500	1.000	1.600	1.000	1.600	1.600	1.500	1.500	1.000
1.000	1.000	1.500	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600	1.600

Para analisar a variável "Preço", vamos agrupar esses valores na tabela a seguir.

Preços de um modelo de *tablet*

Preço (em real)	Quantidade de lojas
1.000	6
1.500	4
1.600	10
Total	20

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Nessa tabela, os números que aparecem na coluna "Quantidade de lojas" indicam as frequências dos valores observados da variável estudada (nesse caso, variável "Preço").

A quantidade de vezes que cada valor é observado chama-se **frequência absoluta** ou, simplesmente, **frequência (f_i)**.

A tabela que mostra a relação entre os valores da variável e a quantidade de vezes que eles ocorrem (frequência) é chamada de **tabela de frequências** ou **distribuição de frequências**.

Agora, vamos acrescentar à tabela de frequências uma coluna com a razão entre cada frequência absoluta e a quantidade total de ocorrências dos valores da variável. As razões calculadas recebem o nome de **frequência relativa (f_r)** ou **frequência percentual** e geralmente são expressas em porcentagem para facilitar a interpretação dos dados.

Preços de um modelo de *tablet*

Preço (em real)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (f_r)
1.000	6	$\frac{6}{20} = 0{,}3$ ou 30%
1.500	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2$ ou 20%
1.600	10	$\frac{10}{20} = 0{,}5$ ou 50%
Total	20	100%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Para saber mais sobre a variável estudada, podemos calcular a soma de cada frequência absoluta com as frequências absolutas anteriores, que chamamos de **frequência absoluta acumulada (F_i)**, e a soma de cada frequência relativa com as frequências relativas anteriores, que chamamos de **frequência relativa acumulada (F_r)**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Preços de um modelo de *tablet*

Preço (em real)	Frequência absoluta (f_i)	Frequência relativa (f_r)	Frequência absoluta acumulada (F_i)	Frequência relativa acumulada (F_r)
1.000	6	30%	6	30%
1.500	4	20%	6 + 4 = 10	30% + 20% = 50%
1.600	10	50%	6 + 4 + 10 = 20	30% + 20% + 50% = 100%
Total	20	100%	—	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observação

Para que o cálculo das frequências acumuladas seja coerente, é necessário que os valores da variável estejam ordenados. Assim, só faz sentido fazer esse cálculo para variáveis quantitativas ou qualitativas ordinais.

As frequências acumuladas são úteis quando o objetivo é saber a quantidade ou a porcentagem de valores da variável até determinada característica.

Observação

Nessa situação, se quisermos saber a porcentagem de lojas que vendem *tablets* até R$ 1.500,00, basta encontrarmos, na coluna "Frequência relativa acumulada (F_r)", a porcentagem relativa ao valor R$ 1.500,00; no caso, 50%.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividade resolvida

R1. Estas são as notas de Matemática de 20 estudantes do 2º ano B.

7,0 5,0 9,0 5,0 8,0 6,0 6,0 7,0 7,0 7,0
5,0 8,0 9,0 10,0 8,0 5,0 5,0 5,0 6,0 6,0

Usando uma planilha eletrônica, construir uma tabela de frequências com frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas. Em seguida, com base na tabela e considerando que a nota mínima de aprovação é 6,0, responder às questões.

a. Quantos estudantes obtiveram nota 6,0?

b. Quantos estudantes obtiveram nota menor ou igual a 7,0?

c. Que porcentagem de estudantes obtiveram nota menor que 8,0?

d. Qual foi a porcentagem de estudantes reprovados em Matemática?

▶ Resolução

Para construir a tabela pedida em uma planilha eletrônica, inicialmente preenchemos uma coluna com as notas e uma com as respectivas frequências absolutas, de acordo com os dados apresentados. Depois, preenchemos a coluna das frequências relativas.

C2	*Fórmula*	=B2/$B$8		
	A	B	C	D	E
1	**Nota**	**Frequência absoluta (f_i)**	**Frequência relativa (f_r)**	**Frequência absoluta acumulada (F_i)**	**Frequência relativa acumulada (F_r)**
2	5,0	6	30%		
3	6,0	4	20%		
4	7,0	4	20%		
5	8,0	3	15%		
6	9,0	2	10%		
7	10,0	1	5%		
8	**Total**	20	100%		

Na célula C2, digitamos a fórmula:
=B2/$B$8
(Calcula a razão entre os valores das células B2 e B8.)
O $ é empregado na fórmula para fixar a coluna B e a linha 8. Assim, quando a fórmula da célula C2 for copiada para outras células, a célula B8 ficará fixa na fórmula.
Em seguida, formatamos a célula para mostrar o valor em porcentagem.
Para preencher os outros valores da coluna de frequências relativas, selecionamos a célula C2 e arrastamos a seleção até a célula C7. Copiamos, desse modo, a fórmula para as células C3 a C7, substituindo B2 por B3, B4, B5, B6 e B7, respectivamente.

Na célula C8, digitamos a fórmula:
=SOMA(C2:C7)
(Calcula a soma dos valores das células C2 a C7.)

DILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Preenchemos, agora, as colunas das frequências acumuladas.

E3	*Fórmula*	=C3+E2		
	A	B	C	D	E
1	**Nota**	**Frequência absoluta (f_i)**	**Frequência relativa (f_r)**	**Frequência absoluta acumulada (F_i)**	**Frequência relativa acumulada (F_r)**
2	5,0	6	30%	6	30%
3	6,0	4	20%	10	50%
4	7,0	4	20%	14	70%
5	8,0	3	15%	17	85%
6	9,0	2	10%	19	95%
7	10,0	1	5%	20	100%
8	**Total**	20	100%		

Na célula E2, digitamos a fórmula:
=C2
(Copia o valor da célula C2.)
Na célula E3, digitamos:
=C3+E2
(Adiciona o valor da célula C3 com o valor de E2.)
Selecionamos a célula E3 e arrastamos a seleção até a célula E7. Dessa forma, cada célula terá o valor da célula anterior adicionado ao valor correspondente na coluna C. Preenchemos, assim, a coluna das frequências relativas acumuladas.

Na célula D2, digitamos a fórmula:
=B2
(Copia o valor da célula B2.)
Na célula D3, digitamos:
=B3+D2
(Adiciona o valor da célula B3 com o valor de D2.)
Selecionamos a célula D3 e arrastamos a seleção até a célula D7. Dessa forma, cada célula terá o valor da célula anterior adicionado ao valor correspondente na coluna B. Preenchemos, assim, a coluna das frequências absolutas acumuladas.

Agora, analisando a tabela, podemos responder às questões.

a. 4 estudantes (frequência absoluta da nota 6,0).

b. 14 estudantes (frequência absoluta acumulada até a nota 7,0).

c. 70% dos estudantes (frequência relativa acumulada até a nota 7,0).

d. 30% dos estudantes (frequência relativa acumulada até a nota 5,0).

1. Espera-se que os estudantes percebam que a abertura do capítulo apresenta porcentagens de valores totais diferentes. Então, somente com as informações apresentadas, não é possível chegar a conclusões sobre o número de pessoas que cada porcentagem representa.

2. Não, pois a frequência relativa é a razão entre uma parte e o todo, sendo, portanto, sempre um número de 0 a 1 ou de 0% a 100%.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. **ARGUMENTAÇÃO** **EM DUPLA** De acordo com os dados apresentados na abertura deste capítulo, podemos afirmar que, no Brasil, em 2022, o número de indivíduos da área rural que nunca havia acessado a internet era maior que o número de indivíduos da área urbana que nunca havia acessado a internet? Converse com um colega a respeito.

2. **ARGUMENTAÇÃO** É possível calcular uma frequência relativa negativa ou maior que 100%? Justifique.

3. Os conceitos dos estudantes de um curso de Administração foram os seguintes: **3 a.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

C	A	B	C	A	B	C	A
A	E	D	C	A	C	E	B
B	B	D	E	C	D	B	A
C	E	C	B	D	B	C	C

a. Construa uma tabela de frequências com frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas.

b. Quantos estudantes obtiveram conceito A? **3 b.** 6 estudantes.

c. Sabendo que os conceitos de aprovação são A, B ou C, quantos estudantes estão reprovados? **3 c.** 8 estudantes.

d. Qual é a porcentagem de estudantes que obtiveram conceito C? **3 d.** 31,25%

e. Qual é a porcentagem de estudantes que obtiveram conceitos D ou E? **3 e.** 25%

f. Qual é a porcentagem de estudantes que obtiveram conceitos A ou B? **3 f.** 43,75%

4. Observe as medidas de distância diárias percorridas, em quilômetro, pelos taxistas de uma empresa.

90	87	356	70	49	322
317	250	200	236	274	305
360	480	400	150	426	460
278	260	320	346	358	332
357	410	298	314	440	110

a. Os dados podem ser agrupados por meio de intervalos. Copie a tabela no caderno e complete-a. **4 a.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

Medidas de distância diárias percorridas pelos taxistas

Medida de distância (em km)	Frequência absoluta (f_i)
[0, 100[	
[100, 200[	
[200, 300[	
[300, 400[	
[400, 500]	

Fonte: elaborado para fins didáticos.

b. **ARGUMENTAÇÃO** Como esse procedimento facilita o estudo da variável?

4 b. Quando temos um grande número de valores diferentes, agrupá-los em intervalos possibilita uma análise mais imediata da distribuição de frequência da variável.

MODELO MODELO

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Tabela de frequências para dados agrupados em intervalos

ODS 3

Diariamente, estamos expostos a ruídos de diversas intensidades. Segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), a poluição sonora é um dos tipos de poluição mais graves, perdendo apenas para a da água e a do ar. Seus efeitos sobre os seres humanos vão desde uma simples perturbação até consequências na saúde, como a perda parcial ou total da audição, estresse, distúrbios do sono, distúrbios digestivos, alergias e problemas cardíacos.

DANIEL CYMBALISTA/PULSAR IMAGENS

Grande parte do ruído no município de São Paulo provém de seu trânsito intenso. O limite da medida de ruído diurno aconselhado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) em áreas residenciais e comerciais é de 65 decibéis. Em média, a medida de ruído de um tráfego pesado é de 80 decibéis. (Trânsito nas proximidades do Vale do Anhangabaú, em São Paulo (SP). Foto de 2023.)

A seguir, estão registrados as medidas de ruído, em decibel (dB), de algumas áreas residenciais de um município.

73,94	71,52	66,84	64,17	66,16	65,70	64,78	65,81
63,14	62,57	61,89	60,96	60,32	60,14	56,67	55,89
71,46	70,08	64,43	63,29	66,01	65,08	64,71	64,15
62,69	61,92	61,49	60,74	60,22	59,36	56,03	55,77

Como há muitos dados distintos, uma tabela de frequências em que há uma linha para cada valor da variável, pouco facilitaria a organização desses dados. Nesse caso, como mostramos na **atividade 4**, podemos agrupar os valores em um número de **intervalos** (ou **classes**).

Uma vez que a maior medida de ruído coletada é 73,94 dB e a menor é 55,77 dB, calculando a diferença entre elas, obtemos a **amplitude total** de 18,17 dB (73,94 − 55,77).

Para construir a tabela, podemos dividir a amplitude total, por exemplo, por 4 (quatro intervalos). Se o quociente obtido for um número inteiro, ele é a **amplitude do intervalo** (ou da classe). Quando o resultado não for inteiro, podemos arredondá-lo para o menor inteiro maior que o quociente, que será a amplitude do intervalo.

Nessa situação, a distribuição dos valores em quatro classes possibilitará uma análise adequada. Observe:

$$18{,}17 : 4 = 4{,}5425$$

Arredondando 4,5425 para 5, podemos agrupar os valores em classes de amplitude de 5 dB. Assim, o primeiro intervalo começaria em 55 dB, indo até 60 dB (55 + 5).

Para representar esse intervalo, podemos usar duas notações: $55 \vdash 60$ ou $[55, 60[$, que indicam intervalos fechados à esquerda e abertos à direita. Isso significa que o intervalo corresponde a medidas entre 55 dB e 60 dB, com o extremo inferior (55 dB) pertencendo ao intervalo e o extremo superior (60 dB) não pertencendo a ele.

Observação

A escolha do número de intervalos e de sua amplitude dependerá da natureza dos dados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Analise como as medidas de ruído das áreas residenciais estudadas podem ser organizadas em quatro intervalos de amplitude 5 dB na tabela de frequências a seguir.

Medida de ruído em algumas áreas residenciais do município

Medida de ruído (em dB)	f_i	F_i	f_r	F_r
55 ⊢ 60	5	5	15,625%	15,625%
60 ⊢ 65	17	22	53,125%	68,75%
65 ⊢ 70	6	28	18,75%	87,5%
70 ⊢⊣ 75	4	32	12,5%	100%
Total	32	—	100%	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observação

A notação 70 ⊢⊣ 75 corresponde ao intervalo [70, 75], ou seja, compreende as medidas de ruído entre 70 dB e 75 dB, com ambos os extremos pertencendo ao intervalo.

Com base nos dados da tabela, podemos concluir, por exemplo, que:

- 4 dessas áreas têm medida de ruído maior ou igual a 70 dB e menor ou igual a 75 dB;
- 18,75% dessas áreas têm medida de ruído maior ou igual a 65 dB e menor que 70 dB;
- 68,75% dessas áreas têm ruído menor que 65 dB.

OBJETO DIGITAL
Infográfico clicável: Economia de água

Este infográfico clicável enriquece o contexto da **atividade resolvida R2**, mostrando atitudes cotidianas que ajudam a população a economizar água, como desligar o chuveiro enquanto se ensaboa, reutilizar a água da máquina de lavar para outras atividades domésticas, entre outras. Esse OED promove o desenvolvimento da **competência geral 2**, dialogando com o **TCT Educação para o Consumo**.

Atividade resolvida

R2. Com a finalidade de conscientizar os usuários sobre a economia de água, uma academia instalou sensores nos chuveiros para registrar a medida de tempo de banho dos frequentadores. A medida de tempo, em minuto, que 30 usuários gastaram no banho em determinado dia foi:

5 15 14 5 10 12 10 6 3 2 8 8 8 5 10
12 13 15 12 5 7 14 5 6 4 3 5 9 12 14

B-D-S PIOTR MARCINSKI/SHUTTERSTOCK

Segundo a Organização das Nações Unidas (ONU), cada pessoa necessita de 110 litros de água por dia. Se uma pessoa tomar banho de ducha por 15 minutos, gastará aproximadamente 135 litros de água. Um banho de 5 minutos é o suficiente para higienizar.

Construir uma tabela de frequências com cinco intervalos e resolver os itens a seguir.

a. Determinar a porcentagem de usuários que gastaram 5 minutos ou mais no banho.

b. Considerando que a cada minuto de banho gastam-se aproximadamente 9 litros de água, quantos litros de água foram gastos com banho nessa academia nesse dia?

c. Se todos os usuários tivessem tomado banhos de 5 minutos, quantos litros de água teriam sido economizados nesse dia?

d. Sabendo que uma pessoa precisa de 110 litros de água por dia, a necessidade de quantas pessoas poderia ser suprida com a água economizada no item **c**?

▸ **Resolução**

Como $(15 - 2) : 5 = 2{,}6$, vamos utilizar a amplitude do intervalo de 3 minutos (menor inteiro maior que 2,6).

Medida de tempo gasto no banho

Medida de tempo (em minuto)	f_i	F_i	f_r	F_r
2 ⊢ 5	4	4	13,3%	13,3%
5 ⊢ 8	9	13	30%	43,3%
8 ⊢ 11	7	20	23,3%	66,6%
11 ⊢ 14	5	25	16,7%	83,3%
14 ⊢⊣ 17	5	30	16,7%	100%
Total	30	—	100%	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

a. A porcentagem dos que gastaram 5 minutos ou mais no banho é aproximadamente 86,7% (100% − 13,3%).

b. Para determinar o total de litros de água gastos, inicialmente devemos adicionar todas as medidas de tempo registradas para obter a medida de tempo total:

$5 + 15 + 14 + 5 + 10 + 12 + 10 + 6 + 3 + 2 + 8 + 8 + 8 + 5 + 10 + 12 + 13 + 15 + 12 + 5 + 7 + 14 + 5 + 6 + 4 + 3 + 5 + 9 + 12 + 14 = 257$

Em seguida, multiplicamos a medida de tempo total, em minuto, por 9 litros: $257 \cdot 9 = 2.313$

Assim, foram gastos 2.313 litros de água com banho na academia nesse dia.

c. Se todos os usuários tivessem levado apenas 5 minutos no banho, teríamos uma medida de tempo total de:

$30 \cdot 5 = 150$, ou seja, 150 minutos

Multiplicando essa medida por 9 litros, temos:

$150 \cdot 9 = 1.350$, ou seja, 1.350 litros

Em seguida, calculamos a diferença entre as medidas:

$2.313 - 1.350 = 963$

Logo, teriam sido economizados 963 litros de água nesse dia.

d. Dividindo os 963 litros por 110, temos:

$963 : 110 \simeq 8,75$

Portanto, poderia ser suprida a necessidade de água de 8 pessoas.

6. Quanto maior a amplitude, menor a quantidade de intervalos, o que implica o comprometimento da análise dos dados por perda de informações.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

5. De acordo com a tabela **Medida de ruído em algumas áreas residenciais do município**, quantas áreas apresentam medida de ruído abaixo do limite recomendado pela ABNT? **5.** 22 áreas.

6. **ARGUMENTAÇÃO** Se escolhêssemos uma amplitude maior para os intervalos da tabela **Medida de ruído em algumas áreas residenciais do município**, teríamos uma desvantagem. Qual?

7. **EM GRUPO** Reúna-se em grupos com quatro estudantes e pesquisem mais a poluição sonora e os danos que causa à saúde. Observem qual é a medida de ruído, em dB, em ambientes como escritórios, escolas, avenidas, obras da construção civil, *shows*, eventos esportivos etc.

a. Organize as medidas de ruído obtidas em uma tabela de frequências. **7 a.** Resposta pessoal.

b. Elaborem um vídeo utilizando fotos, gráficos e tabelas, indicando resultados e modos de prevenção e redução da poluição sonora. Em seguida, façam uma exposição na escola. **7 b.** Resposta pessoal.

8. Observe o valor das diárias dos quartos de um hotel.

Valor da diária no hotel

Diária (em real)	Quantidade de quartos
[100, 130[	73
[130, 160[	48
[160, 190[	40
[190, 220[	24
[220, 250[	10
[250, 280]	5
Total	200

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Copie a tabela no caderno completando-a com as frequências: absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. Em seguida, responda às questões.

a. Qual é o extremo inferior da 1ª classe? **8 a.** R$ 100,00

b. Qual é o intervalo de valores de diárias que corresponde ao maior número de quartos? **8 b.** De R$ 100,00 a R$ 130,00, inclusive com R$ 100,00.

c. Qual é a porcentagem de quartos cujas diárias são inferiores a R$ 160,00? **8 c.** 60,5%

d. Quantos quartos correspondem a diárias inferiores a R$ 190,00? **8 d.** 161 quartos.

e. Quantos quartos correspondem a diárias a partir de R$ 190,00? **8 e.** 39 quartos.

9. Um grupo de 50 analistas financeiros efetuou uma previsão, por ganho de ações, em real, de uma empresa no próximo ano. Os resultados obtidos estão apresentados na tabela de frequências a seguir.

Previsão de ganho por ação de uma empresa no próximo ano

Ganho por ação (em real)	Número de analistas (f_i)	F_i	f_r	F_r
		4		8%
		8		
[8, 10[			22%	
[10, 12[	8	27		
		37		74%
			16%	
	5			100%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Copie a tabela de frequências em seu caderno e complete-a, considerando que todos os intervalos têm a mesma amplitude.

8. Resposta no *Suplemento para o professor*.

9. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO MODELO

11 a. 150, 200, 208, 468, 624, 624, 676, 728, 780, 832, 988, 988, 1.040, 1.092, 1.196, 1.248, 1.404, 1.710, 1.716, 1.976, 2.028, 2.132, 2.132, 2.132, 2.236, 2.392, 2.704, 2.948, 3.172, 3.174, 3.208, 3.728, 3.926, 3.959, 4.040, 4.108, 4.404, 4.472, 5.132, 5.928

10. O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe) monitora constantemente os focos de queimadas no Brasil. Os dados a seguir indicam o número de focos de queimadas nas Unidades Federativas do Brasil (26 estados e Distrito Federal) durante todo o ano de 2023.

1.368	18.691	84.353	298.220
4.021	18.991	92.192	314.535
7.538	23.325	93.784	410.517
9.149	32.282	128.026	564.665
11.676	36.476	183.282	699.763
12.960	52.516	228.798	1.009.590
13.031	64.883	261.709	

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. **Programa Queimadas do INPE**. Disponível em: https://terrabrasilis.dpi.inpe.br/queimadas/bdqueimadas/. Acesso em: 23 ago. 2024.

10 a. Resolução no *Suplemento para o professor*.

a. ***SOFTWARE*** Organize os dados em uma tabela de frequências com as frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada. Na tabela, use intervalos de mesma amplitude de modo que o primeiro intervalo seja [0, 100.000[. Se possível, utilize uma planilha eletrônica.

b. Quantas Unidades Federativas tiveram menos de 100.000 focos de queimadas? **10 b.** 17 Unidades Federativas.

c. Que porcentagem das Unidades Federativas teve 200.000 focos de queimadas ou mais? **10 c.** Aproximadamente 29,6%.

11. Observe as contribuições fiscais, em real, de 40 pessoas sorteadas ao acaso durante um ano.

200	150	780	2.132	1.976
208	624	2.236	4.404	5.132
832	676	3.172	3.208	2.132
988	3.926	1.196	2.132	3.728
728	2.948	1.248	2.704	5.928
988	1.710	1.716	1.404	4.108
468	2.392	2.028	4.472	3.174
624	3.959	4.040	1.092	1.040

a. Organize os dados em ordem crescente.

b. Agrupe os dados em uma tabela de frequências com intervalos. Use uma amplitude de intervalo conveniente.

c. Qual é o intervalo de contribuições fiscais com mais ocorrências?

12. ***SOFTWARE*** Escolha uma variável quantitativa e colete dados de todos os estudantes de sua turma para essa variável.

Em seguida, se possível, usando uma planilha eletrônica, construa uma tabela de frequências (com as frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada) para organizar os dados obtidos. Verifique a conveniência ou não de agrupar os dados em intervalos.

12. Resposta pessoal.

11 b. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

11 c. Exemplo de resposta: Usando intervalos com amplitude de 900 reais, há mais ocorrências no intervalo [150, 1.050[.

Histograma e diagrama de ramo e folhas

Quando há muitos valores distintos para uma variável numérica, convém organizar os dados em intervalos (ou classes) com amplitude conveniente. Mas como representar graficamente os dados em situações como essa?

Agora, vamos estudar dois tipos de representação que podem ser usados nesse caso: o histograma e o diagrama de ramo e folhas.

Observe o salário, em real, de 35 funcionários da empresa RBA.

998	2.000	9.600	3.200	998	8.500	1.300
6.700	1.790	2.700	7.000	3.400	4.600	1.140
4.500	1.500	1.200	6.800	8.000	1.250	3.600
1.780	2.500	4.500	5.500	4.600	3.600	1.500
1.000	6.900	1.900	1.000	6.250	8.030	5.000

Podemos organizar esses dados agrupando-os em intervalos e, depois, construir um gráfico chamado histograma.

O **histograma** é um gráfico formado por retângulos justapostos, cujas bases são construídas sobre o eixo das abscissas e correspondem aos intervalos, e as medidas de altura são proporcionais à frequência do respectivo intervalo.

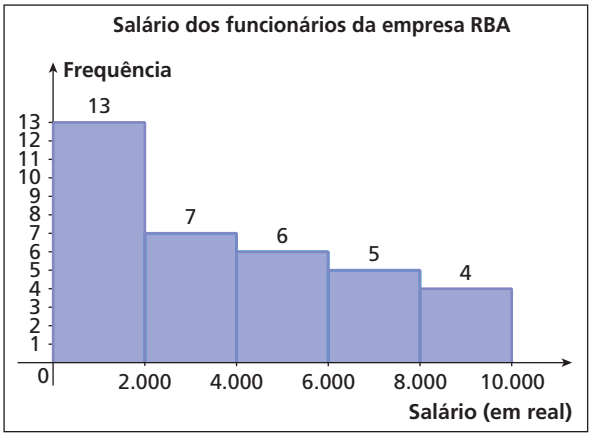
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe como ficaria a tabela de frequências e o histograma considerando intervalos de 2.000 reais, começando em zero.

Salário dos funcionários da empresa RBA

Salário (em real)	Frequência (f_i)
0 ⊢ 2.000	13
2.000 ⊢ 4.000	7
4.000 ⊢ 6.000	6
6.000 ⊢ 8.000	5
8.000 ⊢ 10.000	4

Fonte: elaborado para fins didáticos.



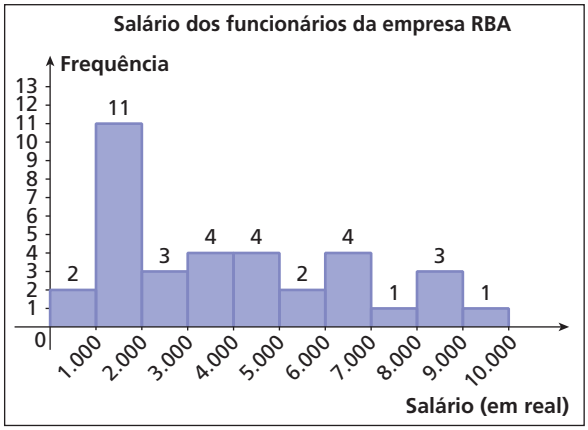
Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observe, agora, como ficaria a tabela de frequências e o histograma para representar os mesmos dados considerando intervalos de 1.000 reais, começando em zero.

Salário dos funcionários da empresa RBA

Salário (em real)	Frequência (f_i)
0 ⊢ 1.000	2
1.000 ⊢ 2.000	11
2.000 ⊢ 3.000	3
3.000 ⊢ 4.000	4
4.000 ⊢ 5.000	4
5.000 ⊢ 6.000	2
6.000 ⊢ 7.000	4
7.000 ⊢ 8.000	1
8.000 ⊢ 9.000	3
9.000 ⊢ 10.000	1

Fonte: elaborado para fins didáticos.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observação

A amplitude dos intervalos pode alterar totalmente a interpretação de uma situação.

No exemplo apresentado, se considerarmos os intervalos de 2.000 reais, concluímos que há 13 funcionários com salário menor que 2.000 reais, mas só quando consideramos os intervalos de 1.000 reais é possível identificar que poucos funcionários tem salário inferior a 1.000 reais e que existe uma alta concentração de funcionários com salários de 1.000 a 2.000 reais.

Outra maneira de representar esse conjunto de dados é construir um **diagrama de ramo e folhas**. Uma vantagem desse diagrama sobre o histograma é que não perdemos (ou perdemos pouca) informação sobre os dados em si.

A ideia básica do diagrama de ramo e folhas é dividir cada observação em duas partes: a primeira (o ramo) é colocada à esquerda de uma linha vertical; a segunda (a folha) é colocada à direita. A escolha da ordem de grandeza dos valores do ramo e das folhas dependerá da natureza dos dados e deve estar explicitada na legenda do diagrama.

Observe como poderíamos construir um diagrama de ramo e folhas para os salários dos funcionários da empresa RBA com os ramos representando unidades de milhar e as folhas representando unidades.

Salário dos funcionários da empresa RBA

0	998 998
1	000 000 140 200 250 300 500 500 780 790 900
2	000 500 700
3	200 400 600 600
4	500 500 600 600
5	000 500
6	250 700 800 900
7	000
8	000 030 500
9	600

3 | 600 = 3.600 reais

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos acompanhar mais alguns exemplos.

a. Observe a medida de altura, em centímetro, dos estudantes da turma de Ana.

156	145	163	165	157	171	167
172	158	165	170	166	162	169
160	167	170	162	164	158	176
168	190	169	175	169	175	160

Um possível diagrama de ramo e folhas para representar esse conjunto de dados seria:

Medida da altura dos estudantes

14	5
15	6 7 8 8
16	0 0 2 2 3 4 5 5 6 7 7 8 9 9 9
17	0 0 1 2 5 5 6
18	
19	0

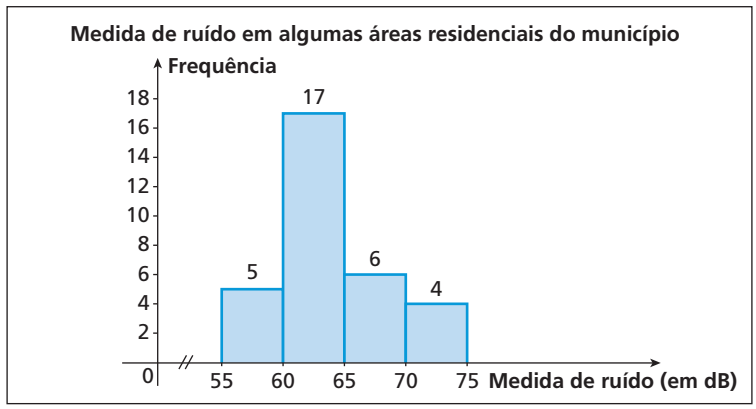
14 | 5 = 145 cm

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observação

Usamos o símbolo —//— para indicar que o intervalo de 0 a 55 não é proporcional aos demais intervalos marcados no eixo horizontal.

b. Consideremos a situação e a tabela apresentadas nas páginas 41 e 42. Poderíamos construir o seguinte histograma com as medidas de ruído registradas:

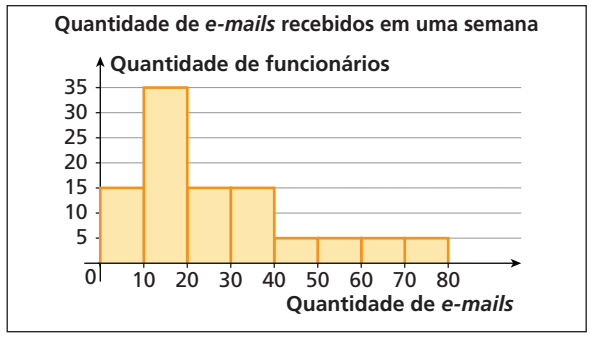


Fonte: elaborado para fins didáticos.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

13. Uma empresa registrou a quantidade de *e-mails* recebidos por seus funcionários durante uma semana neste histograma.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Com base no histograma, construa uma tabela com as frequências absoluta, relativa, absoluta acumulada e relativa acumulada. **13.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

14. Qual dos histogramas de salário dos funcionários da empresa RBA da página 45, seria melhor para identificar quantas pessoas ganham até R$ 5.000,00? **14.** O segundo histograma.

15. **ARGUMENTAÇÃO** Em relação aos histogramas apresentados anteriormente, o que podemos observar comparando a medida de área de cada retângulo e a frequência absoluta associada a ele?

15. Como os intervalos dos histogramas têm a mesma amplitude, as medidas de área dos retângulos são proporcionais às frequências absolutas (f_i) dos intervalos correspondentes.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

16 b. Não, pois é necessário conhecer cada um dos dados para construir o diagrama.

16. Em uma fábrica de lâmpadas, foi feito um teste com uma amostra de 150 lâmpadas. Observe os resultados na tabela a seguir.

Medida de tempo de duração das lâmpadas

Medida de tempo (em hora)	Número de lâmpadas (f_i)
0 ⊢ 1.000	5
1.000 ⊢ 2.000	10
2.000 ⊢ 3.000	42
3.000 ⊢ 4.000	75
4.000 ⊢ 5.000	18

16 a. Resposta no *Suplemento para o professor*. **Fonte:** elaborado para fins didáticos.

a. Com base na tabela, construa um histograma.

b. **ARGUMENTAÇÃO** Com esses dados, pode ser construído um diagrama de ramo e folhas? Justifique.

17. O diagrama a seguir apresenta as medidas de tempo de deslocamento, em minuto, dos estudantes do 1º ano B de casa até a escola.

Medida de tempo de deslocamento dos estudantes do 1º ano B de casa até a escola

0	8
1	0 2 5 7 8
2	2 2 3 3 5 6 7 8 8 9
3	0 1 3 4 5 6 6 7 7 8 9
4	2 4
5	4 7 9
6	
7	7

1 | 2 = 12 min

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Quantos estudantes há nessa turma? **17 a.** 33 estudantes.

b. Construa um histograma com os dados do diagrama.

c. As medidas de tempo de deslocamento estão mais concentradas entre quais medidas? **17 c.** De 10 a 39 minutos.

18. **ARGUMENTAÇÃO** Observe as representações a seguir do gasto, em real, com energia elétrica dos apartamentos de um condomínio em maio de 2024.

- **Representação 1**

Gasto com energia elétrica dos apartamentos do condomínio em maio de 2024

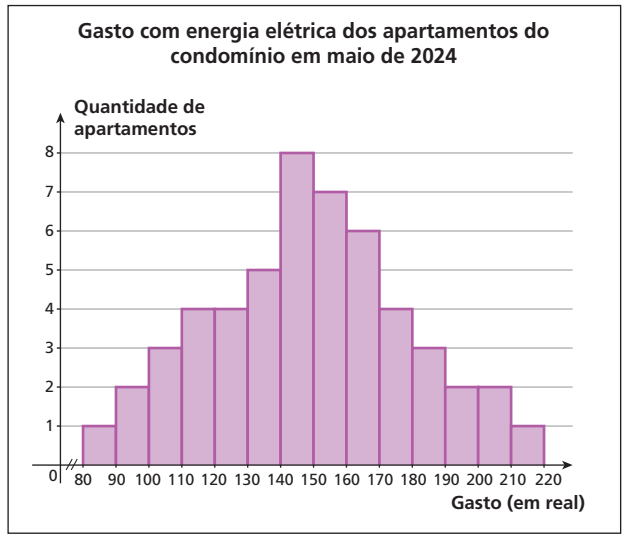
8	2
9	0 5
10	2 8 9
11	1 4 6 9
12	3 7 8 9
13	0 5 7 9 9
14	1 4 7 7 8 9 9 9
15	0 1 3 4 5 7 8
16	3 5 6 7 7 8
17	1 2 5 8
18	3 5 7
19	1 7
20	2 6
21	3

10 | 2 = 102 reais

Fonte: elaborado para fins didáticos.

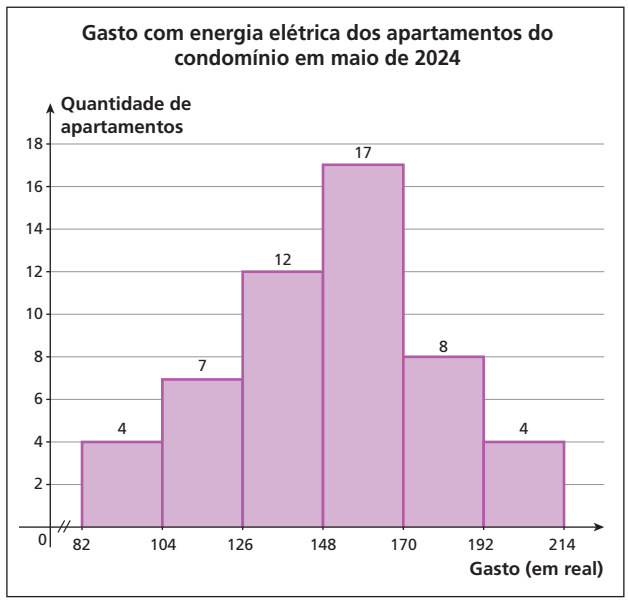
17 b. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

- **Representação 2**



Fonte: elaborado para fins didáticos.

- **Representação 3**



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Agora, responda às questões. **18 b.** Representação 3.

a. Em qual das representações há menos perda de informação sobre os dados? **18 a.** Na representação 1.

b. Qual das representações resumiu mais os dados, o que causou maior perda de informações?

c. Quantos apartamentos desse condomínio gastaram menos de R$ 150,00 com energia elétrica nesse mês? Como você determinou esse valor?

d. Algum dos apartamentos gastou mais de R$ 200,00 com energia elétrica? É possível responder a essa questão somente observando a representação 3? Justifique sua resposta. **18 d.** Sim; não é possível; justificativa no *Suplemento para o professor*.

e. Algum dos apartamentos gastou exatamente R$ 130,00 com energia elétrica? Qual representação você consultou para responder a essa questão? **18 e.** Sim; representação 1.

18 c. 27 apartamentos; resposta no *Suplemento para o professor*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

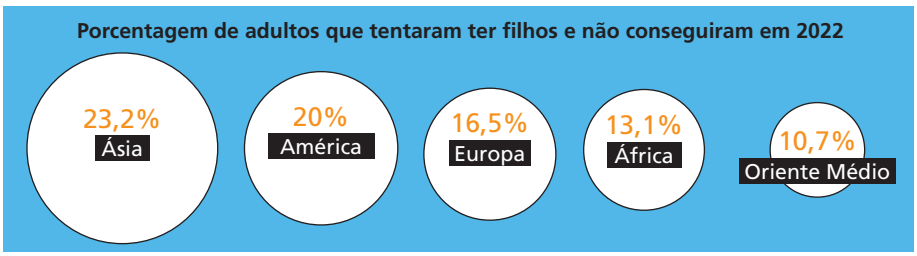
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Outras representações gráficas

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Neste tópico, vamos acompanhar exemplos de leitura e interpretação de gráficos. Alguns desses gráficos são de tipos diferentes dos que já estudamos, mas podem ser lidos com base nos conhecimentos que temos sobre a análise de alguns elementos, como título, eixos, legendas, valores expressos, escalas etc.

a. Observe o gráfico a seguir, que apresenta dados sobre a porcentagem de adultos de algumas regiões (Ásia, América, Europa, África e Oriente Médio) que tentaram ter filhos e não conseguiram em 2022.

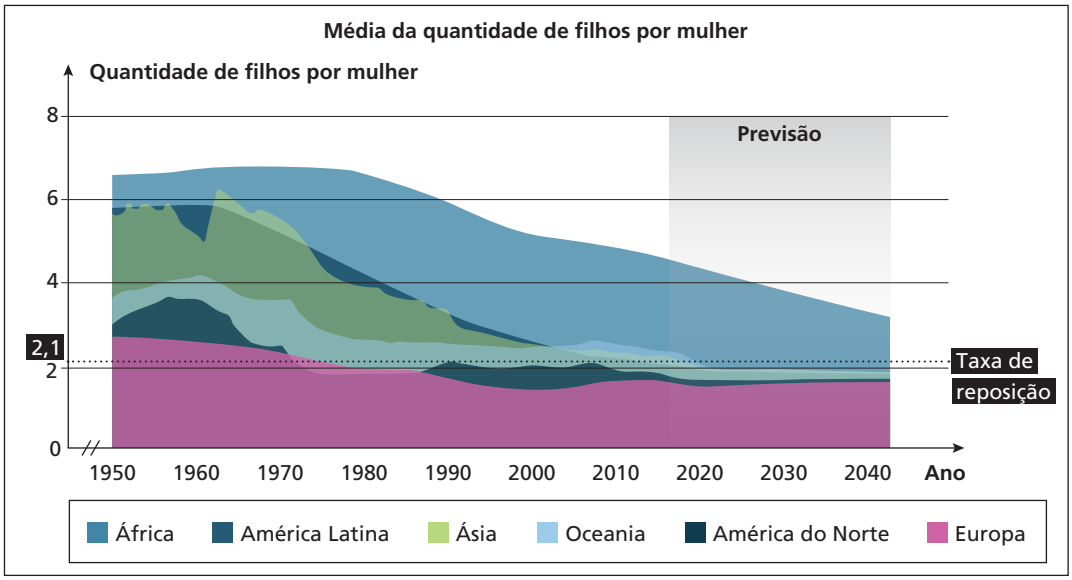


Fonte: elaborado com base em ABRIL. **Superinteressante**, ed. 459, p. 29, jan. 2024.

Esse gráfico apresenta diversos círculos, cujas medidas de área são proporcionais às porcentagens que cada um representa.

Analisando o gráfico, podemos concluir, sem comparar as porcentagens, que, entre as cinco regiões indicadas na representação, a Ásia foi o continente que teve mais adultos tentando ter filhos e não conseguindo em 2022, enquanto o Oriente Médio foi a região com menos adultos nessa situação.

b. O gráfico a seguir apresenta dados sobre a média do número de filhos por mulher, organizados por continentes.



Fonte: elaborado com base em ABRIL. **Superinteressante**, ed. 459, p. 25, jan. 2024.

Esse gráfico possibilita uma análise da queda do número de filhos por mulher, em média, além de permitir uma comparação entre os continentes.

Com base no gráfico, é possível chegar a algumas conclusões, como:

- por volta de 2020, o número de filhos por mulher passou a ficar abaixo da taxa de reposição em quase todos os continentes, com exceção apenas da África;
- a África e a Ásia foram os únicos continentes que apresentaram média de número de filhos por mulher acima de 6 em algum momento do período considerado;
- a Europa é o continente em que a média do número de filhos por mulher menos variou ao longo do período analisado;
- de acordo com a previsão, em 2040, a média do número de filhos por mulher na África estará com o menor índice no período considerado, mas ainda acima da taxa de reposição.

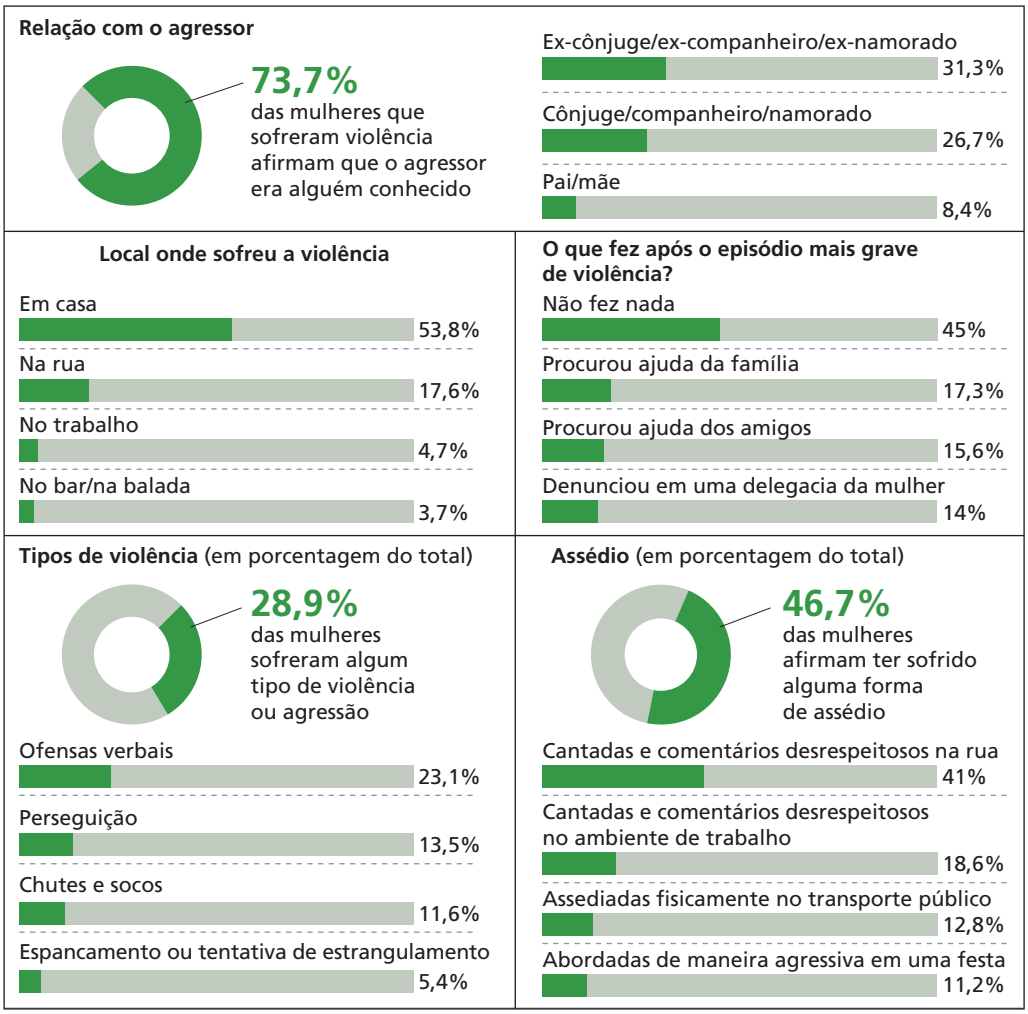
Observação

Note que a América do Norte e a América Latina foram analisadas separadamente no gráfico, embora sejam o mesmo continente (América).

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c. Observe alguns dados obtidos na pesquisa "Visível e Invisível: a vitimização de mulheres no Brasil", realizada em 126 municípios entre os dias 9 e 13 de janeiro de 2023, a respeito de violências vividas pelas entrevistadas nos 12 meses anteriores à pesquisa.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



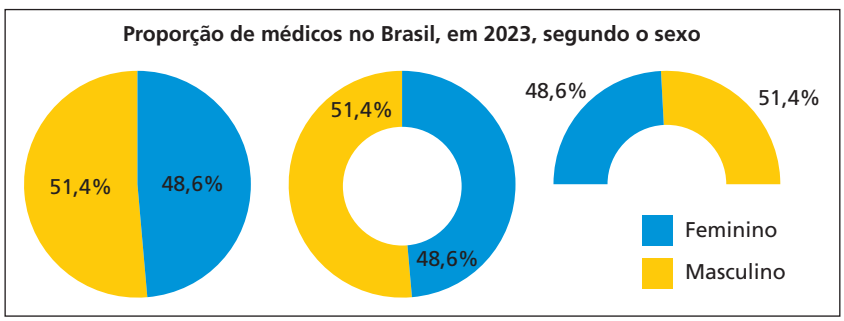
Fonte: elaborado com base em FÓRUM Brasileiro de Segurança Pública. **Visível e invisível**: a vitimização de mulheres no Brasil. 4. ed. [*S. l.*]: Fórum Brasileiro de Segurança Pública: Datafolha, 2023. Disponível em: https://publicacoes.forumseguranca.org.br/handle/123456789/224. Acesso em: 16 set. 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observação

No capítulo anterior, o gráfico de setores foi recomendado quando se deseja comparar o valor de cada categoria com o total. Alguns gráficos também possibilitam essa comparação, apesar de não usarem um círculo completo para representar o todo. Confira estes gráficos que transmitem a mesma informação.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Fonte: elaborado com base em SCHEFFER, M. *et al.* **Demografia médica no Brasil 2023**. São Paulo: FMUSP: AMB, 2023. Disponível em: https://amb.org.br/wp-content/uploads/2023/02/DemografiaMedica2023_8fev-1.pdf. Acesso em: 23 ago. 2024.

Com base nesse conjunto de gráficos, podemos concluir, por exemplo, que:

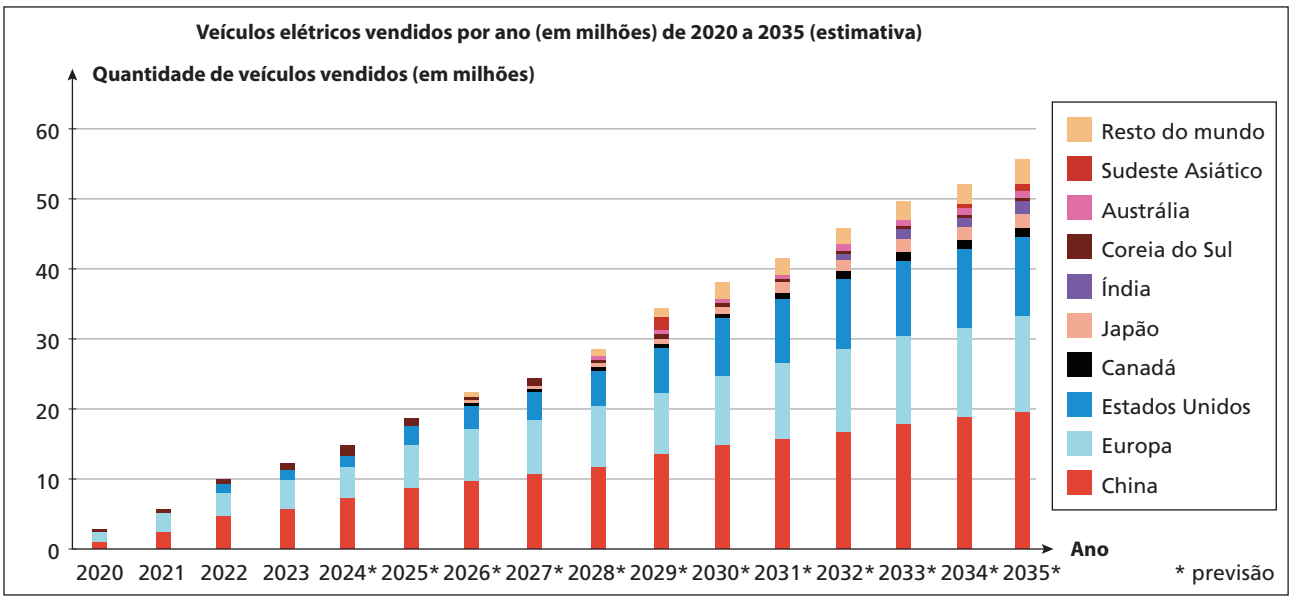
- a maioria das mulheres que sofreram violência (45%) não fez nada a respeito, e apenas 14% das vítimas procuraram uma delegacia da mulher;
- quase $\frac{3}{4}$ dos agressores das mulheres são pessoas conhecidas;
- 53,8% das mulheres agredidas sofreram a violência em casa;
- 46,7% das mulheres foram assediadas e 28,9% sofreram algum tipo de violência nos 12 meses que antecederam a pesquisa;
- 12,8% das mulheres foram assediadas fisicamente no transporte público;
- 23,1% das mulheres foram vítimas de ofensa verbal.

REPRODUÇÃO/OUVIDORIA DE SEGURANÇA PÚBLICA, MA

Cartaz da Central de Atendimento à Mulher – Ligue 180 divulgado pela Ouvidoria de Segurança Pública do Maranhão, em 2018. Essa central funciona 24 horas por dia, de segunda a domingo, inclusive feriados. A ligação é gratuita e o atendimento é de âmbito nacional.

ODS 7

d. Segundo os dados da Associação Brasileira de Veículo Elétrico (ABVE), a venda de carros elétricos ainda é baixa no Brasil, mas bateu recorde com quase 94.000 novos emplacamentos em 2023, 91% a mais do que em 2022. No entanto, no cenário mundial, esse número ainda é baixo. Agora, analise o gráfico a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Fonte: elaborado com base em ABRIL. **Exame**, ano 58, n. 1, ed. 1.259, p. 24, jan. 2024.

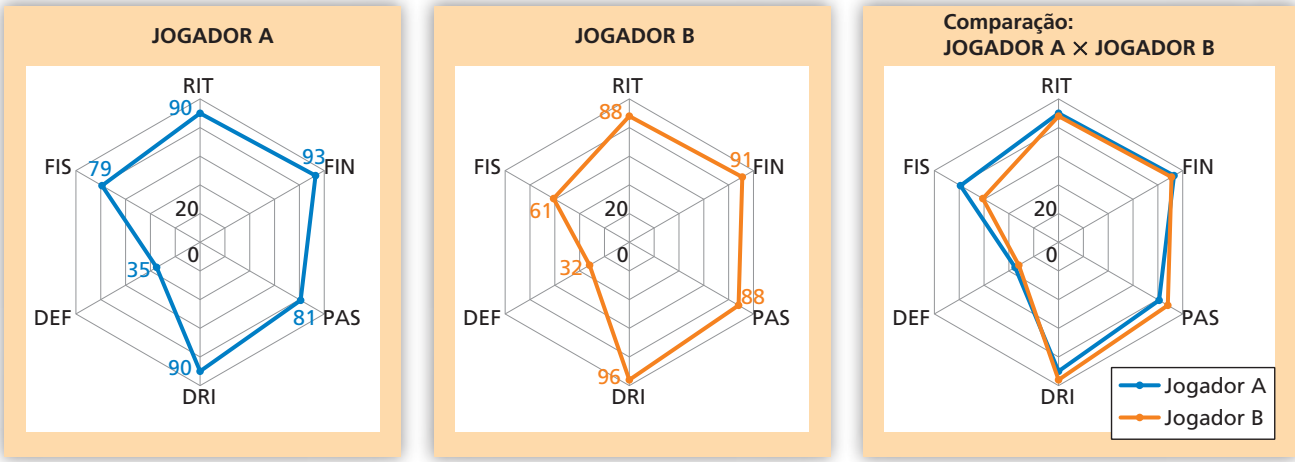
Esse gráfico apresenta, para cada ano (de 2020 a 2035 – estimativa), informações sobre a quantidade de veículos elétricos vendidos (em milhões) para alguns países e regiões e para o resto do mundo. Para cada ano, há uma barra de medida de altura total proporcional ao número total de vendas, dividida em partes de acordo com o local das vendas.

Com base nesse gráfico, é possível concluir, por exemplo, que:

- em 2020, a quantidade total de veículos elétricos vendidos no mundo todo ficou abaixo de 5 milhões;
- em 2020 e 2021, China, Europa e Coreia do Sul apresentavam destaque nas vendas de carros elétricos;
- as vendas de veículos elétricos nos Estados Unidos começaram a ter relevância apenas em 2022;
- segundo as previsões, a partir de 2027, as vendas da Coreia do Sul vão diminuir;
- de acordo com as estimativas para 2034, as vendas de carros elétricos ultrapassarão 50 milhões no mundo todo;
- em 2035, a China deve atingir a venda máxima para esse período;
- pelas estimativas, China, Europa e Estados Unidos serão os locais onde as vendas mais devem aumentar.

e. Certo jogo de futebol para *videogame* usa gráficos para mostrar e comparar as habilidades dos jogadores segundo seis critérios: ritmo (RIT), finalização (FIN), passe (PAS), drible (DRI), defesa (DEF) e físico (FIS). Cada jogador tem uma pontuação (de 0 a 100) para cada um dos critérios, de acordo com as estatísticas e o desempenho do jogador na vida real.

Observe os gráficos a seguir, com as pontuações e a comparação dos jogadores A e B nesse jogo.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORAGIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborados para fins didáticos.

Note que cada um desses gráficos apresenta seis semieixos positivos, um para cada critério, que têm a mesma escala e a mesma origem, cuja pontuação para cada um dos critérios é marcada no eixo correspondente por um ponto; assim, quanto maior for a pontuação, mais distante da origem estará o ponto que a representa.

Com base nos dois primeiros gráficos, é possível avaliar cada um dos jogadores individualmente. Já o terceiro gráfico, mesmo sem exibir os valores exatos das pontuações, permite uma comparação visual mais rápida entre os dois jogadores. Desse último gráfico é possível concluir, por exemplo, que o jogador A tem uma pontuação melhor que o jogador B nesse jogo no critério físico, enquanto o jogador B tem uma pontuação melhor no critério passe.

Atividades resolvidas

R3. A tabela a seguir apresenta os municípios mais populosos do Brasil em 2022. Construir um pictograma que represente esses dados.

Municípios mais populosos do Brasil em 2022

Município	População
São Paulo (SP)	11.451.999
Rio de Janeiro (RJ)	6.211.223
Brasília (DF)	2.817.381
Fortaleza (CE)	2.428.708
Salvador (BA)	2.417.678

Fonte: IBGE. **Panorama do Censo 2022**. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 23 ago. 2024. Embora não seja município, o IBGE armazena os dados referentes a Brasília como município por razões cadastrais.

▶ Resolução

Para fazer um pictograma, temos de escolher um símbolo e definir previamente seu valor. Como os valores da tabela estão entre 2.000.000 e 12.000.000, cada símbolo pode representar 1.000.000 de habitantes, e cada metade de um símbolo, 500.000 habitantes.

OBJETO DIGITAL Mapa clicável: Densidade demográfica

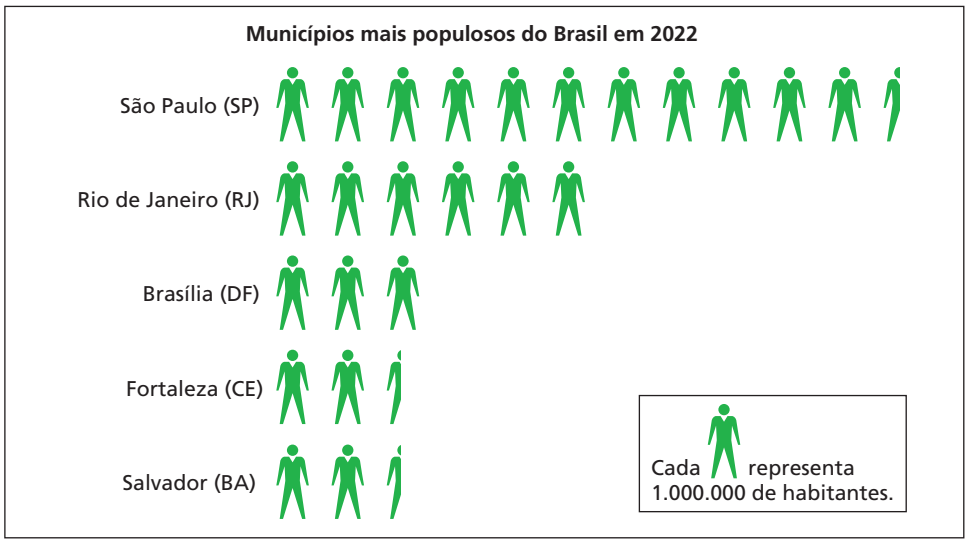
Este mapa clicável enriquece o contexto da **atividade resolvida R3**, apresentando a densidade demográfica das regiões brasileiras e os dados relativos às Unidades Federativas com maior e menor densidade demográfica em cada região.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim, podemos arredondar as quantidades de habitantes:

- de 11.451.999 para 11.500.000;
- de 6.211.223 para 6.000.000;
- de 2.817.381 para 3.000.000;
- de 2.428.708 para 2.500.000;
- de 2.417.678 para 2.500.000.

Então, teremos:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado com base em IBGE. **Panorama do Censo 2022**. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 23 ago. 2024. Embora não seja município, o IBGE armazena os dados referentes a Brasília como município por razões cadastrais.

R4. A tabela a seguir apresenta a receita cambial turística (gastos de turistas estrangeiros no Brasil) e a despesa cambial turística (gastos de brasileiros no exterior) do Brasil de 2007 a 2021.

Receita e despesa cambial turística no Brasil (em milhões de dólares)

Ano	Receita (em milhões de dólares)	Despesa (em milhões de dólares)
2007	4.953	8.211
2008	5.785	10.962
2009	5.305	10.898
2010	5.261	15.965
2011	6.095	20.802
2012	6.378	22.039
2013	6.474	25.028
2014	6.843	25.567
2015	5.844	17.357
2016	6.024	14.497
2017	5.809	19.002
2018	5.921	18.266
2019	5.995	17.593
2020	3.044	5.394
2021	2.947	5.250

ROBERTO CASIMIRO/FOTOARENA

Movimentação no Aeroporto Internacional de Guarulhos, em Guarulhos (SP). Foto de 2022.

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério do Turismo. **Receita e despesa cambial turística no Brasil**. Brasília, DF: Ministério do Turismo, 2022. Disponível em: https://www.gov.br/turismo/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/observatorio/estatisticas-e-indicadores/receita-e-despesa-cambial-turistica-no-brasil-1/receita-e-despesa-cambial-turistica-no-brasil. Acesso em: 23 ago. 2024.

Utilizando uma planilha eletrônica, construir um gráfico de linhas duplas e um gráfico de barras duplas verticais para representar esses dados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

▶ Resolução

Para construir os gráficos usando uma planilha eletrônica, inicialmente é necessário copiar a tabela na planilha.

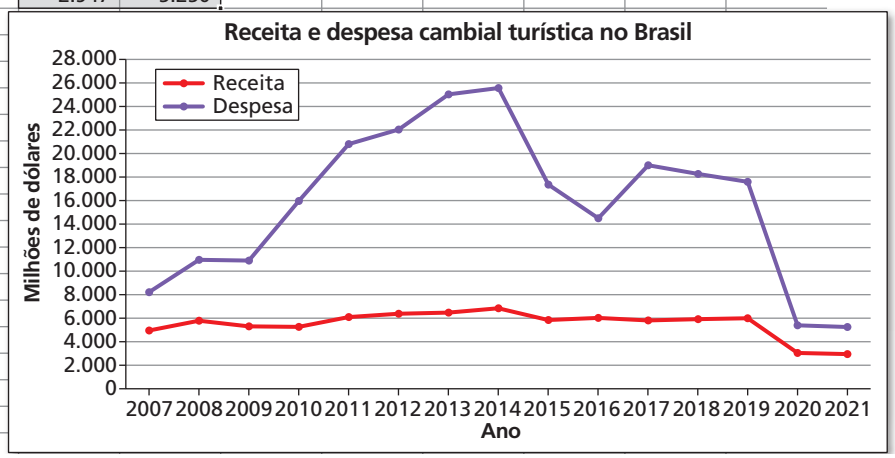
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

B3 | *Fórmula* | 4953

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Receita e despesa cambial turística no Brasil (em milhões de dólares)**								
2	**Ano**	**Receita (em milhões de dólares)**	**Despesa (em milhões de dólares)**						
3	2007	4.953	8.211						
4	2008	5.785	10.962						
5	2009	5.305	10.898						
6	2010	5.261	15.965						
7	2011	6.095	20.802						
8	2012	6.378	22.039						
9	2013	6.474	25.028						
10	2014	6.843	25.567						
11	2015	5.844	17.357						
12	2016	6.024	14.497						
13	2017	5.809	19.002						
14	2018	5.921	18.266						
15	2019	5.995	17.593						
16	2020	3.044	5.394						
17	2021	2.947	5.250						

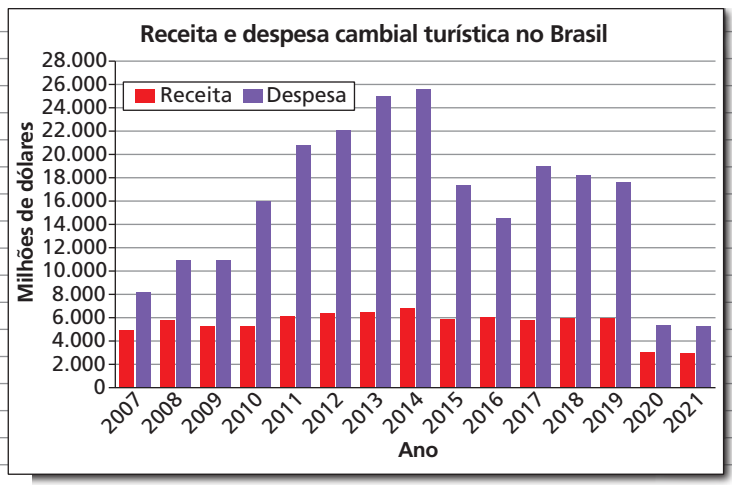
Para construir o gráfico de linhas duplas, selecionamos os dados da tabela e escolhemos a opção para inserir gráfico de linha. Há diversas opções de estilo para esse tipo de gráfico (com linhas horizontais auxiliares, sem um dos eixos, em duas dimensões, em três dimensões etc.).

Depois que o gráfico estiver construído, é possível inserir nomes nos eixos, título e legenda, alterar cores, escalas e linhas auxiliares, inserir os valores juntos a cada ponto etc.



Para construir o gráfico de barras duplas verticais, o procedimento é parecido: basta selecionar os dados da tabela e escolher a opção Inserir gráfico de barras. Para esse tipo de gráfico, também há várias opções de estilo (barras verticais, horizontais, com linhas auxiliares, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar dos retângulos etc.).

Quando o gráfico estiver construído, é possível inserir nomes nos eixos, título, legenda, alterar cores, escalas, linhas auxiliares, inserir os valores junto a cada barra etc.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades propostas

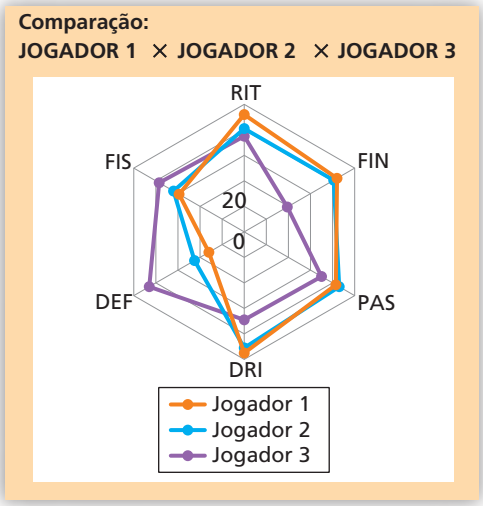
Registre em seu caderno

19. **ARGUMENTAÇÃO** Que outras conclusões podem ser tiradas do gráfico com a estimativa de venda de veículos elétricos até 2035 da página 50? Escreva outras três conclusões.

19. Resposta pessoal.

20. **ARGUMENTAÇÃO** Suponha que você esteja disputando uma partida de futebol no jogo de *videogame* citado anteriormente e pretenda fazer uma substituição. Você tem três jogadores disponíveis e quer que seu time melhore na defesa.

Observe o gráfico a seguir, comparando três jogadores, e decida qual deles você escolheria para entrar em jogo. Justifique sua escolha.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

21. **ARGUMENTAÇÃO** Na **atividade resolvida R3**, poderíamos representar a situação utilizando outros valores para cada símbolo? Dê alguns exemplos.

21. Sim; resposta no *Suplemento para o professor*.

22. Apenas observando os gráficos da **atividade resolvida R4**, sem realizar contas, responda às questões a seguir.

a. A balança comercial do turismo (diferença entre receita e despesa cambial turística) foi positiva em algum ano de 2007 a 2021? Em qual(is) ela foi negativa?

b. Em qual ano do período apresentado a receita cambial turística foi maior? Que grande evento internacional ocorreu no Brasil nesse ano?

22 b. 2014; Copa do Mundo de Futebol.

23. Esta tabela apresenta os municípios menos populosos do Brasil em 2022.

Municípios menos populosos do Brasil em 2022

Município	População
Serra da Saudade (MG)	833
Borá (SP)	907
Anhanguera (GO)	924
Araguainha (MT)	1.010
Nova Castilho (SP)	1.062

Fonte: elaborado com base em IBGE. **Panorama do Censo 2022**. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 23 ago. 2024

GUILHERME ENQUADRA/FOTOARENA

Serra da Saudade (MG), localizada a cerca de 250 quilômetros a oeste de Belo Horizonte, é o município menos populoso do país. Foto de 2024.

a. Para esse caso, seria coerente construir um pictograma em que cada símbolo representasse 1.000.000 de habitantes como no gráfico da **atividade resolvida R3**? Por quê?

b. Faça um pictograma para representar os dados dessa tabela.

c. Pesquise o número de habitantes do seu município e compare esse número com a população de Serra da Saudade em 2022.

23 c. Resposta pessoal.

24 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

24. Segundo o Banco Mundial, a expectativa de vida no nascimento indica o número de anos que um recém-nascido viveria se os padrões de mortalidade no momento do nascimento permanecessem os mesmos em toda a sua vida.

Nesta tabela, analise a expectativa de vida de Brasil, Japão e Serra Leoa de 1960 a 2021. Depois, faça o que se pede.

Expectativa de vida no nascimento

Ano \ País	Brasil	Japão	Serra Leoa
1960	53	68	34
1965	55	71	36
1970	57	72	39
1975	59	74	41
1980	62	76	43
1985	64	78	44
1990	66	79	44
1995	68	80	43
2000	70	81	45
2005	72	82	43
2010	73	83	54
2015	74	84	57
2021	73	84	60

Fonte: elaborado com base em THE WORLD BANK. **Life expectancy at birth, total (years): Sierra Leone, Brazil, Japan**. Disponível em: https://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.LE00.IN?end=2021&locations=SL-BR-JP&most_recent_value_desc=true&start=1960&view=chart. Acesso em: 23 ago. 2024.

a. ***SOFTWARE*** Se possível, use uma planilha eletrônica para construir dois gráficos diferentes para representar os dados da tabela.

24 b. Não, pois o gráfico de setores é usado para comparar as partes com o todo.

b. **ARGUMENTAÇÃO** Seria coerente representar esses dados em um ou mais gráficos de setores? Por quê?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

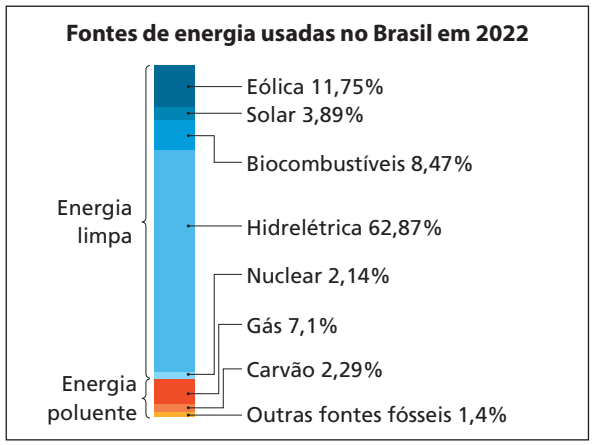
22 a. Não, a balança comercial do turismo foi negativa em todos os anos de 2007 a 2021.

23 a. Não, pois teríamos de arredondar todos os valores da tabela para 500.000 (e representá-los por meio símbolo) ou para zero.

Complementando o assunto trabalhado na **atividade 25**, este infográfico reforça a importância da conscientização sobre o modo como produzimos e consumimos energia, trocando combustíveis fósseis muito poluentes por fontes de energia renováveis, promovendo o desenvolvimento das **competências gerais 7** e **10** e dialogando com o **TCT Educação Ambiental**.

OBJETO DIGITAL **Infográfico clicável: Transição energética**

25. Observe o gráfico a seguir, que apresenta as fontes de energia usadas no Brasil em 2022 e, depois, responda às questões.



Fonte: elaborado com base em ABRIL. **Superinteressante**, ed. 459, p. 13, jan. 2024.

a. Qual era o tipo de fonte de energia mais usado no Brasil? **25 a.** Hidrelétrica.

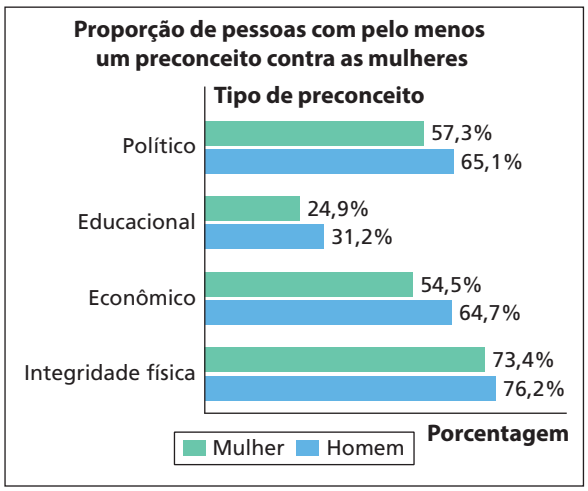
b. Quais eram os tipos de fontes de energia limpa usados no Brasil? **25 b.** Hidrelétrica, eólica, solar, biocombustíveis e nuclear.

c. Qual era a diferença entre as porcentagens de uso de energia de fontes limpa e poluente? **25 c.** 78,33%

d. **EM GRUPO** Por que a energia nuclear é considerada uma fonte de energia limpa? Pesquise o assunto e compartilhe com os colegas o que encontrar. **25 d.** Porque as usinas nucleares não emitem gases de efeito estufa.

26. Uma pesquisa realizada pela ONU com dados de 2010 a 2014 e de 2017 a 2020 em 80 países e territórios, totalizando 85% da população mundial, revelou que o Índice de Normas Sociais de Gênero (GSNI) quantifica os preconceitos em relação às mulheres, obtendo a opinião das pessoas a respeito do papel da mulher em quatro aspectos.

De maneira geral, observou-se que 9 em cada 10 pessoas (homens e mulheres) têm preconceitos fundamentais contra as mulheres. Observe os dados a respeito das quatro dimensões no gráfico a seguir.



Fonte: elaborado com base em ONU. **Breaking down gender biases**: shifting social norms towards gender equality. 2023. Disponível em: https://www.undp.org/pt/brazil/desenvolvimento-humano/publications/indice-de-normas-sociais-de-genero-2023-gsni. Acesso em: 23 ago. 2024.

EM GRUPO **ARGUMENTAÇÃO** Você conhece ou já presenciou alguma mulher em uma situação preconceituosa por ser mulher? Converse com os colegas sobre esse assunto e analisem o que está sendo feito pela sociedade e o que todos podem fazer para evitar esses preconceitos contra as mulheres. **26.** Respostas pessoais.

Em seguida, de acordo com as informações fornecidas no gráfico, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

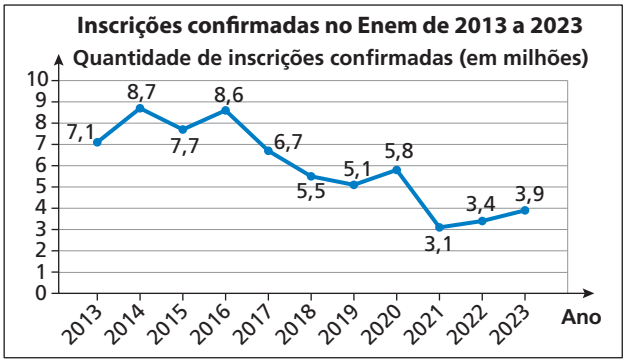
a. As mulheres sofrem mais preconceitos das próprias mulheres do que de homens em todas as esferas estudadas na pesquisa. **26 a.** Falsa.

b. De acordo com a pesquisa, nas esferas analisadas, o aspecto em que as mulheres sofrem menos preconceito é o educacional. **26 b.** Verdadeira.

c. A diferença entre a porcentagem de homens e de mulheres que têm preconceito contra a mulher no aspecto da integridade física é de 2,8%. **26 c.** Verdadeira.

27. Em 2023, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) teve 3,9 milhões de inscritos, sendo a maioria mulheres: 2,4 milhões de mulheres e 1,5 milhão de homens. Outra informação de destaque é que quase 10% dos inscritos tinham mais de 30 anos: 9,4% tinham de 31 a 59 anos e 0,3% tinham 60 anos ou mais.

Analise este gráfico, que apresenta dados sobre os inscritos no Enem de 2013 até 2023.



Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Educação. 3,9 milhões estão inscritos no Enem 2023. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)**, 26 out. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/enem/3-9-milhoes-estao-inscritos-no-enem-2023. Acesso em: 23 ago. 2024.

De acordo com as informações apresentadas, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa.

a. Em 2013, o número de inscritos no Enem ultrapassou 7 milhões. **27 a.** Verdadeira.

b. O Enem 2014 foi o que teve o maior número de inscritos nesse período. **27 b.** Verdadeira.

c. Aproximadamente 11,7 mil inscritos no Enem 2023 tinham 60 anos ou mais. **27 c.** Verdadeira.

d. Aproximadamente 61,5% dos inscritos no Enem 2023 eram mulheres. **27 d.** Verdadeira.

e. De 2016 a 2019, o número de inscritos no Enem caiu a cada ano. **27 e.** Verdadeira.

f. O Enem ocorrido em 2021 teve aproximadamente 3.100 inscritos. **27 f.** Falsa.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

28. A cultura e as tradições dos povos indígenas foram marginalizadas historicamente, mas essa realidade está mudando, inclusive com a oferta de materiais pedagógicos voltados para a Educação Indígena, que respeitam e preservam as especificidades culturais dos povos indígenas.

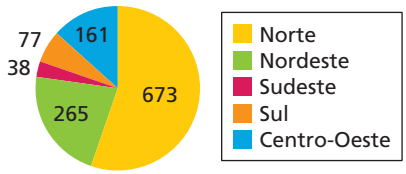
Segundo os dados do *Anuário Brasileiro da Educação Básica 2021*, em 2020, existiam 3.363 escolas em terras indígenas no Brasil e apenas 1.214 delas utilizavam materiais pedagógicos voltados para a Educação Indígena.

EM DUPLA **ARGUMENTAÇÃO** Até que ponto você considera importante o uso desses materiais pedagógicos? Converse com um colega sobre esse assunto e pesquisem outras formas de reconhecimento das tradições indígenas praticadas atualmente. **28.** Respostas pessoais.

Em seguida, analise este gráfico.

RENAN ORACIG/ARQUIVO DA EDITORA

Escolas em terras indígenas com materiais pedagógicos para a Educação Indígena em 2020 por região



Fonte: elaborado com base em TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Anuário Brasileiro da Educação Básica 2021**. Disponível em: https://todospelaeducacao.org.br/wordpress/wp-content/uploads/2021/07/Anuario_21final.pdf. Acesso em: 23 ago. 2024.

PIRATÁ WAURA/PULSAR IMAGENS

Aula em escola da etnia Waujá na aldeia Piyulaga, no Parque Indígena do Xingu, no município de Gaúcha do Norte (MT). Foto de 2023.

De acordo com os dados apresentados, classifique cada afirmação em verdadeira ou falsa em relação à educação indígena no Brasil.

a. A Região Norte tinha 673 escolas em terras indígenas que utilizavam materiais pedagógicos para a Educação Indígena. **28 a.** Verdadeira.

b. A Região Centro-Oeste é a que tinha mais escolas em terras indígenas que utilizavam materiais pedagógicos para a Educação Indígena. **28 b.** Falsa.

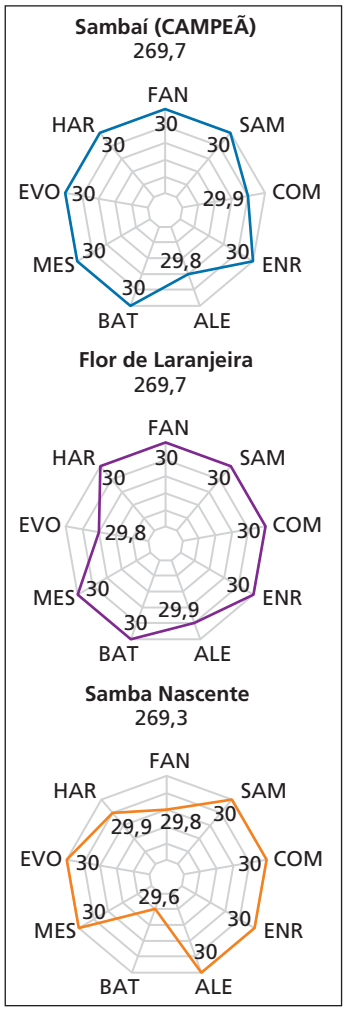
c. No Brasil, havia 2.242 escolas em terras indígenas. **28 c.** Falsa.

d. Na Região Sudeste, havia 38 escolas em terras indígenas. **28 d.** Falsa.

e. 36% das escolas brasileiras utilizavam materiais pedagógicos para a Educação Indígena. **28 e.** Falsa.

29. No município de Sol Nascente, os desfiles de Carnaval são julgados considerando os seguintes quesitos: fantasia (FAN), samba-enredo (SAM), comissão de frente (COM), enredo (ENR), alegoria (ALE), bateria (BAT), mestre-sala e porta-bandeira (MES), evolução (EVO) e harmonia (HAR).

Os gráficos a seguir mostram a pontuação, em cada quesito, das três melhores escolas de samba do Carnaval de Sol Nascente no ano passado.



Fonte: elaborados para fins didáticos.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com os gráficos apresentados, responda às questões.

a. Qual foi a escola que obteve a maior pontuação no quesito alegoria?

b. Qual foi a escola que teve o menor número de quesitos com pontuação máxima (30)?

c. **ARGUMENTAÇÃO** Por que a escola Sambaí foi campeã se a pontuação total da Flor de Laranjeira foi a mesma (269,7 pontos)? É possível responder a essa pergunta apenas com as informações do enunciado e dos gráficos?

30. **EM DUPLA** **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** Pesquise em jornais, revistas e na internet gráficos estatísticos como os apresentados neste tópico. Escolha dois gráficos e crie uma atividade com cada um deles. Dê as atividades elaboradas por você para um colega resolver e resolva as atividades elaboradas por ele. **30.** Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

29 a. Samba Nascente, com 30 pontos.
29 b. Samba Nascente, com 6 quesitos com pontuação máxima.
29 c. Apenas com as informações do enunciado e dos gráficos não é possível responder à pergunta.

ANDREYPOPOV/ISTOCK/GETTY IMAGES

ODS 9

Os analistas de dados são fundamentais em diversos setores por possibilitarem que as informações disponíveis se tornem úteis para a empresa.

Analista de dados

Diariamente, as empresas acumulam grande quantidade de informações sobre vendas, perfis de clientes, dados da concorrência, número de acessos a *sites*, entre outras. O avanço tecnológico torna possível coletar um número cada vez maior de dados. O volume e a velocidade de coleta deles podem se tornar tão grandes que impossibilitariam seu tratamento por meio de *softwares* convencionais, e é nesse âmbito que os analistas de dados são necessários.

O analista de dados é o profissional responsável por transformar dados brutos em informações significativas que ajudam as empresas na tomada das melhores decisões para os negócios. Na prática, o trabalho do analista de dados consiste em:

- definir os objetivos da análise, compreendendo as necessidades e os requisitos da empresa;
- analisar dados presentes em bancos de dados, planilhas, registros de transações etc.;
- selecionar informações relevantes de tudo o que existe armazenado;
- comunicar as informações de maneira clara por meio, por exemplo, de tabelas ou gráficos.

Esse profissional é apto a trabalhar em uma ampla variedade de setores, como instituições financeiras, empresas de varejo, agências governamentais, entre outros. Em instituições financeiras, o analista de dados auxilia na identificação de riscos e oportunidades de investimentos ou na averiguação de fraudes. Em empresas de varejo, ele detecta preferências e padrões dos clientes, ajusta a estratégia de precificação ou prevê a demanda. Já nas agências governamentais, ele investiga dados sobre população, economia, saúde pública, segurança e outros aspectos que interferem na tomada de decisões políticas.

O analista de dados, geralmente, tem formação em cursos ligados à área da Tecnologia da Informação, como: Análise de Sistemas, Sistemas de Informação, Ciência da Computação e setores relacionados. Também podem ter formação em outros campos das Ciências Exatas, como Estatística ou Matemática.

Observação

O trabalho do analista de dados está diretamente ligado à Lei Geral de Proteção de Dados (LGPD), que foi publicada em 14 de agosto de 2018 e entrou em vigor em setembro de 2020. A LGPD regula o tratamento de dados pessoais no Brasil, garantindo a privacidade e proteção das informações dos indivíduos. Ela estabelece regras sobre como os dados podem ser coletados, armazenados e utilizados, assegurando que as empresas e profissionais, como analistas de dados, sigam práticas éticas e transparentes para proteger os direitos dos titulares dos dados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 c. Motocicletas, porque, em dezembro de 2023, a frota de motocicletas só não era maior que a de automóveis. A prioridade deveria ser dada para São Paulo, Minas Gerais e Ceará.

Atividades

Registre em seu caderno

1. **EM GRUPO** **ARGUMENTAÇÃO** Com base nas tarefas que realiza e em sua formação profissional, quais habilidades você considera que o analista de dados coloca em prática no dia a dia de sua profissão? Justifique sua resposta.

1. Resposta no *Suplemento para o professor*.

2. Imagine que você seja o analista de dados de uma rede de oficinas mecânicas especializada no conserto de automóveis e que precisa analisar os dados da planilha eletrônica a seguir.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Frota de veículos, por tipo e com placa, segundo as Grandes Regiões e as Unidades da Federação – dez. 2023**								
2									
3	**Grandes Regiões e Unidades da Federação**	**Automóvel**	**Caminhão**	**Micro-ônibus**	**Motocicleta**	**Ônibus**	**Trator de rodas**	**Triciclo**	**Utilitário**
4	**Brasil**	**61.803.369**	**3.088.034**	**444.520**	**26.928.037**	**708.332**	**38.382**	**44.466**	**1.580.714**
5	**Norte**	**2.098.399**	**175.889**	**16.693**	**2.562.940**	**50.862**	**471**	**6.239**	**54.580**
6	Acre	104.282	8.355	540	148.034	1.440	3	194	1.979
7	Amapá	99.588	4.929	538	77.902	1.457	10	429	1.683
8	Amazonas	453.760	23.032	3.765	374.175	10.669	112	2.382	8.184
9	Pará	739.071	73.655	7.633	1.131.972	22.129	239	2.617	24.408
10	Rondônia	339.823	33.427	1.549	458.412	7.360	53	364	7.947
11	Roraima	94.959	6.517	803	93.914	1.495	5	88	2.170
12	Tocantins	266.916	25.974	1.865	278.531	6.312	49	165	8.209
13	**Nordeste**	**8.009.114**	**522.720**	**102.109**	**8.061.577**	**147.192**	**1.582**	**10.126**	**247.627**
14	Alagoas	430.476	26.720	7.937	396.212	10.174	133	296	12.050
15	Bahia	2.159.342	138.737	33.811	1.603.042	47.138	360	2.944	55.006
16	Ceará	1.327.968	80.779	13.391	1.626.128	20.076	257	1.650	53.790
17	Maranhão	536.905	48.588	5.910	1.043.886	11.373	88	515	18.217
18	Paraíba	625.926	32.521	5.610	605.449	9.028	46	508	21.563
19	Pernambuco	1.474.949	97.420	20.947	1.279.463	22.943	329	1.807	36.316
20	Piauí	429.269	34.336	4.902	664.952	9.591	84	1.296	13.108
21	Rio Grande do Norte	646.534	40.102	5.908	523.132	8.314	145	602	28.763
22	Sergipe	377.745	23.517	3.693	319.313	8.555	140	508	8.814
23	**Sudeste**	**33.252.145**	**1.344.389**	**234.324**	**10.282.107**	**326.018**	**19.431**	**19.757**	**771.099**
24	Espírito Santo	1.110.725	82.818	9.564	542.506	17.065	2.888	2.729	37.416
25	Minas Gerais	7.188.271	383.821	53.811	2.982.523	90.772	2.588	6.724	138.873
26	Rio de Janeiro	4.920.814	154.425	41.461	1.218.877	44.720	796	3.099	103.258
27	São Paulo	20.032.335	723.325	129.488	5.538.201	173.461	13.159	7.205	491.552
28	**Sul**	**13.150.174**	**732.236**	**63.660**	**3.575.852**	**116.737**	**15.512**	**4.692**	**350.384**
29	Paraná	5.002.187	302.897	26.334	1.358.545	50.346	2.343	2.359	109.720
30	Rio Grande do Sul	4.772.945	256.425	23.205	1.205.446	43.371	9.334	1.381	110.624
31	Santa Catarina	3.375.042	172.914	14.121	1.011.861	23.020	3.835	952	130.040
32	**Centro-Oeste**	**5.293.537**	**312.800**	**27.734**	**2.445.561**	**67.523**	**1.386**	**3.652**	**157.024**
33	Distrito Federal	1.408.370	27.408	6.511	245.944	13.747	601	680	47.887
34	Goiás	2.137.530	128.980	11.664	1.030.524	26.686	292	1.247	54.082
35	Mato Grosso	900.847	94.109	4.854	740.363	15.913	202	1.111	31.338
36	Mato Grosso do Sul	846.790	62.303	4.705	428.730	11.177	291	614	23.717

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério dos Transportes. **Frota de veículos – 2023**. Frota nacional (dezembro 2023). Disponível em: https://www.gov.br/transportes/pt-br/assuntos/transito/conteudo-Senatran/frota-de-veiculos-2023. Acesso em: 23 ago. 2024.

2 b. Sudeste, porque apresentava a maior frota de automóveis em dezembro de 2023.

a. Qual é a coluna da planilha em que estão os dados que mais importam para a rede de oficinas? **2 a.** Coluna B.

b. **ARGUMENTAÇÃO** Em qual região do país deveria haver o maior número de oficinas? Por quê?

c. **ARGUMENTAÇÃO** Suponha que a rede de oficinas decida investir no conserto de outro tipo de veículo. Que tipo você recomendaria? Por quê? Cite três estados para os quais você daria prioridade nesse novo investimento.

d. **ARGUMENTAÇÃO** Em sua opinião, que outros tipos de dados seriam relevantes para a rede de oficinas? Por quê?

3. **EM DUPLA** Para executar suas tarefas, o analista de dados costuma utilizar *softwares* ou linguagens de programação específicas. Reúna-se com um colega e pesquisem essas ferramentas. Depois, compartilhem o resultado da pesquisa com os demais colegas e o professor. **3.** Resposta pessoal.

2 d. Exemplos de resposta: Despesas, lucro, grau de satisfação dos clientes, problemas mais frequentes apresentados pelos automóveis que chegaram às oficinas da rede etc.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

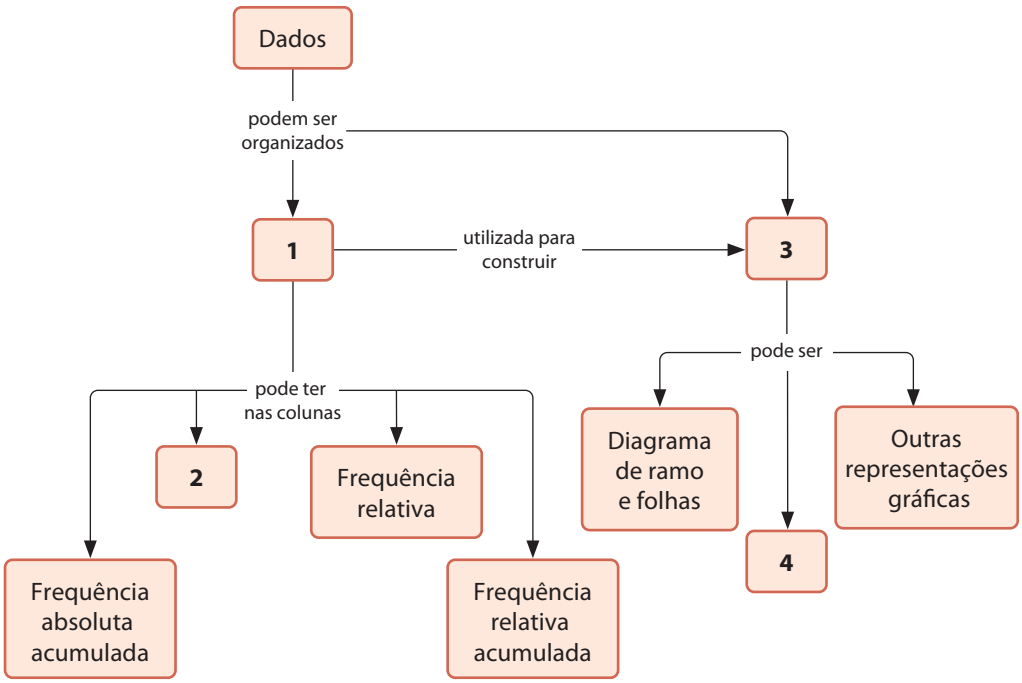
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 2

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 4; C – 1; D – 2.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Gráfico
B. Histograma
C. Tabela de frequências
D. Frequência absoluta

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

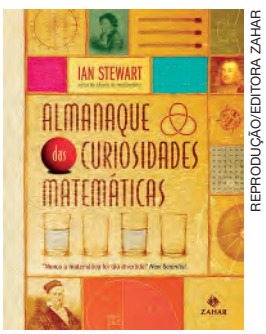
Livro

Almanaque das curiosidades matemáticas

Ian Stewart

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Esse almanaque é um conjunto de cadernos de anotações que o autor começou a fazer aos 14 anos de idade. Traz diversos tópicos, com temas variados relacionados à Matemática, apresentados por meio de jogos, quebra-cabeças, histórias, curiosidades, coisas para fazer ou construir etc. É uma leitura agradável e interessante para todos os públicos.



REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

Site

IBGEeduca – jovens

A área voltada para o público jovem do IBGEeduca traz informações relevantes e atualizadas sobre nosso país, seu território e sua população. Além disso, o *site* oferece materiais de estudo, mapas e matérias especiais sobre atualidades. Trata-se de uma fonte oficial e confiável de pesquisa que ajuda qualquer pessoa a se manter atualizada sobre nosso país.

Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/jovens. Acesso em: 23 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. A tabela de frequências relaciona: **Q1.** Alternativa **d**.

a. intervalo e intervalo.
b. amostra e população.
c. amostra e tabela.
d. variável e frequência.

Q2. Uma loja de roupas fez um levantamento sobre as quatro cores de camisetas mais vendidas durante um mês. Para organizar as informações, foi elaborada a tabela a seguir.

Cores de camisetas mais vendidas no mês

Cor	Frequência absoluta	Frequência relativa
Branca	90	15%
Preta	210	*b*
Azul	180	30%
Vermelha	120	*c*
Total	*a*	100%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Nessa tabela, *a*, *b* e *c* são: **Q2.** Alternativa **d**.

a. 400; 52%; 30%.
b. 300; 70%; 40%.
c. 510; 40%; 25%.
d. 600; 35%; 20%.

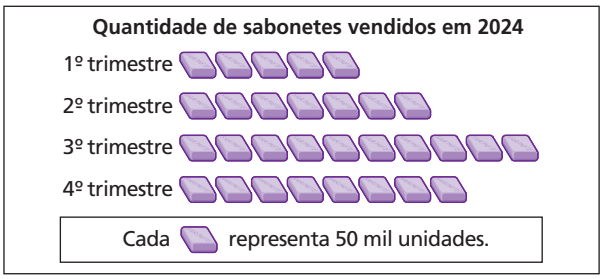
Q3. Para construir um histograma, no eixo das ordenadas, marcamos: **Q3.** Alternativa **a**.

a. as frequências.
b. os limites de cada intervalo.
c. o ponto médio de cada intervalo.
d. a amplitude de cada intervalo.

Q4. Em um diagrama de ramo e folhas, [redacted] são separados por uma linha vertical. **Q4.** Alternativa **c**.

a. o rol de dados e as frequências absolutas
b. os valores da variável e as frequências absolutas
c. os ramos e as folhas
d. os intervalos e as frequências relativas

Q5. Uma fábrica de sabonetes elaborou este pictograma com a quantidade de sabonetes vendidos em 2024.

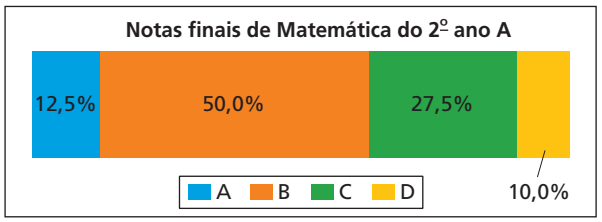


Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observando o gráfico, pode-se afirmar que, no 3º trimestre, essa empresa vendeu em torno de [redacted] sabonetes. **Q5.** Alternativa **b**.

a. 250 mil
b. 500 mil
c. 400 mil
d. 350 mil

Q6. Observe o gráfico a seguir.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Sabendo que o 2º ano A tem 40 estudantes, [redacted] tiveram, respectivamente, notas finais A, B, C e D. **Q6.** Alternativa **c**.

a. 4, 11, 20 e 5
b. 12, 50, 27 e 10
c. 5, 20, 11 e 4
d. 7, 02, 10 e 3

Q7. Para representar dados referentes a uma variável qualitativa, é coerente construir um [redacted]. **Q7.** Alternativa **b**.

a. gráfico de linha
b. gráfico de barras
c. diagrama de ramo e folhas
d. histograma

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
Organizar dados e construir tabelas de frequências.	X	X					
Interpretar e construir histogramas e diagramas de ramo e folhas.			X	X			X
Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.					X	X	X

Capítulo 3

MEDIDAS ESTATÍSTICAS

Este infográfico clicável apresenta dados sobre a população idosa brasileira e sobre o Estatuto da Pessoa Idosa que estabelece alguns direitos a essa população. Este OED promove o desenvolvimento da **competência geral 9** e da **competência específica 2** e dialoga com o **TCT Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso**.

Idade mediana é a idade que separa os 50% mais jovens dos 50% mais idosos de determinado local. A população mundial está ficando mais idosa, principalmente nos países desenvolvidos, onde a expectativa de vida é maior e a taxa de fecundidade é cada vez mais baixa.

O envelhecimento da população é um fenômeno mundial, e os governos precisam se adaptar ao novo quadro social. Os principais desafios a partir de agora estão:

- na área da saúde, que precisa atender à demanda de pessoas idosas;
- na previdência social, que precisa ter receita para cobrir as despesas com a aposentadoria de um número maior de pessoas idosas, considerando a redução progressiva da população jovem que trabalha para manter o sistema;
- no mercado de trabalho, que precisa criar condições para gerar emprego e contratações para a população idosa.

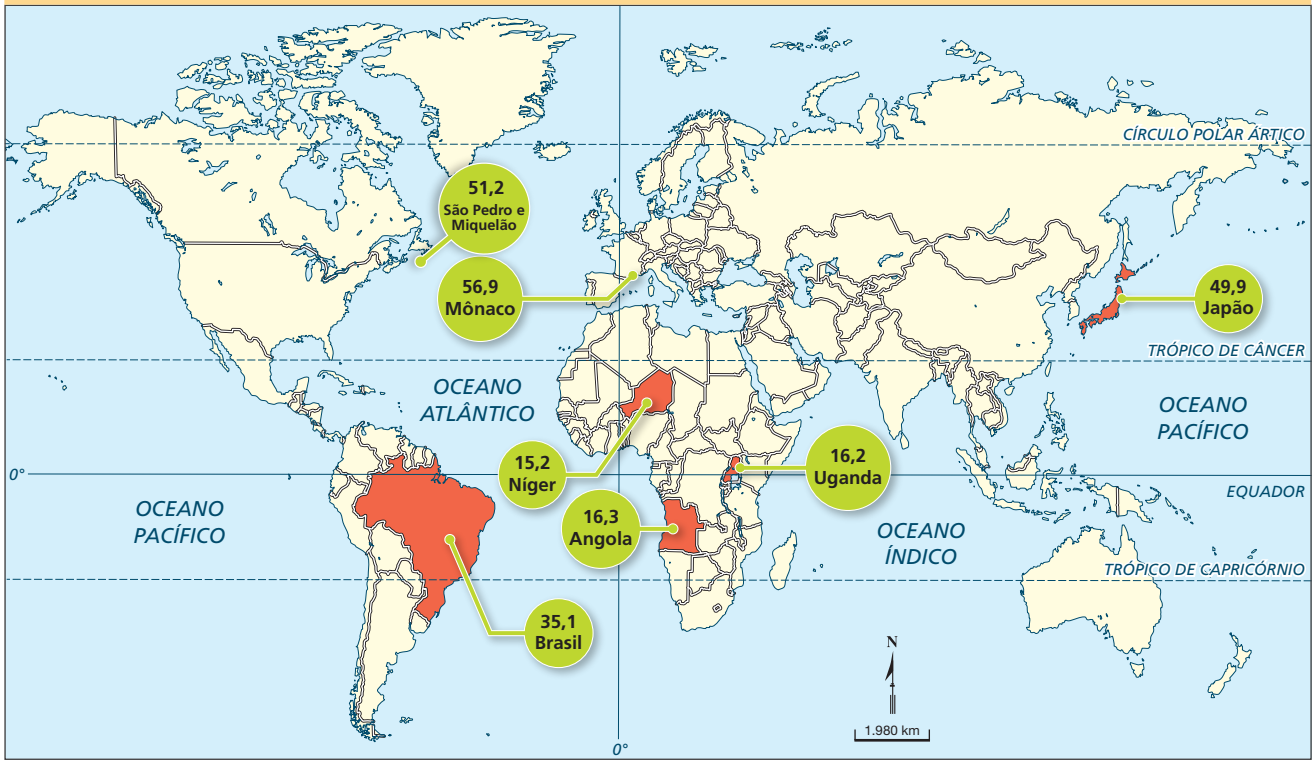
Observe, no mapa, a idade mediana em alguns países em 2024.

ODS 3

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

OBJETO DIGITAL
Infográfico clicável: Pessoas idosas no Brasil

IDADE MEDIANA EM ALGUNS PAÍSES EM 2024



Fonte: elaborado com base em CIA. The World Factbook. **Country Comparisons – Median age**. Disponível em: https://www.cia.gov/the-world-factbook/field/median-age/country-comparison/. Acesso em: 21 ago. 2024.

O mapa mostra a idade mediana em alguns países em 2024, de acordo com a classificação da Agência Central de Inteligência (CIA).

Os países com maior idade mediana em 2024 eram Mônaco (com 56,9 anos), São Pedro e Miquelão (com 51,2 anos) e Japão (com 49,9 anos) e os com menor idade mediana eram Níger (com 15,2 anos), Uganda (com 16,2 anos) e Angola (com 16,3 anos). O Brasil ocupava a 101ª posição, com idade mediana de 35,1 anos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Medidas de tendência central

Para realizar uma pesquisa estatística, é preciso coletar e organizar dados de uma população ou de uma amostra significativa a respeito do tema analisado. Como, em geral, se obtém uma grande quantidade de dados para apresentar o resultado da pesquisa, pode ser necessário escolher uma **medida** que resuma os dados obtidos.

No contexto apresentado, por exemplo, temos a idade **mediana** da população de diversas regiões. Além da mediana, outras medidas podem ser empregadas para representar dados (**medidas de tendência central**) e para indicar o quanto os dados estão dispersos em relação a essa medida representativa (**medidas de dispersão**).

As medidas estatísticas que descrevem a tendência que os dados têm de agrupamento em torno de certos valores recebem o nome de **medidas de tendência central**.

Neste capítulo, vamos estudar as medidas de tendência central: média, moda e mediana, e as medidas de dispersão: amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão.

Média aritmética

Das três medidas de tendência central que estudaremos, a média aritmética, chamada simplesmente de média, é a mais conhecida e utilizada por ser facilmente calculada e interpretada.

Média aritmética é o quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações. Indicamos a média por $\bar{x}$.

Assim, temos:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

em que x_1, x_2, ..., x_n são os valores que a variável assume e n é a quantidade de valores no conjunto de dados.

Observação

A letra grega maiúscula Σ (sigma) é usada para indicar uma soma.

A indicação $\sum_{i=1}^{n} x_i$ significa o **somatório** dos valores x para i variando de 1 a n.

Considere outros exemplos:

a. $\sum_{k=2}^{100} k = 2 + 3 + ... + 100$

b. $\sum_{i=m}^{n} f_i = f_m + f_{m+1} + f_{m+2} + ... + f_n$, para $m < n$

DEVOLMON/ISTOCK/GETTY IMAGES

Acompanhe o exemplo.

Na 2ª rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2023, foram realizadas 10 partidas. O número de gols por partida está apresentado na tabela a seguir.

2ª rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol em 2023

Partida	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Número de gols	2	3	2	1	3	4	0	3	4	3

Fonte: elaborado com base em CONFEDERAÇÃO Brasileira de Futebol. Brasileirão. **Tabela detalhada/Edição 2023**. Disponível em: https://conteudo.cbf.com.br/cdn/202312/20231207093855_481.pdf. Acesso em: 20 ago. 2024.

Vamos calcular a média de gols por partida dessa rodada, adicionando o número de gols de cada partida e dividindo o total obtido pelo número de partidas.

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 + 2 + 1 + 3 + 4 + 0 + 3 + 4 + 3}{10} = \frac{25}{10} = 2{,}5$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Logo, a média de gols por partida nessa rodada foi de 2,5.

Observe que o valor obtido para a média não coincidiu com nenhum dos números de gols por partida, pois a média não é necessariamente igual a um dos valores da variável.

A média de gols serve de parâmetro para, por exemplo, avaliar até que ponto os jogos da rodada foram ofensivos.

Média aritmética ponderada

Para o cálculo da média aritmética, todos os valores são adicionados um a um. Porém, em situações com valores repetidos, como a do exemplo a seguir, não é preciso adicioná-los um a um para calcular a média. Observe o recurso empregado em casos como esse.

Em uma escola, foi feita uma pesquisa sobre a idade dos estudantes do 2º ano A, que apresentou os resultados a seguir.

Idade dos estudantes do 2º ano A

Idade	15	16	17
Quantidade de estudantes	18	20	2

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Como os valores se repetem (uma mesma idade ocorre mais de uma vez), é possível calcular a média das idades da maneira a seguir.

$$\overline{x} = \frac{18 \cdot 15 + 20 \cdot 16 + 2 \cdot 17}{18 + 20 + 2} = \frac{624}{40} = 15{,}6$$

O número de vezes que um valor se repete recebe o nome de **peso**, e a média aritmética calculada com pesos é chamada de **média aritmética ponderada**.

Assim:

$$\overline{x} = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \ldots + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

em que x_i representa os valores da variável e p_i, os respectivos pesos.

Observe que os pesos correspondem às frequências absolutas (f_i) de cada valor.

O peso também pode representar a importância que cada valor tem na composição da média ponderada. Acompanhe o exemplo a seguir.

Em 2024, a nota final da 1ª fase do vestibular da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp) poderia ser calculada, caso o candidato assim escolhesse, pela média entre a nota obtida na 1ª fase (conhecimentos gerais) e a nota da parte objetiva do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Mas não era uma média simples, pois havia pesos para as notas: a nota da prova de conhecimentos gerais do vestibular tinha peso 4 no cálculo da média, e a nota da parte objetiva da prova do Enem, peso 1. A nota final ($\overline{x}$) da 1ª fase era dada por $\overline{x} = \frac{4 \cdot CG + 1 \cdot E}{5}$, em que CG é o percentual de acertos na prova de conhecimentos gerais do vestibular (escala de 0 a 100) e E é a média aritmética simples do percentual de acertos da parte objetiva da prova do Enem (escala de 0 a 100).

ALF RIBEIRO/FOTOARENA

Prédio de atividades didáticas da Faculdade de Filosofia e Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Marília (SP). Foto de 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Moda

Usa-se moda quando o objetivo é identificar a maior ocorrência ou preferência em dada situação, por exemplo, definir a faixa etária mais frequente de pessoas em certo local ou saber a numeração de roupas mais vendida de determinada marca. Em contraste com a média e a mediana, a moda pode ser empregada para variáveis qualitativas.

Observação

Variáveis qualitativas têm seus valores expressos por atributos não numéricos.

Variáveis quantitativas têm seus valores expressos por números.

Moda é(são) o(s) valor(es) que aparece(m) com maior frequência no conjunto de valores observados. Indicamos a moda por ***Mo***.

Analise os exemplos a seguir.

a. O conjunto de valores 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3 e 4 tem moda 1, pois é o valor que aparece o maior número de vezes.

b. Em uma pesquisa com 5 pessoas sobre o esporte preferido delas, 3 responderam futebol e 2 responderam natação. Logo, a moda da pesquisa é futebol, pois foi o esporte mais escolhido.

c. Em uma pesquisa sobre tipo sanguíneo com 20 pessoas, os resultados foram:

O, A, O, AB, B, A, O, AB, B, B, AB, O, B, AB, O, A, A, O, O, A

Nessa pesquisa, 7 pessoas têm tipo sanguíneo O; 5 pessoas, tipo A; 4 pessoas, tipo AB; e 4 pessoas, tipo B. Portanto, o tipo sanguíneo O é a moda dessa amostra, pois tem a maior frequência.

Quando todos os valores apresentam a mesma frequência, não há moda na distribuição considerada (amostra **amodal**). Existem também conjuntos de dados com duas modas (**bimodais**) ou mais modas (**multimodais**).

Acompanhe outros exemplos.

a. O conjunto de valores 1, 2, 3, 4, 5 e 6 é amodal, ou seja, não tem moda.

b. O conjunto de valores 1, 2, 2, 3, 4, 4 e 5 é bimodal, pois tem duas modas: 2 e 4.

c. O conjunto de valores 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10, 15, 15, 15, 15, 20, 20 e 30 é multimodal, pois tem mais de duas modas: 3, 5, 7 e 15.

Mediana

Mediana de um conjunto de valores previamente ordenados, de modo crescente ou decrescente, é o valor que divide esse conjunto em duas partes com o mesmo número de termos. Indicamos a mediana por ***Me***.

A mediana é uma medida usada quando os valores da amostra são discrepantes.

No estudo da mediana, devemos considerar que:

- quando há um conjunto de valores em **número ímpar de dados**, a mediana é o termo central da distribuição (nesse caso, ela pertence ao conjunto de valores observados);
- quando há um conjunto de valores em **número par de dados**, a mediana é a média aritmética dos termos centrais (nesse caso, ela pode não pertencer ao conjunto de valores observados).

Observação

Sendo n o número de termos do conjunto em ordem crescente ou decrescente, temos:

- se n for ímpar, a posição do termo central é dada por $\left(\frac{n+1}{2}\right)$;
- se n for par, as posições dos dois termos centrais são dadas por $\frac{n}{2}$ e $\left(\frac{n}{2}+1\right)$.

Observe o exemplo.

A tabela a seguir mostra os valores pagos em contas de água no primeiro semestre do ano pelo proprietário de uma pousada.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Valores pagos em contas de água

Mês	Valor (em real)
Janeiro	562,33
Fevereiro	350,12
Março	56,17
Abril	42,50
Maio	40,43
Junho	46,45

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Para calcular a média do valor pago no primeiro semestre, fazemos:

$$\bar{x} = \frac{562{,}33 + 350{,}12 + 56{,}17 + 42{,}50 + 40{,}43 + 46{,}45}{6} = 183{,}00$$

Portanto, em média, o valor da conta de água dessa pousada no primeiro semestre foi R$ 183,00.

Repare que essa medida não é fiel à realidade, uma vez que, de seis contas, quatro apresentam valor muito menor que a média encontrada. Isso ocorre porque, nos meses de janeiro e fevereiro, o consumo de água na pousada foi muito maior que o dos meses de março a junho.

Em situações como essa, em que existem valores discrepantes, a mediana é melhor que a média para representar o perfil do conjunto. Acompanhe o cálculo a seguir.

Primeiro, organizamos os dados em ordem crescente.

40,43 42,50 (46,45 56,17) 350,12 562,33

Termos centrais

Em seguida, identificamos o valor que fica "no meio". Como, no caso, temos um número par de dados, precisamos calcular a média aritmética dos dois termos centrais.

$$Me = \frac{46{,}45 + 56{,}17}{2} = 51{,}31$$

A mediana, então, representa os valores da conta de água dessa pousada no primeiro semestre do ano e traduz melhor a realidade do que a média.

Observação

Note que metade dos valores do conjunto está abaixo da mediana e a outra metade está acima.

Atividades resolvidas

R1. Os salários, em real, de 18 funcionários de uma empresa estão relacionados a seguir.

1.320 1.320 1.320 1.440 1.440 1.440 1.859 1.859 1.859
1.859 1.859 1.859 2.409 2.409 2.670 2.670 3.150 3.150

a. Qual é o salário mais frequente dessa empresa?
b. Qual é o salário médio desses funcionários?
c. Qual é o salário mediano desses funcionários?

▶ **Resolução**

a. O salário mais frequente é R$ 1.859,00, que corresponde à moda dos salários, já que 1.859 é o valor que mais se repete na relação de salários apresentada.

b. Para determinar o salário médio, podemos calcular a média ponderada dos salários.

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 1.320 + 3 \cdot 1.440 + 6 \cdot 1.859 + 2 \cdot 2.409 + 2 \cdot 2.670 + 2 \cdot 3.150}{18} = \frac{35.892}{18} = 1.994$$

Logo, o salário médio desses funcionários é R$ 1.994,00.

c. Temos um número par de valores. Então, precisamos encontrar os dois termos centrais da sequência crescente, isto é, o 9º e o 10º termos, e calcular a média entre eles. Como esses dois termos são iguais a 1.859, sua média é 1.859. Portanto, o salário mediano é R$ 1.859,00.

R2. No primeiro mês de um bimestre, um estudante obteve 4,5 de nota média entre dois trabalhos. No segundo mês, ele conseguiu nota 7 em uma prova e nota 9 em um trabalho. Considerando todas as notas, calcular a média bimestral desse estudante, sabendo que todos os trabalhos e a prova têm o mesmo peso.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

▶ **Resolução**

Indicando os dois primeiros trabalhos por t_1 e t_2, podemos escrever:

$$\frac{t_1 + t_2}{2} = 4{,}5 \Rightarrow t_1 + t_2 = 9$$

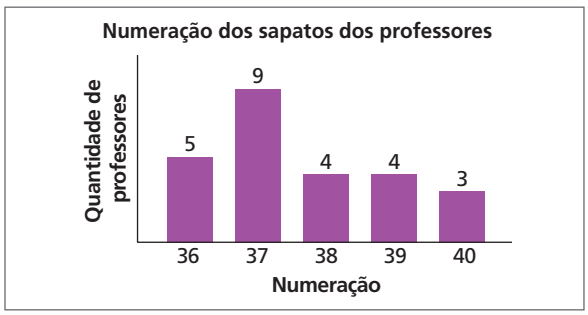
Indicando a nota da prova por p e a do terceiro trabalho por t_3, teremos como média bimestral:

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + p + t_3}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{9 + 7 + 9}{4} = 6{,}25$$

Portanto, a média bimestral desse estudante foi 6,25.

R3. Observe o gráfico a seguir, referente à numeração dos sapatos usados pelos professores de uma escola.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Calcular a média, a mediana e a moda da numeração dos sapatos desses professores.

▶ **Resolução**

• Podemos calcular a média da maneira a seguir.

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 36 + 9 \cdot 37 + 4 \cdot 38 + 4 \cdot 39 + 3 \cdot 40}{5 + 9 + 4 + 4 + 3}$$

$$\bar{x} = \frac{941}{25} = 37{,}64$$

• Da observação do gráfico, o valor com maior frequência é a numeração 37, com 9 professores. Portanto, $Mo = 37$.

• Para calcular a mediana, vamos inicialmente construir uma tabela com os dados organizados de modo crescente e com as frequências absoluta e absoluta acumulada.

Numeração dos sapatos dos professores

Numeração	Frequência absoluta (f_i)	Frequência absoluta acumulada (F_i)
36	5	5
37	9	14
38	4	18
39	4	22
40	3	25
—	$\sum f_i = 25$	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observando a coluna das frequências absolutas acumuladas, caso organizássemos todos os dados em sequência, a numeração 36 ocuparia as posições de 1 a 5; a numeração 37, as posições de 6 a 14; a numeração 38, de 15 a 18; a numeração 39, de 19 a 22; e a numeração 40, de 23 a 25. Como há um número ímpar de dados, a mediana é o valor que ocupa a posição central: $\frac{25 + 1}{2} = 13$; nesse caso, o valor que ocupa a 13ª posição. Ou seja, $Me = 37$.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Não, pois a soma do número de vezes que cada valor se repete é sempre positiva.

2 a. Determinar a média aritmética ponderada das notas n_1, n_2 e n_3.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. ARGUMENTAÇÃO A soma dos pesos na média aritmética ponderada pode ser igual a zero? Justifique sua resposta.

2. Considere o algoritmo a seguir.

Passo 1. Insira a nota n_1.

Passo 2. Insira a nota n_2.

Passo 3. Insira a nota n_3.

Passo 4. Calcule $\frac{n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot 2 + n_3 \cdot 4}{7}$.

a. Qual é a finalidade do algoritmo? 2 b. Nota n_3; nota n_1.

b. Qual é a nota que tem o maior peso? E o menor?

3. Determine a média, a mediana e a moda para cada um dos conjuntos de dados a seguir.

3 a. 9; 11; 11.
3 b. 61,14; 65; não há moda.
3 c. 3,13; 4; 1, 4 e 5.
3 d. 7; 7; 7.
3 e. –5; –5; –6.

a. 12, 13, 14, 1, 2, 3, 12, 11, 11, 11

b. 51, 4, 34, 78, 65, 90, 106

c. 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5

d. 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7

e. –10, –6, –6, –4, –1, –3

4. A seguir, estão os valores mensais referentes ao consumo de energia elétrica, em quilowatt-hora, medidos em uma residência durante 12 meses.

5 c. Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

50 267 279 262 226 298
294 272 297 257 244 50

a. Qual foi o consumo médio do período? 4 a. 233 quilowatt-hora.

b. Qual foi o consumo mediano? 4 b. 264,5 quilowatt-hora.

c. Qual das duas medidas você acha que representa melhor o consumo de energia elétrica dessa residência? 4 c. O consumo mediano.

5. Observe a seguir os lucros, em real, que um trabalhador autônomo obteve no primeiro semestre de certo ano.

3.270 3.649 3.381 3.541 3.258 3.533

a. Calcule o lucro médio desse período.

b. Qual foi o lucro mediano nesses 6 meses? 5 b. R$ 3.457,00

c. ARGUMENTAÇÃO Usando as respostas dos itens **a** e **b**, é possível determinar a moda? Justifique sua resposta.

6. A seguir, estão os números de acidentes de trabalho que ocorreram em uma metalúrgica nos 12 meses de certo ano.

2 1 0 3 1 1 0 0 0 1 1 1

a. Qual é a média mensal de acidentes que ocorreram nessa metalúrgica nesse ano? 6 a. Aproximadamente 0,917.

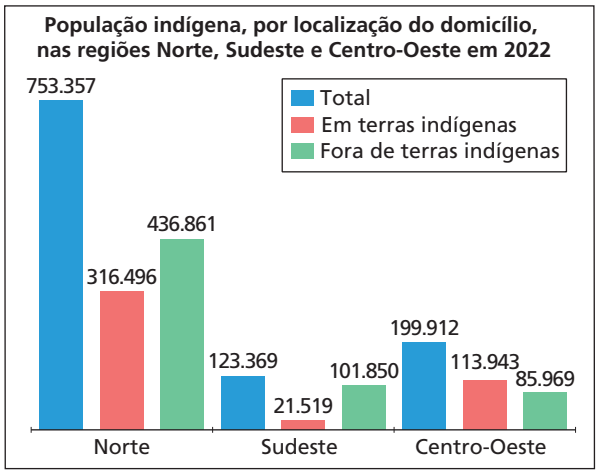
b. Qual é o número mensal de acidentes mais frequente no período? 6 b. 1

c. Qual é o número mediano de acidentes? 6 c. 1

5 a. Aproximadamente R$ 3.438,67.

Este mapa clicável enriquece o assunto da **atividade 7**, apresentando aos estudantes a classificação dos povos indígenas por famílias linguísticas. Este OED promove o desenvolvimento da **competência geral 9**, dialogando com o **TCT Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras**.

7. Observe o gráfico a seguir e, depois, responda às questões.



Fonte: elaborado com base em IBGE. **SIDRA – Banco de Tabelas Estatísticas**. Tabela 8.175: População indígena, por localização do domicílio, grupos de idade e sexo. Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/Tabela/8175. Acesso em: 15 mai. 2024.

a. O que é maior: a população residente em terras indígenas ou fora delas? **7 a.** A população indígena residente fora de terras indígenas.

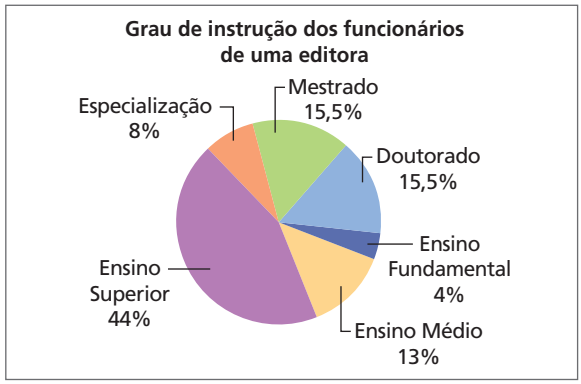
b. Qual é a quantidade média de pessoas indígenas vivendo em terras indígenas nas regiões Norte, Sudeste e Centro-Oeste? **7 b.** 150.851

c. **ARGUMENTAÇÃO** A resposta do item **b** é um bom parâmetro para indicar a quantidade média de pessoas indígenas vivendo em terras indígenas em cada região? Justifique sua resposta.

OBJETO DIGITAL **Mapa clicável: Povos indígenas e famílias linguísticas**

8. A média das medidas de massa de 25 clientes de um *spa* é 84 kg. A esse grupo juntaram-se n pessoas, que tem 90 kg cada uma. Determine o número n de pessoas, sabendo que a média das medidas de massa do novo grupo formado passou para 85 kg. **8.** 5

9. Observe o gráfico a seguir, que apresenta a distribuição do grau de instrução dos funcionários de uma editora.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

9 a. Ensino Superior.

a. Qual é a moda do grau de instrução dos funcionários?

b. **EM DUPLA** **ARGUMENTAÇÃO** Calcule a média e a mediana dessa distribuição. Converse com um colega sobre a possibilidade ou não de fazer esse cálculo e registre suas conclusões.

10. Até a 8ª rodada de um campeonato de futebol de 2024, a média, em 80 jogos, foi 2,525 gols por jogo. A média do campeonato de 2023 foi 2,9 gols por jogo. Quantos gols deveriam ter sido marcados, nas 10 partidas da 9ª rodada, para que fosse atingida a média de gols do campeonato de 2023?

10. 59 gols.

11. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** Elabore um problema em que seja necessário calcular a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados. **11.** Resposta pessoal.

12. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** Elabore um problema com um conjunto de dez dados que tenha mediana e média iguais a 6.

9 b. Espera-se que os estudantes percebam que não é possível calcular a média e a mediana da distribuição, pois essas medidas só fazem sentido para variáveis quantitativas, e não para variáveis qualitativas.

Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos

12. Resposta pessoal.
Exemplo de conjunto de dados: 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 10.

Vamos estudar como calcular a média, a moda e a mediana quando os dados estão agrupados em intervalos (ou classes).

Para isso, definimos **ponto médio** (PM_i) de uma classe como a média aritmética entre os valores extremos da classe. Por exemplo, o ponto médio da classe [2, 6[é: $PM = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Nesse cálculo, admitimos que os extremos do intervalo real [2, 6[são 2 e 6, apesar de o intervalo ser aberto em 6.

Para calcular a média com dados agrupados em intervalos, consideramos que a frequência de cada classe está concentrada no ponto médio dessa classe. Assim, adicionamos os produtos de cada frequência absoluta (f_i) pelo ponto médio (PM_i) correspondente e dividimos esse total pela soma das frequências.

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot PM_1 + f_2 \cdot PM_2 + \ldots + f_n \cdot PM_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (f_i \cdot PM_i)}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Para calcular a moda, devemos inicialmente identificar o intervalo que apresenta a maior frequência, denominado **classe modal**. Em seguida, calculamos o ponto médio da classe modal, que será a moda da distribuição.

7 c. Não, pois a quantidade de pessoas indígenas vivendo em terras indígenas em cada região varia muito.

Observação

Um intervalo real é qualquer subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por números que estão entre dois números reais a e b, com $a < b$.

Podemos classificar um intervalo real, como:

- aberto: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
- aberto em a e fechado em b: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$
- fechado em a e aberto em b: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

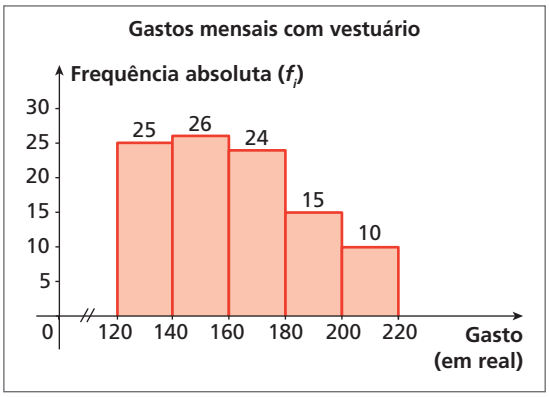
Acompanhe o exemplo.

Considere os gastos mensais com vestuário, em real, extraídos de uma pesquisa feita com 100 pessoas a respeito de seus orçamentos familiares.

Gastos mensais com vestuário

Gasto mensal (em real)	Frequência absoluta (f_i)
120 ⊢ 140	25
140 ⊢ 160	26
160 ⊢ 180	24
180 ⊢ 200	15
200 ⊢ 220	10

Fonte: elaborado para fins didáticos.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observação

O símbolo ⊢ indica a inclusão do valor situado à sua esquerda e a exclusão do valor situado à sua direita.

Vamos complementar a tabela com o ponto médio de cada classe e o produto desse ponto médio pela frequência absoluta correspondente.

Gastos mensais com vestuário

Gasto mensal (em real)	Frequência absoluta (f_i)	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
120 ⊢ 140	25	130	3.250
140 ⊢ 160	26	150	3.900
160 ⊢ 180	24	170	4.080
180 ⊢ 200	15	190	2.850
200 ⊢ 220	10	210	2.100
—	$\Sigma f_i = 100$	—	$\Sigma (f_i \cdot PM_i) = 16.180$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Podemos obter a média calculando o quociente entre a soma dos produtos de cada frequência absoluta pelo ponto médio correspondente e a soma das frequências. Assim:

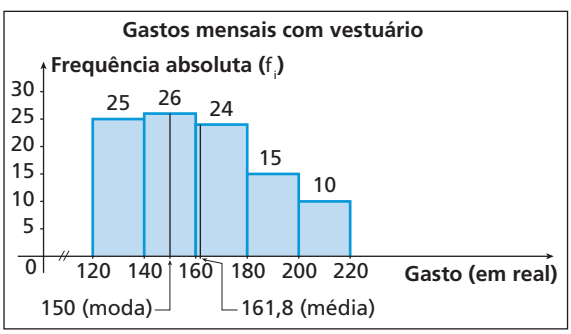
$$\bar{x} = \frac{16.180}{100} = 161{,}80$$

A classe modal dessa distribuição é 140 ⊢ 160; então, $Mo = 150$.

Logo, a média mensal de gastos com vestuário das pessoas pesquisadas é R$ 161,80, e a moda é R$ 150,00.

Observação

É possível localizar no gráfico as medidas de tendência central dos valores agrupados por classes.
Observe a localização gráfica da moda e da média no caso do exemplo dado.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Quando os dados apresentados estão agrupados em classes, para calcular a mediana devemos primeiro encontrar a classe a que pertence a mediana, chamada de **classe mediana**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A classe mediana é aquela que apresenta a frequência absoluta acumulada igual ou imediatamente maior que o quociente $\frac{\Sigma f_i}{2}$. Assim, uma vez localizada a classe mediana, encontramos o valor mediano *Me* por meio da igualdade a seguir.

$$\frac{\text{diferença entre os extremos da classe mediana}}{\text{frequência absoluta da classe mediana}} = \frac{\text{diferença entre } Me \text{ e o extremo inferior da classe mediana}}{\text{diferença entre } \frac{\Sigma f_i}{2} \text{ e a frequência absoluta acumulada da classe anterior à classe mediana}}$$

Observação

Note que, caso a frequência absoluta acumulada da classe mediana seja igual ao quociente $\frac{\Sigma f_i}{2}$, *Me* é igual ao extremo superior dessa classe.

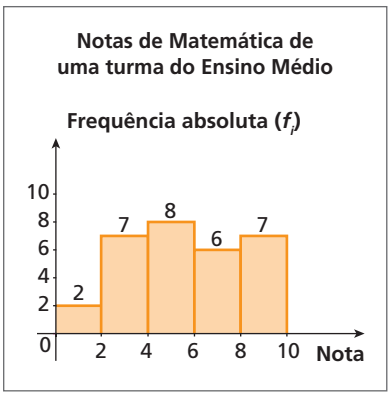
Observe o exemplo.

Considere a seguinte distribuição de frequências das notas de Matemática de uma turma do Ensino Médio.

Notas de Matemática de uma turma do Ensino Médio

Nota de Matemática	Frequência absoluta (f_i)	Frequência absoluta acumulada (F_i)
[0, 2[	2	2
[2, 4[	7	9
[4, 6[	8	17
[6, 8[	6	23
[8, 10]	7	30
—	$\Sigma f_i = 30$	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Vamos encontrar a nota mediana dessa turma.

$$\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

A frequência acumulada imediatamente maior que 15 é 17 e corresponde à classe mediana: [4, 6[

Agora, podemos obter o valor da mediana resolvendo a equação.

$$\frac{6-4}{8} = \frac{Me-4}{15-9} \Rightarrow Me = 5{,}5$$

Portanto, a nota mediana dessa turma é 5,5.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividade resolvida

R4. No último vestibular para o curso de Jornalismo de uma faculdade, a prova tinha 98 questões objetivas. Compareceram 1.200 candidatos ao exame, e os resultados encontram-se na tabela de frequências a seguir.

Resultado dos candidatos ao curso de Jornalismo

Quantidade de pontos	Quantidade de candidatos (f_i)
[0, 20[	320
[20, 40[	250
[40, 60[	412
[60, 80[	126
[80, 100]	92
Total	1.200

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Calcular a média, a moda e a mediana dessa distribuição.

▶ **Resolução**

Para facilitar os cálculos, vamos complementar a tabela.

Resultado dos candidatos ao curso de Jornalismo

Quantidade de pontos	f_i	F_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
[0, 20[	320	320	10	3.200
[20, 40[	250	570	30	7.500
[40, 60[	412	982	50	20.600
[60, 80[	126	1.108	70	8.820
[80, 100]	92	1.200	90	8.280
—	$\Sigma f_i = 1.200$	—	—	$\Sigma(f_i \cdot PM_i) = 48.400$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Pelos dados da tabela, podemos calcular a média.

$$\bar{x} = \frac{48.400}{1.200} \simeq 40{,}33$$

A classe modal é [40, 60[; então, $Mo = 50$.

Para calcular a mediana, vamos primeiro encontrar a classe mediana. Temos:

$$\frac{\Sigma f_i}{2} = \frac{1.200}{2} = 600$$

A frequência absoluta acumulada imediatamente superior a 600 é 982 e corresponde à classe [40, 60[, que é a classe mediana. Assim:

$$\frac{60 - 40}{412} = \frac{Me - 40}{600 - 570} \Rightarrow Me \simeq 41{,}46$$

Portanto, a média, a moda e a mediana dos resultados desses candidatos são, respectivamente: aproximadamente 40,33; 50; aproximadamente 41,46.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

13. Em uma corrida de Fórmula 1, foram computados as medidas de tempo, em segundo, que os pilotos gastaram na realização de um *pit stop*.

Medida de tempo gasta na realização de um *pit stop*

Medida de tempo (em segundo)	[0, 4[	[4, 8[	[8, 12[	[12, 16[	[16, 20]
Quantidade de pilotos	2	5	9	3	1

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Calcule a medida de tempo média que os pilotos gastaram no *pit stop*. **13 a.** 9,2 segundos.

b. Determine a medida de tempo mediana de *pit stop*. **13 b.** Aproximadamente 9,3 segundos.

14. Com o intuito de economizar água, foi feito um levantamento com 100 pessoas de um condomínio sobre a medida de tempo que gastam para tomar banho. Os resultados, em minuto, estão apresentados na tabela a seguir.

Medida de tempo gasta no banho

Medida (em minuto)	[0, 5[	[5, 10[	[10, 15[	[15, 20]
Quantidade de pessoas	20	30	10	40

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Calcule a medida de tempo média que essas pessoas gastam para tomar banho. **14 a.** 11 minutos.

b. Qual é a moda dessa distribuição? **14 b.** 17,5 minutos.

c. Quantas pessoas pesquisadas gastam menos de 12 minutos no banho?

15. A tabela a seguir apresenta a distribuição de frequências dos salários, em real, dos 30 funcionários de uma empresa.

Distribuição de salários dos funcionários

Salário (em real)	Quantidade de funcionários
[1.320, 2.120[	6
[2.120, 2.920[	5
[2.920, 3.720[	5
[3.720, 4.520[	3
[4.520, 5.320[	2
[5.320, 6.120[	1
[6.120, 6.920[	1
[6.920, 7.720[	1
[7.720, 8.520]	1

Fonte: elaborado para fins didáticos.

15 c. Resposta no *Suplemento para o professor*.

a. Com base nesses dados, encontre a média dos salários dos funcionários. **15 a.** R$ 3.576,00

b. Qual é a moda dessa distribuição de salários? **15 b.** R$ 1.720,00

c. Construa o histograma referente a esses dados, indicando o valor médio e o valor modal dos salários nessa empresa.

16. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** Escolha uma variável quantitativa e colete os dados de todos os colegas da turma para essa variável. Em seguida, organize os dados coletados e elabore uma atividade com base nessas informações. A atividade deve ter pelo menos um item com uma representação gráfica e um com o cálculo de uma medida de tendência central.

16. Resposta pessoal.

14 c. Espera-se que os estudantes percebam que não é possível responder a essa questão por falta de informações. Sabemos que 50 pessoas gastam menos de 10 minutos, mas não é possível saber, somente com as informações fornecidas, quantas pessoas gastam menos de 12 minutos no banho.

Medidas de dispersão

Acompanhe a situação a seguir.

O instituto de meteorologia de certo município registrou a medida da temperatura local, em grau Celsius, em alguns momentos no decorrer de dois dias de um mês. Os resultados obtidos foram:

1º dia: 7, 9, 9, 9, 10 e 10

2º dia: 6, 7, 8, 10, 11 e 12

A medida da temperatura média em cada um dos dias foi 9 °C, e a medida da temperatura mediana em cada um dos dias foi, também, 9 °C. Podemos, então, perguntar: em qual desses dias a medida da temperatura foi mais estável, ou seja, em qual desses dias a variabilidade de medida de temperatura foi menor?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Recorrer à média ou à mediana não responde à questão, já que, nos dois dias, as medidas de temperatura média e mediana foram iguais. Para casos como esse, precisamos de medidas que permitam descrever o comportamento do conjunto de dados em torno das medidas de tendência central.

As medidas estatísticas que descrevem o comportamento de um conjunto de dados em torno das medidas de tendência central recebem o nome de **medidas de dispersão** ou **de variabilidade**.

Amplitude

Para analisar o grau de dispersão ou de variabilidade de um conjunto de dados, podemos usar a amplitude.

Amplitude total de um conjunto de dados, ou simplesmente **amplitude**, é a diferença entre o maior e o menor valor desse conjunto. Indicamos a amplitude por ***At***.

Então, na situação anterior, calculando a amplitude para as temperaturas de cada dia, temos:

- 1º dia: $At_1 = 10 - 7 = 3$
- 2º dia: $At_2 = 12 - 6 = 6$

Pelas amplitudes, podemos concluir que no 1º dia as medidas de temperatura variaram menos que no 2º dia (no 2º dia, houve uma variação total de 6 °C, enquanto no 1º dia a variação total foi de 3 °C).

A amplitude é limitada, pois considera apenas os valores extremos do conjunto de dados. Poderíamos ter dois conjuntos de dados com a mesma amplitude, mas com distribuição completamente diferente. Por exemplo: {1, 3, 4, 5, 6} e {4, 4, 4, 4, 9}.

O desvio médio, a variância e o desvio padrão, que estudaremos a seguir, são medidas de dispersão que consideram todos os dados do conjunto e indicam o quanto esses dados estão dispersos em relação à média.

Desvio médio

Para calcular o desvio médio, primeiro calculamos os **desvios em relação à média**, chamados simplesmente de **desvios**, obtidos pela diferença entre cada valor observado e a média desses valores. Em seguida, obtemos o quociente entre a soma dos valores absolutos desses desvios e o número de valores observados.

Desvio médio é a média aritmética dos valores absolutos dos desvios. Indicamos o desvio médio por ***Dm***.

Observação

O desvio médio é expresso na mesma unidade dos valores da variável.

Assim, temos:

$$Dm = \frac{|x_1 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Agora, considerando as medidas de temperatura indicadas na situação anterior, vamos construir duas tabelas.

1º dia ($\bar{x} = 9$)

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
7	$7 - 9 = -2$	2
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
10	$10 - 9 = 1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
—	—	$\Sigma\lvert x_i - \bar{x}\rvert = 4$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

2º dia ($\bar{y} = 9$)

y_i	$y_i - \bar{y}$	$\lvert y_i - \bar{y}\rvert$
6	$6 - 9 = -3$	3
7	$7 - 9 = -2$	2
8	$8 - 9 = -1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	2
12	$12 - 9 = 3$	3
—	—	$\Sigma\lvert y_i - \bar{y}\rvert = 12$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Calculando os desvios médios para as medidas de temperatura de cada dia, temos:

- 1º dia:

$$Dm_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \simeq 0{,}67$$

- 2º dia:

$$Dm_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} |y_i - \bar{y}|}{n} = \frac{12}{6} = 2$$

Portanto, houve maior dispersão (ou variabilidade) de medida de temperatura no 2º dia (2 °C), ou seja, a medida de temperatura foi mais estável (teve menor variabilidade) no 1º dia.

Variância e desvio padrão

Observação

Como os desvios são elevados ao quadrado para o cálculo da variância, não é possível expressá-la na mesma unidade dos valores da variável.

Outras medidas que podemos empregar para identificar o grau de dispersão ou de variabilidade de um conjunto de dados são a variância e o desvio padrão.

Variância é a média aritmética dos quadrados dos desvios. Indicamos a variância por ***Var***.

Assim, temos:

$$Var = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Para obter uma medida de dispersão expressa na mesma unidade dos dados, usamos o desvio padrão.

Desvio padrão é a raiz quadrada da variância. Indicamos o desvio padrão por ***Dp***.

Assim, temos:

$$Dp = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Ou, ainda, $Dp = \sqrt{Var}$.

Agora, vamos retomar o caso das medidas de temperatura da situação anterior e calcular a variância e o desvio padrão relativos a cada dia.

1º dia

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
7	$7 - 9 = -2$	4
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
9	$9 - 9 = 0$	0
10	$10 - 9 = 1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
—	—	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 6$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

2º dia

y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
6	$6 - 9 = -3$	9
7	$7 - 9 = -2$	4
8	$8 - 9 = -1$	1
10	$10 - 9 = 1$	1
11	$11 - 9 = 2$	4
12	$12 - 9 = 3$	9
—	—	$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 28$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para o 1º dia:

$$Var_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{6}{6} = 1$$

$$Dp_1 = \sqrt{Var_1} = \sqrt{1} = 1$$

Para o 2º dia:

$$Var_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{28}{6} \simeq 4{,}67$$

$$Dp_2 = \sqrt{Var_2} \simeq \sqrt{4{,}67} \simeq 2{,}16$$

Com isso, podemos concluir que a maior dispersão (ou variabilidade) ocorreu no 2º dia, ou seja, o 2º dia foi o que apresentou as medidas de temperatura menos homogêneas. Portanto, caracteriza um conjunto menos regular.

Observação

Para comparar a dispersão de dois conjuntos de dados, podemos utilizar qualquer uma das medidas: amplitude, desvio médio, variância ou desvio padrão. Note que as quatro medidas de dispersão conduziram à mesma conclusão.

Atividades resolvidas

R5. O número de acidentes em um trecho de uma rodovia foi computado, mês a mês, durante o 1º semestre de 2024. Foram obtidos os seguintes dados:

20 14 15 20 27 30

Calcular a amplitude, o desvio médio e o desvio padrão desse conjunto de dados.

▶ **Resolução**

A amplitude desse conjunto de dados é dada por: $30 - 14 = 16$

Para calcular o desvio médio e o desvio padrão, primeiro calculamos a média aritmética.

$$\bar{x} = \frac{20 + 14 + 15 + 20 + 27 + 30}{6} = \frac{126}{6} = 21$$

Em seguida, encontramos o desvio médio.

$$Dm = \frac{|20 - 21| + |14 - 21| + |15 - 21| + |20 - 21| + |27 - 21| + |30 - 21|}{6}$$

$$Dm = \frac{30}{6} = 5$$

Para obter o desvio padrão, calculamos primeiro a variância.

$$Var = \frac{(20 - 21)^2 + (14 - 21)^2 + (15 - 21)^2 + (20 - 21)^2 + (27 - 21)^2 + (30 - 21)^2}{6}$$

$$Var = \frac{204}{6} = 34$$

Agora, basta calcular a raiz quadrada da variância para obter o desvio padrão: $Dp = \sqrt{34} \simeq 5{,}83$

Portanto, o desvio médio é de 5 acidentes, e o desvio padrão é de aproximadamente 5,83 acidentes.

R6. Uma indústria produz 5.000 parafusos por dia. Foram coletados para análise 100 parafusos, cujas medidas de comprimento do diâmetro, em milímetro, estão indicadas na tabela a seguir.

Medida de comprimento do diâmetro dos parafusos da amostra

Medida de comprimento do diâmetro x_i (em milímetro)	Quantidade de parafusos (f_i)
5,1	12
5,2	27
5,3	35
5,4	20
5,5	6
Total	100

Fonte: elaborado para fins didáticos.

JIANG HONGYAN/SHUTTERSTOCK

Determinar a média, o desvio médio e o desvio padrão da distribuição dos dados coletados.

▶ **Resolução**

Para obter a média, calculamos a média aritmética ponderada da distribuição.

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 5{,}1 + 27 \cdot 5{,}2 + 35 \cdot 5{,}3 + 20 \cdot 5{,}4 + 6 \cdot 5{,}5}{100} = \frac{528{,}1}{100} = 5{,}281$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para o cálculo do desvio médio e da variância, vamos construir uma tabela com os dados disponíveis e completá-la com outras informações.

Medida de comprimento do diâmetro dos parafusos da amostra

Medida de comprimento do diâmetro x_i (em milímetro)	Quantidade de parafusos (f_i)	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$
5,1	12	−0,181	0,181	0,032761
5,2	27	−0,081	0,081	0,006561
5,3	35	0,019	0,019	0,000361
5,4	20	0,119	0,119	0,014161
5,5	6	0,219	0,219	0,047961
—	$\Sigma f_i = 100$	—	—	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Como os dados estão organizados em uma tabela de frequências, para calcular as medidas de dispersão é necessário considerar a frequência absoluta (f_i) de cada valor.

- Para determinar o desvio médio, calculamos a média aritmética ponderada dos valores absolutos dos desvios.

$$Dm = \frac{12 \cdot 0{,}181 + 27 \cdot 0{,}081 + 35 \cdot 0{,}019 + 20 \cdot 0{,}119 + 6 \cdot 0{,}219}{100}$$

$$Dm = \frac{8{,}718}{100} = 0{,}08718$$

- Para determinar a variância, calculamos a média aritmética ponderada dos quadrados dos desvios.

$$Var = \frac{12 \cdot 0{,}032761 + 27 \cdot 0{,}006561 + 35 \cdot 0{,}000361 + 20 \cdot 0{,}014161 + 6 \cdot 0{,}047961}{100}$$

$$Var = \frac{1{,}1539}{100} = 0{,}011539$$

Como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, temos:

$$Dp = \sqrt{Var} = \sqrt{0{,}011539} \simeq 0{,}10742$$

Logo, a média das medidas de comprimento do diâmetro dos parafusos da amostra é 5,281 mm, o desvio médio é 0,08718 mm e o desvio padrão é aproximadamente 0,10742 mm.

18. Se os valores x_i observados em uma distribuição de frequências fossem todos iguais entre si, eles também seriam iguais à média $\bar{x}$; logo, $(x_i - \bar{x}) = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Portanto, a variância seria zero.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

17. ARGUMENTAÇÃO Calcule a soma dos desvios.

$$(x_1 - \bar{x}) + ... + (x_n - \bar{x})$$

O que você pode concluir? **17.** A soma dos desvios é nula.

18. ARGUMENTAÇÃO Se tivéssemos uma distribuição de frequências cujos valores observados fossem todos iguais entre si, qual seria sua variância? Justifique sua resposta e dê exemplos.

19. **(AFA – 2024)** Em uma avaliação de Inglês, valendo 10 pontos, os alunos de uma turma apresentaram os resultados inseridos no quadro abaixo:

Número de alunos	Resultado da avaliação
5	6,0
1	7,0
3	8,0
1	9,0

Sabendo-se que a turma estava completa nesse dia e que todos os alunos participaram da avaliação, é correto afirmar que no conjunto dos resultados da avaliação **19.** Alternativa **a**.

a. a variância é maior que 1.

b. essa distribuição é bimodal.

c. o desvio padrão é menor que 1.

d. a média, a mediana e a moda formam, nessa ordem, uma progressão geométrica.

20. Computou-se o número de viagens que clientes cadastrados em um programa de fidelidade realizaram durante o ano.

Viagens realizadas durante o ano

Número de viagens	Quantidade de clientes
10	120
15	400
20	150

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

20 b. Os valores do conjunto distanciam-se cerca de 3,17 viagens do valor médio (aproximadamente 15 viagens).
23 g. Os valores desse conjunto distanciam-se do valor médio cerca de 4,7 veículos.
24 b. Resposta no *Suplemento para o professor*.

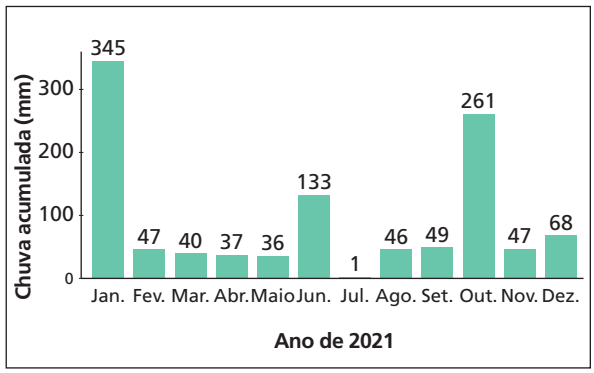
Considerando os dados da tabela: **20 a.** *Var* ≃ 10,07 e *Dp* ≃ 3,17.

a. calcule a variância e o desvio padrão;

b. caracterize a dispersão desse conjunto segundo o desvio padrão.

21. **(UFGD – 2023)** O município de Dourados, Mato Grosso do Sul, registrou no ano de 2021 um total de 1.110 milímetros (mm) de chuvas. A figura a seguir apresenta os valores do acumulado das chuvas, em mm, em todos os meses desse referido ano. Nesse período, a média mensal foi de 92,5 mm com um desvio padrão de 100,0 mm. **21.** Alternativa **d**.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



Fonte: Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária – Embrapa. Embrapa Agropecuária Oeste – Guia Clima. Disponível em: https://clima.cpao.embrapa.br/. Acesso em: 3 set. 2022.

Considerando-se que, no ano de 2022, o acumulado de chuvas em cada um dos dozes meses apresentasse acréscimo de 10 mm, quais seriam os resultados da média e do desvio padrão em 2022?

a. Média de 92,5 mm e desvio padrão de 110,0 mm.

b. Média de 102,5 mm e desvio padrão de 110,0 mm.

c. Média de 92,5 mm e desvio padrão de 100,0 mm.

d. Média de 102,5 mm e desvio padrão de 100,0 mm.

e. Média de 92,5 mm e desvio padrão de 90,0 mm.

22. Um *site* de locação de filmes deseja saber o grau de satisfação de seus clientes diante de duas promoções (A e B) realizadas em fins de semana alternados. Para isso, 20 clientes, escolhidos ao acaso, deram notas de 1 a 5 conforme o índice de satisfação.

Observe as notas obtidas no quadro a seguir.

Promoção A	Promoção B
5 5 4 4 5 3 4 4 5 5	3 3 2 3 2 2 2 2 2 2
5 1 4 4 5 4 4 5 4 5	1 3 1 1 2 2 4 4 3 2

22 a. Promoção A: 4,25; Promoção B: 2,3.

a. Calcule a média para cada promoção.

b. Calcule o desvio padrão para cada promoção.

c. Compare a homogeneidade das notas atribuídas às duas promoções.

23. Em uma locadora de veículos, o número de veículos alugados durante 15 dias está relacionado a seguir.

25 32 25 28 30 21 23 40
25 26 22 23 25 28 31

Para essa locadora, nesse período, faça o que se pede.

a. Qual é a média de veículos alugados? **23 a.** Aproximadamente 27.

b. Qual é o número mediano de veículos alugados? **23 b.** 25

c. Qual é o número de veículos alugados com maior frequência? **23 c.** 25

d. Calcule a amplitude desse conjunto de dados. **23 d.** 19

e. Calcule o desvio médio de veículos alugados. **23 e.** Aproximadamente 3,67.

f. Calcule a variância e o desvio padrão desse conjunto de valores observados. **23 f.** *Var* ≃ 22,07 e *Dp* ≃ 4,7.

g. Comente a variabilidade desse conjunto de dados considerando o desvio padrão.

24. Observe, nos diagramas a seguir, a distribuição dos valores pagos pelos clientes de uma sorveteria por quilograma em dois dias consecutivos.

Valor pago pelos clientes no 1º dia

3	80
4	50
5	20 40 60
6	50
7	30 45 80
8	10
9	50 70 75 80
10	25
11	60 75 80
12	
13	00
14	
15	30

3 | 80 = 3,80 reais

24 a. Ao observar os diagramas, espera-se que os estudantes percebam que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior (os dados estão menos concentrados em torno de alguns valores).

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Valor pago pelos clientes no 2º dia

5	20 45 50 55 60 75 80 95
6	50 60 85 90
7	50 65 70 80 90
8	55
9	60 75

5 | 20 = 5,20 reais

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. **ARGUMENTAÇÃO** Sem fazer contas, o que você diria sobre a variabilidade dos valores pagos em cada um dos dias? Em que dia a variabilidade dos valores pagos foi maior?

b. Compare os conjuntos de valores usando uma das medidas de dispersão para confirmar sua constatação.

25. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** Elabore um problema contextualizado em que seja necessário calcular medidas de tendência central e de dispersão. **25.** Resposta pessoal.

22 b. Promoção A: aproximadamente 0,94; Promoção B: aproximadamente 0,84.
22 c. As notas atribuídas à promoção B apresentam maior homogeneidade que as da promoção A.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Medidas de dispersão para dados agrupados em intervalos

Quando os dados estão agrupados em intervalos (ou classes) de mesma amplitude, a amplitude total é dada pela diferença entre o extremo superior da última classe e o extremo inferior da primeira classe:

At = extremo superior da última classe − extremo inferior da primeira classe

Para calcular as outras medidas de dispersão, consideramos que a frequência de cada classe está concentrada no ponto médio dessa classe, como fizemos no cálculo da média. Assim:

- $Dm = \dfrac{f_1 \cdot |PM_1 - \overline{x}| + \ldots + f_n \cdot |PM_n - \overline{x}|}{f_1 + \ldots + f_n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (f_i \cdot |PM_i - \overline{x}|)}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}$
- $Var = \dfrac{f_1 \cdot (PM_1 - \overline{x})^2 + \ldots + f_n \cdot (PM_n - \overline{x})^2}{f_1 + \ldots + f_n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} [f_i \cdot (PM_i - x)^2]}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}$
- $Dp = \sqrt{Var}$

Observe o exemplo.

Na auditoria anual de uma empresa, foi anotada a medida de tempo necessário, em minuto, para auditar 50 balanços.

Medida de tempo para auditar os balanços

Medida de tempo de auditoria (em minuto)	Quantidade de balanços (f_i)
[10, 20[	3
[20, 30[	5
[30, 40[	10
[40, 50[	12
[50, 60]	20

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Para calcular as medidas de dispersão dessa distribuição, primeiro determinamos o ponto médio de cada intervalo e, em seguida, calculamos a média.

$$\overline{x} = \frac{3 \cdot 15 + 5 \cdot 25 + 10 \cdot 35 + 12 \cdot 45 + 20 \cdot 55}{50} = \frac{2.160}{50} = 43{,}2$$

Agora, vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos.

Medida de tempo para auditar os balanços

Medida de tempo de auditoria (em minuto)	Quantidade de balanços (f_i)	PM_i	$(PM_i - \overline{x})$	$f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert$	$(PM_i - \overline{x})^2$	$f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2$
[10, 20[	3	15	−28,2	84,6	795,24	2.385,72
[20, 30[	5	25	−18,2	91	331,24	1.656,20
[30, 40[	10	35	−8,2	82	67,24	672,40
[40, 50[	12	45	1,8	21,6	3,24	38,88
[50, 60]	20	55	11,8	236	139,24	2.784,80
—	$\Sigma f_i = 50$	—	—	$\Sigma (f_i \cdot \lvert PM_i - \overline{x} \rvert) = 515{,}2$	—	$\Sigma \left[f_i \cdot (PM_i - \overline{x})^2 \right] = 7.538$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Então:

$$At = 60 - 10 = 50$$

$$Dm = \frac{\sum_{i=1}^{n} (f_i \cdot |PM_i - \bar{x}|)}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{515,2}{50} = 10,304$$

$$Var = \frac{\sum_{i=1}^{n} [f_i \cdot (PM_i - x)^2]}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{7.538}{50} = 150,76$$

$$Dp = \sqrt{Var} = \sqrt{150,76} \simeq 12,3$$

Caso escolhêssemos o desvio padrão para caracterizar a dispersão dessa distribuição, poderíamos dizer que os valores observados se distanciam cerca de 12,3 minutos da média.

26. Os valores do conjunto distanciam-se cerca de R$ 202,73 do valor médio (R$ 1.030,00).

27. Os valores do conjunto distanciam-se cerca de 1,92 km/L do valor médio (10,2 km/L).

Atividades propostas

Registre em seu caderno

26. Na tabela a seguir, observe a distribuição do valor dos aluguéis, em real, pagos por 200 pessoas em residências situadas na zona urbana de uma cidade de médio porte.

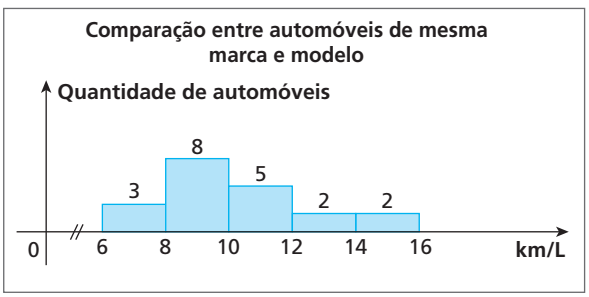
Aluguel pago por moradores da zona urbana da cidade

Aluguel (em real)	Quantidade de pessoas (f_i)
[500, 700[	10
[700, 900[	40
[900, 1.100[	80
[1.100, 1.300[	50
[1.300, 1.500]	20
Total	200

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Caracterize a variabilidade nessa situação usando o desvio padrão.

27. Considere os dados a seguir sobre a quantidade de quilômetros rodados por litro de combustível de 20 automóveis de mesma marca e modelo.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Caracterize a variabilidade nessa situação usando o desvio médio.

Box-plot

Um ***box-plot*** é uma representação gráfica. Antes de aprender a analisá-lo, vamos estudar alguns conceitos importantes para compreender esse tipo de representação.

Quartis

A mediana de um conjunto de valores previamente ordenados é o valor que divide esse conjunto em duas partes com o mesmo número de elementos, ou seja, 50% dos valores estão abaixo e 50% dos valores estão acima da mediana.

O conceito de mediana pode ser generalizado para situações em que o conjunto de dados é dividido em mais de duas partes. Um caso importante é aquele em que dividimos o conjunto de dados em quatro partes com o mesmo número de elementos. Os valores que dividem o conjunto ordenado de dados nessas quatro partes são denominados **quartis**.

Há três quartis:

- **primeiro quartil** (indicamos por Q_1):

  $\frac{1}{4}$ (ou 25%) dos valores estão abaixo de Q_1;

- **segundo quartil** (indicamos por Q_2):

  $\frac{1}{2}$ (ou 50%) dos valores estão abaixo de Q_2, ou seja, coincide com a mediana;

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- **terceiro quartil** (indicamos por Q_3):

$\frac{3}{4}$ (ou 75%) dos valores estão abaixo de Q_3.

Para determinar os quartis, calculamos inicialmente a mediana do conjunto de dados (segundo quartil). A mediana divide o conjunto de dados em duas partes; para determinar o primeiro e o terceiro quartis, calculamos as medianas de cada uma dessas partes.

Observe o exemplo.

As medidas de massa de 12 laranjas, em grama, de determinado pacote comprado em um supermercado são:

133, 136, 137, 138, 140, 142, 145, 155, 158, 160, 161, 170

Vamos determinar os quartis desse conjunto de dados.

- Segundo quartil/mediana

Como temos um número par de dados, a mediana é a média aritmética dos termos centrais (6º e 7º termos):

$$Q_2 = \frac{142 + 145}{2} = 143{,}5$$

- Primeiro quartil e terceiro quartil

A mediana dividiu o conjunto de valores em duas partes com 6 elementos cada uma:

133, 136, 137, 138, 140, 142, 145, 155, 158, 160, 161, 170

As medianas de cada uma dessas partes são o primeiro e o terceiro quartis:

$$Q_1 = \frac{137 + 138}{2} = 137{,}5$$

$$Q_3 = \frac{158 + 160}{2} = 159$$

O intervalo $[Q_1, Q_3]$ contém cerca de 50% das observações centrais e dá uma ideia de quão dispersos estão os dados. A amplitude desse intervalo é chamada de **intervalo interquartil** (indicamos por IQ):

$$IQ = Q_3 - Q_1$$

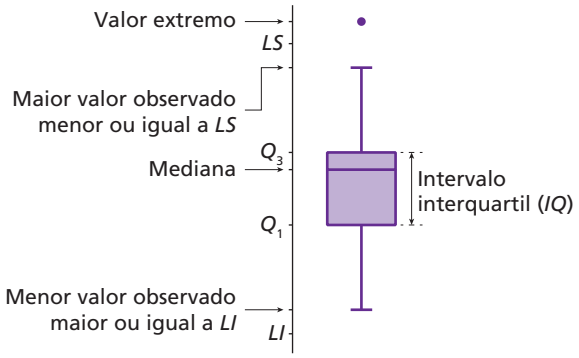
Box-plot

Os *box-plots*, também conhecidos como **gráficos de caixa**, são representações gráficas bastante ricas usadas para destacar, entre outras informações, valores discrepantes, a dispersão e a simetria dos dados.

Para a construção de um *box-plot*, considera-se um retângulo ("caixa") limitado pelo primeiro e pelo terceiro quartis. A mediana é representada por um traço no interior do retângulo. Do retângulo, para cima, segue uma linha até o maior valor do conjunto de dados que não exceda o limite superior (LS), tal que $LS = Q_3 + 1{,}5 \cdot IQ$. De modo similar, da parte inferior do retângulo, para baixo, segue uma linha até o menor valor do conjunto de dados que não seja menor do que o limite inferior (LI), tal que $LI = Q_1 - 1{,}5 \cdot IQ$. Os valores acima do limite superior ou abaixo do limite inferior são representados por asteriscos ou pontos e denominados **valores extremos**. Esses são valores considerados destoantes na distribuição.

Observação

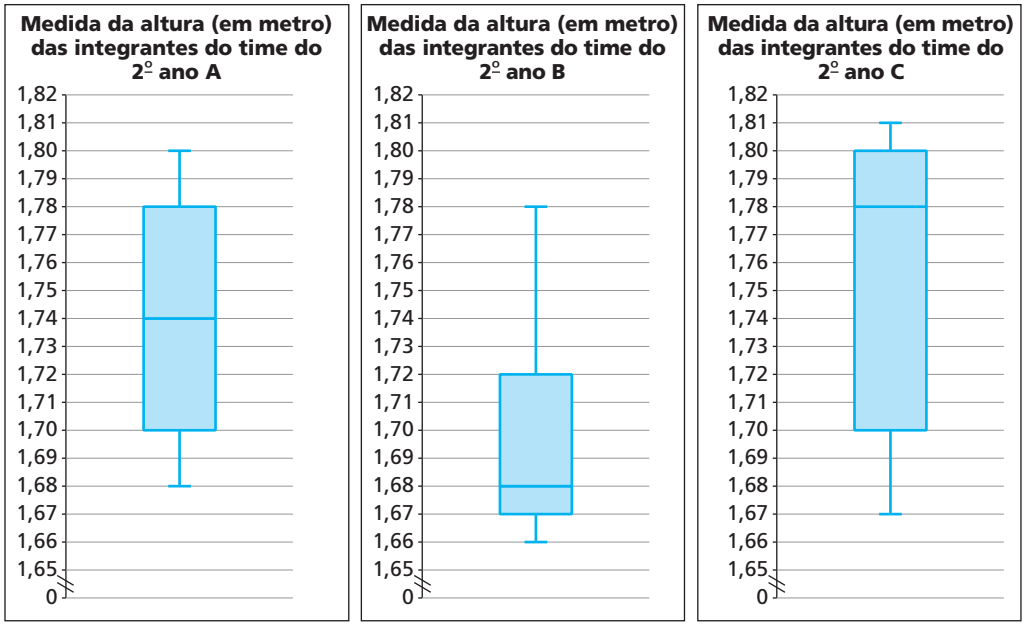
Um *box-plot* pode ser construído com o eixo na posição horizontal.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Considere, por exemplo, os *box-plots* a seguir, que mostram as medidas de altura, em metro, das integrantes dos três times de 2º ano de basquete feminino de uma escola.



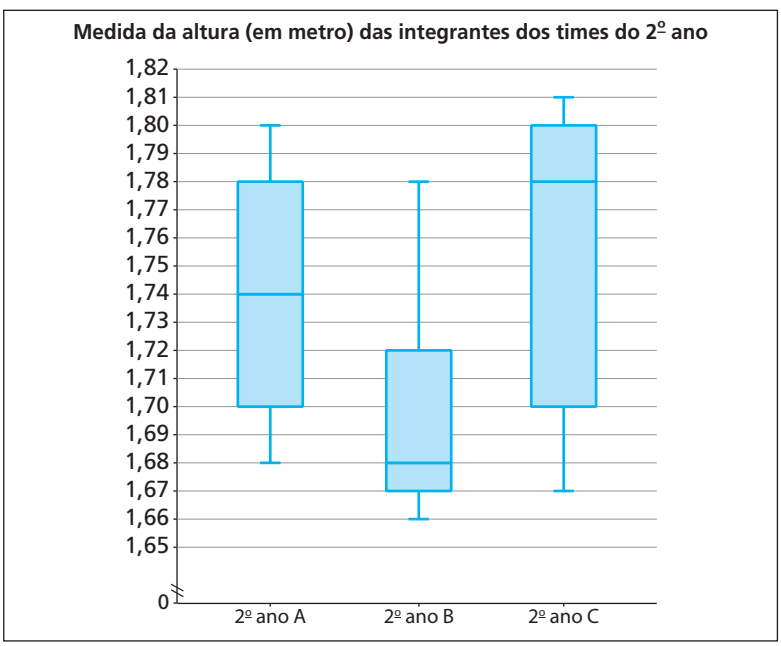
Fonte: elaborados para fins didáticos.

Observe que a distribuição das medidas da altura das integrantes do time do 2º ano A apresenta certa simetria: a mediana (1,74 m) é a média dos valores do primeiro e do terceiro quartis; é também a média entre os valores máximo e mínimo do conjunto de medidas da altura. É possível perceber, ainda, que a amplitude total dos dados é 0,12 m e que 50% das medidas da altura estão concentradas entre 1,68 m e 1,74 m.

O *box-plot* que representa as medidas da altura do time do 2º ano B mostra que a distribuição é assimétrica: apesar de a amplitude total dos dados ser também 0,12 m, metade das medidas da altura está concentrada entre 1,66 m e 1,68 m, enquanto a outra metade das medidas da altura está distribuída entre 1,68 m e 1,78 m.

O *box-plot* que representa as medidas da altura do time 2º ano C também mostra que a distribuição é assimétrica: metade das medidas da altura está concentrada entre 1,78 m e 1,81 m, enquanto a outra metade das medidas da altura está entre 1,67 m e 1,78 m.

Para uma análise e comparação entre conjuntos de dados diferentes relacionados à mesma variável, podemos construir as "caixas" em uma mesma representação. Observe a seguir.



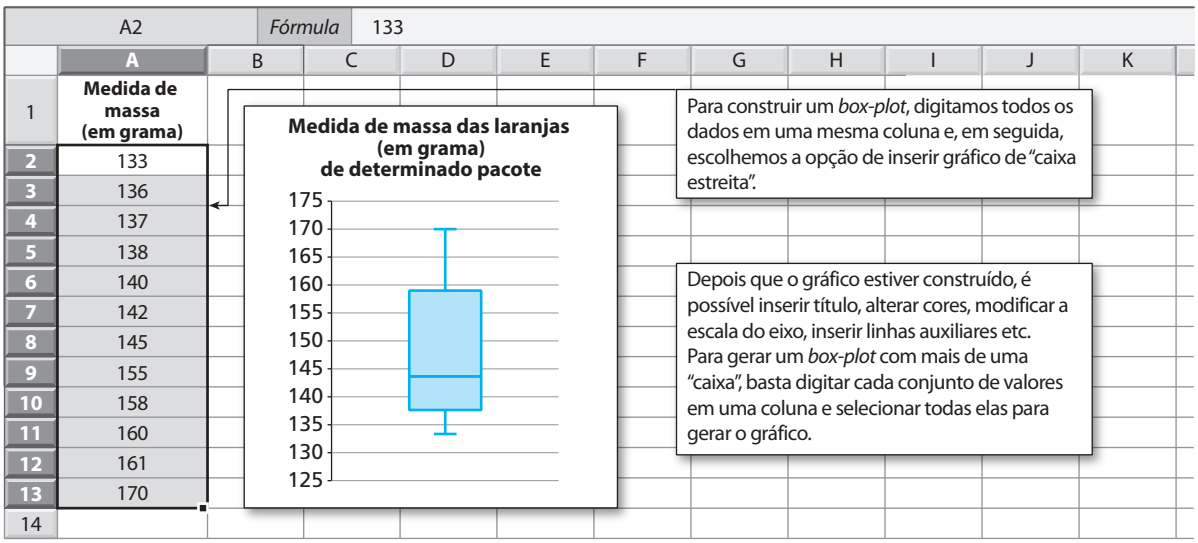
Fonte: elaborado para fins didáticos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Algumas planilhas eletrônicas possibilitam construir um *box-plot* de maneira muito simples. Para isso, basta digitar todos os dados em uma mesma coluna (um dado em cada célula) de uma planilha eletrônica e, em seguida, selecionar a opção de inserir gráfico de "caixa estreita".

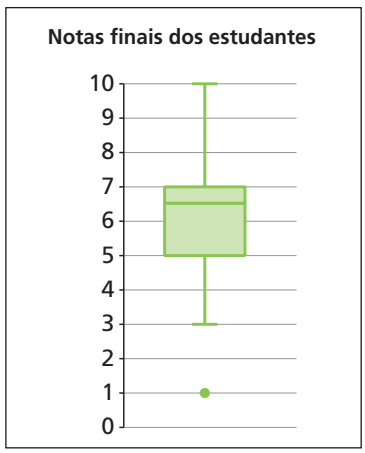
Observe como poderíamos construir um *box-plot* usando uma planilha eletrônica para os dados do exemplo da medida de massa de 12 laranjas da página 78.



Atividades propostas

Registre em seu caderno

28. Observe, no *box-plot* a seguir, a distribuição das notas finais de 80 estudantes.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

De acordo com as informações do gráfico, responda às questões.

a. Qual é o valor do primeiro e do terceiro quartis da distribuição das notas? **28 a.** $Q_1 = 5$ e $Q_3 = 7$.

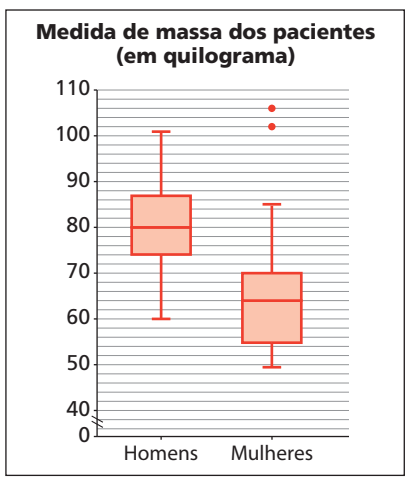
b. Quantos estudantes tiveram notas entre 5 e 7? **28 b.** 40 estudantes.

c. Qual foi a menor nota entre esses estudantes? **28 c.** Nota 1.

d. Que porcentagem dos estudantes obteve nota entre 7 e 10? **28 d.** 25%

e. **ARGUMENTAÇÃO** Observando a representação gráfica, é possível saber quantos estudantes tiveram nota final 10? Justifique sua resposta.

29. Uma nutricionista construiu o gráfico a seguir indicando a medida de massa de todos os homens e mulheres que frequentam seu consultório.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Com base nas informações do gráfico, identifique a alternativa falsa. **29.** Alternativa **d**.

a. Metade dos pacientes homens tem entre 60 kg e 80 kg.

b. O valor mais alto entre as medidas de massa das mulheres é maior que o valor mais alto entre as medidas de massa dos homens.

c. Metade das pacientes mulheres tem até 64 kg.

d. A maior medida de massa entre as mulheres é aproximadamente 85 kg.

e. 25% das mulheres têm entre 64 kg e 70 kg.

28 e. Espera-se que os estudantes percebam que não é possível saber quantos estudantes tiveram nota 10 apenas com o *box-plot*. É possível saber que 25% de 80 estudantes (ou seja, 20 estudantes) obtiveram notas entre 7 e 10, mas não é possível saber como foi a distribuição das notas nesse intervalo.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

30. Observe, a seguir, três representações gráficas do mesmo conjunto de dados: a melhor medida de tempo, em segundo, dos participantes na primeira rodada 3 × 3 × 3 do campeonato de cubo mágico III Recife Open 2023, realizado em Recife (PE), em dezembro de 2023.

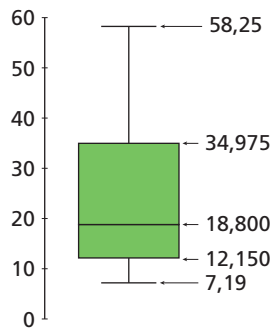
Melhor medida de tempo (em segundo) dos participantes na primeira rodada 3 × 3 × 3 do campeonato III Recife Open 2023

0	719	942	945	977	986													
1	008	020	091	112	170	187	243	292	342	391	450	462	517	668	682	689	798	962
2	007	013	092	201	581	587	602											
3	085	213	228	767	798													
4	080	253	450	505	631	776												
5	122	804	825															

1 | 008 = 10,08 segundos

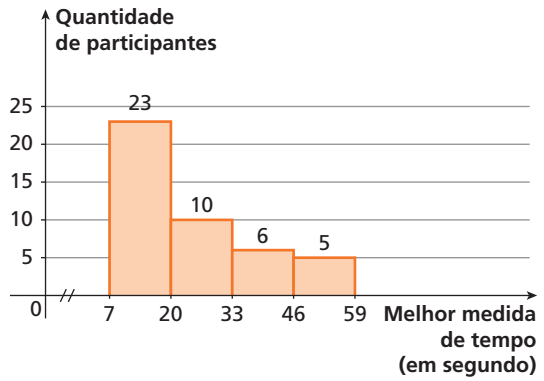
Fonte: elaborado com base em WORLD Cube Association. **III Recife Open 2023**. Disponível em: https://www.worldcubeassociation.org/competitions/IIIRecifeOpen2023/results/all?event=333. Acesso em: 21 ago. 2024.

Melhor medida de tempo (em segundo) dos participantes na primeira rodada 3 × 3 × 3 do campeonato III Recife Open 2023



Fonte: elaborado com base em WORLD Cube Association. **III Recife Open 2023**. Disponível em: https://www.worldcubeassociation.org/competitions/IIIRecifeOpen2023/results/all?event=333. Acesso em: 21 ago. 2024.

Melhor medida de tempo (em segundo) dos participantes na primeira rodada 3 × 3 × 3 do campeonato III Recife Open 2023



Fonte: elaborado com base em WORLD Cube Association. **III Recife Open 2023**. Disponível em: https://www.worldcubeassociation.org/competitions/IIIRecifeOpen2023/results/all?event=333. Acesso em: 21 ago. 2024.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

DND_PROJECT/SHUTTERSTOCK

O cubo mágico é um tipo de quebra-cabeça tridimensional, inventado em 1974. A versão mais comum é a 3 × 3 × 3, mas há outras, como a 2 × 2 × 2, a 4 × 4 × 4, a 5 × 5 × 5, com faces em outros formatos etc.

Com base nessas representações, faça o que se pede.

30 a. Espera-se que os estudantes percebam que a representação mais adequada depende dos fatores que se pretende analisar.

a. **EM DUPLA** **ARGUMENTAÇÃO** Qual das representações você acha que é mais adequada? Converse com um colega a respeito disso, justificando sua escolha.

b. Qual das representações indicou menor perda de informações dos dados em si? Com base em alguma das representações, é possível saber o valor de cada dado?

30 b. Diagrama de ramo e folhas; sim, por meio do diagrama de ramo e folhas.

c. Por meio do *box-plot*, é possível saber quantos participantes havia nessa rodada do campeonato? E por meio das outras representações? Determine o número de participantes. **30 c.** Não; sim; 44 participantes.

d. Em sua opinião, qual das representações permite identificar de maneira mais imediata a dispersão dos dados em torno da mediana e dos quartis? **30 d.** Espera-se que os estudantes percebam que a representação mais adequada, nesse caso, seria o *box-plot*.

e. Identifique a mediana e o primeiro e o terceiro quartis desse conjunto de dados. **30 e.** $Me = 18{,}800$; $Q_1 = 12{,}150$; $Q_3 = 34{,}975$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

30 f. Diagrama de ramo e folhas ou *box-plot*; menor valor: 7,19; maior valor: 58,25.

30 g. 23 participantes; 6 participantes; diagrama de ramo e folhas.

30 h. Resposta pessoal.

30 i. Respostas pessoais.

f. Qual das representações é mais adequada para identificar o valor do menor e do maior dado desse conjunto? Quais são esses valores?

g. Quantos participantes tiveram melhor medida de tempo abaixo de 20 segundos? E entre 40 e 50 segundos? Que representação você consultou para responder a essas questões?

h. Agora, responda novamente ao item **a**. Você mudou de opinião?

i. EM GRUPO Você já tentou montar um cubo mágico? O que você acha desse tipo de quebra-cabeça? Você gosta de passatempos como esse ou de outros parecidos? Converse com os colegas sobre isso.

31. Resposta pessoal.

31. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Elabore um problema usando uma das representações gráficas da **atividade 30**. Passe seu problema para um colega resolver e resolva o problema criado por ele.

32. EM DUPLA Mara está treinando para uma prova de natação. Considere as medidas de tempo, em segundo, que ela fez em 15 treinos (do mais antigo para o mais recente) para completar 50 metros livre. **32 a.** Resposta pessoal.

40,3	38,4	43,2	56,2	35,5	33,3	40,1	42,3	45,3
37,5	42,1	35,3	38,7	34,2	33,2			

a. Represente graficamente esse conjunto de dados. Compare sua representação com a de um colega e, se forem diferentes, analisem por que a representação de um seria mais adequada que a do outro.

b. Caso Mara desejasse construir um gráfico para analisar a evolução de suas medidas de tempo ao longo dos treinos, os gráficos que vocês construíram seriam adequados? Qual gráfico seria interessante que ela construísse nesse caso? **32 b.** Resposta pessoal; gráfico de linha.

33. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Elabore uma atividade em que seja necessário construir uma representação gráfica e escrever conclusões a respeito de um conjunto de dados. Entregue sua atividade para um colega resolver e resolva a dele. **33.** Resposta pessoal.

Diagrama de dispersão

Com frequência, em um estudo ou pesquisa, interessa verificar se existe relação entre duas variáveis quantitativas. Por exemplo, verificar relações, como: o consumo das famílias e o seu rendimento; a medida de massa dos bebês e a medida de tempo de vida deles; as notas dos estudantes e a medida de tempo de estudo; e o preço de um produto e a demanda, entre outras.

Uma representação bastante útil para verificar a associação entre duas variáveis quantitativas é o **diagrama de dispersão**.

Para construir um gráfico desse tipo, em muitas situações, consideram-se uma variável independente e uma dependente, o que gera um conjunto de dados da forma:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

Em seguida, cada um dos pares é representado por um ponto no plano cartesiano.

Acompanhe o exemplo.

Um professor de Estatística, interessado em analisar a relação entre a nota dos estudantes em determinada prova e a medida de tempo de estudo extraclasse, coletou os dados indicados na tabela a seguir.

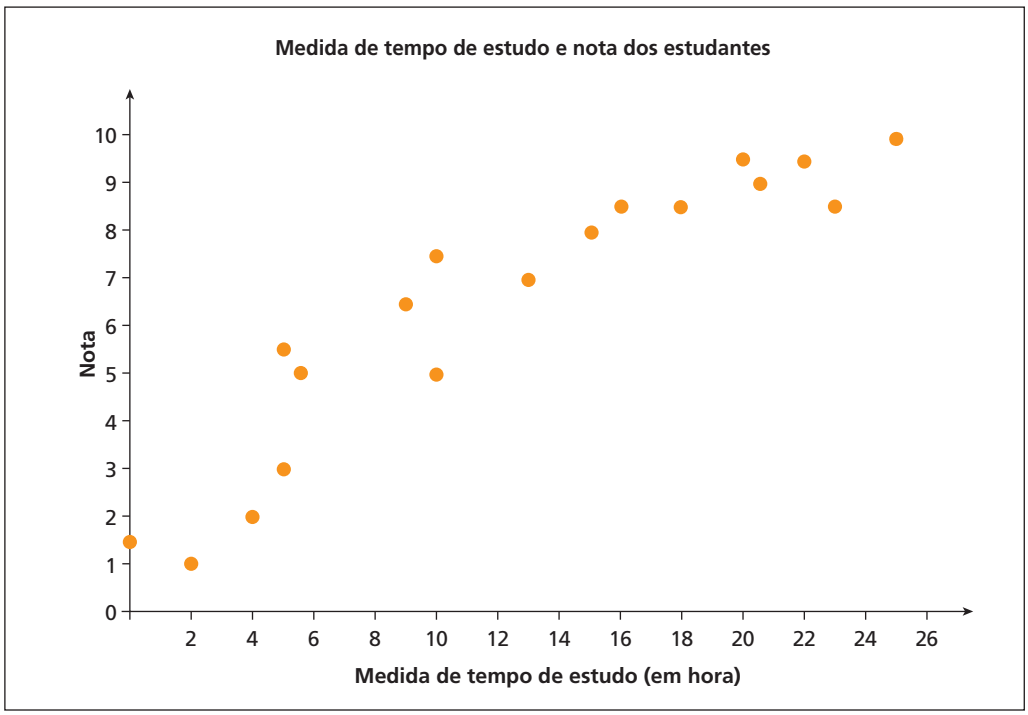
Medida de tempo de estudo e nota dos estudantes

Estudante	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
Medida de tempo de estudo (em hora)	20	25	10	5	16	5,5	4	13	2	0	10	5	18	15	23	20,5	22	9
Nota	9,5	10	7,5	5,5	8,5	5	2	7	1	1,5	5	3	8,5	8	8,5	9	9,5	6,5

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nesse caso, a variável dependente é a nota, e a variável independente é a medida de tempo de estudo extraclasse, pois a intenção é analisar se a nota está relacionada à medida de tempo de estudo. Para construir um diagrama de dispersão para esses dados, é necessário representar cada par ordenado (medida de tempo de estudo, nota) em um plano cartesiano. Observe.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

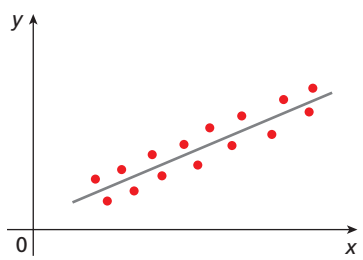
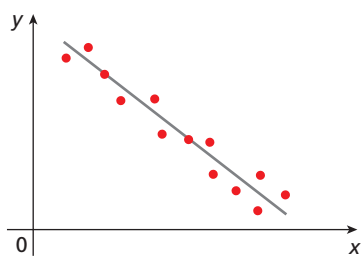
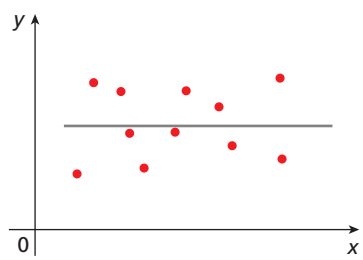
É possível perceber que, de modo geral, quanto maior for a medida de tempo de estudo extraclasse, maior será a nota obtida.

Correlação linear

A correlação linear procura medir quão bem a relação entre as variáveis pode ser expressa por uma reta. Existe um coeficiente de correlação r_{xy} para quantificar essa relação. Não estudaremos como calcular diretamente esse coeficiente; apresentaremos apenas como interpretá-lo e como determiná-lo usando uma planilha eletrônica.

Observe os tipos de correlação linear a seguir.

Tipos de correlação linear

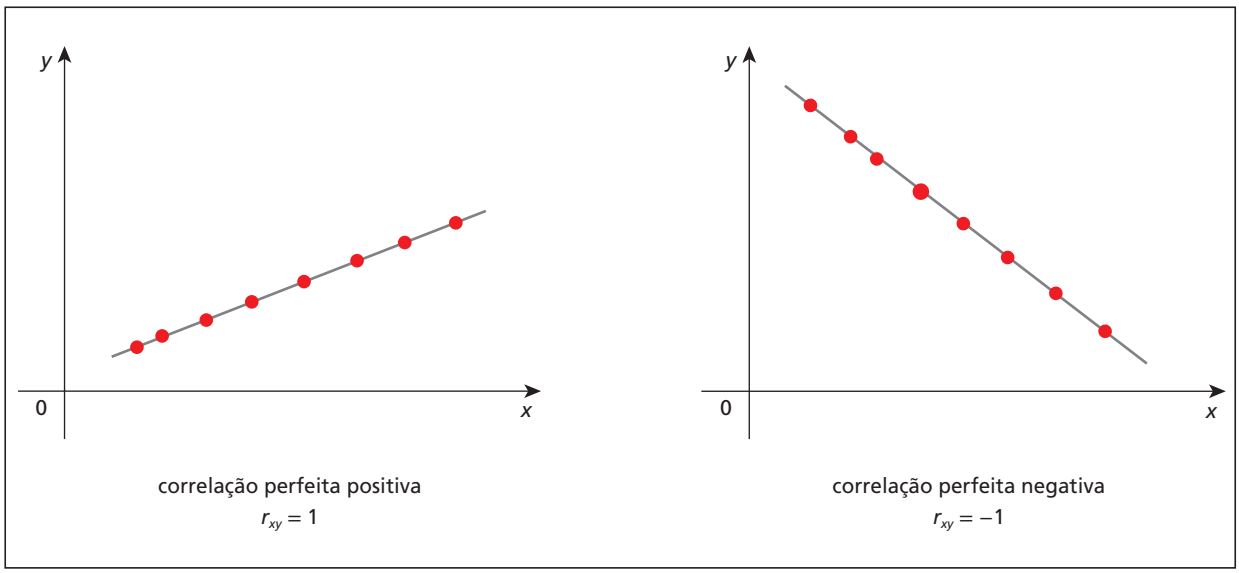
Correlação linear positiva	Correlação linear negativa	Correlação linear nula
		
A correlação é positiva se valores crescentes de x estiverem associados a valores crescentes de y. Nesse caso: $0 < r_{xy} \leqslant 1$	A correlação é negativa se valores crescentes de x estiverem associados a valores decrescentes de y. Nesse caso: $-1 \leqslant r_{xy} < 0$	Quando as variações de x e y ocorrem independentemente, a correlação é nula, ou seja, não existe dependência linear entre as variáveis. Nesse caso: $r_{xy} = 0$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observações

- Quando os pontos estão perfeitamente alinhados, temos uma correlação perfeita, que pode ser positiva ou negativa. Nesses casos, temos $r_{xy} = 1$ e $r_{xy} = -1$, respectivamente.

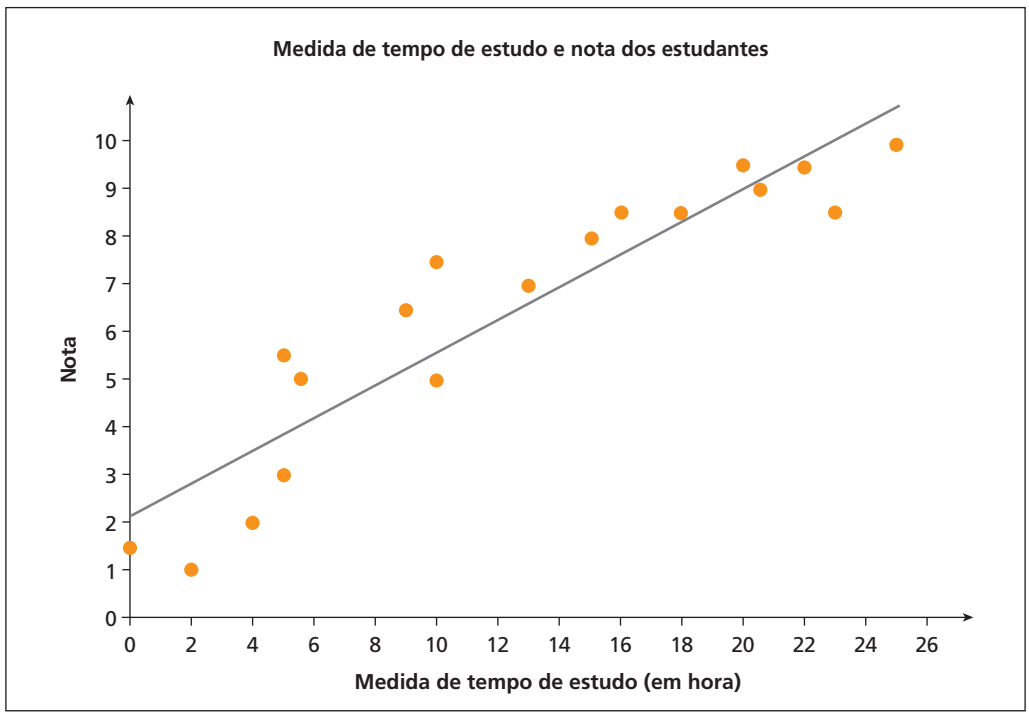


correlação perfeita positiva
$r_{xy} = 1$

correlação perfeita negativa
$r_{xy} = -1$

- Quanto mais próximo de +1 ou de −1 estiver o coeficiente de correlação r_{xy}, mais forte será a correlação entre x e y; quanto mais próximo de zero estiver, mais fraca será essa correlação.

No exemplo anterior, sobre a relação entre a nota dos estudantes e a medida de tempo de estudo extraclasse, a correlação das variáveis é positiva, ou seja, os pontos distribuem-se de modo que é possível ajustá-los por meio da reta a seguir.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

Agora vamos usar uma planilha eletrônica para construir um diagrama de dispersão e a reta que ajusta os pontos do diagrama, além de determinar o coeficiente de correlação das variáveis. Para isso, vamos considerar o conjunto de medidas de tempo que 15 atletas levaram para completar uma prova esportiva e a medida de tempo média de treino semanal.

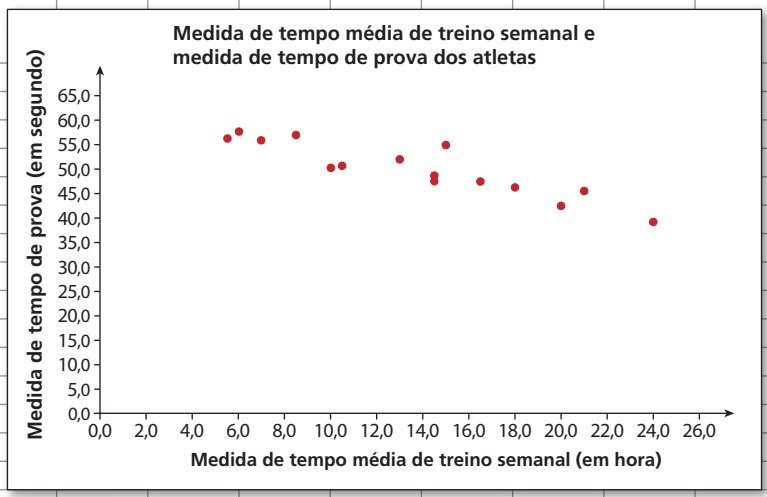
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos investigar como a medida de tempo de prova está relacionada à medida de tempo de treino.

B2 | *Fórmula* | 13

	A	B	C
1	**Atleta**	**Medida de tempo média de treino semanal (em hora)**	**Medida de tempo de prova (em segundo)**
2	A	13,0	52,9
3	B	10,5	51,6
4	C	6,0	57,3
5	D	5,5	56,7
6	E	15,0	55,2
7	F	7,0	56,1
8	G	10,0	50,4
9	H	18,0	46,2
10	I	16,5	47,5
11	J	20,0	42,3
12	K	21,0	45,6
13	L	14,5	48,9
14	M	8,5	57,1
15	N	24,0	39,4
16	O	14,5	47,8

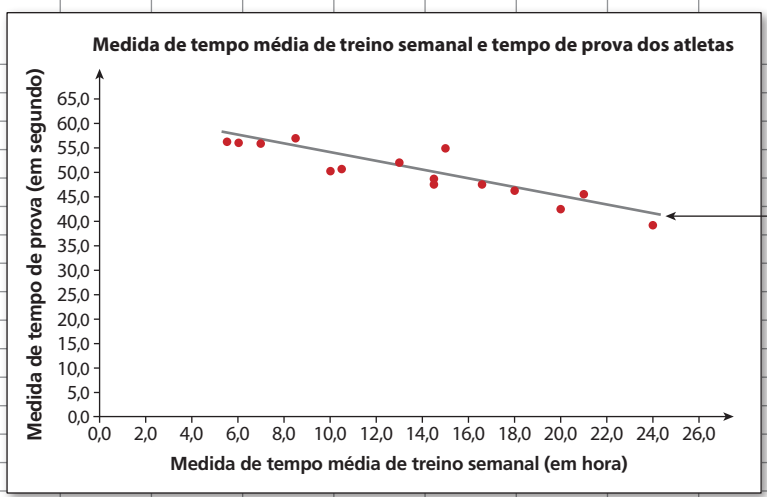


Para construir um diagrama, digitamos inicialmente os dados na planilha. É importante que os valores da variável independente sejam digitados à esquerda dos valores da variável dependente. Em seguida, selecionamos as duas colunas com os dados e escolhemos a opção de inserir gráfico de "dispersão".

Depois que o gráfico estiver construído, é possível inserir títulos no gráfico e nos eixos, alterar cores, modificar a escala dos eixos, inserir linhas auxiliares etc.

B2 | *Fórmula* | 13

	A	B	C
1	**Atleta**	**Medida de tempo média de treino semanal (em hora)**	**Medida de tempo de prova (em segundo)**
2	A	13,0	52,9
3	B	10,5	51,6
4	C	6,0	57,3
5	D	5,5	56,7
6	E	15,0	55,2
7	F	7,0	56,1
8	G	10,0	50,4
9	H	18,0	46,2
10	I	16,5	47,5
11	J	20,0	42,3
12	K	21,0	45,6
13	L	14,5	48,9
14	M	8,5	57,1
15	N	24,0	39,4
16	O	14,5	47,8
19		r_{xy}	
20		−0,911473231	



Para determinar o coeficiente de correlação, digitamos, em uma célula vazia qualquer, a fórmula: = CORREL(B2:B16; C2:C16) (Calcula o coeficiente de correlação entre a variável cujos dados estão no intervalo B2 a B16 e a variável cujos dados estão no intervalo C2 a C16.)

Para traçar a reta que ajusta os pontos, basta escolher a opção de adicionar "linha de tendência".

Ao observar o diagrama de dispersão construído na planilha, é possível perceber que, quanto maior for a medida de tempo média de treino semanal, menor será a medida de tempo de prova, ou seja, há uma correlação linear negativa entre essas variáveis. Essa correlação é comprovada pelo coeficiente de correlação entre −1 e zero: $r_{xy} \simeq -0{,}91$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

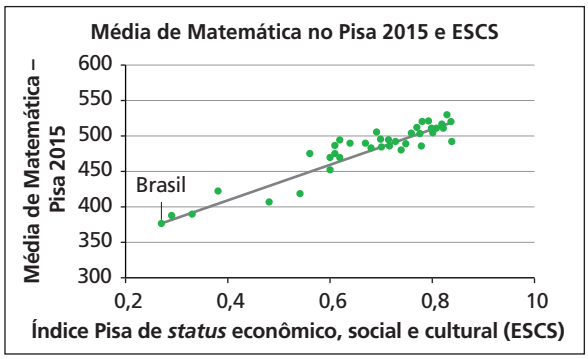
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

34 b. Dos países representados no diagrama, o Brasil é o que teve a menor média de Matemática no Pisa 2015 e o menor Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

34. **ARGUMENTAÇÃO** Observe o diagrama e as informações a seguir, extraídos do *Anuário Brasileiro da Educação Básica 2019*.



Fonte: elaborado com base em TODOS pela Educação. **Anuário Brasileiro da Educação Básica 2019**. Disponível em: https://www.todospelaeducacao.org.br/_uploads/_posts/302.pdf. Acesso em: 21 ago. 2024.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) é uma avaliação trienal aplicada a estudantes de 15 anos em cerca de 70 países. Ele é realizado pela Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico (OCDE) em colaboração com as nações envolvidas.

O Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural (ESCS) é uma forma de considerar os efeitos do nível socioeconômico familiar dos estudantes, assim como do contexto social de suas escolas. Essa medida tem três componentes: índice do nível educacional dos pais, índice do nível ocupacional dos pais e índice dos bens domésticos – recursos educacionais e culturais presentes no lar.

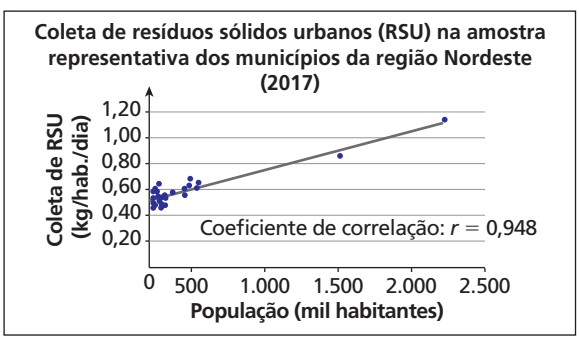
Nesse diagrama, cada ponto representa os dados de um país; os dados referentes ao Brasil são representados pelo ponto mais à esquerda no diagrama.

Com base em todas as informações apresentadas, responda às questões. **34 a.** Sim; há uma correlação positiva.

a. Há algum tipo de correlação entre o Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural (ESCS) e a média de Matemática no Pisa 2015?

b. Qual é a situação do Brasil, em relação a essas duas variáveis, comparada às de outros países representados no diagrama?

35. O diagrama a seguir foi extraído do documento *Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2017*. **35.** Alternativa **c.**



Fonte: elaborado com base em ASSOCIAÇÃO Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe). **Panorama dos resíduos sólidos no Brasil 2017**, set. 2018.

Em relação a esse diagrama, escolha a afirmativa correta.

a. A correlação entre as variáveis "população" e "coleta de RSU" é negativa.

b. A correlação entre as variáveis "população" e "coleta de RSU" é nula.

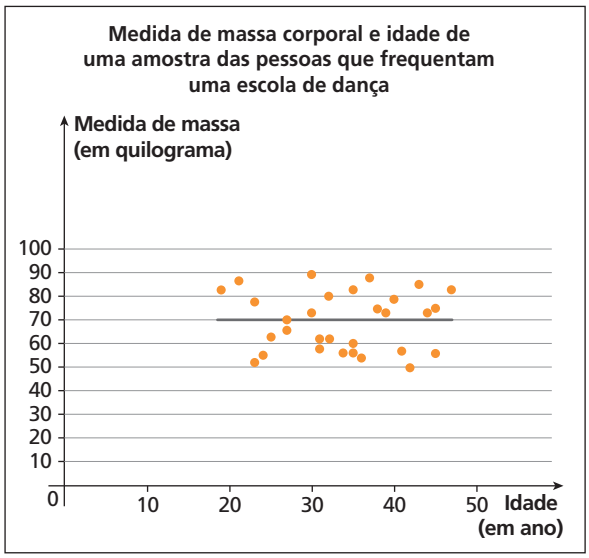
c. Nessa amostra, municípios com maior população tendem a ter maior coleta diária de resíduos sólidos urbanos por habitante.

d. Todos os municípios da amostra têm coleta diária de menos de 1 kg de RSU por habitante.

e. O diagrama apresenta dados de todos os municípios da região Nordeste.

36. O diagrama a seguir apresenta os dados de medida de massa corporal e idade de uma amostra de 30 pessoas que frequentam uma escola de dança. **36.** Sim; a correlação é nula.

Pela representação gráfica, é possível perceber algum tipo de correlação linear entre as variáveis?



Fonte: elaborado para fins didáticos.

37. **SOFTWARE** Considere os dados representados pelos pares ordenados a seguir, referentes a 20 estudantes de uma turma de 3º ano. Em cada par, a primeira coordenada representa a medida de altura do estudante (em centímetro), e a segunda, seu número de calçado.

(150; 34) (162; 36) (154; 34) (168; 41) (167; 37)

(175; 42) (155; 35) (168; 37) (170; 38) (163; 36)

(167; 37) (165; 36) (175; 40) (172; 43) (180; 44)

(169; 39) (176; 39) (160; 36) (167; 36) (170; 42)

Usando uma planilha eletrônica, construa um diagrama de dispersão para esse conjunto de dados e verifique se o número do calçado está relacionado à medida da altura dos estudantes. Ainda na planilha, calcule o coeficiente de correlação e trace a reta que ajusta os pontos do diagrama.

37. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

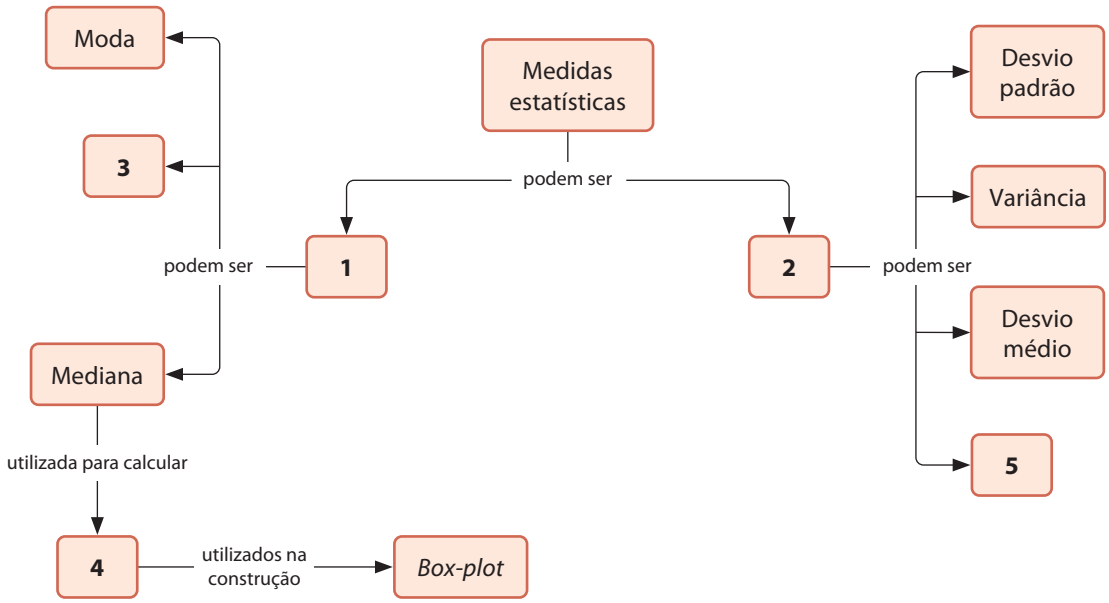
PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 3

Registre em seu caderno

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Média aritmética

B. Medidas de dispersão

C. Quartis

D. Medidas de tendência central

E. Amplitude

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 2; C – 4; D – 1; E – 5.

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

Uma senhora toma chá...: como a estatística revolucionou a ciência no século XX

David Salsburg

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

De forma simples, o autor conta como a Estatística transformou os métodos de pesquisa na ciência, aumentando a credibilidade da investigação em diversos campos do saber, como a Medicina, a política e a publicidade. Tudo de forma leve, partindo de quadros biográficos como o que inspirou o título do livro.

REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

Software

Medidas do corpo: *box-plot*

Nesse *software* de uso *on-line*, do *site* da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), o foco é o uso de gráficos *box-plots* para comparar variáveis quantitativas (medida de altura e número do calçado) em diferentes categorias.

Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/arquivos/software/1238/. Acesso em: 18 set. 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Considerando os valores 7, 11, 8, 14 e 10, podemos afirmar que, para essa amostra, a média aritmética é [redacted], a moda [redacted] e a mediana [redacted]. **Q1.** Alternativa **c.**

a. 10; é 10; não existe.

b. 10; não existe; é 8.

c. 10; não existe; é 10.

d. 10; não existe; é 14.

Q2. Samanta almoça em um restaurante próximo a seu trabalho de segunda a sexta. Na semana passada, ela gastou as seguintes quantias: R$ 16,00, R$ 15,00, R$ 17,00, R$ 14,00 e R$ 15,00. Portanto, seu gasto médio com almoço na semana passada foi: **Q2.** Alternativa **d.**

a. R$ 15,00 **c.** R$ 15,50

b. R$ 16,50 **d.** R$ 15,40

Q3. Oito amigas têm, respectivamente, 13, 12, 12, 15, 14, 12, 13 e 15 anos. Podemos dizer que a idade mais frequente, ou idade [redacted], é [redacted] anos. **Q3.** Alternativa **b.**

a. mediana; 13.

b. modal; 12.

c. média; 12.

d. mediana; 14.

Q4. O desvio padrão [redacted] quando todos os valores observados são iguais. **Q4.** Alternativa **b.**

a. não existe **c.** é negativo

b. é zero **d.** é não nulo

Q5. [redacted] é o desvio médio e [redacted] é a variância da distribuição 1, 2, 3, 4 e 5. **Q5.** Alternativa **d.**

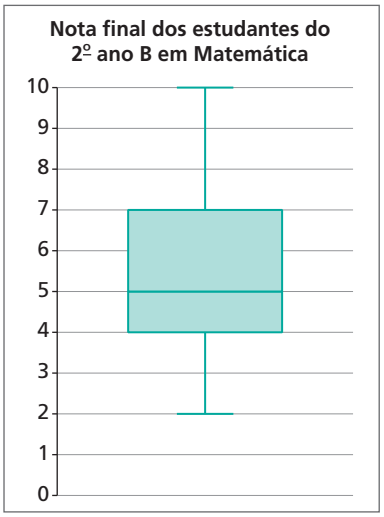
a. 1,5; 2. **c.** 1,2; 10.

b. 1,0; 10. **d.** 1,2; 2.

Q6. Uma pesquisa de bairro constatou que um mesmo produto era vendido por preços diferentes nas seis lojas que o comercializavam em determinada rua. Os preços encontrados foram R$ 9,00, R$ 5,00, R$ 8,00, R$ 10,00, R$ 4,00 e R$ 6,00. A pesquisa calculou o desvio padrão desses valores, que é aproximadamente: **Q6.** Alternativa **d.**

a. 3,1 **b.** 1,0 **c.** 1,8 **d.** 2,2

Q7. Observando o *box-plot* a seguir, pode-se afirmar que o primeiro quartil, a mediana, o terceiro quartil e a amplitude das notas são, respectivamente: **Q7.** Alternativa **a.**



Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. 4, 5, 7 e 8. **c.** 4, 5, 7 e 10.

b. 2, 5, 10 e 8. **d.** 5, 4, 7 e 10.

Q8. Para verificar a associação entre duas variáveis numéricas é mais adequado construir um: **Q8.** Alternativa **c.**

a. gráfico de barras duplas. **c.** diagrama de dispersão.

b. gráfico de linhas. **d.** *box-plot*.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam média, moda e mediana de uma distribuição.	X	X	X					
Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.				X	X	X		
Construir e interpretar *box-plots*.							X	
Construir e interpretar diagramas de dispersão.								X

Capítulo 4

ANÁLISE COMBINATÓRIA

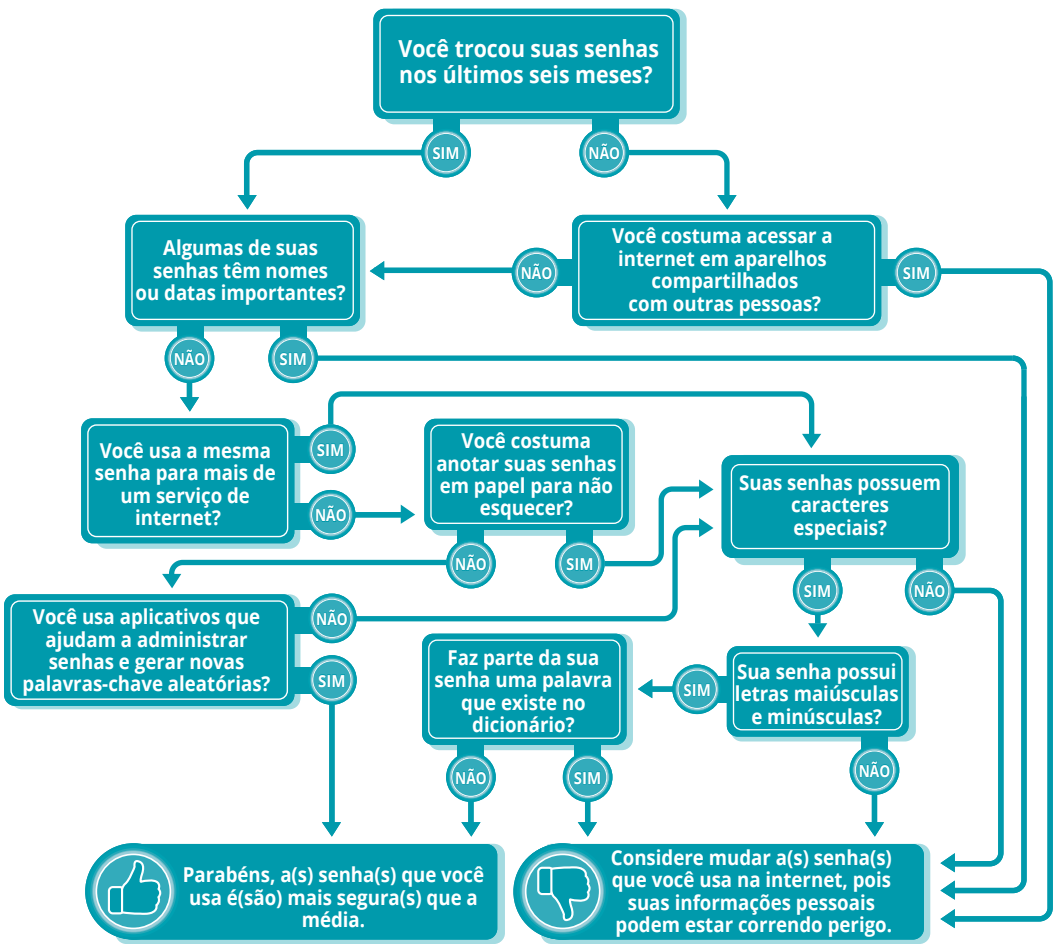
Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 17

Quem acessa a internet com frequência está acostumado a criar senhas para diferentes tipos de serviço (*e-mail*, redes sociais, cadastros em *sites* etc.). Essas senhas, que muitas vezes misturam letras, algarismos e outros caracteres especiais, servem para garantir a segurança das informações e a privacidade dos usuários. Mas os termos que escolhemos como palavras-chave podem não ser tão seguros quanto imaginamos, o que nos torna alvos fáceis de programas de computador maliciosos e pessoas mal-intencionadas.

Todos os anos, *sites* especializados em segurança na rede divulgam as senhas mais comuns descobertas por *hackers*. No topo da lista, sempre estão combinações óbvias, como 123456 e *password* (a palavra "senha", em inglês), ou formadas por sequências de caracteres do teclado, como qwerty. É impossível estar completamente seguro na internet, mas, com criatividade e cuidado, podemos escapar do óbvio e aprimorar nossa segurança na rede.

Siga as perguntas deste esquema e descubra se suas senhas são seguras.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fontes: elaborado com base em CRUZ, Amanda. **I Hope Your Password Isn't On The List Of 100 Worst Passwords Of 2024**. PureVPN, 1º jan. 2024. Disponível em: https://www.purevpn.com/blog/worst-password-list/. Acesso em: 19 ago. 2024; CERT.BR. **Cartilha de segurança para a internet:** versão 4.0. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil, 2012; SECURITY.ORG. **How secure is my password?** Disponível em: https://www.security.org/how-secure-is-my-password/. Acesso em: 19 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Contagem

No mundo atual, é cada vez maior a necessidade de armazenar e transmitir dados pessoais e sigilosos com segurança. Além de complexos sistemas criptografados que compõem os suportes lógicos de programação nas redes de computadores, a inviolabilidade dos dados pode ser assegurada com certo grau de confiança quando o usuário cria senhas não previsíveis.

Uma senha é um conjunto de caracteres que confirmam a identidade de um usuário ou permitem o acesso a dados, programas ou sistemas que não estão disponíveis ao público. Para formar uma senha, além das 26 letras do alfabeto – que podem ser aplicadas em maiúscula ou em minúscula, ou ainda misturando os dois tipos – e dos 10 algarismos, ainda dispomos de vários caracteres especiais.

De acordo com especialistas, uma senha segura deve ter pelo menos 8 caracteres. Mesmo sem fazer uso dos caracteres especiais, a quantidade de senhas que podemos inventar é enorme.

Empregando apenas os algarismos e as letras do nosso alfabeto, quantas senhas de 8 caracteres podem ser formadas? E se pudermos utilizar também os caracteres especiais?

Resolver problemas como esses implica determinar a quantidade de combinações possíveis para formar as diferentes senhas. Problemas de contagem desse tipo fazem parte do nosso cotidiano.

Este carrossel apresenta aos estudantes situações que envolvem contagem, como a criação de um perfume pela combinação de diferentes essências ou, então, a criação de uma senha para a segurança de dispositivos eletrônicos.

O campo de estudo que desenvolve métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, do número de elementos de um conjunto é chamado de **Análise combinatória**. A Análise combinatória pode ser aplicada nas mais diversas situações, como na Química, ao investigar a possível união entre átomos, ou no esporte, ao elaborar tabelas de campeonatos.

Associada à Probabilidade e à Estatística, a Análise combinatória constitui um poderoso instrumento de antecipação de resultados nos campos industrial, comercial, científico ou governamental.

No decorrer deste capítulo, veremos como resolver variados problemas pertinentes à Análise combinatória.

OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Situações que envolvem possibilidades

Situações envolvendo problemas de contagem

Acompanhe as situações a seguir.

a. Um programa de TV sorteia duas casas de uma mesma rua para a entrega de prêmios. Os números das casas sorteadas devem ter 3 algarismos. O número de uma das casas deve ser par, e o da outra, ter algarismos distintos. Do total de números possíveis, quantos atendem à primeira exigência? E quantos atendem à segunda?

Vamos partir de um esquema que represente números de 3 algarismos no sistema de numeração decimal:

centena	dezena	unidade

No primeiro caso, há 9 possibilidades para a ordem das centenas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9). Para cada algarismo que pode ocupar a ordem das centenas, há 10 possibilidades para a ordem das dezenas (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), totalizando 90 possibilidades ($9 \cdot 10 = 90$). Para cada uma dessas 90 possibilidades, há 5 para a ordem das unidades (para o número ser par, o algarismo da ordem das unidades deve ser 0, 2, 4, 6 ou 8). Logo, podemos formar 450 números pares de 3 algarismos, pois $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$.

No segundo caso, como os algarismos devem ser distintos, há 9 possibilidades para a ordem das centenas (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9), 9 possibilidades para a ordem das dezenas (qualquer um dos 10 algarismos, exceto o que vai ocupar a ordem das centenas) e 8 possibilidades para a ordem das unidades (qualquer um dos 10 algarismos, exceto os que vão ocupar as ordens das centenas e das dezenas). Assim, podemos formar 648 números de 3 algarismos distintos, pois $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Portanto, com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, é possível formar 450 números pares de 3 algarismos e 648 números de 3 algarismos distintos.

Observação

Números com algarismos distintos são aqueles que não têm algarismos repetidos. São válidos, por exemplo, 532 ou 125, mas não 332, 555 ou 242.

Observação

O algarismo 0 não pode ocupar a casa da centena, porque, nesse caso, teríamos um número com dois algarismos, e não com três. Por exemplo, 047.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

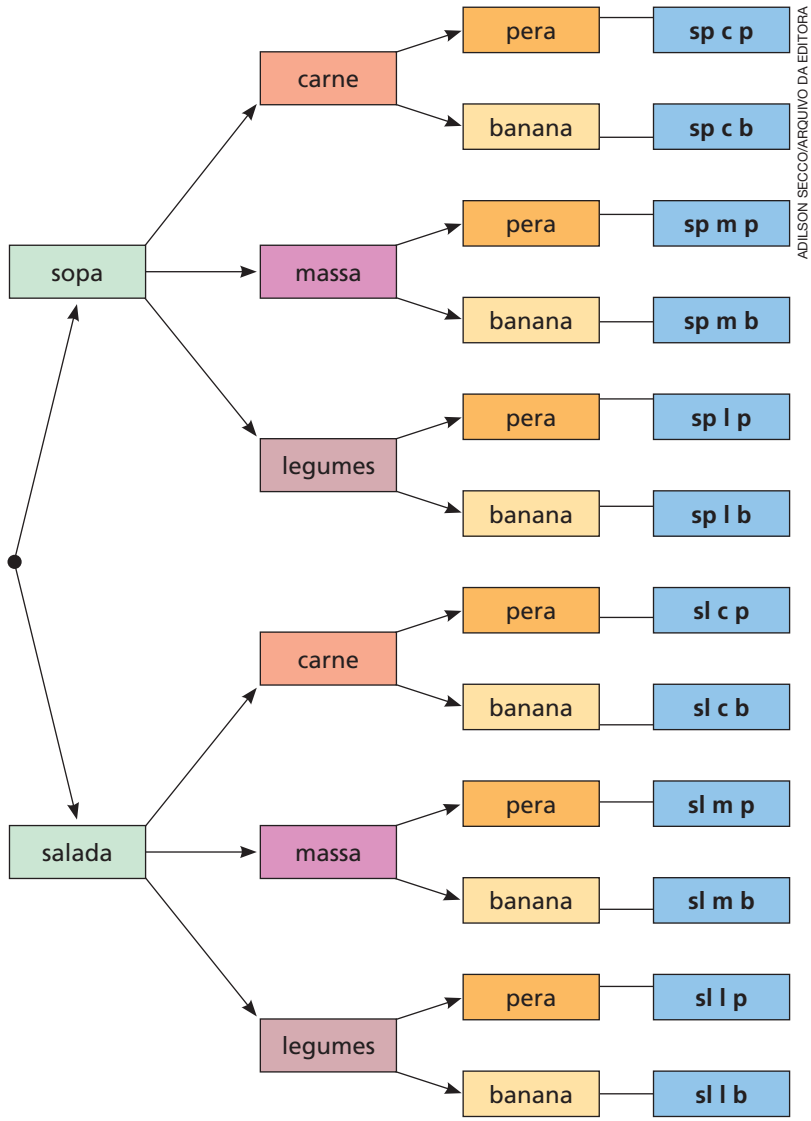
b. Raul almoça em um restaurante que oferece refeições a um preço fixo com direito a uma entrada, um prato principal e uma fruta. O restaurante oferece 2 opções de entrada (sopa ou salada), 3 opções de prato principal (carne, massa ou legumes) e 2 opções de fruta (pera ou banana). Quantas refeições diferentes Raul pode montar?

Ele deve fazer três tipos de escolha:

- E_1: sopa ou salada (**sp** ou **sl**);
- E_2: carne, massa ou legumes (**c**, **m** ou **l**);
- E_3: pera ou banana (**p** ou **b**).

Vamos organizar as opções em uma árvore de possibilidades:

ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observações

- Em problemas de contagem mais simples, a **árvore de possibilidades**, também chamada de **diagrama de árvore** ou **diagrama sequencial**, ajuda na visualização e na contagem de todas as possibilidades.
- Fazer um quadro é outra maneira de visualizar e de contar as possibilidades.

Portanto, Raul pode montar 12 refeições diferentes, pois $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CRÉDITOS DAS FOTOS: 1: MARGOUILLAT PHOTO/SHUTTERSTOCK; 2: MAKS NARODENKO/SHUTTERSTOCK; 3: BONCHAN/SHUTTERSTOCK; 4:VALERY121283/SHUTTERSTOCK; 5: YELLOWJ/SHUTTERSTOCK; 6: BERGAMONT/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES; 7: SIAMIONAU PAVEL/SHUTTERSTOCK.

c. Agora, vamos considerar dois lançamentos sucessivos de uma moeda. Que resultados podem ocorrer?

Quando lançamos uma moeda, podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**). Lançando-a uma segunda vez, novamente podemos obter cara (**c**) ou coroa (**k**).

Vamos representar em um quadro os possíveis resultados destes 2 lançamentos:

Possíveis resultados de dois lançamentos sucessivos de uma moeda

2º lançamento / 1º lançamento	Cara (c)	Coroa (k)
Cara (c)	cc	ck
Coroa (k)	kc	kk

URFIN/SHUTTERSTOCK

Ao lançar 2 vezes a moeda, podemos obter 4 resultados: (**c**, **c**), (**c**, **k**), (**k**, **c**) ou (**k**, **k**). O total de resultados possíveis, neste caso, pode ser representado pela multiplicação $2 \cdot 2 = 4$.

Ao resolver as três situações anteriores, empregamos um princípio que será muito usado neste capítulo: o **princípio multiplicativo**, também chamado de **princípio fundamental da contagem**.

Princípio multiplicativo

Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, A e B. Se A pode ocorrer de m maneiras e se, para cada uma delas, B pode ocorrer de n maneiras, o número de maneiras que o acontecimento pode ocorrer é $m \cdot n$.

O princípio multiplicativo pode ser estendido para três ou mais etapas.

Atividades resolvidas

R1. Dois estudantes chegam atrasados a uma palestra. No auditório, só estão vazias 7 cadeiras. Determinar a quantidade de maneiras que eles podem ocupar essas cadeiras.

▶ **Resolução**

Vamos considerar que a ocupação das cadeiras ocorra em duas etapas:

- E_1 (escolha do primeiro estudante): 7 possibilidades
- E_2 (escolha do segundo estudante): 6 possibilidades

Pelo princípio multiplicativo, temos: $7 \cdot 6 = 42$

Logo, os estudantes podem ocupar as cadeiras de 42 maneiras diferentes.

R2. Ao entrar em um cinema, 5 amigos encontram uma fileira de 5 poltronas livres. Determinar de quantas maneiras diferentes eles podem ocupar essas poltronas.

▶ **Resolução**

O esquema a seguir representa as possibilidades de ocupação das 5 poltronas.

5	4	3	2	1

Observe que são:

- 5 possibilidades para a ocupação da primeira poltrona;
- 4 possibilidades para a segunda;
- 3 possibilidades para a terceira;
- 2 possibilidades para a quarta;
- 1 possibilidade para a quinta.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Portanto, os amigos podem ocupar as poltronas de 120 maneiras diferentes.

R3. Determinar a quantidade de números de 4 algarismos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5.

▶ **Resolução**

O esquema a seguir representa números de 4 algarismos:

milhar	centena	dezena	unidade

Observe que, para o algarismo do milhar, há apenas 5 possibilidades, pois essa posição não pode ser ocupada pelo algarismo zero. Para cada uma das posições restantes — centena, dezena e unidade —, há 6 possibilidades.

Assim, pelo princípio multiplicativo, temos:

$5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1.080$

Portanto, é possível formar 1.080 números com os algarismos dados.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Para 3 lançamentos, obtemos 8 resultados. Para 2 lançamentos, temos 4 resultados, pois $2^2 = 4$; para 3 lançamentos, 8 resultados, pois $2^3 = 8$. Dessa maneira, pode-se observar que, para 4 lançamentos, teremos 16 resultados, pois $2^4 = 16$, e generalizando para n lançamentos, teremos 2^n resultados possíveis.

R4. Determinar a quantidade de números de 4 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 e que são divisíveis por 5.

▶ Resolução

Se um número é divisível por 5, termina em 0 ou em 5. Vamos estudar esses dois casos.

1. Resposta no *Suplemento para o professor*.

__ __ __ 0

- 3 possibilidades
- 4 possibilidades
- 5 possibilidades: (1, 2, 3, 4 e 5)

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

__ __ __ 5

- 3 possibilidades
- 4 possibilidades
- 4 possibilidades: (1, 2, 3 e 4)

$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

Assim, temos 60 números terminados em 0 e 48 números terminados em 5. Portanto, é possível formar 108 números divisíveis por 5.

R5. Muitos países do Mercosul (Mercado Comum do Sul) já adotam um sistema unificado de placas de veículos. No Brasil, ele se tornou obrigatório para veículos emplacados a partir de janeiro de 2020. Cada país adotou uma disposição diferente dos caracteres para a composição das placas; no Brasil, essas placas são compostas de uma sequência de 3 letras, 1 algarismo, 1 letra e 2 algarismos. Quantas são as possibilidades de placas diferentes para o Brasil nesse sistema? (Considere o alfabeto com 26 letras.)

Novo modelo de placa adotado pelos países-membros do Mercosul.

JUNIOR ROZZO/ROZZO IMAGENS

▶ Resolução

O diagrama a seguir representa os 7 espaços de uma placa nesse sistema:

Cada um dos espaços reservados às letras pode ser preenchido com qualquer uma das 26 letras do alfabeto, e cada um dos espaços reservados aos algarismos pode ser preenchido com qualquer um dos 10 algarismos, conforme o esquema a seguir:

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades de placas é dado por:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 456.976.000$

Portanto, há 456.976.000 possibilidades de placas diferentes para o Brasil nesse sistema.

OBJETO DIGITAL Vídeo: Placa de automóvel

Este vídeo apresenta aos estudantes como as placas dos veículos eram formadas antes do acordo do Mercosul, em janeiro de 2020, e quantas possibilidades havia na formação das placas. Desse modo, enriquece o contexto da **atividade resolvida R5**.

2. A situação de 7 estudantes escolherem 2 cadeiras é análoga à de 7 cadeiras serem escolhidas por 2 estudantes quanto ao número de possibilidades. Logo, a quantidade seria a mesma.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Faça uma árvore de possibilidades para 3 lançamentos sucessivos de uma mesma moeda. Quantos são os resultados possíveis? Pensando na quantidade de resultados obtidos para 2 e 3 lançamentos e no **reconhecimento de padrões**, determine a quantidade de resultados possíveis para 4 lançamentos e conjecture qual seria essa quantidade para n lançamentos.

2. Considere agora que, na **atividade resolvida R1**, 7 estudantes chegassem atrasados e só houvesse 2 cadeiras vazias no auditório. Nesse caso, qual seria a quantidade de maneiras que 7 estudantes poderiam ocupar os 2 lugares?

3. Em uma situação parecida com a da **atividade resolvida R2**, de quantas maneiras diferentes 7 pessoas podem ocupar uma fileira com 7 poltronas livres? **3.** 5.040 maneiras.

4. **ARGUMENTAÇÃO** No caso do Paraguai, as placas do sistema unificado têm o seguinte padrão de composição: 4 letras seguidas por 3 algarismos. Sem fazer contas, responda: nesse caso, o número de possibilidades de placas é maior, menor ou igual ao do Brasil? Por quê?

5. Com 3 tipos de macarrão e 2 tipos de molho, quantas opções de pratos diferentes de macarronada podem ser preparadas? **5.** 6 opções.

6. Além dos pontos explorados no infográfico no início do capítulo, é comum que se exija um mínimo de 8 caracteres para a senha ser considerada segura. Empregando apenas letras (maiúsculas e minúsculas) e algarismos, quantas senhas com a quantidade mínima de caracteres podem ser formadas? Indique a resposta usando uma potência.

6. 62^8 senhas.

7. Doze corredores participam de uma corrida. Se nenhum pode ganhar mais de um prêmio, de quantas maneiras podem ser distribuídos o 1º e o 2º prêmio? **7.** 132 maneiras.

8. Quantos são os números naturais de 4 algarismos?

8. 9.000 números.

9. De quantas maneiras distintas podem ser colocados 5 livros lado a lado em uma prateleira?

9. 120 maneiras.

KSENOVA NATALYA/SHUTTERSTOCK

4. Espera-se que os estudantes percebam que o número de possibilidades de placas será igual ao do Brasil, pois o total de possibilidades é obtido multiplicando-se quatro fatores iguais a 26 por três fatores iguais a 10.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. 223.560.000 senhas.

10. A senha de acesso de um *site* é composta de 4 letras distintas seguidas de 3 algarismos distintos. A primeira letra não pode ser Z, e o primeiro algarismo não pode ser zero. Quantas diferentes senhas de acesso a esse *site* podem ser criadas?

11. Calcule quantos números de 3 dígitos podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4 e 5, se os algarismos:

a. podem ser repetidos. **11 a.** 180 números.

b. não podem ser repetidos. **11 b.** 100 números.

12. Quantos números entre 1.000 e 8.000 podemos formar usando apenas 1, 3, 5, 7 e 9 sem repeti-los? **12.** 96 números.

13. A seleção para certo concurso é feita por uma prova com 6 questões. Para cada questão, há 3 opções de resposta. Os candidatos marcam as 6 respostas em um cartão igual ao da figura a seguir. **13.** 729 maneiras.

ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

Código do candidato: xxxxxxx-y						
	1	2	3	4	5	6
A	○	●	○	○	●	○
B	●	○	○	●	○	○
C	○	○	●	○	○	●

Calcule e responda: de quantas maneiras diferentes esse cartão pode ser preenchido?

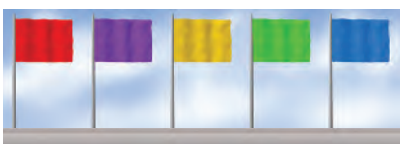
14. Qual é o número mínimo de pessoas que devem prestar o concurso da atividade anterior, para garantir que dois cartões sejam preenchidos de forma idêntica? **14.** 730 pessoas.

15. Uma técnica de atletismo deve escolher, de um grupo de 7 corredoras, dois times de 4 atletas cada um para as corridas de revezamento 4×100 m e 4×200 m. Todas as 7 atletas podem correr em qualquer um dos revezamentos. Se a melhor corredora deve ser a última nas duas corridas, de quantas maneiras distintas a técnica pode formar os times, sendo que as outras 6 corredoras devem participar de apenas uma equipe e cada ordem será contada como um time diferente? **15.** 720 maneiras.

16. 325 mensagens.

16. Uma torre de comunicações tem 5 bandeiras sinalizadoras. As mensagens são enviadas quando uma ou mais bandeiras são hasteadas, importando a ordem em que elas são hasteadas. Quantas mensagens distintas podem ser enviadas?

MANGA/ARQUIVO DA EDITORA



17. Leia o texto e responda.

O poeta e escritor francês Raymond Queneau (1903-1976) lançou, em 1961, um livro de sonetos muito interessante. O livro foi produzido de forma que o leitor possa compor sonetos com 14 versos, escolhendo, para cada linha, um verso entre 10 possíveis. Esse artifício foi possível pois a obra foi montada de modo que cada verso foi impresso em uma tira de papel e encadernado em 14 conjuntos de 10 tiras cada. O mais interessante é que, qualquer que seja a escolha entre os versos, o soneto formado sempre tem coerência.

17. 10^{14} ou 100 trilhões de sonetos.

JEAN PAZ - BIBLIOTECA DE ARTE GULBENKIAN, LISBOA

Livro de sonetos de Raymond Queneau na exposição *Tarefas infinitas*, no Centro de Pesquisa e Formação Sesc, São Paulo, 2018.

Segundo as informações do texto, determine a quantidade de sonetos que pode ser composta com o livro de Queneau.

18. **(Urca-2023)** Uma empresa de telefonia móvel pretende criar novas linhas para atender à demanda. Cada linha nova deve ter nove dígitos que deve começar com o número 96. Quantas linhas novas a empresa pode criar nas quais todos os algarismos sejam diferentes? **18.** Alternativa **d**.

a. 20.160 **c.** 42.460 **e.** 36.720

b. 30.200 **d.** 40.320

19. No código Morse, as "letras" são representadas por pontos e traços, em agrupamentos ordenados de 1 a 4 desses sinais para cada "letra". Quantas "letras" distintas podem ser representadas nesse código? **19.** 30 letras.

A	*B*	*C*	*D*	*E*
•—	—•••	—•—•	—••	•

20. Quantos números de 5.000 a 6.999 contêm pelo menos um algarismo 3? **20.** 542 números.

21. Uma escola tem 677 estudantes. Explique por que pelo menos 2 estudantes devem ter as mesmas duas letras iniciais de seus nomes. (Considere o alfabeto com 26 letras.)

21. Resposta no *Suplemento para o professor.*

22. **EM DUPLA** Resolva esta atividade com um colega.

Em determinado país, os números de telefone possuem 10 dígitos, conforme o padrão:

- código de área com 3 dígitos: o primeiro dígito não pode ser 0 ou 1;
- prefixo com 3 dígitos: o primeiro e o segundo dígitos não podem ser 0 ou 1;
- número da linha com 4 dígitos: os dígitos não podem ser todos iguais a 0.

22 a. 800 códigos.

a. Quantos diferentes códigos de área existem?

b. O código de área para certo município é 431. Com esse código, quantos diferentes prefixos existem?

c. Um dos prefixos do município do item **b** é 223. Com esse prefixo, quantos números de linha são possíveis?

d. Quantos diferentes números de telefone de 7 dígitos são possíveis dentro do código de área 431?

e. Quantos números de telefone de 10 dígitos são possíveis nesse país? **22 e.** 5.119.488.000 números.

23. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** **EM DUPLA** Elabore um problema que utilize o princípio multiplicativo. Troque o problema com um colega: ele resolve seu problema e você resolve o problema elaborado por ele. **23.** Resposta pessoal.

22 b. 640 prefixos.
22 c. 9.999 números.
22 d. 6.399.360 números.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Fatorial de um número natural

Boa parte dos problemas da Análise combinatória pode ser resolvida com uma ferramenta de cálculo que consiste no produto de números naturais consecutivos chamada de **fatorial**. Por exemplo, $1 \cdot 2 \cdot 3$ ou $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ são produtos de números naturais consecutivos. Em ambos os exemplos, multiplicamos números naturais de 1 até n: no primeiro caso, $n = 3$; no segundo, $n = 8$.

O **fatorial** de um número natural n é representado por $n!$ (lemos: "n fatorial") e é definido por:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ para } n \geqslant 2$$

Considera-se que: $1! = 1$ e $0! = 1$

Observe os exemplos.

a. O fatorial de 4, ou seja, 4!, é 24, pois: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b. $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3.628.800$

A notação fatorial facilita a representação da multiplicação de números naturais consecutivos. Por exemplo, para representar o produto $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, podemos escrever 25!

O número n! pode ser expresso da forma apresentada anteriormente, ou, se for conveniente, podemos escrevê-lo em termos de fatoriais de números menores. Observe:

$$10! = 10 \cdot \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{9!} = 10 \cdot 9!$$

- $n! = n \cdot (n - 1)!$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)!$, para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
- $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3)!$ etc., para $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

Observação

Podemos utilizar o procedimento acima para verificar que $1! = 1$ e $0! = 1$:

- Como $2! = 2 \cdot 1!$ e $2! = 2$, então $2 = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1! = 1$.
- Como $1! = 1 \cdot 0!$ e $1! = 1$, então $1 = 1 \cdot 0! \Rightarrow 0! = 1$.

Observação

Algumas calculadoras científicas têm a tecla $x!$, usada para calcular o fatorial de um número natural x.

Em uma calculadora com essa função, para calcular 9!, por exemplo, basta digitar 9 e apertar a tecla $x!$; no visor, aparecerá o número 362.880, que é o resultado de:

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Esse tipo de procedimento será muito usado na simplificação de expressões.

Considere os exemplos.

a. Observe como podemos simplificar as seguintes expressões:

- $\frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$
- $\frac{1.001!}{1.000!} = \frac{1.001 \cdot \cancel{1.000!}}{\cancel{1.000!}} = 1.001$
- $\frac{(n + 1)!}{n!} = \frac{(n + 1) \cdot \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n + 1$

b. Vamos escrever todas as expressões em termos de 5!

- $\frac{6!}{6} = \frac{6 \cdot 5!}{6} = 5!$
- $\frac{6!}{2} = \frac{6 \cdot 5!}{2} = 3 \cdot 5!$
- $4! = \frac{4! \cdot 5}{5} = \frac{5!}{5}$
- $\frac{8! - 6!}{3!} = \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!) - (6 \cdot 5!)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{(6 \cdot 5!) \cdot (8 \cdot 7 - 1)}{6} = 55 \cdot 5!$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades resolvidas

R6. Determinar o número natural n sabendo que: $\frac{(n+1)!}{n!} = 4!$

▶ **Resolução**

Podemos escrever $(n+1)!$ como $(n+1) \cdot n!$, obtendo: $\frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = 4!$

Temos: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Obtemos, assim, uma nova expressão, que pode ser simplificada:

$\frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = 24 \Rightarrow n + 1 = 24 \Rightarrow n = 23$

R7. Calcular de quantas maneiras 8 crianças podem sentar em um banco, sabendo que a criança mais nova deve necessariamente sentar do lado esquerdo do banco.

▶ **Resolução**

O esquema a seguir representa o número de possibilidades de ocupação dos 8 lugares do banco.

1	7	6	5	4	3	2	1

O primeiro lugar no lado esquerdo do banco pode ser ocupado de uma única maneira (a criança mais nova). Sobram, então, 7 lugares para as outras 7 crianças. Assim, o próximo lugar pode ser ocupado de 7 maneiras diferentes; o lugar ao lado deste, de 6 maneiras diferentes; e assim por diante.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5.040$

Portanto, as crianças podem ocupar o banco de 5.040 maneiras diferentes.

28. Exemplos de respostas:
$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$
$6 = (4! : 4) + 4 - 4$
$7 = (4 + 4) - (4 : 4)$
$8 = 4 + 4 + 4 - 4$
$9 = (4 : 4) + 4 + 4$
$10 = (44 - 4) : 4$

30. Espera-se que os estudantes percebam que não é possível resolver o problema, pois não é possível pintar cinco portões com cores distintas se há apenas quatro cores disponíveis.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

24. PENSAMENTO COMPUTACIONAL O algoritmo a seguir determina o fatorial de um número natural n. **24.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

Passo 1. Atribui-se um valor a n.

Passo 2. Verifica-se se $n < 2$.

Passo 3. Se n é menor que 2, o valor do fatorial, por definição, é 1, e podemos encerrar o cálculo.

Passo 4. Se n não é menor que 2, então calcula-se: $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$, e podemos encerrar o cálculo.

Represente o algoritmo anterior por meio de um fluxograma.

25. Calcule o valor de:

a. $\frac{7!}{4!}$ **25 a.** 210

b. $\frac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!}$ **25 b.** $\frac{7}{4}$

26. Escreva as expressões em termos de 4!

a. $\frac{5!}{5}$ **26 a.** 4!

b. $\frac{5!}{2!}$ **26 b.** $\frac{5}{2} \cdot 4!$

c. $\frac{7! - 5!}{4}$ **26 c.** $\frac{205}{4} \cdot 4!$

27. Calcule n sabendo que:

a. $\frac{n!}{(n-2)!} = 30$ **27 a.** 6

b. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$ **27 b.** 8

28. Observe como podemos expressar 1, 2, 3 e 4 usando os símbolos $+$, $-$, $:$, $\cdot$, $\sqrt{\ }$ e $!$, além de quatro números 4.

$1 = (4 + 4 - 4) : 4$ $\qquad 3 = 4 - 4^{(4-4)}$

$2 = (4 : 4) + (4 : 4)$ $\qquad 4 = (4!) : (\sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4})$

Faça o mesmo para expressar números de 5 a 10.

29. As letras A, B, C, D, E e F devem ser escritas uma em seguida da outra, em qualquer ordem. De quantas maneiras isso pode ser feito? **29.** 720 maneiras.

30. Os portões de 5 casas lado a lado devem ser pintados com as cores azul, marrom, verde e vermelha. De quantas maneiras isso pode ser feito se cada portão deve ser pintado de uma única cor e dois portões não podem ser pintados da mesma cor?

31. Quantos números pares maiores de 40.000 podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6 se cada algarismo deve ser usado apenas uma vez em cada número? **31.** 42 números.

32. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Reescreva a **atividade 30** de modo que o novo enunciado permita que a atividade seja resolvida. Depois, peça a um colega de classe que resolva a atividade que você reescreveu e resolva a atividade criada por ele. **32.** Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Permutações

Permutação simples

Anagrama de uma palavra é qualquer agrupamento, com ou sem significado, obtido pela transposição de suas letras. Por exemplo, ROMA e MRAO são anagramas da palavra AMOR.

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra AMOR?

Para a primeira letra, temos 4 possibilidades (A, M, O, R). Depois dessa escolha, há 3 possibilidades para a segunda letra, 2 para a terceira letra e 1 para a quarta letra. Logo, pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, ou seja, 24 anagramas.

Cada um desses anagramas corresponde a uma permutação simples das letras da palavra AMOR.

De uma permutação para outra, os elementos são sempre os mesmos; eles apenas trocam de posição. Daí o nome **permutação** (permutar significa trocar os elementos que formam um todo com a finalidade de obter nova configuração).

Dado um conjunto de n elementos distintos, chama-se **permutação simples** dos n elementos qualquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos.

Indica-se por P_n o número de permutações simples de n elementos.

O número de permutações simples de n elementos é dado por:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1, \text{ ou } P_n = n!$$

Observação

O número de permutações simples de n elementos, que indicamos por P_n, pode ser compreendido como o número de maneiras diferentes que podemos ordenar em "fila" n objetos distintos escolhidos entre n objetos.

Situações envolvendo permutação simples

Vamos calcular o número de permutações simples em algumas situações.

a. Para saber, por exemplo, quantos anagramas da palavra CINEMA começam por C, consideramos que, para a primeira letra, temos 1 possibilidade (C) e que as outras 5 letras podem ser permutadas entre si.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, temos:

$$1 \cdot P_5 = 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 5! = 120$$

Logo, há 120 anagramas de CINEMA começados por C.

b. Considere que 20 estudantes podem se sentar em 20 cadeiras de uma sala de aula de maneiras distintas. Dizemos, então, que esses estudantes podem ocupar essas cadeiras de P_{20} modos, ou seja:

$$P_{20} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2.432.902.008.176.640.000$$

Logo, há 2.432.902.008.176.640.000 modos de os estudantes ocuparem essas cadeiras.

Atividades resolvidas

R8. Determinar de quantas maneiras diferentes um casal com 3 filhos pode ocupar um sofá com 5 lugares, de modo que o casal fique sempre junto.

PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

▶ **Resolução**

Se o casal não pode ser separado, devemos considerá-lo como se fosse uma única pessoa, calculando a permutação de 4 pessoas (4!). O esquema a seguir representa uma das possibilidades de ocupação dos 5 lugares.

pai	mãe	filho 1	filho 2	filho 3

Porém, se o casal trocar as posições entre si (2!), obtemos uma possibilidade diferente da anterior.

mãe	pai	filho 1	filho 2	filho 3

Aplicando o princípio multiplicativo, temos: $4! \cdot 2! = 24 \cdot 2 = 48$

Portanto, os 5 lugares podem ser ocupados de 48 maneiras diferentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R9. Determinar a soma de todos os números de 4 algarismos distintos formados com 2, 4, 6 e 8.

▶ **Resolução**

A soma procurada (S) tem P_4 parcelas: $P_4 = 4! = 24$

Na ordem das unidades simples (U), cada algarismo aparece 6 vezes (número de permutações dos outros 3 algarismos nas outras ordens). Ocorre o mesmo nas outras ordens.

A soma dos valores absolutos, em cada ordem, é:

$$\underbrace{(8 + 8 + \ldots + 8)}_{6 \text{ vezes}} + \underbrace{(6 + 6 + \ldots + 6)}_{6 \text{ vezes}} + \underbrace{(4 + 4 + \ldots + 4)}_{6 \text{ vezes}} +$$

$$+ \underbrace{(2 + 2 + \ldots + 2)}_{6 \text{ vezes}} = 120$$

$S = 120\ U + 120\ D + 120\ C + 120\ UM$

$S = 120 + 1.200 + 12.000 + 120.000$

$S = 133.320$

Portanto, a soma procurada é 133.320.

Quadro de ordens dos números a serem adicionados

24 parcelas

UM	C	D	U
2	4	6	8
2	6	4	8
4	2	6	8
4	6	2	8
⋮	⋮	⋮	⋮
8	4	6	2
8	6	4	2

Permutação com elementos repetidos

Trocando-se a posição das letras da palavra AMORA, podem ser escritas outras sequências de letras. Nesse caso, porém, os anagramas não correspondem mais às permutações simples, pois a letra A se repete. Apesar de a palavra AMORA ter 5 letras, o número de anagramas distintos é inferior a 5!. Se as 2 letras A fossem distintas, (A_1MORA_2), teríamos 5! anagramas. Assim, fixadas as letras M, O e R, a permutação das letras A_1 e A_2, para cada anagrama de AMORA, daria origem a 2! novos anagramas. Porém, como essas letras são iguais, a permutação delas não gera um novo anagrama. Então, para o cálculo correto do número de anagramas de AMORA, devemos dividir por 2! o total de permutações simples, 5!. Portanto, o total de anagramas da palavra AMORA é $\frac{5!}{2!} = 60$.

Aplica-se o mesmo raciocínio aos casos em que há repetição de mais de 2 elementos.

Por exemplo, na palavra ARARA, se as letras A fossem distintas, teríamos 3! anagramas em cada posição fixada para as demais letras. Se as letras R fossem distintas, teríamos 2! anagramas em cada posição fixada para as demais letras.

Dessa forma, temos que dividir o total de permutações simples (5!) por (3! · 2!). Então, o número de anagramas da palavra ARARA é $\frac{5!}{3! \cdot 2!}$, ou seja, 10 anagramas, pois, das 5 letras, 3 são A e 2 são R.

O número de permutações de n elementos, dos quais n_1 é de um tipo, n_2 de um segundo tipo, ..., n_k de um k-ésimo tipo, é indicado por $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ e é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Atividades resolvidas

R10. Determinar quantos anagramas da palavra ELEGER começam por:

a. consoante. **b.** vogal.

▶ **Resolução**

a. Temos 3 possibilidades de escolher uma consoante. Tendo escolhido a primeira consoante, sobram 5 letras com 3 letras E repetidas.

Então, o número de anagramas é:

$$3 \cdot P_5^3 = 3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60$$

b. Temos 1 possibilidade de escolher uma vogal. Fixando essa vogal (E), sobram 5 letras com 2 letras E repetidas.

Então, o número de anagramas é:

$$1 \cdot P_5^2 = 1 \cdot \frac{5!}{2!} = 60$$

R11. Determinar de quantos modos um manobrista pode guardar 6 carros em 3 garagens, sabendo que cabem 3 carros em uma garagem, 2 carros na outra e apenas 1 na última. Para a contagem, não considerar a ordem dos carros em cada garagem.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

▶ **Resolução**

Vamos representar os carros por *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*. Observe que não basta fazer uma permutação simples com os 6 carros. Suponha, como exemplo, as 6 seguintes disposições nas garagens:

Possíveis disposições dos carros nas garagens

Garagem para 3 carros	Garagem para 2 carros	Garagem para 1 carro
A B C	*D E*	*F*
A C B	*D E*	*F*
B A C	*D E*	*F*
B C A	*D E*	*F*
C A B	*D E*	*F*
C B A	*D E*	*F*

Todas as disposições indicadas no quadro são algumas das permutações possíveis dos 6 carros nas garagens. No entanto, devemos considerar que as posições dos carros em uma mesma garagem não importam. Assim, ao escolher os carros para a garagem que tem 3 vagas, por exemplo, observamos que as 3! permutações entre os 3 carros escolhidos são iguais. O mesmo acontece com os carros para a garagem com 2 vagas, ou seja, consideramos que as 2! permutações são iguais.

Logo, temos de dividir as permutações por 3! (garagem para 3 carros) e 2! (garagem para 2 carros):

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 60$$

Portanto, o manobrista pode guardar os 6 carros nas 3 garagens de 60 modos diferentes.

35. 24 anagramas.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

33. Quantos são os anagramas da palavra SABER? **33.** 120 anagramas.

34. Sobre o problema do anagrama com a palavra AMOR apresentado no início do subtópico **Permutação simples**, responda às questões: **34 a.** Resposta no *Suplemento para o professor*.

a. É possível resolver esse problema usando uma árvore de possibilidades? Em caso afirmativo, faça isso.

b. Todos os anagramas encontrados formam palavras com significado? **34 b.** Não. Anagramas como AOMR, RMAO ou MROA, por exemplo, formam palavras sem significado.

35. Quantos são os anagramas da palavra AMORA que começam com a letra A?

36. 48 anagramas; 36 anagramas.

36. Com as letras da palavra PROVA, quantos são os anagramas que começam por vogal? Quantos são os anagramas que começam e terminam por consoante?

37. 3.360 anagramas.

37. Quantos são os anagramas da palavra CARREIRA?

38. Oito clientes de um banco, dos quais 3 são mulheres, estão na fila única dos caixas. De quantas maneiras as pessoas dessa fila podem se posicionar de modo que as mulheres fiquem juntas? **38.** 4.320 maneiras.

39. Com 2 bandeiras vermelhas indistinguíveis, 3 azuis também indistinguíveis e 1 branca, quantos sinais diferentes podemos emitir pendurando todas elas, enfileiradas, no mastro de um navio? **39.** 60 sinais.

40. Deseja-se arrumar em uma estante 4 livros de Matemática, 3 de Química e 5 de Português, todos diferentes. Quantas são as possibilidades de arrumação se:

a. não houver restrições? **40 a.** 479.001.600 possibilidades.

b. os livros de uma mesma matéria permanecerem juntos?

41. **(Ufla-2023)** Anagrama de uma palavra é qualquer sequência de letras formada com todas as letras dessa palavra, incluindo a própria palavra. Entre as palavras a seguir, a que possui o menor número de anagramas é: **41.** Alternativa **c**.

a. CASCAS

b. CABANA

c. BATATA

d. PLANTA

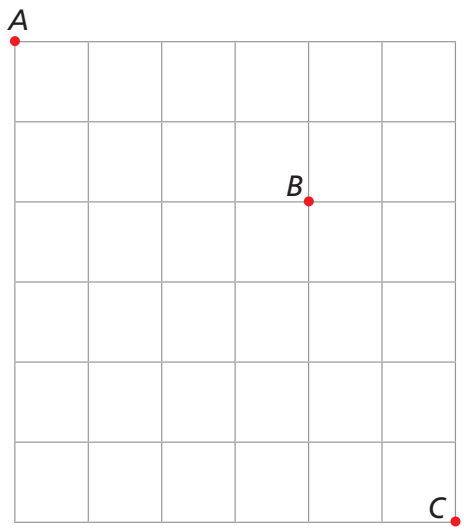
40 b. 103.680 possibilidades.

42. 3.999.960

42. Qual é a soma de todos os números de 5 algarismos distintos que podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

43. De quantos modos podemos guardar 10 objetos em 3 caixas: a primeira com 5 objetos, a segunda com 3 e a terceira com 2? **43.** 2.520 modos.

44. Uma pessoa vai de *A* para *B* e, então, de *B* para *C*, sempre andando para baixo ou para a direita, conforme o diagrama a seguir. **44.** 225 caminhos.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Quantos caminhos diferentes são possíveis?

45. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** **EM DUPLA** Elabore um problema em que seja necessário calcular o número de anagramas de uma palavra. Depois, troque o problema com um colega para que ele resolva o seu e você resolva o dele.

45. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Arranjo simples

Já vimos que a quantidade de permutações simples das letras da palavra AMOR é igual a $4! = 24$. Isso significa que as 4 letras dessa palavra podem ser reordenadas de 24 maneiras diferentes, resultando em 24 anagramas. Se, contudo, quisermos formar sequências de 2 letras distintas (escolhidas entre as 4 que formam a palavra AMOR), de quantas maneiras diferentes podemos fazê-las?

Vamos considerar que a situação descrita ocorra em duas etapas:

1ª etapa: escolher a primeira letra entre 4 possíveis;

2ª etapa: escolher a segunda letra entre 3 possíveis.

Aplicando o princípio multiplicativo, temos: $4 \cdot 3 = 12$.

Logo, são 12 possibilidades de formar sequências de 2 letras.

Observe que, desse total de 12 possibilidades, começam por:

- A → AM, AO e AR
- M → MA, MO e MR
- O → OA, OM e OR
- R → RA, RM e RO

Observação

Dois arranjos simples diferem entre si pela ordem de colocação dos elementos ou por pelo menos um elemento. Exemplos:

- $abc \neq bca$
- $abc \neq abd$

Esses agrupamentos ordenados são os **arranjos simples** dos 4 elementos distintos dados, tomados 2 a 2. Para indicar a quantidade de agrupamentos, escrevemos: $A_{4,\,2} = 4 \cdot 3 = 12$

Se desejarmos escolher 3 letras entre as 4 possíveis, as duas primeiras etapas se repetem e, para a 3ª etapa, temos a escolha da terceira letra entre as 2 restantes, o que totaliza $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Desse total de 24 possibilidades, começam por:

- A → AMO, AMR, AOM, AOR, ARO e ARM
- M → MAO, MAR, MOA, MOR, MRA e MRO
- O → OAM, OAR, OMA, OMR, ORA e ORM
- R → RAM, RAO, RMA, RMO, ROA e ROM

Esses agrupamentos ordenados são os arranjos simples dos 4 elementos distintos dados, tomados 3 a 3. Para indicar a quantidade de agrupamentos, escrevemos: $A_{4,\,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Observação

Qualquer problema que envolva permutações ou arranjos simples pode ser resolvido diretamente pelo princípio multiplicativo.

Dado um conjunto com n elementos, chama-se **arranjo simples** dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento ordenado (sequência) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $\boldsymbol{A_{n,\,p}}$ o número de arranjos simples de n elementos tomados p a p.

Vamos calcular o número total de agrupamentos simples de n elementos distintos, arranjados p a p, com $0 < p \leqslant n$, indicado por $A_{n,\,p}$.

Existem n possíveis escolhas para o primeiro elemento do agrupamento, $n - 1$ possíveis escolhas para o segundo elemento, $n - 2$ para o terceiro elemento, ..., $n - (p - 1)$ possíveis escolhas para o p-ésimo elemento do agrupamento.

Então, aplicando o princípio multiplicativo, o número de arranjos simples de n elementos p a p é:

$$A_{n,\,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot [n-(p-1)]}_{p \text{ fatores}}, \text{ com } 0 < p \leqslant n$$

Observações

- Multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número não nulo, obtemos uma fração equivalente.
- $n - (p - 1) = n - p + 1$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Desenvolvendo a expressão do 2º membro e multiplicando-o por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Assim:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ com } n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < p \leqslant n$$

Atividades resolvidas

R12. Determinar a quantidade de números de 3 algarismos diferentes que podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 7.

▶ **Resolução**

Os problemas que envolvem permutações ou arranjos simples podem ser resolvidos por meio da fórmula ou do princípio multiplicativo. Vamos resolver esta atividade dos dois modos.

1º modo:

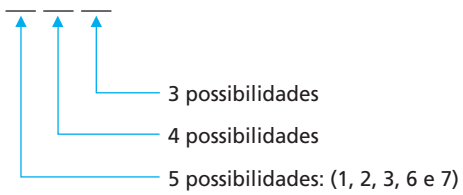
Sabemos que a ordem dos algarismos escolhidos resulta em números diferentes. Por exemplo, escolhendo os algarismos 1, 2 e 3, podemos escrever os números 123, 132, 213, 231, 312 ou 321. Portanto, devemos calcular o número de arranjos de 5 elementos, tomados 3 a 3:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Logo, podemos escrever 60 números de 3 algarismos distintos com os algarismos dados.

2º modo:

Vamos agora resolver esta atividade aplicando o princípio multiplicativo. Fazendo um esquema para representar o número de 3 algarismos diferentes escolhidos entre 1, 2, 3, 6 e 7, temos:



Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

Assim, temos 60 números de 3 algarismos diferentes formados a partir dos algarismos dados.

R13. Em uma sala existem 10 cadeiras enfileiradas numeradas de 1 a 10. Determinar de quantas maneiras 2 pessoas podem se sentar nessas cadeiras, havendo ao menos uma cadeira entre elas.

▶ **Resolução**

Vamos considerar que os números das cadeiras escolhidas pelas pessoas A e B formam um par ordenado. Assim, o par ordenado (2, 5) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 2, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 5. O par ordenado (5, 2) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 5, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 2.

O total de maneiras diferentes de as cadeiras serem ocupadas pelas 2 pessoas será dado pelo número de pares ordenados formados com os números das cadeiras, que pode ser calculado da seguinte maneira:

$$A_{10,2} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 10 \cdot 9 = 90$$

Logo, podem ser formados 90 pares ordenados.

Porém, existe uma restrição: A e B não podem sentar-se juntas.

Isso significa que A e B não devem ocupar cadeiras cujos números são consecutivos. Assim, devemos descobrir quantos são os pares ordenados cujos elementos são consecutivos para subtraí-los dos 90 pares ordenados possíveis.

Os pares ordenados formados com números consecutivos são:

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (8, 7), (9, 8) e (10, 9).

No total, são 18 pares.

Fazendo 90 menos 18, podemos concluir que existem 72 maneiras de as 2 pessoas se sentarem com pelo menos uma cadeira entre elas.

Outro modo:

Também poderíamos resolver esta atividade aplicando o princípio multiplicativo.

Por esse princípio, calculamos todas as possibilidades de 2 pessoas se sentarem nas 10 cadeiras enfileiradas.

A primeira pessoa poderá se sentar em qualquer uma das 10 cadeiras, restando, então, apenas 9 possibilidades de escolha para a segunda pessoa. Dessa maneira, temos 90 (10 • 9) maneiras de 2 pessoas se sentarem nas 10 cadeiras.

Este problema apresenta uma restrição: é necessário que haja pelo menos uma cadeira entre as pessoas. Se listarmos todas as possibilidades em que as duas pessoas ficam juntas, lado a lado, temos 18 possibilidades.

Agora, basta descontar esse valor do total de possibilidades encontrado inicialmente. Assim, há 72 possibilidades de 2 pessoas se sentarem em 10 cadeiras contanto que haja pelo menos uma cadeira entre elas.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

51. Não, pois teríamos de contar os números com algarismos repetidos; nesse caso, haveria 125 números.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

46. De quantos modos 3 pessoas podem sentar em um sofá de 5 lugares? **46.** 60 modos.

47. Em uma empresa, 10 de seus diretores são candidatos aos cargos de presidente e vice-presidente. Quantos são os possíveis resultados da eleição? **47.** 90 resultados.

48. Cinco cavalos disputam um páreo. Supondo que não haja empates, qual é o número de possíveis resultados para as 3 primeiras colocações? **48.** 60 resultados.

LO CHUN KIT/GETTY IMAGES

Corrida de cavalos disputada no hipódromo de Sha Tin em Hong Kong. Foto de 2019.

49. Um campeonato de futebol escolar vai ser disputado por 20 equipes. Admitindo que não haja empates, quantas são as possibilidades de classificação para os 2 primeiros lugares? **49.** 380 possibilidades.

50. Verifique que:

a. $A_{n,n} = n! = P_n$ **b.** $A_{n,1} = n$

50 a. Resposta no *Suplemento para o professor*.

50 b. Resposta no *Suplemento para o professor*.

51. ARGUMENTAÇÃO Se a pergunta da **atividade resolvida R12** fosse "Quantos números de 3 algarismos, sem restrição, podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6 e 7?", o resultado seria também igual a 60? Por quê?

52. Determine o número x inteiro, $x \geqslant 2$, para que $A_{x,2} = 156$. **52.** 13.

53. Uma sala possui 6 portas. De quantas maneiras uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra diferente? **53.** 30 maneiras.

54. Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. O segredo do cofre é dado por uma sequência de 3 dígitos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre e gastar 10 segundos em cada tentativa, quanto tempo levará (no máximo) para conseguir abri-lo? **54.** 2 horas.

55. Considere duas urnas, I e II, que contêm bolas numeradas. A urna I contém 5 bolas de 1 a 5 e a urna II, 3 bolas de 1 a 3.

Quantas sequências numéricas podemos obter se extrairmos, sem reposição, 3 bolas da urna I e, em seguida, 2 bolas da urna II? **55.** 360 sequências.

56. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Elabore um problema que possa ser resolvido com arranjo simples. Faça a resolução de dois modos: usando a fórmula de arranjo e por princípio multiplicativo. Depois, troque o problema com um colega para que ele resolva o seu problema e você resolva o dele. **56.** Resposta pessoal.

Combinação simples

Considerando o conjunto formado pelas letras da palavra AMOR, quantos **subconjuntos** com 3 elementos podemos formar?

Como já vimos, a quantidade de agrupamentos ordenados ou sequências é dada por $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Esses agrupamentos são:

AMO, AMR, AOM, AOR, ARO, ARM, MAO, MAR, MOA, MOR, MRA, MRO,

OAM, OAR, OMA, OMR, ORA, ORM, RAM, RAO, RMA, RMO, ROA, ROM

Pensando em termos de conjuntos cujos elementos são as letras do agrupamento, os conjuntos formados pelas letras AMO, AOM, MAO, MOA, OAM e OMA são iguais, pois, ao permutar as 3 letras, o conjunto continua tendo exatamente os mesmos elementos, isto é, o conjunto não se modifica.

Dessa forma, o total de 24 sequências com as 3 letras deve ser dividido por $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ (número de permutações das 3 letras).

Pode-se, portanto, dizer que a quantidade de subconjuntos com 3 elementos é $\frac{A_{4,3}}{P_3} = \frac{24}{6} = 4$, escolhidos entre os 4 elementos do conjunto das letras da palavra AMOR:

{A, M, O}, {A, M, R}, {A, O, R}, {M, O, R}

Chamamos esses agrupamentos de **combinações simples** dos 4 elementos, tomados 3 a 3.

Dado um conjunto de n elementos, chama-se **combinação simples** dos n elementos, tomados p a p, qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) de p elementos distintos, escolhidos entre os n possíveis.

Indica-se por $C_{n,p}$ o número de combinações simples de n elementos tomados p a p.

Observações

- Sequência é um agrupamento ordenado: $(a, b) \neq (b, a)$
- Conjunto é um agrupamento não ordenado: $\{a, b\} = \{b, a\}$
- Dizemos que um conjunto A é subconjunto do conjunto B se, e somente se, todos os elementos de A também forem elementos de B.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Acompanhe a situação a seguir.

Vamos determinar o número de subconjuntos do conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ que tenha 3 elementos, isto é, o número de combinações dos 5 elementos tomados 3 a 3, cuja notação é $C_{5,3}$.

Cada combinação de 3 elementos, por exemplo {2, 6, 8}, origina 6 ($3! = 6$) agrupamentos ordenados (permutações desses elementos):

(2, 6, 8), (2, 8, 6), (6, 2, 8), (6, 8, 2), (8, 2, 6), (8, 6, 2)

Portanto, $C_{5,3} \cdot 3!$ dá o total de arranjos dos 5 elementos tomados 3 a 3 ($A_{5,3}$):

$$C_{5,3} \cdot 3! = A_{5,3} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!} \Rightarrow C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \Rightarrow C_{5,3} = 10$$

Como vimos, com p elementos distintos, podemos obter $p!$ permutações. Isso significa que, a partir de uma combinação, podemos obter $p!$ arranjos distintos dos n elementos tomados p a p.

Então, o número total de combinações é igual ao quociente entre o número de arranjos ($A_{n,p}$) e o número de permutações ($p!$):

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!} : p! = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Portanto:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}, \text{ com } n \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{N} \text{ e } 0 < p \leqslant n$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades resolvidas

R14. Dos 30 estudantes de uma classe, 4 serão escolhidos para formar uma equipe de representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Calcular quantas equipes podem ser formadas:

a. se não houver restrições quanto ao sexo.

b. com 2 garotas e 2 garotos.

SÉRGIO PEDREIRA/PULSAR IMAGENS

Estudantes em sala de aula na Escola Municipal Benedito de Oliveira Barros, em Itaparica (BA). Foto de 2019.

▶ **Resolução**

a. Os 4 estudantes devem ser escolhidos entre o total de 30 estudantes. Como a ordem dos estudantes não altera o agrupamento, trata-se de uma combinação:

$$C_{30,4} = \frac{30!}{4! \cdot (30-4)!} =$$

$$= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \cancel{26!}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{26!}} = 27.405$$

O número de equipes de 4 estudantes, escolhidos entre 30, é 27.405.

b. Nesse caso, a escolha deverá ocorrer em duas etapas:

- E_1: escolher 2 entre as 20 garotas;
- E_2: escolher 2 entre os 10 garotos.

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades é dado por:

$$C_{20,2} \cdot C_{10,2} = \frac{20!}{2! \cdot (20-2)!} \cdot \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} =$$

$$= 190 \cdot 45 = 8.550$$

O número de equipes com 2 garotas e 2 garotos é 8.550.

R15. Um garoto gostaria de convidar 7 amigos para acampar, porém só há lugar para 4 amigos na barraca. Calcular de quantas maneiras o garoto pode escolher 4 amigos entre 7.

▶ **Resolução**

A ordem em que os amigos serão escolhidos não é importante, o que sugere um problema de combinação de 7 pessoas tomadas 4 a 4.

$$C_{7,4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

Portanto, o garoto pode escolher os 4 amigos de 35 maneiras distintas.

Outro modo:

A escolha de 4 pessoas em um grupo de 7 poderia ser feita pelo princípio multiplicativo:

$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Porém, nesse total de 840 possibilidades, existem quartetos repetidos, pois a ordem em que as pessoas são escolhidas não altera a configuração do grupo. Assim, é preciso descontar a quantidade de possibilidades de formação de cada quarteto.

Temos, então: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Dessa maneira, cada quarteto foi contado 24 vezes.

Portanto, é necessário efetuar a divisão de 840 por 24, o que resulta em 35 possibilidades.

R16. Considerando 6 pontos, pertencentes a um mesmo plano e distribuídos de tal forma que não haja 3 pontos colineares, determinar quantos triângulos podem ser formados com 3 desses pontos como vértices.

▶ **Resolução**

A ordem em que tomamos os vértices de um triângulo não altera o triângulo. Logo, temos um problema envolvendo combinação.

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Portanto, podem ser formados 20 triângulos distintos.

Observação

Se existissem 3 pontos colineares, teríamos de subtrair do total o número de combinações envolvendo esses 3 pontos, já que eles formariam segmentos, e não triângulos.

59. Apenas um, o próprio conjunto. Lembrar que um conjunto não é diferente de "outro" se tiver os mesmos elementos dispostos em outra ordem.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

57. Uma prova é composta de 15 questões, das quais o estudante deve resolver 10. De quantas formas ele poderá escolher as 10 questões? **57.** 3.003 formas.

58. Na foto, há 6 tipos de fruta. De quantas maneiras podemos escolher 3 frutas para fazer um suco?

58. Há 20 maneiras de escolher 3 frutas diferentes em um conjunto com 6 frutas disponíveis.

TOPNATTHAPON/SHUTTERSTOCK

59. Quantos subconjuntos com n elementos tem um conjunto com n elementos?

60. Verifique que:

$A_{n,n} = P_n = n! \cdot C_{n,n}$

61. $\frac{n(n-3)}{2}$

61. Quantas são as diagonais de um polígono convexo de n lados?

62. Quantas comissões diferentes de 3 pessoas podem ser formadas com um grupo de 7 pessoas? **62.** 35 comissões.

63. Ao sair de uma festa, 10 amigos se despediram com um aperto de mão. Quantos apertos de mão foram trocados?

63. 45 apertos de mão.

BONGA1965/SHUTTERSTOCK

64. Em um congresso de Educação, há 6 professores de Física e 6 de Matemática. Quantas são as possibilidades de se formar uma comissão de 5 professores com 2 professores de Matemática e 3 de Física? **64.** 300 possibilidades.

60. Resposta no *Suplemento para o professor*.

65. Usando as 5 vogais e os algarismos de 0 a 9, quantos conjuntos de 5 elementos podemos formar, sendo 2 letras diferentes e 3 algarismos distintos? **65.** 1.200 conjuntos.

66. Quantos grupos de 3 letras distintas podem ser constituídos com as letras da palavra SUCESSO? Quantos desses grupos não contêm vogal? **66.** 10 grupos; Nenhum grupo.

67. Entre os números 1, 2, 3, 4, ..., 15 serão selecionados 5 números ímpares e 3 números pares. Calcule quantos diferentes grupos de 8 números podem ser escolhidos. **67.** 1.960 grupos.

68. Com um baralho de 52 cartas, quantos grupos de 3 cartas de espadas podem ser selecionados? **68.** 286 grupos.

IAN DIKHTIAR/SHUTTERSTOCK

69. 55 maneiras.

69. Uma urna contém 3 bolas vermelhas e 5 bolas azuis. De quantas maneiras diferentes podemos retirar 3 bolas de modo que não saiam somente bolas vermelhas?

70. Considere 7 pontos distintos sobre uma reta e 4 pontos, também distintos, sobre outra reta, paralela à primeira. Quantos triângulos podemos obter ligando 3 quaisquer desses 11 pontos? **70.** 126 triângulos.

71. Certo jogo é denominado "6/53", significando que o vencedor deve acertar 6 números entre os números de 1 a 53. De quantas maneiras um jogador pode escolher 6 números nesse jogo? **71.** 22.957.480 maneiras.

72. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** **EM DUPLA** Elabore um problema que possa ser resolvido com combinação simples. Depois, troque o seu problema com um colega da turma para que ele resolva o seu e você resolva o dele.

72. Resposta pessoal.

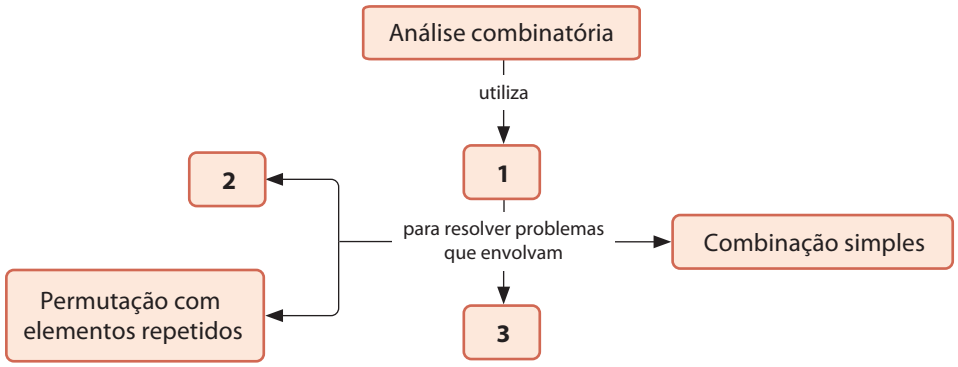
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 4

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 1; C – 2.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Arranjo simples **B.** Princípio multiplicativo **C.** Permutação simples

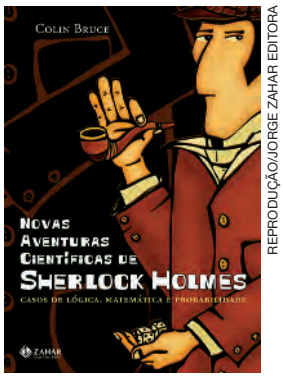
SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

Novas aventuras científicas de Sherlock Holmes: casos de Lógica, Matemática e Probabilidade

Colin Bruce

Rio de Janeiro: Zahar, 2003.



REPRODUÇÃO/JORGE ZAHAR EDITORA

Esse livro traz interessantes enigmas, casos e problemas matemáticos resolvidos pelo famoso detetive inglês Sherlock Holmes. Mas não se trata de contos matemáticos; são, na verdade, histórias que envolvem mistérios, intrigas e crimes solucionados pelo mestre das aventuras policiais. Nessa obra envolvente, o autor mostra a importância da argumentação e da avaliação bem fundamentadas para entender os casos e tomar decisões que mudam o rumo e o desfecho das histórias. São lições que ultrapassam a aprendizagem matemática e divertem.

Áudio

O que é permutação?

Campinas: Unicamp. *Podcast*.

Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1295. Acesso em: 2 out. 2024.

Neste áudio, o entrevistado explora o conceito de permutação na Matemática, trazendo exemplos contextualizados.

Vídeo

A César o que é de Cesar

Campinas: Unicamp. Vídeo.

Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1067. Acesso em: 2 out. 2024.

Este vídeo apresenta o conceito de criptografia, explorando a importância das mensagens codificadas desde a Roma Antiga até os dias atuais. Além disso, fornece exemplos históricos dos diferentes códigos e seus usos ao longo do tempo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Para ir do município A ao município B, existem 3 rodovias; e, para ir do município B ao município C, há 4 rodovias. Utilizando as rodovias, existem [redacted] maneiras de ir do município A até o município C passando por B. **Q1.** Alternativa **c**.

a. 7
b. 3^4
c. 12
d. 4^3

Q2. Existem [redacted] números naturais de 4 algarismos que não se repetem. **Q2.** Alternativa **b**.

a. 4^9
b. $9^2 \cdot 56$
c. 10^4
d. $9 \cdot 10^3$

Q3. A expressão 6! é igual a: **Q3.** Alternativa **d**.

a. $7! - 1!$
b. $5! + 1!$
c. 6
d. $6 \cdot 5!$

Q4. Determine o conjunto solução da equação $(n - 5)! = 24$. **Q4.** Alternativa **b**.

a. $S = \{29\}$
b. $S = \{9\}$
c. $S = \{19\}$
d. $S = \{1\}$

Q5. Quatro atletas participam de uma prova. Não ocorrendo nenhum empate, podemos dizer que são possíveis [redacted] classificações nessa prova. **Q5.** Alternativa **d**.

a. 20
b. 240
c. 120
d. 24

Q6. São [redacted] os anagramas da palavra PAPAGAIO. **Q6.** Alternativa **d**.

a. 2.590
b. 1.280
c. 560
d. 3.360

Q7. O número de anagramas da palavra CLARO em que as letras AR aparecem juntas e nessa ordem é: **Q7.** Alternativa **a**.

a. 24
b. 120
c. 48
d. 12

Q8. Considere 15 pontos distintos de uma circunferência. Existem [redacted] retas passando por 2 desses pontos. **Q8.** Alternativa **c**.

a. $A_{15, 2}$
b. $2 \cdot P_{15}$
c. $C_{15, 2}$
d. $C_{15, 5}$

Q9. Cinco estudantes fizeram um trabalho em conjunto, mas apenas 2 vão apresentá-lo. São [redacted] as possibilidades de escolha dessa dupla. **Q9.** Alternativa **b**.

a. 20
b. 10
c. 45
d. 60

Q10. [redacted] são problemas de contagem que envolvem situações nas quais a ordem não é importante. **Q10.** Alternativa **c**.

a. Permutações
b. Permutações com repetição
c. Combinações
d. Arranjos

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.	X	X			X					
Aplicar as noções de fatorial.			X	X						
Identificar a natureza dos problemas de contagem.					X	X	X	X	X	X
Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.					X	X	X	X	X	

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Capítulo 5

PROBABILIDADE

Você já ouviu falar na anemia falciforme? Ela é uma enfermidade que teve origem na África e chegou ao continente americano com o tráfico de escravizados no período colonial. Trata-se de uma das doenças genéticas e hereditárias mais comuns no Brasil, uma vez que metade da população apresenta traços afrodescendentes.

Ela é uma alteração na formação da hemoglobina A, molécula que transporta o oxigênio pelo sangue a todas as partes do corpo. A mutação dá origem a uma variante, a hemoglobina S, que tem o formato de foice – por isso o nome "falciforme".

O teste do pezinho, realizado logo após o nascimento, detecta de forma rápida e precoce a anemia falciforme. O indivíduo com a doença falciforme deve ser acompanhado durante toda a sua vida por uma equipe multiprofissional, que monitora e ajuda a controlar os sintomas.

ODS 3

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

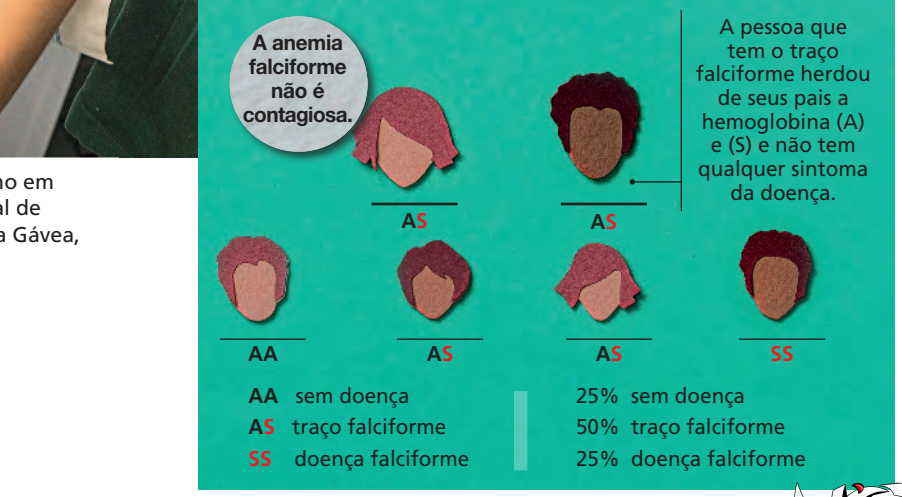
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

LUCIANA WHITAKER/PULSAR IMAGENS

Coleta de sangue para o teste do pezinho em bebê recém-nascido no Centro Municipal de Saúde Píndaro de Carvalho Rodrigues na Gávea, Rio de Janeiro. Foto de 2021.

Como acontece?

A combinação genética indica a **probabilidade** de filhos, gerados por um casal heterozigoto (quando ambos têm o traço da doença), terem ou não a anemia falciforme. Considere o esquema.



RICARDO DAVINO/ARQUIVO DA EDITORA

FERNANDO FAVORETTO/ARQUIVO DA EDITORA

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

O tema deste capítulo é a **teoria da probabilidade**, que teve sua origem no século XVII, na tentativa de responder a questões ligadas aos jogos de azar. Atualmente, é aplicada em previsão meteorológica, análises econômicas, no estabelecimento dos possíveis efeitos colaterais de medicamentos e em múltiplos aspectos da vida social e da pesquisa científica. Por exemplo, antes do início de uma partida de futebol, o juiz ou a juíza lança uma moeda para cima com o objetivo de sortear, em cara ou coroa, a metade do campo em que deverá jogar uma das equipes e a saída da bola para a outra equipe. Antes do lançamento, não é possível saber com exatidão se sairá cara ou coroa. Por isso, o sorteio descrito nessa situação é chamado de **experimento aleatório**.

São também classificados como experimentos aleatórios o lançamento de um dado, a retirada de uma bola numerada em uma urna, o sorteio de nomes para um trabalho em grupo, entre outros.

No lançamento de uma moeda, por exemplo, os possíveis resultados são cara e coroa. O conjunto {cara, coroa} formado por esses possíveis resultados é chamado de **espaço amostral** desse experimento.

Na face voltada para cima no lançamento de um dado cúbico perfeito (ou honesto), os eventos possíveis são os números 1, 2, 3, 4, 5 e 6. O espaço amostral desse experimento aleatório é o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Observação

Quando realizamos seguidos lançamentos de um dado cúbico perfeito (ou honesto), cada uma de suas faces tem a mesma medida de chance de ficar voltada para cima.
Neste capítulo, salvo aviso contrário, consideraremos todos os dados perfeitos. Isso também é válido para moedas, baralhos, bolinhas numeradas etc.

Podemos definir esses conceitos da seguinte maneira:

Experimento aleatório é todo experimento que, quando repetido várias vezes e sob as mesmas condições, apresenta possibilidades de resultado, mas que não podemos assegurar o resultado final.

Espaço amostral (S) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Evento (E) é todo subconjunto do espaço amostral do experimento aleatório.

Considere os exemplos a seguir.

a. No lançamento de um dado, um possível evento é: "o número na face voltada para cima é par". Nesse caso, o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, e o evento é $E = \{2, 4, 6\}$. O número de elementos dos dois conjuntos é indicado, respectivamente, por $n(S) = 6$ e $n(E) = 3$.

b. Quando se retira uma bola de uma urna contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50, um possível evento é: "a bola retirada contém um número primo menor que 20". O espaço amostral desse experimento é $S = \{1, 2, \ldots, 50\}$, e o evento é $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. O número de elementos do conjunto S é $n(S) = 50$ e o do conjunto E é $n(E) = 8$.

c. No sorteio de uma carta de um baralho de 52 cartas, um possível evento é: "a carta sorteada é de copas e com figura". O espaço amostral desse experimento é o conjunto S = {ás de copas, 2 de copas, ..., rei de copas, ás de ouros, 2 de ouros, ..., rei de ouros, ás de espadas, ..., rei de espadas, ás de paus, ..., rei de paus}. O evento é o conjunto E = {valete de copas, dama de copas, rei de copas}. Nesse experimento, $n(S) = 52$ e $n(E) = 3$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observações

- Chamamos de **discretos** os espaços amostrais cujos elementos podemos enumerar, ou seja, que possuem uma quantidade finita de elementos. Por exemplo, o espaço amostral do sorteio de um número entre os dez primeiros números naturais não nulos é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Esse espaço amostral tem 10 elementos.
- Os espaços amostrais que não são discretos são chamados de **contínuos**. Por exemplo, o espaço amostral do sorteio de um número real que pertence ao intervalo de 1 a 2 é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$. Não há como enumerar os elementos desse conjunto; assim, esse espaço amostral é contínuo.

Evento simples, evento certo e evento impossível

Todo subconjunto unitário do espaço amostral é denominado **evento simples** ou **evento elementar**.

Se um evento coincidir com o espaço amostral, será chamado de **evento certo**. Por exemplo, no lançamento de um dado, "obter um número natural menor que 7" é um evento certo.

Se um evento for o conjunto vazio, será chamado de **evento impossível**. Por exemplo, no lançamento de um dado, "obter um número maior que 6" é um evento impossível.

Atividades resolvidas

R1. Lançando-se dois dados, um vermelho e um azul, e considerando as faces voltadas para cima, responder às questões.

a. Quantos elementos há no espaço amostral?

b. Em quantos casos a soma dos números das faces superiores é maior que 8?

c. Em quantos casos o produto dos números das faces superiores é igual a 28?

▶ **Resolução**

a. O quadro a seguir mostra todos os possíveis resultados.

Possíveis resultados do lançamento dos dados vermelho e azul

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Portanto, há 36 elementos no espaço amostral.

b. Observando o quadro, notamos que a soma é maior que 8 em 10 casos. Logo, o número de elementos que correspondem ao evento "soma maior que 8" é igual a 10.

c. Os únicos pares de números naturais cujo produto dos elementos é 28 são (28, 1), (14, 2), (7, 4), (1, 28), (2, 14) e (4, 7). Uma vez que nenhum desses pares ordenados pertence ao espaço amostral S, o evento "produto igual a 28" não tem elementos, ou seja, trata-se de um evento impossível.

R2. Quatro bolas numeradas de 1 a 4 são colocadas em uma urna. Duas bolas são sorteadas aleatoriamente, uma após a outra. Determinar o espaço amostral quando esse experimento é realizado:

a. com reposição da primeira bola retirada;

b. sem reposição da primeira bola retirada.

▶ **Resolução**

a. Se o experimento é realizado com reposição, todas as bolas "participam" de ambos os sorteios, e o espaço amostral é dado por $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

b. Se o experimento é realizado sem reposição, o número que foi sorteado em primeiro lugar não "participa" do segundo sorteio. Nesse caso, o espaço amostral é dado por $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

R3. Uma caixa contém 2.000 lâmpadas. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 5 lâmpadas dessa caixa e verificar se estão queimadas ou não. Determinar o número de elementos do espaço amostral desse experimento.

▶ **Resolução**

Listar, caso a caso, todos os elementos do espaço amostral desse experimento é impraticável, em razão do elevado número de possibilidades. Porém, podemos utilizar a Análise combinatória para determinar o número de elementos desse espaço amostral.

Trata-se de um caso de combinação (pois a ordem em que as lâmpadas são sorteadas não é importante), no qual vamos determinar de quantas maneiras 5 lâmpadas podem ser selecionadas de um total de 2.000 lâmpadas disponíveis. Assim:

$$C_{2.000,\,5} = \frac{2.000!}{5! \cdot (2.000 - 5)!} = \frac{2.000!}{5! \cdot 1.995!} =$$

$$= \frac{2.000 \cdot 1.999 \cdot 1.998 \cdot 1.997 \cdot 1.996 \cdot \cancel{1.995!}}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{1995!}} \simeq$$

$$\simeq 2{,}65 \cdot 10^{14}$$

Logo, o total de elementos desse espaço amostral é, aproximadamente, $2{,}65 \cdot 10^{14}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. $S = \{1, 2, 3, ..., 74, 75\}$; $E = \{5, 10, 15, ..., 70, 75\}$.
2. 72; 75.
3. Sim, pois $n(E) = 1$ e $n(S) = 52$.
4. $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), (3, 1), ..., (6, 6)\}$
4 a. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
4 e. $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)\}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. A família Silva gosta de jogar bingo em casa sorteando ao acaso números de 1 a 75. Considerando que o número sorteado na primeira rodada seja um múltiplo de 5, escreva o espaço amostral e o evento representativo da situação.

2. Se, no início de uma rodada de bingo da família Silva, alguém disser "vai sair um número maior que 3", a medida da chance de acerto é maior que a de erro: sair um número maior que 3 é, nesse caso, um acontecimento (evento) **muito provável** (não ocorre sempre, mas ocorre com frequência). Determine quantos elementos tem esse evento e quantos elementos tem o espaço amostral.

3. ARGUMENTAÇÃO Em um jogo de baralho comum, com 52 cartas, temos 13 cartas de ouros, 13 cartas de copas, 13 cartas de paus e 13 cartas de espadas. Se alguém disser "vai sair um rei de ouros", estará apostando em um acontecimento (evento) **pouco provável**.

Nesse caso, o número de elementos do evento é muito menor que o número de elementos do espaço amostral? Justifique sua resposta.

4. Para o lançamento simultâneo de dois dados, um azul e um vermelho, ambos considerados perfeitos, determine o espaço amostral e os eventos correspondentes a cada uma das situações a seguir.

a. Sair o mesmo número em ambos os dados.
b. Sair soma 9. **4 b.** $\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
c. Sair soma menor que 2. **4 c.** $\varnothing$
d. Sair produto maior que 30. **4 d.** $\{(6, 6)\}$
e. Sair produto menor que 10.
f. Sair soma maior que 1 e menor que 15. **4 f.** S
g. Sair número par em ambos os dados.
h. Sair, em um dos dados, o número 6 e, no outro dado, um número múltiplo de 3. **4 h.** $\{(6, 3), (3, 6), (6, 6)\}$

5. Em uma embalagem há 500 parafusos. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 3 parafusos dessa embalagem e verificar se eles estão de acordo com as normas de qualidade.

Calcule o número de elementos do espaço amostral desse experimento. **5.** 20.708.500

6. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Elabore um problema em que se deve calcular o número de elementos do espaço amostral de um experimento. Depois, entregue seu problema a um colega para que ele o resolva. Você deve resolver o problema elaborado por ele. **6.** Resposta pessoal.

4 g. $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

GCAFOTOGRAFIA/SHUTTERSTOCK

Probabilidade

No dia a dia há muitas situações em que a teoria da probabilidade nos auxilia na tomada de decisões. Por exemplo, será que vale a pena participar de um sorteio de 6 números de 1 a 60, sabendo que a probabilidade de acertar os 6 números é de 1 em 50.063.860, ou seja, 0,000002%?

Questão. Resposta pessoal.

Cite uma situação em que a probabilidade pode auxiliar em uma tomada de decisão.

Agora, acompanhe a situação a seguir.

Suponha que um casal queira ter dois filhos. O primeiro filho poderá ser do sexo masculino (M) ou do sexo feminino (F). O segundo também poderá ser de um dos dois sexos. Sabendo que a medida da chance de nascer um filho do sexo masculino é igual à medida da chance de nascer um filho do sexo feminino, independentemente do sexo do filho já existente, qual é a medida da chance de esse casal ter os dois filhos do sexo masculino (M, M)?

Podemos responder à questão determinando o espaço amostral S e o evento E (dois filhos do sexo masculino).

- $S = \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)\}$
- $E = \{(M, M)\}$

Note que $n(E) = 1$ e $n(S) = 4$.

Dizemos que a medida da chance de nascerem dois filhos do sexo masculino é de 1 em 4, ou seja, $\frac{1}{4}$.

Nessa situação, consideramos que, para cada evento simples, existe a mesma medida da chance de ocorrência. Quando adotamos esse critério em um espaço amostral finito, esse espaço é denominado **espaço amostral equiprovável**.

Observação

Em geral, a probabilidade é uma medida de tendência, e não de certeza.

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: Uma conversa sobre probabilidade**

Em um espaço amostral equiprovável S, finito e não vazio, a **probabilidade** de ocorrência de um evento E, indicada por $P(E)$, é a razão entre o número de elementos do evento, $n(E)$, e o número de elementos do espaço amostral, $n(S)$:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Ampliando o conteúdo desenvolvido no material, este *podcast* traz um bate-papo com um estatístico que apresenta como os conceitos de probabilidade são aplicados em diferentes áreas, como na medicina, na análise de estudo sobre trânsito e em jogos.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Seja E um evento e S o espaço amostral finito, não vazio, de um experimento aleatório. Como consequência da definição, temos:

$$0 \leqslant n(E) \leqslant n(S) \Rightarrow \frac{0}{n(S)} \leqslant \frac{n(E)}{n(S)} \leqslant \frac{n(S)}{n(S)} \Rightarrow 0 \leqslant P(E) \leqslant 1$$

- Se E é um evento impossível, então $P(E) = 0$.
- Se E é um evento certo, então $P(E) = 1$.

Atividades resolvidas

R4. No lançamento de um dado, qual é a probabilidade de a face superior apresentar:

a. o número 3 (E_1)?

b. um número menor que 7 (E_2)?

c. um número menor que 1 (E_3)?

d. um divisor da soma dos pontos de todas as faces do dado (E_4)?

▶ **Resolução**

O espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é equiprovável e $n(S) = 6$.

a. $E_1 = \{3\}$ é um evento simples e $n(E_1) = 1$; então, $P(E_1) = \frac{1}{6}$.

b. $E_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ é um evento certo e $n(E_2) = 6$; então, $P(E_2) = \frac{6}{6} = 1$.

c. $E_3 = \varnothing$ é um evento impossível e $n(E_3) = 0$; então, $P(E_3) = \frac{0}{6} = 0$.

d. O número total de pontos é: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

$E_4 = \{1, 3\}$ e $n(E_4) = 2$; então, $P(E_4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

R5. No lançamento simultâneo de uma moeda e de um dado, determinar:

EDNEI MARX/ARQUIVO DA EDITORA

a. o espaço amostral;

b. o número de elementos do evento E_1: coroa na moeda e face par no dado; e a probabilidade de ocorrência de E_1;

c. a probabilidade de ocorrência do evento E_2: face 3 no dado.

▶ **Resolução**

a. A moeda tem duas faces, coroa (k) e cara (c), e o dado tem as faces numeradas de 1 a 6. Portanto, o espaço amostral é $S = \{(k, 1), (k, 2), (k, 3), (k, 4), (k, 5), (k, 6), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6)\}$ e $n(S) = 12$.

b. O evento "coroa na moeda e face par no dado" é o conjunto $E_1 = \{(k, 2), (k, 4), (k, 6)\}$ e $n(E_1) = 3$. Então:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \text{ ou } P(E_1) = 25\%$$

c. O evento "face 3 no dado" é o conjunto $E_2 = \{(k, 3), (c, 3)\}$ e $n(E_2) = 2$. Então:

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \simeq 0{,}1667 \text{ ou } P(E_2) \simeq 16{,}67\%$$

Observação

Podemos registrar a probabilidade de um evento nas formas fracionária, decimal ou percentual.

R6. Uma equipe de 12 pessoas é formada por 9 homens e 3 mulheres, e duas pessoas dessa equipe serão sorteadas para compor uma comissão. Indicar a probabilidade de a comissão ser formada por:

a. duas mulheres;

b. um homem e uma mulher.

▶ **Resolução**

Para calcular o número de elementos do espaço amostral, devemos considerar um grupo de 12 pessoas, do qual serão retirados 2 elementos, não importando a ordem, o que corresponde ao número de combinações de 12, tomadas 2 a 2:

$$n(S) = C_{12,2} = \frac{12!}{2! \cdot (12 - 2)!} = 66$$

a. Temos E_1: comissão formada por 2 mulheres de um total de 3.

$$n(E_1) = C_{3,2} = \frac{3!}{2! \cdot (3 - 2)!} = 3$$

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{66} = \frac{1}{22}$$

b. Temos E_3: comissão formada por 1 homem (de um total de 9) e 1 mulher (de um total de 3). Então:

$$n(E_3) = C_{9,1} \cdot C_{3,1} = 9 \cdot 3 = 27$$

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{27}{66} = \frac{9}{22}$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8 b. Não podemos usar a fórmula, pois ela só é válida para espaços amostrais equiprováveis.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

7. Qual é a soma das probabilidades de todos os eventos simples no lançamento de um dado? 7. 1.

8. Considere agora um dado viciado, em que a medida da chance de ocorrer a face 6 é de 4 em 9, enquanto a medida da chance de ocorrer cada uma das outras faces é de 1 em 9.

a. Qual é o espaço amostral? Ele é equiprovável?

b. **ARGUMENTAÇÃO** Para calcular as probabilidades dos eventos E_1: "sair face 3" e E_2: "sair face 6", podemos usar a fórmula $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$? Justifique.

c. Quais seriam as probabilidades no item **b** se pudéssemos usar a fórmula? Quais são as reais probabilidades dos eventos E_1 e E_2?

9. No lançamento de um dado com o formato de um dodecaedro regular (poliedro de 12 faces pentagonais congruentes), cujas faces estão numeradas de 1 a 12, considera-se que "saiu o número 2" se, após o lançamento, a face com o número 2 estiver voltada para cima.

VIKTOR1/SHUTTERSTOCK

Calcule a probabilidade de, em um lançamento, sair um número:

a. par; 9 a. $\frac{1}{2}$

b. maior que 4; 9 b. $\frac{2}{3}$

c. divisível por 3; 9 c. $\frac{1}{3}$

d. múltiplo de 5; 9 d. $\frac{1}{6}$

e. menor que 1. 9 e. 0

8 a. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Não, pois não existe a mesma medida da chance de ocorrência de cada evento simples.

10. Em uma urna, há 5 bolas brancas, 3 pretas e 7 vermelhas. Retirando-se uma bola ao acaso, determine a probabilidade de ela ser:

a. branca; 10 a. $\frac{1}{3}$

b. preta; 10 b. $\frac{1}{5}$

c. branca ou preta; 10 c. $\frac{8}{15}$

d. vermelha e branca. 10 d. 0

11. Em um pacote de balas, há 5 de sabor morango e 10 de sabor abacaxi. Se 3 balas forem retiradas ao acaso, qual é a probabilidade de todas serem do sabor morango? 11. $\frac{2}{91}$

12. Em 4 cartelas, escrevem-se as letras R, O, M e A, uma em cada cartela. As cartelas são, então, depositadas em um saco.

12. $\frac{1}{24}$

Qual é a probabilidade de, retirando uma a uma as cartelas do saco, formarmos, na ordem de saída, a palavra AMOR?

13. Dez pessoas, das quais 4 são de uma mesma família, serão colocadas aleatoriamente em fila. Qual é a probabilidade de as 4 pessoas da família ficarem juntas? 13. $\frac{1}{30}$ 14. $\frac{2}{3}$

14. Em um grupo de 6 crianças, há 2 meninos e 4 meninas. Desse grupo, 5 crianças são selecionadas. Qual é a probabilidade de que ambos os meninos estejam no grupo selecionado?

15. Cristina tem na carteira quatro notas de R$ 10,00, duas de R$ 50,00 e uma de R$ 100,00. Para pagar uma conta de R$ 40,00 no supermercado, ela puxa duas notas da carteira, aleatoriamente. Qual é a probabilidade de Cristina não precisar puxar outra nota? 15. $\frac{5}{7}$

16. **EM DUPLA** Suponha que no lançamento de uma moeda, não honesta, a probabilidade de sair cara (c) seja $\frac{1}{3}$ e a probabilidade de sair coroa (k) seja $\frac{2}{3}$. Considerando essas informações, reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a. O espaço amostral, com essas probabilidades, é equiprovável? 16 a. Não.

b. Determinem o espaço amostral para três lançamentos seguidos dessa moeda. 16 b. S = {ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk}

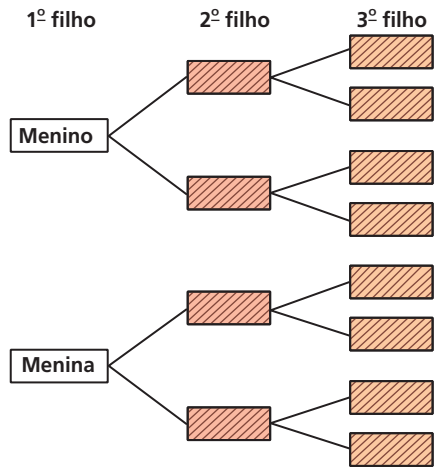
17. Um casal planeja ter três filhos. Faça um diagrama de árvore, como o modelo a seguir, com todos os possíveis arranjos entre meninos (M) e meninas (F). Depois, calcule a probabilidade de nascimento de:

a. duas meninas e um menino (E_1); 17 a. $\frac{3}{8}$

b. três meninos (E_2); 17 b. $\frac{1}{8}$

c. pelo menos um menino (E_3); 17 c. $\frac{7}{8}$

d. todas as crianças do mesmo sexo (E_4). 17 d. $\frac{1}{4}$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

18. De uma urna com 5 bolas amarelas, 7 vermelhas e 4 azuis, são retiradas, simultaneamente e ao acaso, 3 bolas. Calcule a probabilidade de as 3 bolas serem:

a. amarelas; 18 a. $\frac{1}{56}$

b. azuis; 18 b. $\frac{1}{140}$

c. vermelhas; 18 c. $\frac{1}{16}$

d. da mesma cor. 18 d. $\frac{7}{80}$

EDNEI MARX/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8 c. $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{1}{6}$. As reais probabilidades são: $P(E_1) = \frac{1}{9}$ e $P(E_2) = \frac{4}{9}$

Eventos complementares

Em uma urna, há 5 bolas coloridas, sendo 3 vermelhas e 2 brancas. Uma bola é sorteada, sua cor é anotada e ela é devolvida à urna. Nessa situação, considere o evento A "a bola sorteada é vermelha", com $n(A) = 3$, e o evento B "a bola sorteada é branca", com $n(B) = 2$. Sabe-se que, para o espaço amostral S desse experimento, temos $n(S) = 5$. Logo, as probabilidades dos eventos A e B são dadas por:

- $P(A) = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$
- $P(B) = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$

A probabilidade de ocorrência do evento B poderia ser calculada considerando-se que há somente duas possibilidades no experimento, ou seja, a bola sorteada só pode ser branca ou vermelha. Assim, a reunião dos eventos A e B implica um evento certo, cuja probabilidade é igual a 1 (100%). Por isso, temos:

$$P(B) + P(A) = 1 \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{3}{5} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{5}$$

Seja S o espaço amostral de um experimento aleatório e A um evento de S. Dizemos que o evento $\overline{A}$ é **complementar** do evento A se $\overline{A} \cap A = \varnothing$ e $\overline{A} \cup A = S$.

A soma das probabilidades de dois eventos complementares é igual a 1, ou seja, $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Assim:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Observação

$P(A)$ também poderia ser calculada da seguinte forma:
$P(A) = 1 - P(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{2}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{5}$

Observações

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 7, 9\}$.

- A união de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.
  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$
- A intersecção de A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.
  $A \cap B = \{2, 3\}$
- A diferença entre A e B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B.
  $A - B = \{1\}$
- A diferença entre B e A é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a B, mas não pertencem a A.
  $B - A = \{4, 7, 9\}$

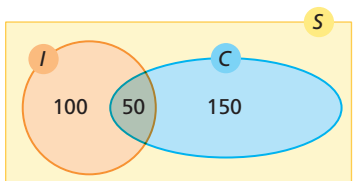
Probabilidade da intersecção de dois eventos

Acompanhe a situação a seguir.

Entrevistaram-se 300 adolescentes acerca da preferência por esportes individuais ou coletivos. O resultado da pesquisa foi o seguinte:

- 150 gostam de esportes individuais;
- 200 gostam de esportes coletivos;
- 50 gostam dos dois tipos.

É possível representar o resultado da pesquisa em um diagrama de Venn. Observe a seguir.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Escolhendo um desses adolescentes ao acaso, qual é a probabilidade de que ele goste igualmente dos dois tipos de esporte?

Nesse experimento, o espaço amostral S é a união do conjunto dos adolescentes que gostam de esportes individuais (I) com o conjunto dos que gostam de esportes coletivos (C). Assim, $n(S) = n(I \cup C) = 300$.

Observação

$n(I \cup C) =$
$= n(I) + n(C) - n(I \cap C) =$
$= 150 + 200 - 50 = 300.$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sendo E o evento "o adolescente escolhido gosta dos dois tipos de esporte", a probabilidade de E é a probabilidade da intersecção dos eventos C e I; logo, $n(E) = 50$. Assim:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{50}{300} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}67\%$$

Em geral, se A e B são eventos quaisquer, a **probabilidade da intersecção** de A e B, indicada por $P(A \cap B)$, é dada por:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Decorre da igualdade anterior que, se A e B não apresentam elementos comuns ($A \cap B = \varnothing$), então $P(A \cap B) = 0$, pois $n(A \cap B) = 0$.

Probabilidade da união de dois eventos

SWAPAN PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Acompanhe a situação a seguir.

Marcos está brincando de lançar dados com os amigos. A brincadeira consiste em lançar simultaneamente dois dados, um vermelho e um azul, e adicionar os pontos obtidos em cada um.

Qual é a probabilidade de Marcos obter soma par ou soma múltipla de 3?

Da situação apresentada, conhecemos:

- o espaço amostral S, em que $n(S) = 36$:

  $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

- o evento "sair soma par" (E_1), em que $n(E_1) = 18$ e $P(E_1) = \frac{1}{2}$:

  $E_1 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

- o evento "sair soma múltipla de 3" (E_2), em que $n(E_2) = 12$ e $P(E_2) = \frac{1}{3}$:

  $E_2 = \{(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)\}$

Procuramos a probabilidade de ocorrer o evento E_1 ou de ocorrer o evento E_2, ou seja, a **probabilidade da união** de E_1 e E_2, que é indicada por $P(E_1 \cup E_2)$.

Então, para a situação analisada, podemos determinar:

$E_1 \cup E_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 5), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 6)\}$

Fazendo uso da definição de probabilidade, calculamos:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Logo, a probabilidade de Marcos obter soma par **ou** soma múltipla de 3 é $\frac{2}{3}$.

Qual é a probabilidade de Marcos obter, agora, soma par e soma múltipla de 3?

Nesse caso, basta determinar $E_1 \cap E_2$ e aplicar a definição de probabilidade:

$E_1 \cap E_2 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 6)\}$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Então, a probabilidade de Marcos obter soma par **e** soma múltipla de 3 é $\frac{1}{6}$.

Considerando os resultados de $P(E_1 \cup E_2)$, $P(E_1)$, $P(E_2)$ e $P(E_1 \cap E_2)$ verificamos a igualdade:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

Ou seja: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Vamos tomar os eventos E_1 e E_2 de um espaço amostral S, finito e não vazio, para os quais teremos:

$$n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2)$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

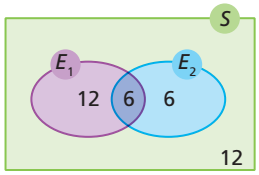
Dividindo os membros da igualdade por n(S), temos:

$$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

A probabilidade de ocorrência do evento **união de E_1 e E_2** é dada por:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

Observação



$n(E_1) = \boxed{12} + \boxed{6}$

$n(E_2) = \boxed{6} + \boxed{6}$ > contados duplamente

$n(E_1 \cup E_2) = 18 + 12 - 6$

$\frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)} = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36}$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$

Probabilidade da união de dois eventos mutuamente exclusivos

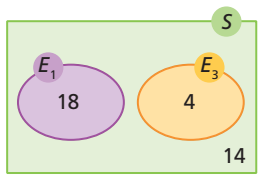
Se E_1 e E_2 são conjuntos disjuntos, isto é, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, os eventos E_1 e E_2 são ditos **mutuamente exclusivos**.

Como $n(E_1 \cap E_2) = 0$ e $P(E_1 \cap E_2) = 0$, a probabilidade da união de dois eventos mutuamente exclusivos é:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Considere o exemplo a seguir.

No jogo de Marcos com seus amigos, $n(E_1) = 18$, isto é, há soma par em 18 casos. Se E_3 é o evento "sair soma 5", então $E_3 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$ e $n(E_3) = 4$. Como $E_1 \cap E_3 = \varnothing$, temos o diagrama a seguir.



Assim: $n(E_1 \cup E_3) = 18 + 4 - 0 = 22$

Portanto: $P(E_1 \cup E_3) = \frac{n(E_1 \cup E_3)}{n(S)} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} \simeq 61\%$

Ou, ainda, como os eventos E_1 e E_3 são mutuamente exclusivos, temos:

$$P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3) = \frac{18}{36} + \frac{4}{36} = \frac{22}{36} = \frac{11}{18} \simeq 61\%$$

Atividades resolvidas

R7. Uma urna contém bolas numeradas de 1 a 50. Calcular a probabilidade de ser sorteada uma bola cujo número seja:

a. par **ou** múltiplo de 5;

b. par maior que 10 **ou** o menor número primo.

▶ **Resolução**

a. Para calcular a probabilidade de sair um número par **ou** um número múltiplo de 5, vamos considerar os eventos E_1 e E_2 e os respectivos números de elementos:

- E_1: número par, $n(E_1) = 25$;
- E_2: número múltiplo de 5, $n(E_2) = 10$;
- $E_1 \cap E_2$: par **e** múltiplo de 5, $n(E_1 \cap E_2) = 5$.

Assim:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{25}{50} + \frac{10}{50} - \frac{5}{50} = \frac{30}{50} = 0{,}6 = 60\%$

Portanto, a probabilidade de ocorrer um número par **ou** múltiplo de 5 é 60%.

b. Para calcular a probabilidade de sair um número par maior que 10 **ou** o menor número primo, vamos considerar os eventos E_3 e E_4 e os respectivos números de elementos:

- E_3: número par maior que 10, $n(E_3) = 20$;
- E_4: menor número primo, $n(E_4) = 1$;
- $E_3 \cap E_4$: não há número par maior que 10 e igual a 2; logo, $n(E_3 \cap E_4) = 0$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Os eventos E_3 e E_4 são mutuamente exclusivos:

$P(E_3 \cup E_4) = P(E_3) + P(E_4)$

$P(E_3 \cup E_4) = \frac{20}{50} + \frac{1}{50} = \frac{21}{50} = 0,42 = 42\%$

Logo, a probabilidade de ser sorteado um número par maior que 10 **ou** o menor número primo é 42%.

Observação

De 1 a 50 existem 15 números primos, e o menor deles é 2. Portanto, $E_4 = \{2\}$.

R8. Em uma pesquisa realizada com 50 pessoas foi perguntado:

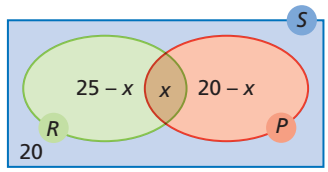
- Você ouve rádio?
- Você ouve *podcast*?

Os resultados indicaram que 25 pessoas ouvem rádio, 20 pessoas ouvem *podcast* e 20 pessoas não costumam ouvir rádio nem *podcast*. Calcular a probabilidade de, ao selecionar uma dessas pessoas, ela ouvir rádio e *podcast*.

▶ **Resolução**

Observe que a pessoa que ouve rádio pode também ouvir *podcast* e que a pessoa que ouve *podcast* pode também ouvir rádio.

Sendo x o número de pessoas que ouvem rádio e *podcast*, vamos representar os dados da pesquisa em um diagrama. Temos:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- x pessoas ouvem rádio e *podcast*;
- $25 - x$ pessoas ouvem apenas rádio;
- $20 - x$ pessoas ouvem apenas *podcast*;
- 20 pessoas não costumam ouvir rádio nem *podcast*.

O evento E ("selecionar uma pessoa que ouça ambas as mídias") é a intersecção dos eventos R ("selecionar uma pessoa que ouça rádio") e P ("selecionar uma pessoa que ouça *podcast*").

Como $n(E) = n(R \cap P) = x$, temos:

$(25 - x) + x + (20 - x) + 20 = 50 \Rightarrow 65 - x = 50 \Rightarrow x = 15$

Portanto, 15 pessoas ouvem ambas as mídias.

Logo, a probabilidade de E é:

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 0,3 = 30\%$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

19. Um baralho comum tem 52 cartas, distribuídas em quatro grupos idênticos, exceto pelo naipe de cada grupo: paus, ouros, copas e espadas. Se tirarmos uma carta ao acaso, qual será a probabilidade de ela ser:

a. uma carta de paus ou uma dama? 19 a. $\frac{4}{13}$

b. uma carta de ouros ou copas ou um rei? 19 b. $\frac{7}{13}$

20. Uma urna contém 4 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 3 bolas brancas. Retirando-se uma das bolas ao acaso, qual é a probabilidade de ela ter cor primária (amarela, vermelha ou azul)? 20. $\frac{2}{3}$

21. Se lançarmos um dado vermelho e um dado preto, qual será a probabilidade de sair 3 no vermelho ou 2 no preto? 21. $\frac{11}{36}$

22. Em um município de 1.000 habitantes, 400 são sócios de um clube A, 300 de um clube B e 200 de ambos os clubes. Calcule a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ser sócia do clube A ou do B. 22. $\frac{1}{2}$

23. De 140 estudantes de uma escola de Comunicações, 80 cursam Música, 40 cursam Artes Cênicas e 20 cursam Música e Artes Cênicas.

NEJRON PHOTO/SHUTTERSTOCK

Uma pessoa foi escolhida ao acaso entre todos os estudantes dessa escola. Determine a probabilidade de ela cursar:

a. Música; 23 a. $\frac{4}{7}$

b. Artes Cênicas; 23 b. $\frac{2}{7}$

c. Música e Artes Cênicas; 23 c. $\frac{1}{7}$

d. Música ou Artes Cênicas. 23 d. $\frac{5}{7}$

24. Uma roleta honesta é provida de um disco dividido em partes iguais, numeradas de 1 a 36. Para sortear um desses números, joga-se uma bolinha sobre o disco, com a roleta em rotação, e considera-se válido o número sobre o qual a bolinha para.

Determine a probabilidade de:

a. sair um número par; 24 a. $\frac{1}{2}$

b. sair um múltiplo de 3; 24 b. $\frac{1}{3}$

c. sair um número par e múltiplo de 3; 24 c. $\frac{1}{6}$

d. sair um número par ou múltiplo de 3; 24 d. $\frac{2}{3}$

e. não sair um número par nem um múltiplo de 3; 24 e. $\frac{1}{3}$

f. não sair um número par ou não sair um múltiplo de 3. 24 f. $\frac{5}{6}$

25. PENSAMENTO COMPUTACIONAL Agora, Marcos e seus amigos estão brincando com uma roleta honesta. Escreva um algoritmo que indique se Marcos deve brincar ou não nesta rodada. Considere que ele deve brincar apenas se escolher um evento E cuja probabilidade de ocorrer é maior que 0,5.

25. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

26. Em um auditório, estão 35 pessoas loiras ou morenas. Vinte delas são homens, dos quais 4 são loiros. Entre as mulheres há 8 loiras.

Sorteando-se ao acaso uma pessoa desse auditório, qual é a probabilidade de ela ser:

a. uma mulher ou uma pessoa loira? 26 a. $\frac{19}{35}$

b. um homem moreno? 26 b. $\frac{16}{35}$

c. uma mulher morena ou um homem? 26 c. $\frac{27}{35}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

28 a. Resposta no *Suplemento para o professor.*

27. Os esportistas João e Pedro vão disputar São Silvestre, uma tradicional corrida de rua realizada anualmente na cidade de São Paulo (SP) no dia 31 de dezembro, dia de São Silvestre. Se a probabilidade de João ser campeão é de 0,25 e a de Pedro é de 0,20, qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, de João ou Pedro ganhar a corrida? **27.** 45%

28. Em um grupo de 30 pessoas, 20 têm cidadania australiana, 10 têm cidadania brasileira e 8 têm ambas as cidadanias. As demais não têm nenhuma dessas cidadanias. Uma pessoa desse grupo é selecionada ao acaso.

a. Desenhe um diagrama que represente a situação.

b. Determine a probabilidade de a pessoa selecionada não ter nenhuma das cidadanias. **28 b.** $\frac{4}{15}$

c. Calcule a probabilidade de a pessoa selecionada ter apenas uma das cidadanias. **28 c.** $\frac{7}{15}$

29. Uma caixa contém 20 fichas numeradas de 1 a 20. Uma ficha é retirada ao acaso. Qual é a probabilidade de a ficha sorteada apresentar um número divisível por 3 ou divisível por 5? **29.** $\frac{9}{20}$

30. Três moedas são lançadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de que ocorram três caras ou três coroas? **30.** $\frac{1}{4}$

31. Em um centro de informações, há 8 atendentes trabalhando no primeiro turno, das 7 às 15 horas; 12 atendentes trabalhando no segundo turno, das 15 às 23 horas; e 3 atendentes no terceiro turno, das 23 às 7 horas. Três atendentes são selecionados para uma equipe que vai revisar os procedimentos de trabalho. Qual é a probabilidade de os 3 atendentes trabalharem no primeiro turno ou trabalharem no terceiro turno? **31.** $\frac{57}{1.771}$

32. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** **EM DUPLA** Elabore um problema em que seja necessário calcular a probabilidade da união de dois eventos. Depois, peça a um colega que resolva seu problema. Você deve resolver o problema elaborado por ele. **32.** Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Probabilidade condicional

Acompanhe a situação a seguir.

Um jogo consiste em escolher um número entre 1 e 6 e lançar um dado duas vezes sucessivas. Se o número escolhido aparecer em pelo menos um dos lançamentos, a pessoa vence; se não aparecer em nenhum dos dois lançamentos, a pessoa perde. Júlia decidiu jogar. Ela escolheu o número 3 e lançou o dado duas vezes. Qual é a probabilidade de ela ganhar, se não obteve o número 3 no primeiro lançamento?

O número de elementos do espaço amostral S é $n(S) = 36$.

- Evento A: obter o número 3 em pelo menos um dos lançamentos.

  $A = \{(1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$

  Como $n(A) = 11$, temos $P(A) = \frac{11}{36}$.

- Evento B: não obter o número 3 no primeiro lançamento.

  $B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

  Como $n(B) = 30$, temos $P(B) = \frac{30}{36}$.

Denotamos por $A|B$ a ocorrência do evento A, dado que o evento B já tenha ocorrido, e por $P(A|B)$ a **probabilidade condicional** de ocorrer A, dado que B já ocorreu.

Na situação anterior, $P(A|B)$ é "a probabilidade de obter 3 em um dos lançamentos do dado, considerando que não foi obtido 3 no primeiro lançamento".

Note que a ocorrência do evento B modifica a condição e a probabilidade do evento A, pois, a partir da ocorrência de B, o espaço amostral passa a ser o conjunto B:

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \simeq 16{,}67\%$$

Assim, a probabilidade de Júlia ganhar, tendo escolhido o número 3 e não obtido esse número no primeiro lançamento do dado, é de aproximadamente 16,67%. Em geral, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ com } P(B) \neq 0; \text{ ou } P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Observação

Representação do espaço amostral:

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Observação

$A \cap B = \{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$

Como $n(A \cap B) = 5$, temos:

$P(A \cap B) = \frac{5}{36}$

Atividades resolvidas

R9. Em uma bolsa, há 2 cubos vermelhos e 4 cubos azuis. Se 2 cubos são selecionados ao acaso, um de cada vez, e o primeiro cubo retirado não é reposto na bolsa, calcular a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos.

▶ **Resolução**

• Evento B: o primeiro cubo é vermelho.

Então: $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

• Evento A: o segundo cubo é vermelho. A probabilidade da ocorrência de A depende da ocorrência de B, pois, se o primeiro cubo retirado for vermelho, haverá somente um cubo vermelho entre 5 cubos restantes na bolsa.

Assim: $P(A|B) = \frac{1}{5}$

Queremos obter a probabilidade de ambos os cubos serem vermelhos, ou seja, devemos calcular a probabilidade de $A \cap B$:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \simeq 6{,}67\%$

R10. De um baralho comum são retiradas 2 cartas, uma a uma e sem reposição. Calcular a probabilidade de as duas cartas serem de copas.

▶ **Resolução**

• Evento B: a primeira carta é de copas.

Então: $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

• Evento A: a segunda carta é de copas.

$P(A|B) = \frac{12}{51}$

Queremos obter a probabilidade de ambas as cartas serem de copas, ou seja, devemos calcular a probabilidade de $A \cap B$:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{51} = \frac{3}{51} \simeq 5{,}88\%$

Eventos independentes

Considere o lançamento simultâneo de um dado e de uma moeda.

Adotando c para cara e k para coroa, o espaço amostral desse experimento é S = {(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6), (k, 1), (k, 2), (k, 3), (k, 4), (k, 5), (k, 6)} e n(S) = 12.

Vamos considerar os eventos a seguir.

- Evento A: sair cara na moeda.
- Evento B: sair um número múltiplo de 3 no dado.

Então:

A = {(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (c, 5), (c, 6)} e $P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

B = {(c, 3), (c, 6), (k, 3), (k, 6)} e $P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$A \cap B$ = {(c, 3), (c, 6)} e $P(A \cap B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Pela definição de probabilidade condicional, temos:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Note que $P(A|B) = P(A)$, ou seja, a probabilidade de sair cara na moeda não é alterada pela ocorrência de sair um número múltiplo de 3 no dado.

Temos, ainda:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = P(B)$$

Como $P(B|A) = P(B)$, a probabilidade de ocorrer o evento B também não é alterada pela ocorrência do evento A.

Portanto, a ocorrência de um evento não interferiu na probabilidade de ocorrência do outro. Dizemos, então, que os eventos "sair cara na moeda" e "sair um número múltiplo de 3 no dado" são eventos independentes.

Dois eventos, A e B, são **eventos independentes** se a ocorrência de um deles não interfere na ocorrência do outro, isto é, se $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para a ocorrência simultânea dos dois eventos independentes, substituímos $P(A|B)$ por $P(A)$ em $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$. Assim, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dois eventos, A e B, são **eventos dependentes** quando a probabilidade de ocorrência de um deles interfere na ocorrência do outro. Nesse caso, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Observação

Não confunda eventos **independentes** com eventos **mutuamente exclusivos**!

A probabilidade de ocorrência de mais de dois eventos independentes é igual ao produto das probabilidades de cada um dos eventos.

Considere o exemplo a seguir.

Retiramos 2 cartas de um baralho de 52 cartas, uma após a outra e com reposição. Vamos calcular a probabilidade de a primeira ser uma dama e a segunda ser um 10.

- S: cartas do baralho e $n(S) = 52$.
- Evento A: primeira carta ser uma dama, $n(A) = 4$.
- Evento B: segunda carta ser um 10, $n(B) = 4$.

$P(A) = P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Como houve reposição, A e B são eventos independentes:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{169}$

Então, a probabilidade de a primeira carta ser uma dama e a segunda ser um 10 é $\frac{1}{169}$.

Atividade resolvida

R11. O 2º ano A de uma escola tem 30 estudantes. Cada estudante estuda uma língua estrangeira e outro componente curricular opcional, de acordo com a tabela.

Componentes curriculares opcionais e línguas estudadas pelos estudantes do 2º ano A

Língua \ Componente curricular opcional	Xadrez (X)	Dança (D)	Música (M)	Total
Francês (F)	10	3	5	18
Espanhol (E)	5	6	1	12
Total	15	9	6	30

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. Calcular a probabilidade de um estudante, selecionado ao acaso, estudar xadrez, sabendo que ele estuda francês.

b. Verificar se os eventos "estudante estuda xadrez" e "estudante estuda francês" são eventos independentes.

▶ **Resolução**

a. Dos 18 estudantes que estudam francês, 10 estudam xadrez. Então:

$$P(X|F) = \frac{P(X \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{10}{30}}{\frac{18}{30}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Logo, a probabilidade de um estudante, selecionado ao acaso, estudar xadrez, sabendo que ele estuda francês, é de $\frac{5}{9}$.

b. A probabilidade de um estudante estudar xadrez é: $P(X) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

Logo, os eventos **não** são independentes, pois $P(X|F) \neq P(X)$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

37 a. $\frac{2}{3}$ 37 b. $\frac{4}{7}$

36. Justificativas no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

33. Um grupo de 1.000 pessoas apresenta, conforme sexo e qualificação profissional, a composição indicada na tabela a seguir.

Qualificação profissional do grupo

Sexo \ Qualificação	Especializados	Não especializados
Homens	210	390
Mulheres	140	260

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Escolhendo uma dessas pessoas ao acaso, qual é a probabilidade:

a. de ser homem? 33 a. 60%

b. de ser mulher não especializada? 33 b. 26%

c. de ser não especializado? 33 c. 65%

d. de ser homem especializado? 33 d. 21%

e. se for especializado, de ser mulher? 33 e. 40%

34. Uma moeda é lançada três vezes. Qual é a probabilidade de, nas três vezes, sair coroa na face voltada para cima? 34. $\frac{1}{8}$

35. Uma urna contém 5 bolas verdes e 7 bolas brancas. Retiramos 2 bolas em seguida, com reposição.

a. Qual é a probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda ser verde? 35 a. $\frac{35}{144}$

b. Qual é a probabilidade de as duas bolas serem brancas? 35 b. $\frac{49}{144}$

c. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Crie uma pergunta sobre probabilidade envolvendo a situação descrita no enunciado. Peça a um colega que resolva. Em seguida, conversem sobre a elaboração da pergunta e as respostas obtidas. 35 c. Resposta pessoal.

36. Seis cartas (2, 3 e 4 de copas, 2 e 4 de paus e 4 de espadas) são embaralhadas e colocadas com a face voltada para baixo sobre uma mesa. Sabendo que uma dessas cartas é escolhida ao acaso, responda às questões e justifique suas respostas.

a. Os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de copas" são independentes? 36 a. Não.

b. E os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de paus"? 36 b. Sim.

37. Em uma escola, há estudantes de dois segmentos: no Ensino Médio são 400 meninos e 200 meninas; no Ensino Fundamental, são 400 meninas e 300 meninos. Ao sortear um estudante dessa escola, calcule a probabilidade de ser:

a. menino, sabendo que é estudante do Ensino Médio;

b. estudante do Ensino Médio, sabendo que é menino.

38. Uma urna contém 3 bolas: 1 verde, 1 azul e 1 branca. Tira-se 1 bola ao acaso, registra-se sua cor e coloca-se a bola de volta na urna. Repete-se a experiência mais duas vezes. Qual é a probabilidade de serem registradas 3 cores distintas? 38. $\frac{2}{9}$

39. Uma urna contém 8 bolas vermelhas e 4 bolas pretas. Ao retirarmos duas bolas em seguida, qual é a probabilidade de a primeira bola ser preta e a segunda ser vermelha?

40. ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS EM DUPLA Elabore um problema em que seja necessário calcular a probabilidade de um evento em um experimento aleatório com etapas sucessivas. Resolva o problema de um colega de sala e peça a ele que resolva o seu. Depois, confiram as resoluções e verifiquem se o enunciado está claro e se com todos os dados fornecidos é possível resolver o problema.

40. Resposta pessoal.

39. Não há dados suficientes para a resolução, pois o enunciado não informa se há reposição de bola após a primeira retirada.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Frequência relativa e probabilidade

Em algumas situações, pode-se determinar a probabilidade de ocorrer um evento usando a frequência relativa.

Para calcular o valor da apólice de seguros de um automóvel, por exemplo, leva-se em conta, entre outros fatores, a probabilidade de um veículo daquele modelo ser roubado. Para determinar essa probabilidade, realiza-se um levantamento do número de carros roubados daquele modelo em relação ao total de carros do mesmo modelo.

Considere que determinado modelo, em certo período, teve 38 carros roubados a cada 1.000. Escrevendo essa relação em forma de razão, temos:

$$p = \frac{38}{1.000} = \frac{3,8}{100} = 3,8\%$$

Portanto, podemos inferir que a probabilidade de um carro desse modelo ser roubado, no período estudado, era de 3,8%, ou seja, 38 carros em 1.000.

A frequência relativa também pode auxiliar no cálculo da probabilidade de, por exemplo, um medicamento em estudo fazer o efeito desejado, acontecer um acidente aéreo ou haver alguma sequela após determinado tipo de cirurgia.

Em situações como essas é possível considerar que a frequência relativa equivale à "probabilidade de ocorrer o evento".

Porém, a frequência relativa é usada com maior eficiência no cálculo de probabilidades em situações nas quais há uma quantidade grande de experimentos. Considere a situação a seguir.

Se lançarmos um dado duas vezes e cair a face 1 voltada para cima nos dois lançamentos, a frequência relativa é $f_r = \frac{2}{2} = 100\%$. Nesse caso, não podemos usar a frequência como a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, pois o número de experimentos é muito pequeno.

Se lançarmos 50 vezes o dado e sair a face 1 em 12 lançamentos, a frequência relativa será $f_r = \frac{12}{50} = 24\%$. Ainda com esse número de experimentos não é possível usar a frequência relativa no cálculo da probabilidade em questão.

Se lançarmos o dado 500 vezes e sair a face 1 em 108 lançamentos, a frequência relativa é $f_r = \frac{108}{500} = 21{,}6\%$. Com essa quantidade de lançamentos ainda não podemos considerar a frequência relativa como a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado.

Porém, se em 100.000 lançamentos sair a face 1 em 16.595, teremos como frequência relativa $f_r = \frac{16.595}{100.000} = 16{,}595\%$. Nesse caso, o número de ocorrências já é grande o suficiente para que a frequência seja usada na determinação da probabilidade.

Observação

Para calcular a probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado, dividimos o número de elementos n(*E*) do evento *E* (face 1) pelo número de elementos n(*S*) do espaço amostral *S* (faces 1, 2, 3, 4, 5 e 6).

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{6} = 0{,}1666...$

A probabilidade de sair a face 1 no lançamento de um dado é aproximadamente 16,7%.

Número de lançamentos, frequência absoluta e frequência relativa

Número de lançamentos	Frequência absoluta de ocorrência da face 1	Frequência relativa
2	2	100%
50	12	24%
500	108	21,6%
100.000	16.595	16,595%

Atividade resolvida

R12. Em 150 lançamentos de uma moeda, obteve-se o resultado mostrado a seguir.

Resultado dos 150 lançamentos de uma moeda

Face	Número de vezes
Cara	86
Coroa	64

a. Organizar, em um quadro, as frequências absoluta e relativa de caras e coroas.

b. Verificar se o modelo probabilístico que estabelece probabilidades iguais para "cara" e "coroa" parece adequado para esse caso.

▶ **Resolução**

a. Calculando as frequências relativas, podemos organizar o quadro.

Frequências absoluta e relativa de caras e coroas obtidas após 150 lançamentos de uma moeda

Face	Número de vezes (frequência absoluta)	Frequência relativa
Cara	86	57,3%
Coroa	64	42,7%

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

41 b. A probabilidade de sair uma das faces do dado é aproximadamente 16,7%, que também está próximo da frequência relativa de sair cada face.
Logo, com essa quantidade de lançamentos do dado, podemos considerar a frequência relativa como a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado.

b. Como as frequências são diferentes (face "cara": aproximadamente 57,3%; face "coroa": aproximadamente 42,7%), o evento não é equiprovável; então, o modelo probabilístico que estabelece probabilidades iguais não é adequado.

Podemos inferir duas possibilidades:

- a moeda não é honesta, pois a probabilidade de sair face "cara" é maior;
- a quantidade de experimentos foi insuficiente para usar a frequência relativa na determinação da probabilidade de ocorrer face "cara" ou "coroa".

Atividades propostas

Registre em seu caderno

41. Um dado foi lançado 1.000 vezes com o resultado mostrado a seguir. **41 a.** Resposta no *Suplemento para o professor.*

Resultado dos 1.000 lançamentos de um dado

Face	Número de vezes
1	150
2	175
3	163
4	166
5	174
6	172

a. Organize, em um quadro, as frequências absoluta e relativa de cada face.

b. ARGUMENTAÇÃO Analise se, com essa quantidade de lançamentos, podemos considerar a frequência relativa como a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado. Elabore uma conclusão.

42. Uma grife de moda jovem fez o levantamento, no decorrer do mês de janeiro de 2025, da quantidade de camisetas que vendeu.

Quantidade de camisetas vendidas por uma grife em janeiro de 2025

Cor da camiseta	Quantidade vendida
Branca	4.200
Preta	3.600
Azul	1.200
Vermelha	1.800
Rosa	600
Amarela	600

Fonte: elaborado para fins didáticos.

42 a. Resposta no *Suplemento para o professor.*

a. Construa uma tabela de frequências.

b. Quantas camisetas brancas ou pretas foram vendidas ao todo? **42 b.** 7.800

c. Que porcentagem do total de camisetas vendidas pela grife representa a venda de camisetas pretas? **42 c.** 30%

d. Se uma das camisetas vendidas é selecionada ao acaso, qual é a probabilidade de que ela seja amarela? **42 d.** 5%

43. Na 1ª semana de 2025, foi realizada uma pesquisa para saber os sintomas apresentados por moradores de um bairro próximo a uma indústria siderúrgica, e os dados foram organizados na tabela a seguir.

Sintomas apresentados por moradores de um bairro próximo a uma indústria siderúrgica na 1ª semana de 2025

Porcentagem dos moradores	Olhos irritados	Coriza	Tosse	Problemas respiratórios
10%	X	X	—	—
15%	—	X	X	X
5%	X	X	X	X
45%	X	—	—	—
25%	—	—	—	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

As pessoas que apresentam pelo menos três desses sintomas são aconselhadas a fazer um acompanhamento médico.

Qual é a probabilidade de encontrar ao acaso, nesse bairro, uma pessoa que necessita de acompanhamento médico? **43.** 20%

44. Em 2024, uma seguradora fez uma pesquisa sobre a quantidade de carros roubados de três modelos. A cada 10.000 carros segurados, registram-se os seguintes resultados:

Quantidade de carros roubados dos modelos A, B e C, a cada 10.000 segurados em 2024

Modelo do carro	Quantidade de carros roubados a cada 10.000 segurados
A	380
B	289
C	254

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Com base nesses dados, calcule a probabilidade de roubo para cada modelo citado.

44. Modelo A: 3,8%; modelo B: 2,89%; modelo C: 2,54%.

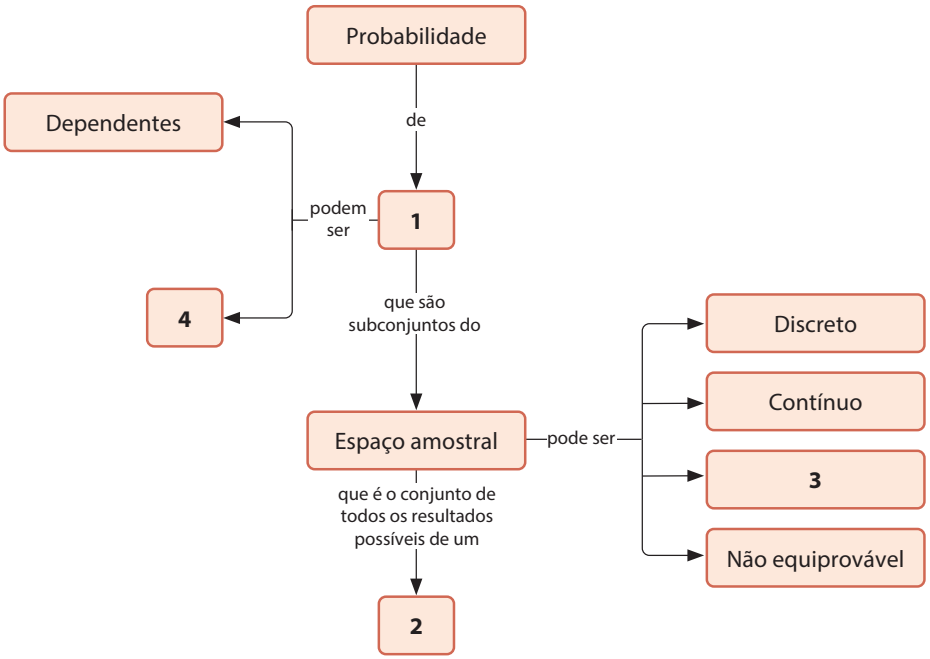
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 5

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Observe o mapa conceitual a seguir, com a relação entre alguns conteúdos que foram estudados neste capítulo e estão representados por números.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Conexões entre conceitos. A – 4; B – 2; C – 1; D – 3.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Independentes

B. Experimento aleatório

C. Eventos

D. Equiprovável

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

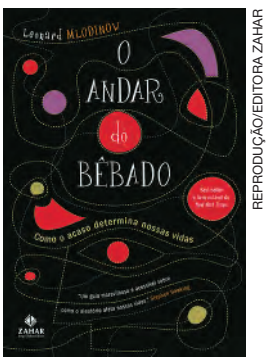
Livros

O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas

Leonard Mlodinow

Rio de Janeiro: Zahar, 2009.

Nessa obra, o autor apresenta ferramentas para identificar os indícios do acaso, procurando ajudar o leitor a fazer escolhas mais acertadas e a conviver melhor com fatores que ele não pode controlar.



REPRODUÇÃO/EDITORA ZAHAR

Introdução à Combinatória e Probabilidade

André Gustavo C. Pereira, Carlos A. Gomes e Viviane Simioli

Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2020.

Além de apresentar explicações teóricas bem detalhadas, essa obra traz dezenas de atividades resolvidas ao longo dos capítulos e a resolução detalhada de cerca de 300 problemas propostos. Essas resoluções têm cada passagem minuciosamente justificada, o que, certamente, facilitará a compreensão de problemas clássicos de combinatória e probabilidade.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de [redacted], do qual qualquer subconjunto é chamado de [redacted]. **Q1.** Alternativa **c.**

a. amostra; evento
b. espaço; amostra
c. espaço amostral; evento
d. evento; fenômeno aleatório

Q2. Considere o experimento "uma bola é retirada ao acaso de uma urna contendo 3 bolas azuis e 4 bolas vermelhas". Sendo A o evento "retirar bola azul" e V o evento "retirar bola vermelha", o espaço amostral (S) desse experimento e o valor de n(S) são, respectivamente: **Q2.** Alternativa **a.**

a. $\{A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3, V_4\}$ e 7.
b. $\{A, V\}$ e 2.
c. $\{A\}$ e 1.
d. $\{V\}$ e 1.

Q3. De um baralho honesto de 52 cartas, uma carta é retirada ao acaso. Sendo E o evento "retirar uma carta de copas", então n(E) e $P(E)$ são, respectivamente: **Q3.** Alternativa **b.**

a. 10 e $\frac{1}{2}$.
b. 13 e $\frac{1}{4}$.
c. 26 e $\frac{1}{2}$.
d. 52 e $\frac{1}{4}$.

Q4. No experimento "escolher 6 números em um sorteio", considere os eventos A "os números sorteados são pares ou ímpares" e B "os números sorteados são negativos". Podemos dizer que A é um evento [redacted] e B é um evento [redacted]. **Q4.** Alternativa **d.**

a. aleatório; elementar
b. simples; impossível
c. certo; simples
d. certo; impossível

Q5. Uma cartela contém 20 pilhas. Um experimento consiste em escolher, aleatoriamente, 5 pilhas dessa cartela e verificar se elas estão de acordo com as normas de qualidade. O número de elementos do espaço amostral desse experimento é dado por: **Q5.** Alternativa **c.**

a. P_5 **b.** P_{20}^5 **c.** $C_{20,5}$ **d.** $A_{20,5}$

Q6. Lançando-se um dado cúbico honesto, qual é a probabilidade de ocorrer um número par? **Q6.** Alternativa **b.**

a. $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{1}{2}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{1}{6}$

Q7. Em um sorteio de um número natural de 1 a 100, qual é a probabilidade de obter um número múltiplo de 10 ou um número múltiplo de 15? **Q7.** Alternativa **d.**

a. $\frac{1}{10}$ **b.** $\frac{3}{50}$ **c.** $\frac{3}{100}$ **d.** $\frac{13}{100}$

Q8. Uma pesquisa apontou que 9 entre 10 mulheres preferem o sabonete X. Sorteando-se duas mulheres ao acaso, qual é a probabilidade de que nenhuma use o sabonete X? **Q8.** Alternativa **b.**

a. $\frac{1}{10}$ **b.** $\frac{1}{100}$ **c.** $\frac{9}{10}$ **d.** $\frac{9}{100}$

Q9. Sabe-se que a soma dos números obtidos em um lançamento de dois dados honestos é 7. Qual é a probabilidade de ter ocorrido a face 4 em um deles? **Q9.** Alternativa **a.**

a. $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{1}{12}$ **c.** $\frac{1}{6}$ **d.** $\frac{1}{2}$

Q10. Em cada 10 nutricionistas, 8 recomendam a marca X de certo produto. Três nutricionistas são solicitados a dar sua opinião a respeito dessa marca. Qual é a probabilidade de que nenhum recomende a marca X? **Q10.** Alternativa **b.**

a. $\frac{64}{125}$ **b.** $\frac{1}{125}$ **c.** $\frac{124}{125}$ **d.** $\frac{23}{125}$

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

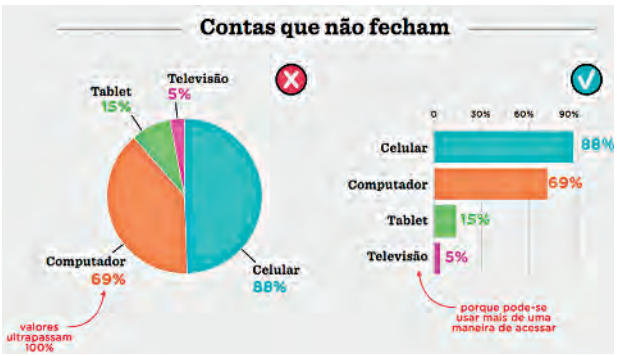
Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Determinar o espaço amostral, os eventos desse espaço e calcular o número de elementos desses conjuntos.	X	X	X	X	X					
Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento.			X			X	X	X	X	X
Resolver problemas envolvendo probabilidades.								X		X

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar

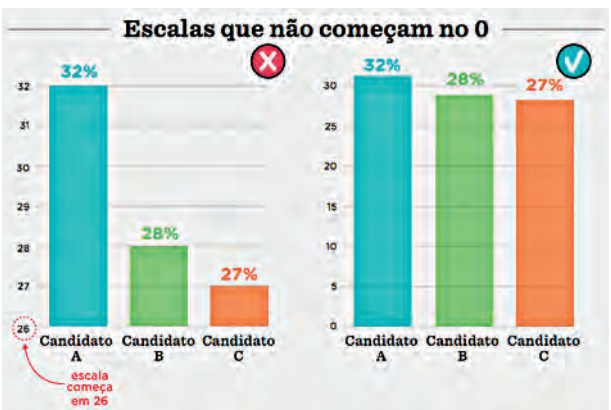
Escalas enganosas, declarações imprecisas e contas que não fecham: existem diversas maneiras de levar a interpretações erradas por meio de gráficos. Conheça algumas.

A visualização de dados pode ser uma ferramenta útil para apresentar um conjunto de dados, e traduzir visualmente informações numéricas. Mas ela também pode ser usada de maneira enganosa (mesmo que bem-intencionada). Veja abaixo alguns detalhes frequentes em gráficos enganosos e como notá-los:



Em gráficos de *pizza*, o tamanho de cada fatia representa a proporção de cada categoria. Como partes de um todo, a soma dos seus valores percentuais deve resultar em 100% (a totalidade do conjunto).

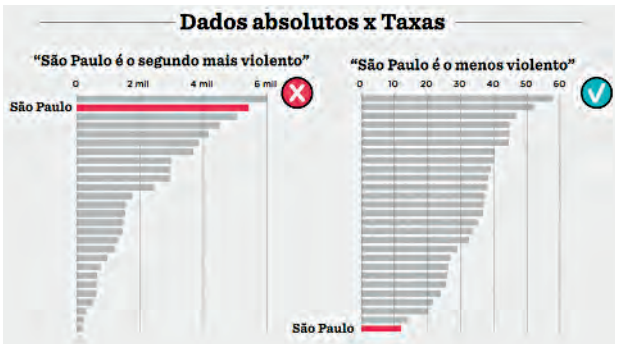
Nesses gráficos, por exemplo, vemos os meios de acesso à internet utilizados pelos brasileiros. Como as pessoas podem utilizar mais de um meio – e podiam responder mais de uma opção na pesquisa –, a representação em uma *pizza* não é correta, pois os valores ultrapassam o todo de 100% (já que uma pessoa pode ser contada mais [de] uma vez nos dados). Neste caso, é preferível utilizar barras independentes para cada categoria (que não sugerem a ideia de totalidade).



Em uma pesquisa de intenção de votos de uma eleição hipotética, o candidato A tem 32% das intenções de voto, enquanto o candidato B tem 28% e o candidato C tem 27%. A diferença entre os valores é pequena.

No entanto, se esses valores forem mostrados em um gráfico de barras cuja escala não começa no 0, essa diferença é dramatizada, dando uma impressão de que é muito maior do que realmente é. No geral, é importante se manter atento para os valores de uma escala.

[...]

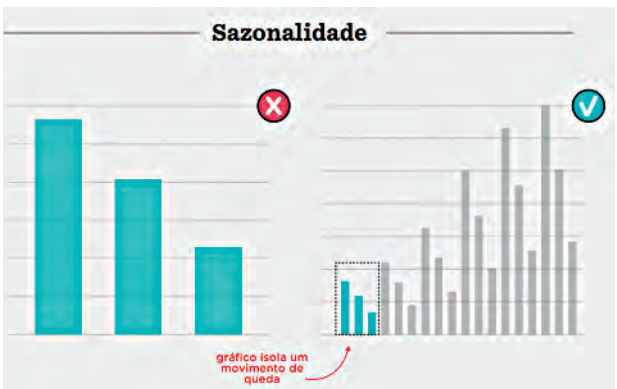


Existem alguns dados que são diretamente relacionados a outros e deve-se ter essa relação em mente para fazer comparações. Por exemplo: número de homicídios e tamanho da população.

Se quisermos descobrir qual estado brasileiro é o mais violento, e visualizar o número de homicídios em cada estado, teremos o gráfico da esquerda, que indica São Paulo como o segundo estado mais violento (em 2015).

Porém, devemos considerar o tamanho de sua população para entender o quão violento ele é proporcionalmente a ela. Isso é visualizado no gráfico à direita, que usa a taxa de "homicídios a cada 100 mil habitantes".

[...]



ILUSTRAÇÕES: NEXO JORNAL

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

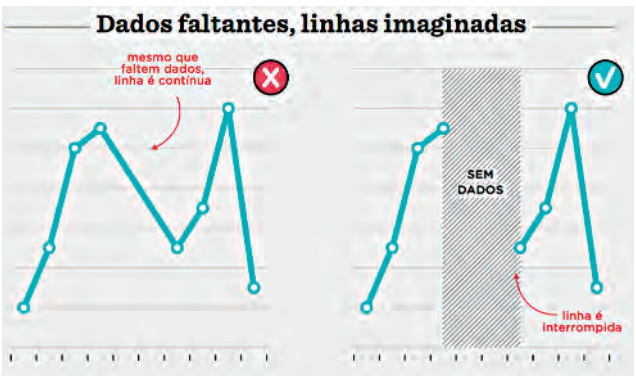
Existem alguns dados que apresentam padrões de variação sazonais. Isso quer dizer que eles repetem alguns padrões em determinadas épocas (por exemplo, desemprego cai em dezembro e janeiro e sobe em outros períodos do ano).

É importante perceber isso quando olhamos para gráficos que isolam determinado período do tempo (como o gráfico hipotético à esquerda), levando a crer que um dado está caindo, quando na verdade, se olharmos o panorama geral, ele está subindo dentro da variação sazonal esperada (como mostra o gráfico à direita).

Isso é útil também para ter cautela com afirmações que comparam algum dado sazonal, afirmando que aumentou ou diminuiu em relação ao mês anterior — quando o correto é comparar com o mesmo mês, em outro ano.

[...]

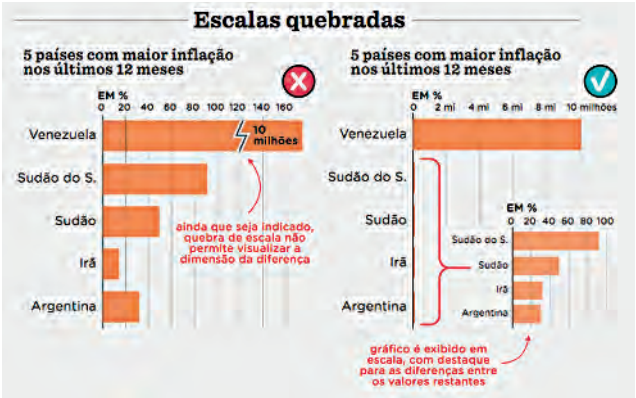
Fonte: ZANLORENSSI, Gabriel; ALMEIDA, Rodolfo; MAIA, Gabriel. Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar. **Nexo Jornal**, 28 dez. 2023. Disponível em: https://www.nexojornal.com.br/grafico/2018/03/31/como-mentir-com-graficos-7-detalhes-que-podem-te-enganar. Acesso em: 27 ago. 2024.



Seja por conta de problemas de coleta de dados, ou pela frequência irregular em que determinados estudos são realizados, é comum encontrar séries históricas interrompidas por dados faltantes. Essa ausência representa uma zona misteriosa: um período sobre o qual não se pode afirmar nada a partir da base de dados.

Nesses casos, muitos gráficos de linha representam esse conjunto ligando os pontos disponíveis da série histórica, como no exemplo acima. Essa representação pode ser enganosa por causar a impressão de que os dados seguiram a variação mostrada na linha, o que não é possível saber.

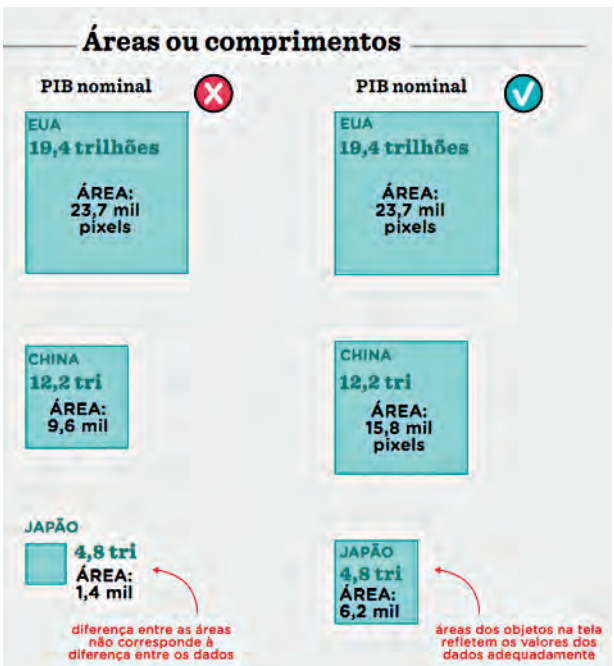
A prática indicada, no caso de dados faltantes, é ser transparente sobre os momentos em que existem ou não dados, interrompendo a linha onde não há informação ou até mesmo destacando visualmente o período problemático. [...]



Em gráficos de barras, é comum que determinado valor seja tão maior do que o restante que ele, sozinho, torne praticamente invisíveis todos os outros. Nessas situações, uma solução que costuma ser adotada é quebrar a escala do valor destoante, o que permitiria observar todas as barras.

Entretanto, essa decisão deve considerar que a real dimensão do valor destoante não será contemplada no gráfico. No exemplo [anterior], o gráfico sem quebra de escala dá uma dimensão mais dramática da crise inflacionária que a Venezuela enfrenta. Para apresentar ao mesmo tempo os valores destoantes e o restante, existem alternativas, como usar destaques dentro do gráfico, mostrar as informações em gráficos separados, entre outros.

[...]



ILUSTRAÇÕES: NEXO JORNAL

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Uma maneira de visualizar dados bastante utilizada é a comparação de tamanhos de diferentes objetos como representação de valores numéricos – círculos ou retângulos costumam ser as formas mais utilizadas nesses gráficos. A pressuposição nesse tipo de visualização é de que quanto maior a área ocupada pela forma geométrica, maior o valor daquele dado.

Entretanto, muitos gráficos desse tipo são desenhados utilizando o valor do dado não na área, mas na largura, altura ou diâmetro da forma geométrica, o que na prática distorce proporção entre as formas. No caso de um quadrado, como no exemplo [anterior], a área é o produto dos lados. E é essa a medida que deve ser proporcional ao dado que se pretende mostrar.

Observe que o PIB do Japão é cerca de 25% do PIB americano, mas no exemplo enganoso, ainda que o lado do quadrado do Japão seja 25% do lado do quadrado dos EUA, a área de seu quadrado corresponde a apenas 6% da área do quadrado dos EUA. Já no gráfico corrigido, a proporção entre as áreas dos quadrados reflete a proporção entre os tamanhos dos PIBs.

Fonte: ALMEIDA, Rodolfo; ZANLORENSSI, Gabriel. Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar. **Nexo Jornal**, 28 dez. 2023. Disponível em: https://www.nexojornal.com.br/grafico/2019/04/01/como-mentir-com-graficos-mais-7-detalhes-que-podem-te-enganar. Acesso em: 27 ago. 2024.

Atividades

1. Qual é a intenção do texto? **1.** Alternativa **c**.

a. Mostrar que o PIB do Japão é cerca de 25% do PIB dos Estados Unidos.

b. Apresentar gráficos de setores, de barras e de linha.

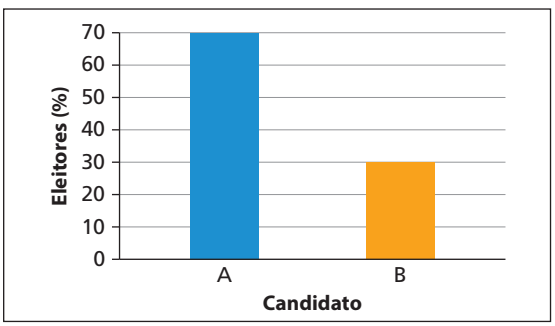
c. Mostrar que alguns gráficos podem ser construídos de modo que levem a uma interpretação errada.

d. Ressaltar que os gráficos enganosos sempre são construídos com más intenções.

2. Você já viu algum gráfico que apresenta qualquer dos problemas citados no texto? **2.** Resposta pessoal.

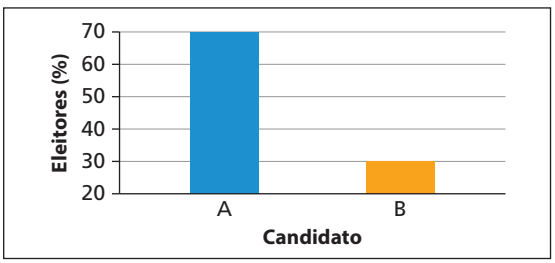
3. **(Enem-2017)** O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico 1.

Gráfico 1



Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico 1 foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico 2.

Gráfico 2



Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico 2 impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato B.

A diferença entre as razões da altura da coluna B pela coluna A nos gráficos 1 e 2 é: **3.** Alternativa **e**.

a. 0

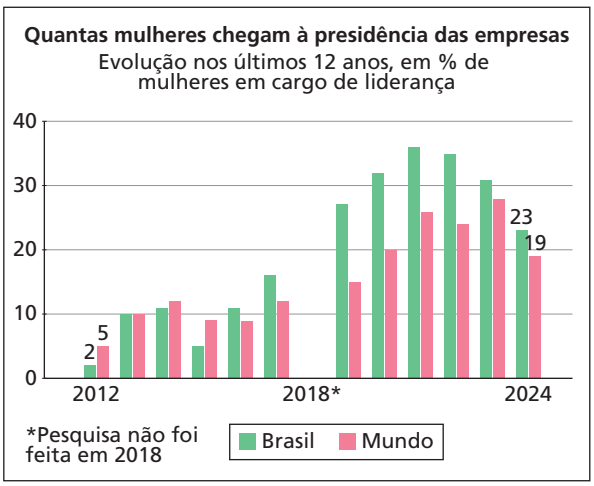
b. $\frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{5}$

d. $\frac{2}{15}$

e. $\frac{8}{35}$

4. Observe o gráfico a seguir, similar ao que foi publicado por um jornal, e responda às questões.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

4 a. Porque a pesquisa não foi feita em 2018.

a. Por que os dados de 2018 não aparecem no gráfico?

b. Podemos apontar o ano em que a porcentagem de mulheres que chegaram à presidência das empresas no Brasil passou a ser maior do que 20%?

4 b. Não, porque não temos os dados referentes ao ano de 2018.

c. Em sua opinião, por que apenas em 2012 e 2024 são mostradas as porcentagens nas colunas do gráfico?

4 c. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam, por exemplo, que somente essas porcentagens foram mostradas para que esses dados tenham mais destaque que os demais e os leitores desconsiderem que, no período analisado, houve momentos em que a porcentagem de mulheres que chegaram à presidência das empresas diminuiu, tanto no Brasil como no mundo. É importante que percebam que a omissão dos dados pode levar a conclusões imprecisas ou enviesadas, prejudicando a compreensão geral do padrão ou da tendência que o gráfico deveria representar.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

PESQUISA E AÇÃO — Pesquisa estatística

Registre em seu caderno

OBJETIVOS

Realizar pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes; elaborar relatório com os resultados da pesquisa estatística realizada; divulgar a pesquisa para a comunidade escolar.

ODS 3

Observação

O Guia Alimentar para a População Brasileira (2014) alerta para o fato de que maus hábitos alimentares podem contribuir para o desenvolvimento de doenças como hipertensão arterial e obesidade. O Guia recomenda uma alimentação equilibrada e a adoção de um estilo de vida ativo como formas essenciais de promover a saúde e prevenir essas condições.

OBJETO DIGITAL Vídeo: **Entrevista**

Este vídeo tem por objetivo auxiliar os estudantes e o professor na elaboração de uma entrevista para o desenvolvimento da proposta de pesquisa estatística sugerida nesta seção.

Você já leu ou ouviu falar sobre os cuidados da saúde na adolescência? Será que os adolescentes brasileiros têm hábitos de vida saudáveis?

Durante o período da adolescência, o corpo sofre diversas transformações importantes e essenciais para a vida adulta, por isso desenvolver hábitos saudáveis pode auxiliar na obtenção e na manutenção de uma boa saúde física e mental. Além disso, hábitos consolidados na adolescência tendem a continuar ao longo de toda a vida do indivíduo, e muitos deles influenciam diretamente a saúde.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), "saúde é um estado de completo bem-estar físico, mental e social, e não apenas a mera ausência de doença ou enfermidade". A OMS declara também que "saúde mental é um estado de bem-estar no qual um indivíduo realiza suas próprias habilidades, pode lidar com as tensões normais da vida, pode trabalhar de forma produtiva e é capaz de fazer contribuições à sua comunidade". A boa saúde mental, entre outros fatores, depende da boa saúde física. Podemos dizer que as duas estão diretamente relacionadas. Entre os principais comportamentos que causam risco à saúde física estão ausência ou diminuição de atividades físicas, alimentação inadequada e rotina de sono desequilibrada. Esses comportamentos podem ser observados em pessoas de todas as faixas etárias; porém, nesta seção, vamos refletir sobre a presença deles entre os adolescentes.

Por diversas razões, muitos adolescentes deixam de fazer atividade física, seja na escola, durante as aulas de Educação Física, seja fora dela. Além disso, há outros comportamentos de risco à saúde que muitas vezes fazem parte da rotina de alguns adolescentes: uso excessivo de celulares e computadores, rotina de sono inadequada e consumo exagerado de alimentos ricos em açúcares e gorduras. Esses comportamentos podem desencadear o desenvolvimento de doenças como hipertensão arterial, obesidade, entre outras.

Diante da importância desse tema, vamos realizar, nesta seção, uma pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes. Os dados da pesquisa serão analisados e apresentados em um relatório que poderá ser disponibilizado para toda a comunidade escolar, como forma de conscientizar sobre a importância de desenvolver um estilo de vida saudável nessa fase da vida.

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

VECTORFUSIONART/SHUTTERSTOCK

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM

A prática de atividades físicas é um dos principais hábitos que contribuem para a manutenção da saúde física e mental.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Etapa 1: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 1: Definição do escopo da pesquisa

1. O tema principal da pesquisa estatística é a saúde dos adolescentes. Organizem-se em grupos e definam os objetivos da pesquisa, ou seja, os problemas que se pretende detectar e analisar. Observem que dentro do tema da pesquisa poderão ser abordados tópicos como alimentação, atividade física, hábitos de sono, saúde mental, imagem corporal, entre outros.

2. Definam o público a ser pesquisado. Podem fazer parte dessa **população** os adolescentes da escola, do bairro, das famílias, lembrando que, de acordo com o Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), consideram-se adolescentes pessoas entre 12 e 18 anos. A pesquisa deverá ser **amostral**, ou seja, realizada com uma parte da população. Lembrem-se de que em uma pesquisa amostral é preciso escolher de forma estratégica a amostra, pois ela deve representar a população como um todo.

Observação

Para saber mais sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), acesse: https://www.gov.br/mdh/pt-br/navegue-por-temas/crianca-e-adolescente/publicacoes/eca_mdhc_2024.pdf. Acesso em: 27 ago. 2024.

Etapa 2: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 2: Planejamento da pesquisa

3. Seguindo as orientações do professor, façam um cronograma para realizar a pesquisa estatística. Para isso, é preciso considerar qual é a medida do tempo disponível para a realização da atividade completa, listar todas as tarefas que deverão ser cumpridas e estimar a medida de tempo que será utilizada para concluir cada uma das etapas.

4. Definidos os objetivos e o cronograma, vocês poderão estruturar as perguntas que serão feitas na pesquisa. Nesse momento, são estipulados os tipos de variáveis, que poderão ser **quantitativas** (quando seus valores são expressos por números) e **qualitativas** (quando seus valores são expressos por atributos). Para formular as perguntas, o grupo deverá levantar informações sobre o tema em jornais, revistas, *sites* etc. O questionário construído poderá conter questões de múltipla escolha ou questões abertas. Lembrem-se de que as questões abertas permitem ao entrevistado expor sua opinião de forma mais completa. É importante criar perguntas simples, claras e que não gerem constrangimentos. Outra decisão a ser tomada pelo grupo antes da aplicação do questionário é se ele será respondido por escrito ou oralmente. Também é possível gravar as respostas; nesse caso, deve-se pedir autorização para o entrevistado antes.

Etapa 3: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 3: Coleta de dados

5. Realizem as entrevistas de acordo com o cronograma criado pelo grupo. Os entrevistadores devem esclarecer as dúvidas que os entrevistados possam ter e precisam se manter imparciais em relação às perguntas do questionário.

Etapa 4: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 4: Organização e análise dos dados

6. Nesta etapa, vocês vão organizar os dados obtidos na pesquisa para que sejam analisados. Se os questionários possuírem perguntas abertas, vocês precisarão categorizar as respostas, ou seja, organizá-las em grupos de elementos com mesma propriedade. Durante a análise dos resultados obtidos, o grupo poderá iniciar uma primeira discussão de como os resultados da pesquisa serão divulgados a fim de direcionar o trabalho da próxima etapa.

7. Utilizem uma planilha eletrônica para a construção de tabelas e gráficos com os dados obtidos na pesquisa. Esses itens serão importantes na análise dos dados. Utilizem também as **medidas de tendência central** (média aritmética, moda e mediana) e as **medidas de dispersão** (amplitude e desvio padrão) para analisá-los. Conversem sobre os resultados obtidos para elaborar as conclusões. As considerações realizadas nesta etapa são de extrema importância para preparar a próxima etapa.

Etapa 5: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 5: Elaboração do relatório

8. Utilizem as conclusões da etapa anterior para compor o relatório, definindo, antes, como os resultados serão apresentados. Tabelas e gráficos são boas formas de apresentar os resultados, pois possibilitam leitura e interpretação das informações de forma rápida e fácil.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observação

Para apresentar os resultados da pesquisa, você pode utilizar um *software* de apresentação de *slides*. Esses *softwares* permitem organizar e destacar informações de forma clara e visualmente atraente. Além disso, facilitam a compreensão do conteúdo, ajudam a manter o foco do público e possibilitam o uso de recursos multimídia, como imagens e vídeos, para enriquecer a comunicação.

9. Para a elaboração do relatório é importante verificar, inicialmente, se os objetivos definidos foram alcançados; se não foram, é preciso avaliar o que pode ter inviabilizado isso. O relatório deverá trazer um breve histórico do problema, além de relatar cada etapa do processo. Também deverá apresentar gráficos e tabelas para fornecer informações ao leitor, de maneira precisa e eficiente, bem como comentários e discussões acerca dos problemas levantados.

10. O relatório poderá ser impresso ou digital. Se for digital, pode-se publicá-lo nas redes sociais da escola para que todos possam acessá-lo; se for impresso, poderá ficar disponível na biblioteca da escola.

Etapa 6: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 6: Apresentação

11. Combinem com o professor o dia e o local para apresentar os resultados da pesquisa à comunidade escolar. Nesse dia, vocês poderão mostrar ao público as principais informações e conclusões do relatório. Tabelas e gráficos enriquecem a apresentação, pois são maneiras eficientes de comunicar os resultados. É interessante, também, mostrar outras pesquisas referentes a essa temática, a fim de comparar e discutir os resultados.

12. É importante que todos os integrantes do grupo participem da apresentação não só mostrando o material, mas fazendo intervenções em momentos adequados. Relatem, de forma criteriosa, como foi elaborada cada etapa da pesquisa, desde a delimitação dos objetivos até o preparo da apresentação. Caso o relatório tenha sido disponibilizado na internet, informem as redes sociais da escola para que os interessados possam ler o documento na íntegra.

Etapa 7: Comentários no *Suplemento para o professor*.

Etapa 7: Avaliação e síntese do trabalho realizado

13. Reúnam-se nos grupos para avaliar o trabalho realizado. Nesse momento, vocês poderão discutir os itens a seguir e outros que julgarem pertinentes.

- O que vocês acharam da pesquisa estatística realizada?
- Os objetivos da pesquisa ficaram claros?
- Como vocês avaliam o relatório? Foram apresentadas todas as informações relevantes sobre a pesquisa?
- Vocês acreditam que, ao ler o relatório, os leitores, em especial os adolescentes, podem se conscientizar sobre o tema?
- O grupo trabalhou de forma colaborativa?
- Quais pontos poderiam ser melhorados?

14. Faça também uma avaliação sobre sua participação nas diversas etapas da pesquisa. Para nortear essa autoavaliação, responda às questões a seguir e, ao final, produza um texto que reflita sua participação no trabalho.

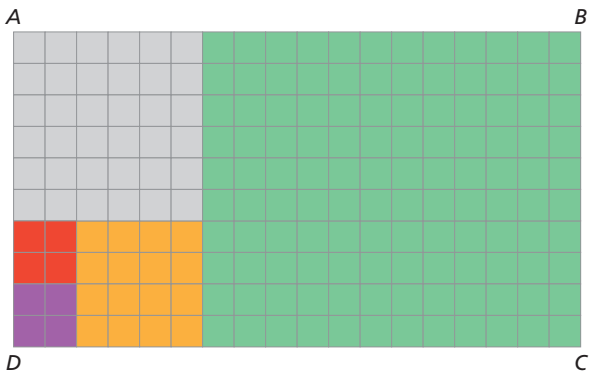
- Participei das etapas de realização da pesquisa estatística?
- Tive dificuldade em trabalhar de forma colaborativa?
- Houve dificuldades durante a organização e a análise dos dados da pesquisa? Quais foram essas dificuldades?
- Propus ideias, sugestões e mudanças durante o processo?
- Participei das discussões, da pesquisa e da elaboração do relatório?
- Ouvi as sugestões dos colegas com atenção e respeito?
- Houve dificuldades durante o trabalho? Quais foram as dificuldades? Como busquei resolvê-las?
- Compreendi a importância das pesquisas estatísticas e como elas podem auxiliar na análise e na solução de problemas?
- O que aprendi durante a realização das etapas desta seção?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

1. O polígono *ABCD* a seguir foi dividido em partes iguais.



Com base nessa figura, pode-se afirmar que: **1.** Alternativa **d**.

a. A razão entre as quantidades de partes vermelhas e laranja é igual à razão entre as quantidades de partes laranja e roxas.

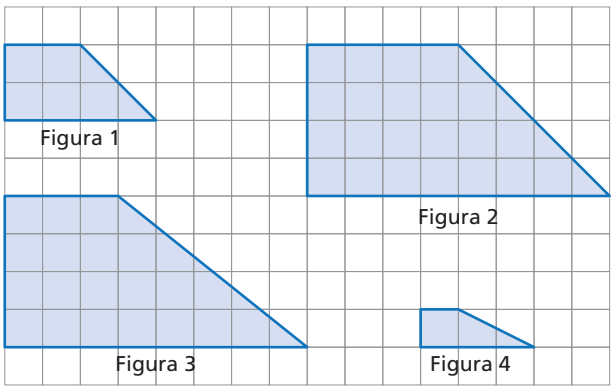
b. A razão entre as quantidades de partes verdes e cinza é igual à razão entre as quantidades de partes laranja e vermelhas.

c. A razão entre as quantidades de partes cinza e verdes é igual à razão entre as quantidades de partes verdes e o total de partes do polígono *ABCD*.

d. A razão entre as quantidades de partes laranja e vermelhas é maior que a razão entre as quantidades de partes cinza e laranja.

e. A razão entre as quantidades de partes vermelhas e laranja é igual à razão entre as quantidades de partes roxas e cinza.

2. Considere as figuras 1, 2, 3 e 4 representadas na malha quadriculada a seguir.



2. Alternativa **c**.

Com relação a essas figuras, pode-se afirmar que:

a. A figura 4 é uma redução da figura 1.

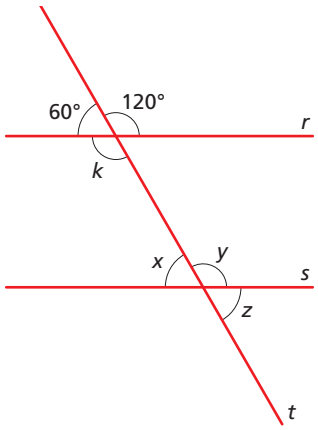
b. A figura 3 é uma ampliação da figura 1.

c. A figura 2 é uma ampliação da figura 1.

d. A figura 4 é uma redução da figura 2.

e. A figura 3 é congruente à figura 2.

3. Na figura a seguir as retas *r* e *s* são paralelas cortadas pela transversal *t*.



3. Alternativa **c**.

Sobre os ângulos indicados na figura, é correto afirmar:

a. Os ângulos de medida de abertura *x* e *k* são ângulos alternos internos e são suplementares.

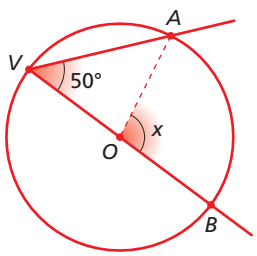
b. Os ângulos de medida de abertura *y* e 120° são ângulos correspondentes e são suplementares.

c. Os ângulos de medida de abertura *z* e 60° são ângulos alternos externos e são congruentes.

d. Os ângulos de medida de abertura *z* e 120° são ângulos colaterais externos e são congruentes.

e. Os ângulos de medida de abertura 60° e *x* são ângulos colaterais internos e são suplementares.

4. Considere a circunferência de centro *O* e que os pontos *A*, *B* e *V* pertencem a essa circunferência.



Sobre essa situação, é correto afirmar: **4.** Alternativa **e**.

a. O ângulo $A\hat{V}B$ é um ângulo central.

b. O ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo inscrito.

c. *x* é igual a 50°.

d. A medida da abertura do ângulo $A\hat{O}V$ é igual a 50°.

e. O comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 100°.

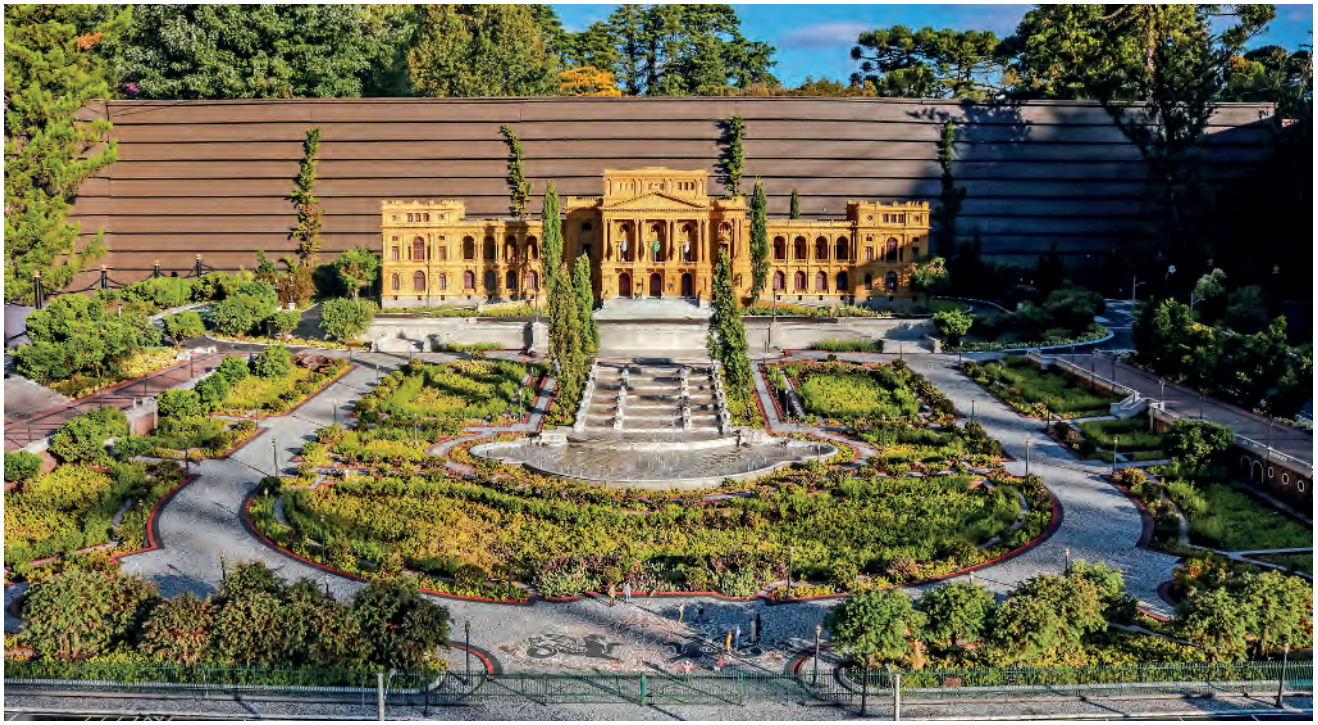
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo 6

A SEMELHANÇA E OS TRIÂNGULOS

CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Museu Paulista da Universidade de São Paulo, conhecido como Museu do Ipiranga, localizado no Parque da Independência em São Paulo (SP). Foto de 2023.



GREGORIO KOJI/SHUTTERSTOCK

Réplica do Museu do Ipiranga, disponível no parque Mini Mundo em Gramado (RS). Observe que na réplica estão representados, em medidas menores, todos os detalhes do museu. Ela é uma representação na escala 1 : 24 do museu real.

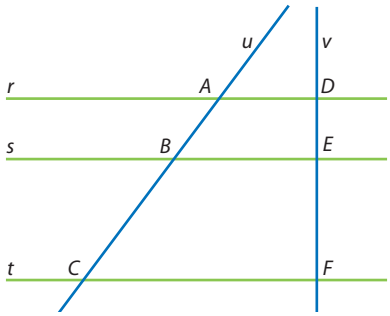
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Proporcionalidade entre segmentos

Vamos iniciar este capítulo com noções de proporcionalidade entre segmentos, pois esta é a base para trabalhar o conceito de semelhança de figuras.

Feixe de retas paralelas e retas transversais

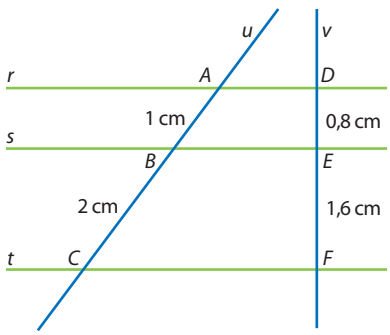
Observe a figura a seguir. As retas *r*, *s* e *t* são coplanares, distintas e paralelas entre si, formando um **feixe de retas paralelas**. As retas *u* e *v* são **retas transversais** ao feixe, pois pertencem ao mesmo plano do feixe e interceptam todas as paralelas.



As retas paralelas determinam sobre as retas transversais pares de **segmentos correspondentes** (segmentos das transversais cujos extremos pertencem às mesmas paralelas). Na figura anterior, temos:

- $\overline{AB}$ é correspondente a $\overline{DE}$;
- $\overline{BC}$ é correspondente a $\overline{EF}$;
- $\overline{AC}$ é correspondente a $\overline{DF}$.

Medindo o comprimento desses segmentos, obtemos:



Note que $\frac{1}{0{,}8} = \frac{2}{1{,}6}$, isto é, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$, ou seja, as razões entre as medidas dos comprimentos dos segmentos correspondentes são iguais. Acompanhe a seguir como usar um *software* de Geometria dinâmica para fazer construções geométricas.

Observação

Na figura anterior, dizemos que *A* e *D* são **pontos correspondentes**, assim como *B* e *E*, *C* e *F*.

Software de Geometria dinâmica

Para realizar construções, podemos baixar da internet *softwares* livres de **Geometria dinâmica**. Com esse tipo de *software*, podemos realizar diversas construções utilizando o mesmo princípio da régua e do compasso, aplicar propriedades, além de facilitar a observação de relações métricas e padrões.

Observação

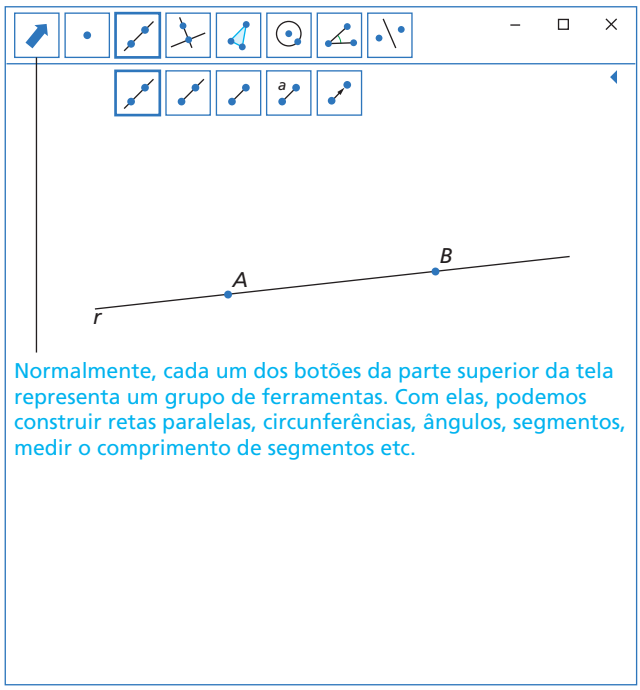
O GeoGebra é um exemplo de *software* de Geometria dinâmica. Por meio dele é possível construir e manipular gráficos e figuras geométricas. Para utilizá-lo em um computador, você pode fazer o *download* no *site* https://www.geogebra.org/download (acesso em: 21 ago. 2024). Também é possível utilizá-lo em um *smartphone*. Para isso, você precisa baixá-lo na loja oficial de aplicativos do sistema operacional do aparelho.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

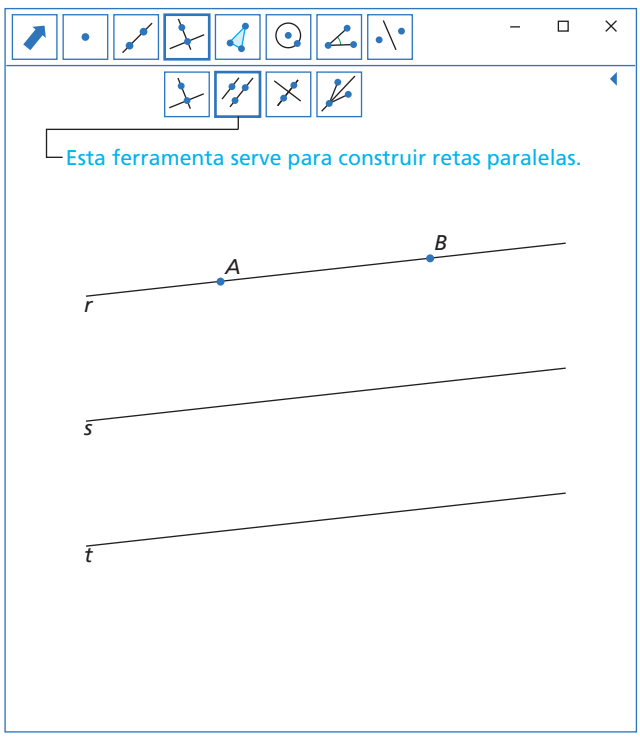
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe, a seguir, a construção de um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais e verifique, realizando medições, as relações obtidas no tópico anterior.

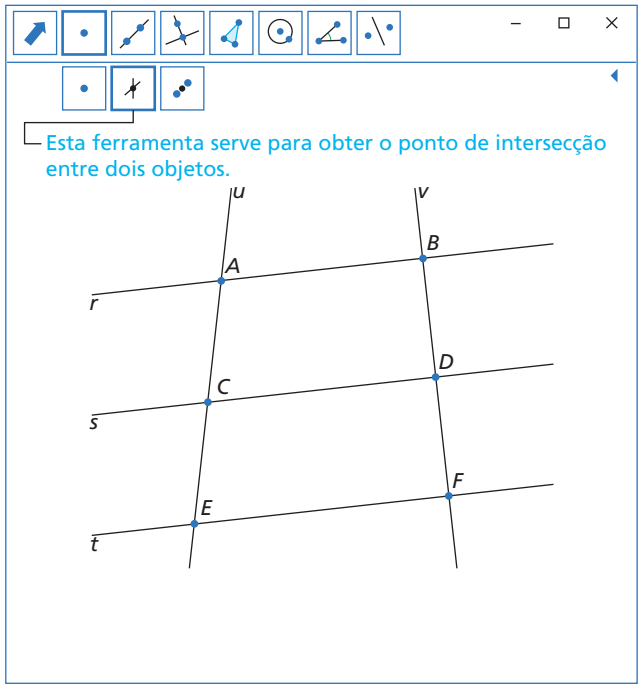
1. Construímos uma reta qualquer no plano clicando na ferramenta "construção de retas". Depois, basta clicar em uma parte da tela para obter um ponto da reta e, com o *mouse*, determinar a direção da reta e o outro ponto.



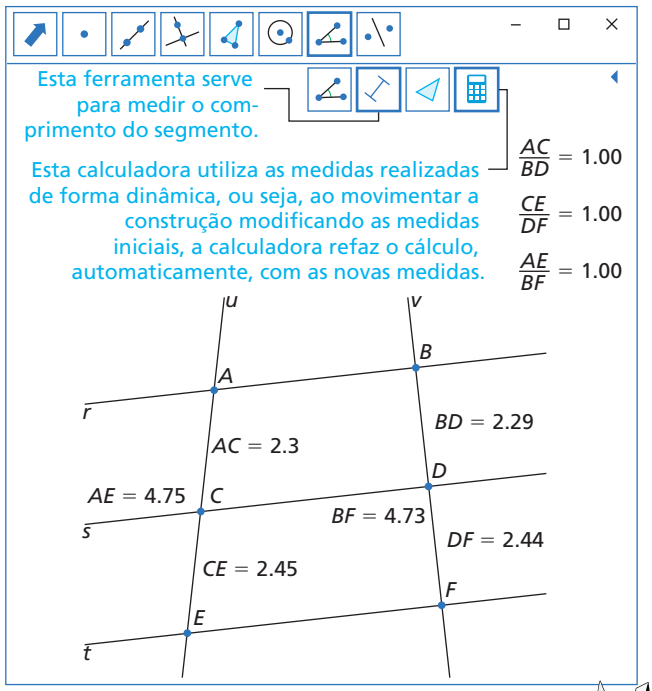
2. Construímos as retas *s* e *t* paralelas à reta *r*. Para isso, clicamos na reta *r* e arrastamos o *mouse* até o local da tela em que queremos a paralela.



3. Com a ferramenta "construção de retas" e a partir dos pontos *A* e *B*, construímos as retas *u* e *v*, transversais às retas paralelas. Depois, com a ferramenta "intersecção entre dois objetos", obtemos os pontos de intersecção entre as retas.



4. Com a ferramenta "medida de comprimento de segmento", obtemos *AC*, *BD*, *CE*, *DF*, *AE* e *BF* e, posteriormente, com a "calculadora dinâmica" do *software*, calculamos as razões $\frac{AC}{BD}$, $\frac{CE}{DF}$ e $\frac{AE}{BF}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Perceba que para essa construção as razões entre as medidas de comprimento dos segmentos correspondentes também são iguais. Por isso, dizemos que esses segmentos são proporcionais.

Será que esse fato ocorre para qualquer feixe de paralelas cortado por retas transversais?

O teorema de Tales afirma que essa proporcionalidade, estudada nos exemplos anteriores, sempre ocorre. Mas, antes de estudá-lo, veremos outro teorema, enunciado a seguir, que poderá auxiliar no entendimento e na demonstração do teorema de Tales.

Teorema fundamental da proporcionalidade

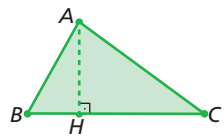
Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados em pontos distintos, então ela determina, sobre esses lados, segmentos proporcionais.

Observação

Considere a superfície limitada pelo triângulo ABC.

A medida da área dessa superfície triangular pode ser dada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

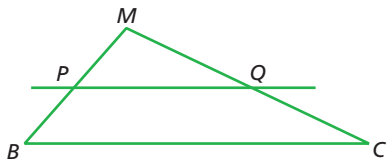


Em contextos que envolvem medidas de área, a superfície poligonal será chamada pelo nome do polígono que a determina. Por exemplo: em vez de dizer "a medida da área da superfície triangular", diremos "a medida da área do triângulo".

Demonstração

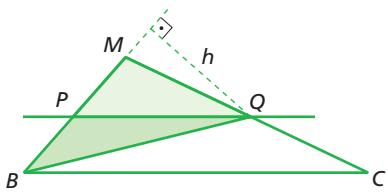
1º. Considere o triângulo BCM e a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, paralela a $\overline{BC}$, tal que $P \in \overline{BM}$ e $Q \in \overline{MC}$.

Vamos mostrar que $\frac{MP}{PB} = \frac{MQ}{QC}$.



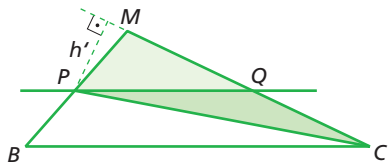
2º. Os triângulos QMP e QPB têm a mesma altura de medida h relativas aos lados $\overline{MP}$ e $\overline{PB}$, respectivamente. Então, a razão entre suas medidas de área é:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (MP) \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot (PB) \cdot h} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{MP}{PB} \quad \text{(I)}$$



3º. Os triângulos QMP e QPC têm a mesma altura de medida h' relativas aos lados $\overline{MQ}$ e $\overline{QC}$, respectivamente. Então, a razão entre suas medidas de área é:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (MQ) \cdot h'}{\frac{1}{2} \cdot (QC) \cdot h'} \Rightarrow \frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{MQ}{QC} \quad \text{(II)}$$



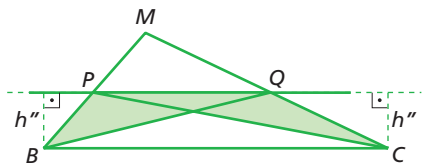
4º. De (I) e (II), vem que:

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPB}} = \frac{MP}{PB} \Rightarrow A_{QMP} = \frac{MP}{PB} \cdot A_{QPB}$$

$$\frac{A_{QMP}}{A_{QPC}} = \frac{MQ}{QC} \Rightarrow A_{QMP} = \frac{MQ}{QC} \cdot A_{QPC}$$

Assim: $\frac{MP}{PB} \cdot A_{QPB} = \frac{MQ}{QC} \cdot A_{QPC}$

5º. Os triângulos QPB e QPC têm base $\overline{PQ}$ e altura de medida h'' em relação ao lado comum $\overline{PQ}$. Logo, têm a mesma medida de área.



Assim, podemos concluir que: $\frac{MP}{PB} = \frac{MQ}{QC}$

Observação

A recíproca desse teorema também é válida, isto é:

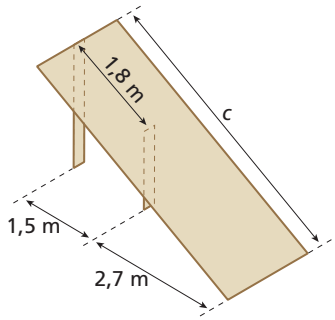
Se uma reta que intercepta dois lados de um triângulo em pontos distintos determina sobre eles segmentos proporcionais, então essa reta é paralela ao terceiro lado do triângulo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

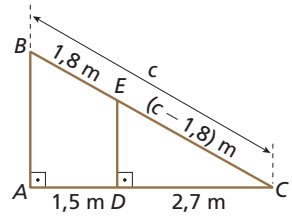
Atividade resolvida

R1. Dois pilares paralelos de sustentação de uma rampa distam 1,5 m entre si. O pilar de menor medida de altura em relação ao chão está a 2,7 m do pé da rampa, e seu topo dista 1,8 m do topo do pilar mais alto, como mostrado na representação. Determinar a medida de comprimento c dessa rampa.



▶ Resolução

Esquematizando a situação, obtemos esta figura.



Como o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC, concluímos que $\overline{DE}$ determina sobre $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ segmentos proporcionais. Assim, temos:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{DA}$$

$$\frac{c - 1{,}8}{1{,}8} = \frac{2{,}7}{1{,}5}$$

$$c - 1{,}8 = 3{,}24$$

$$c = 5{,}04$$

Logo, a rampa tem 5,04 m de medida de comprimento.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Teorema de Tales

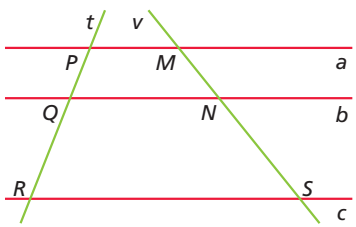
Pouco se sabe sobre Tales de Mileto. Apontado como o primeiro filósofo grego, acredita-se que tenha vivido aproximadamente entre 625 a.C. e 546 a.C. A ele são atribuídas diversas descobertas matemáticas, sendo considerado o criador da Geometria demonstrativa.

Entre outros feitos, Tales teria realizado o estudo da proporcionalidade entre segmentos; por isso, o enunciado a seguir é conhecido como **teorema de Tales**.

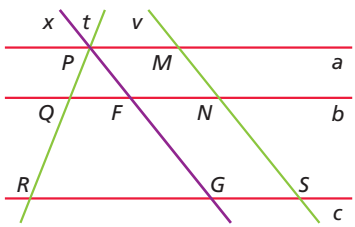
Um feixe de retas paralelas determina, sobre duas retas transversais, segmentos correspondentes proporcionais.

Demonstração

Sejam a, b e c retas paralelas interceptadas pelas retas transversais t e v nos pontos P, Q, R, M, N e S. Vamos mostrar que $\frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$.



Considere uma reta x, paralela à reta v e que passe por P, interceptando as retas b e c nos pontos F e G, respectivamente.



No triângulo PRG, vale o teorema fundamental da proporcionalidade. Assim, concluímos que: $\frac{PQ}{QR} = \frac{PF}{FG}$ (I)

Os quadriláteros $PMNF$ e $FNSG$ são paralelogramos. Então, seus lados opostos têm mesma medida de comprimento:

$$PF = MN \text{ e } FG = NS \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II), concluímos que: $\frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NS}$ (III)

Logo: $\frac{PQ}{MN} = \frac{QR}{NS}$

Observações

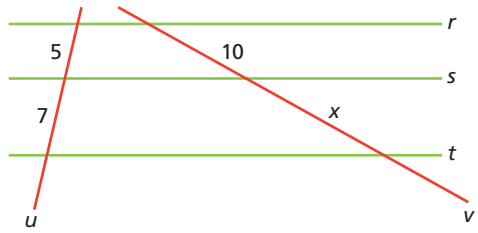
- Da figura, decorrem outras proporções, como: $\frac{PQ}{PR} = \frac{MN}{MS}$ e $\frac{PR}{QR} = \frac{MS}{NS}$
- O teorema de Tales garante que a razão entre dois segmentos quaisquer de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe o exemplo.

Na figura representada, as retas *r*, *s* e *t* são paralelas, interceptadas por duas transversais, *u* e *v*.

Vamos determinar *x*.



Pelo teorema de Tales, temos:

$\frac{5}{10} = \frac{7}{x}$

$5x = 70$

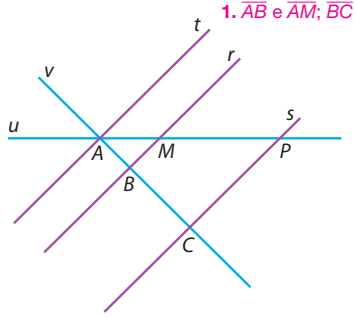
$x = 14$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

1. Na figura a seguir, quais são os pares de segmentos correspondentes, sabendo que *r*, *s* e *t* são retas paralelas?

1. $\overline{AB}$ e $\overline{AM}$; $\overline{BC}$ e $\overline{MP}$; $\overline{AC}$ e $\overline{AP}$.



2. ***SOFTWARE*** Use um *software* de Geometria dinâmica e construa um feixe de retas paralelas cortado por duas transversais. Apresente na construção as medidas dos comprimentos dos segmentos e a razão entre essas medidas. Feito isso, com a ferramenta "mover", movimente um dos pontos de modo a alterar a medida do comprimento dos segmentos. Verifique o que acontece com as razões calculadas e escreva o que foi observado.

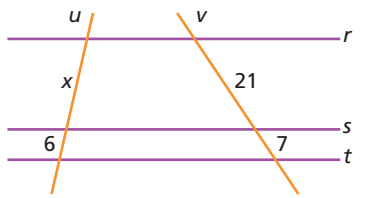
(*Dica*: para construir as retas transversais, utilize os pontos já existentes das retas paralelas, pois esses pontos são móveis. Os pontos construídos com a ferramenta de intersecção, em geral, não podem ser movimentados.)

2. Resposta no *Suplemento para o professor*.

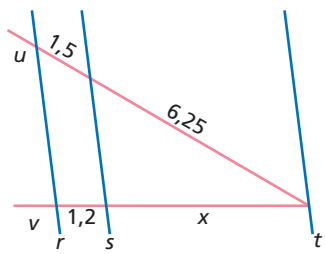
3. Sabendo que as retas *r*, *s* e *t* são paralelas, determine o valor de *x* em cada item.

ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

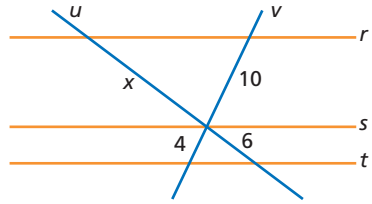
a. **3 a.** 18



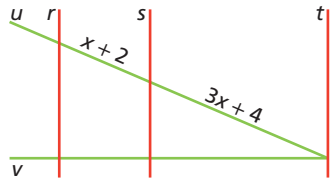
b. **3 b.** 5



c. **3 c.** 15



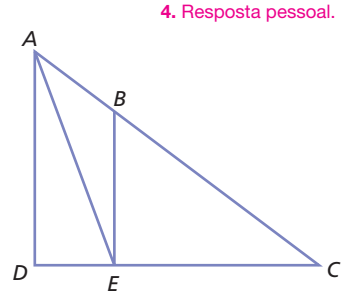
d. **3 d.** Apenas com os dados informados não é possível determinar o valor de *x*.



4. ***ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS*** ***EM DUPLA*** Refaça a figura do item **d** da atividade anterior e indique as medidas de comprimento para os segmentos correspondentes aos segmentos $x + 2$ e $3x + 4$. Peça a um colega de sala que determine o valor de *x* da sua atividade e faça o mesmo com a atividade dele. Antes de entregar a atividade ao colega, verifique se há coerência em sua resposta.

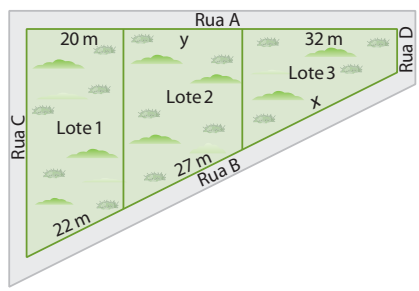
4. Resposta pessoal.

5. Para a cobertura de um galpão, instalou-se uma estrutura metálica na forma de treliça, conforme mostra a figura, na qual as peças representadas pelos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ são paralelas.



Determine *AB* sabendo que $BC = 3{,}6$ m, $DE = 1{,}12$ m e $EC = 2{,}88$ m. **5.** 1,4 m

6. Um terreno foi dividido em três lotes, conforme mostra a figura a seguir.



Sabendo que as divisas entre os lotes são paralelas às ruas C e D, determine as medidas de comprimento *x* e *y*, que fazem frente para as ruas B e A, respectivamente.

6. $x = 35{,}2$ m e $y \simeq 24{,}5$ m.

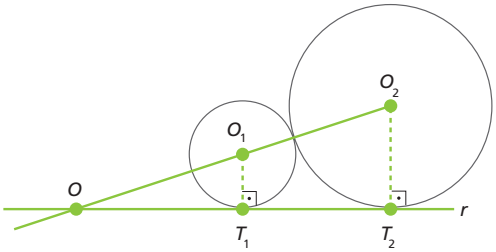
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

7. Considere duas circunferências, de centros O_1 e O_2, tangentes entre si, e a reta r, tangente a essas circunferências nos pontos T_1 e T_2, respectivamente, como mostra a figura.

Sabendo que $OT_1 = 12$ cm, $OT_2 = 27$ cm e $OO_1 = 13$ cm, determine a medida da distância entre os centros O_1 e O_2. **7.** 16,25 cm



Semelhança

Em muitas situações do cotidiano, encontramos figuras e objetos semelhantes: em maquetes, miniaturas, ampliações e reduções de fotografias, entre outras. Nessas situações, as figuras não têm necessariamente as mesmas medidas, mas têm a mesma forma. Por isso, dizemos que essas figuras são **semelhantes**.

As fotografias a seguir mostram uma apresentação do Samba de Coco da Quilombola da Comunidade Mundo Novo. As imagens mostram uma manifestação cultural de um grupo historicamente marginalizado no Brasil: os quilombolas. A valorização dos saberes e das práticas dos quilombolas exemplifica uma abordagem **decolonial** da história brasileira, que vêm dando voz e protagonismo às contribuições dos diversos grupos sociais à história e à cultura do país.

Decolonial: perspectiva que se baseia na produção de uma história centrada na ênfase em grupos historicamente silenciados, como as mulheres, os povos originários e os quilombolas, por exemplo, visando ao resgate do papel desses grupos na história.

Observe que a fotografia II é uma redução da fotografia I, sem deformação da imagem. Assim, elas são semelhantes. O mesmo não ocorre com as fotografias I e III.

FOTOS: ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Fotografia I

Fotografia II

Fotografia III

Apresentação de Samba de Coco da Quilombola da Comunidade Mundo Novo, Buíque (PE). Foto de 2023.

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: Quilombo: uma forma de resistência**

Este *podcast* apresenta aos estudantes que as fugas e a criação de quilombos foram as principais formas de resistência organizada pelos escravizados durante os períodos colonial e imperial e que, atualmente, ainda há territórios remanescentes dos quilombos que mantêm as tradições de antigamente.

Além de estar presente na ampliação ou na redução de fotografias (sem deformação), a ideia de semelhança está presente nas figuras geométricas.

Dois círculos são sempre semelhantes? E dois retângulos?

Questão. Sim, dois círculos são sempre semelhantes, pois a forma é mantida e apenas a medida do comprimento do raio é modificada; apesar de as medidas das aberturas dos ângulos correspondentes serem sempre iguais, dois retângulos nem sempre são semelhantes, pois os lados correspondentes podem não ser proporcionais.

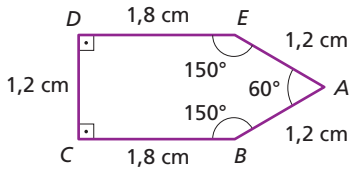
Semelhança de polígonos

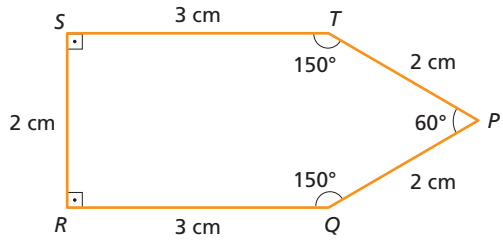
Dois polígonos são **semelhantes** quando têm os ângulos internos correspondentes de mesma medida de abertura e os lados correspondentes proporcionais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Considere os exemplos.

a. Observe os polígonos *ABCDE* e *PQRST*.





Esses polígonos são semelhantes, pois:

I. têm os ângulos internos correspondentes ($\hat{A}$ e $\hat{P}$, $\hat{B}$ e $\hat{Q}$, $\hat{C}$ e $\hat{R}$, $\hat{D}$ e $\hat{S}$, $\hat{E}$ e $\hat{T}$) de mesma medida de abertura;

II. têm os lados correspondentes proporcionais.

Observe:

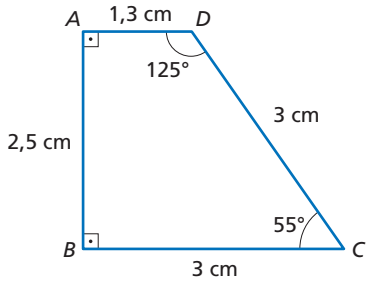
$$\left.\begin{array}{l} \frac{AB}{PQ} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6 \\ \frac{BC}{QR} = \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6 \\ \frac{CD}{RS} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6 \\ \frac{DE}{ST} = \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6 \\ \frac{EA}{TP} = \frac{1{,}2}{2} = 0{,}6 \end{array}\right\} \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DE}{ST} = \frac{EA}{TP} = 0{,}6$$

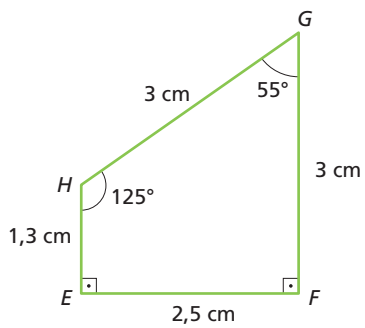
A razão entre as medidas de comprimento dos segmentos correspondentes é chamada de **razão de semelhança**.

b. Os quadriláteros *ABCD* e *EFGH* também são semelhantes, pois têm ângulos internos correspondentes ($\hat{A}$ e $\hat{E}$, $\hat{B}$ e $\hat{F}$, $\hat{C}$ e $\hat{G}$, $\hat{D}$ e $\hat{H}$) de mesma medida de abertura e lados correspondentes proporcionais (nesse caso, a razão de semelhança é 1).

Quando a razão de semelhança entre dois polígonos semelhantes é 1, dizemos que eles são polígonos **congruentes**. Então, nesse exemplo, os polígonos, além de serem semelhantes, são congruentes. Indicamos assim:

ABCD ≅ *EFGH* (lemos: "*ABCD* é congruente a *EFGH*")

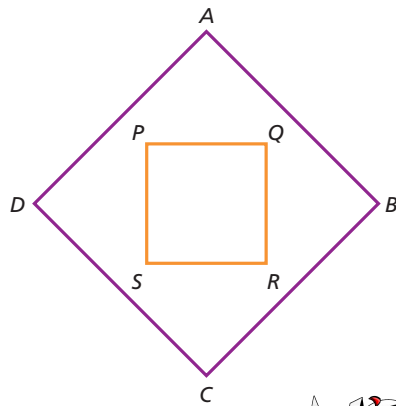




Note que, para dois polígonos serem semelhantes, não é necessário que estejam representados na mesma posição. Porém, ao indicar a semelhança ou a congruência, devemos respeitar a ordem dos vértices correspondentes: ao escrever *ABCD* ≅ *EFGH*, está implícito que *A* é correspondente a *E*, *B* é correspondente a *F* e assim por diante.

Atividades resolvidas

R2. Os quadrados *ABCD* e *PQRS* são semelhantes?



▶ **Resolução**

Os quadrados *ABCD* e *PQRS* são semelhantes, pois:

- têm todos os ângulos internos com abertura medindo 90°;
- os lados de cada quadrado são congruentes entre si; então, os lados correspondentes serão proporcionais:

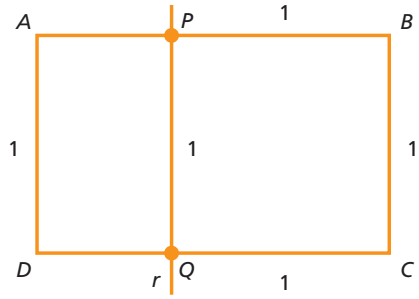
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP}$$

A argumentação anterior é válida para quaisquer dois quadrados. Portanto, podemos concluir que dois quadrados são sempre semelhantes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

R3. Considere o retângulo *ABCD* representado, em que $AD = BC = 1$. Uma reta r intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ desse retângulo determinando o quadrado *PBCQ* de lado 1. Sabendo que os retângulos *ABCD* e *ADQP* são semelhantes, quanto mede o comprimento do lado $\overline{AB}$?



▶ **Resolução**

Vamos representar por x a medida do comprimento do lado $\overline{AB}$. Assim, $\overline{AP}$ mede $x - 1$.

Como os retângulos *ABCD* e *ADQP* são semelhantes, temos:

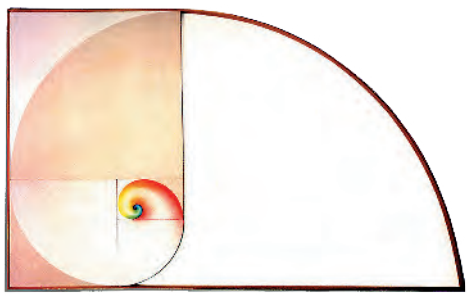
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Como x é a medida do comprimento do lado de um polígono, descartamos o valor negativo.

Logo, o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Observações

- O número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é conhecido como **número de ouro**, razão áurea ou divina proporção, usualmente representado pela letra grega φ (lemos: "fi"). Esse número tem diversas aplicações na Matemática.
- **Retângulo áureo** é aquele no qual a razão entre a medida de seu comprimento e a medida de sua largura é $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. O retângulo *ABCD* da **atividade resolvida R3** é um retângulo áureo.



PETICOV, Antonio. **Obra 1.618**. 1983. Madeira e tinta sobre tela, 220 cm × 350 cm. Espiral construída tendo como base retângulos áureos.

©1983 ANTONIO PETICOV

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11 b. A razão entre as medidas de seus perímetros é igual à razão de semelhança r.

11 c. A razão entre suas medidas de área é igual à razão de semelhança elevada ao quadrado.

Atividades propostas

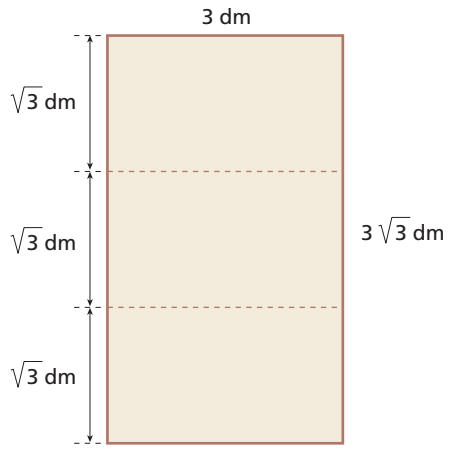
Registre em seu caderno

8. ARGUMENTAÇÃO Responda às questões e justifique sua resposta. **8.** Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. Todos os triângulos retângulos são polígonos semelhantes?

b. Dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes?

9. Um guardanapo retangular de medidas de comprimento 3 dm por $3\sqrt{3}$ dm é dobrado em três partes iguais, conforme mostra a figura.



Os retângulos correspondentes ao guardanapo aberto e a ele dobrado são semelhantes? Se forem, qual é a razão de semelhança? **9.** São semelhantes; a razão de semelhança é $\sqrt{3}$.

10. Quais elementos devemos observar para determinar se dois polígonos com o mesmo número de lados são congruentes?

11. Sendo r a razão de semelhança entre os quadrados da **atividade resolvida R2**:

a. qual é a razão entre a medida de comprimento de suas diagonais? **11 a.** A razão entre as medidas de comprimento de suas diagonais é igual à razão de semelhança r.

b. qual é a razão entre as medidas de seus perímetros?

c. qual é a razão entre suas medidas de área?

12. A maquete de uma casa foi construída na escala 1 : 100 $\left(\text{razão de semelhança } \frac{1}{100}\right)$. Um quarto de piso retangular dessa maquete tem 3 cm e 4 cm de medidas de comprimento de lados. Com base nessas informações, responda às questões.

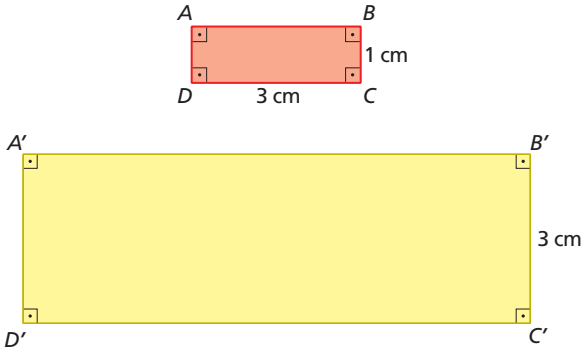
a. Quais são as medidas de comprimento reais do piso desse quarto? **12 a.** 3 m e 4 m.

b. Qual é a razão de semelhança entre as medidas das áreas do piso do quarto da maquete e da casa real? **12 b.** $\frac{1}{10\,000}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

10. Espera-se que os estudantes respondam que os lados correspondentes devem ter mesma medida de comprimento, assim como a medida das aberturas dos ângulos internos correspondentes deve ser igual.

13. Considere os retângulos semelhantes a seguir.



13 a. 9 cm

a. Qual é a medida do comprimento do retângulo maior?

b. Qual é a razão de semelhança entre o primeiro e o segundo retângulo? **13 b.** $\frac{1}{3}$

c. Qual é a razão entre a medida do perímetro do primeiro retângulo e a do segundo? **13 c.** $\frac{1}{3}$

d. Qual é a razão entre a medida da área do primeiro retângulo e a do segundo? **13 d.** $\frac{1}{9}$

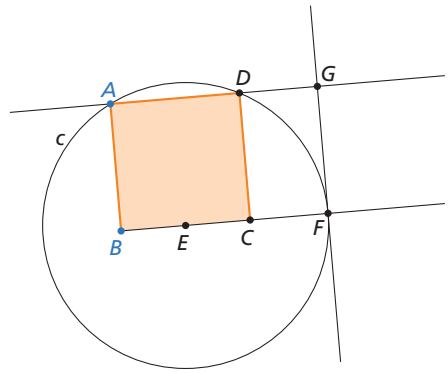
14. Em um terreno retangular de 1.440 m^2 de medida de área, foi construída uma oficina com planta retangular, semelhante à do terreno.

Sabendo que a razão entre as medidas de comprimento das larguras da oficina e do terreno é $\frac{2}{5}$, responda às questões.

a. Qual é a razão entre a medida da área da oficina e a medida da área total do terreno? Escreva essa razão na forma de porcentagem. **14 a.** $\frac{4}{25}$; 16%.

b. Qual é a medida da área da oficina? **14 b.** 230,4 m^2

15. **SOFTWARE** Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, reproduza os passos a seguir. (*Dica*: utilizar a figura a seguir como referência.)



1. Construir um quadrado *ABCD*.
2. Construir a semirreta $\overrightarrow{BC}$.
3. Marcar o ponto *E*, ponto médio de $\overline{BC}$.
4. Traçar uma circunferência *c* de centro *E* e raio $\overline{ED}$.
5. Marcar o ponto *F*, intersecção de $\overrightarrow{BC}$ com a circunferência *c*.
6. Construir uma reta perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, passando por *F*.
7. Construir a reta $\overleftrightarrow{AD}$.
8. Marcar o ponto *G*, intersecção de $\overleftrightarrow{AD}$ com a perpendicular construída no passo 6.
9. Com as ferramentas do *software*, medir $\overline{BF}$ e $\overline{FG}$ e encontrar a razão entre essas medidas de comprimento.

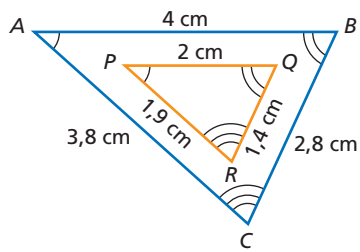
Observe a razão obtida. O que podemos concluir sobre a construção realizada?

15. Espera-se que os estudantes percebam que o retângulo *ABFG* construído é áureo, pois a razão obtida é uma aproximação do número de ouro: 1,61...

Semelhança de triângulos

Para determinar se dois triângulos são semelhantes, precisamos verificar se satisfazem as condições de semelhança de polígonos, isto é, se os lados correspondentes são proporcionais e se os ângulos internos correspondentes são congruentes.

Observe o exemplo.



Comparando as indicações das medidas dos ângulos internos e dos comprimentos dos lados dos triângulos *ABC* e *PQR*, podemos perceber que:

- $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{Q}$, $\hat{C} \cong \hat{R}$
- $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} = 2$

Assim, podemos concluir que: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ (lemos: "o triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *PQR*")

Entretanto, para verificar se dois triângulos são semelhantes, não é necessário analisar as medidas de abertura de todos os ângulos e as medidas de comprimento de todos os lados. Há critérios mínimos que garantem a semelhança entre dois triângulos. Esses critérios podem ser demonstrados e são conhecidos como **casos de semelhança**, mas isso não será feito nesta coleção. A seguir, vamos apresentar três deles.

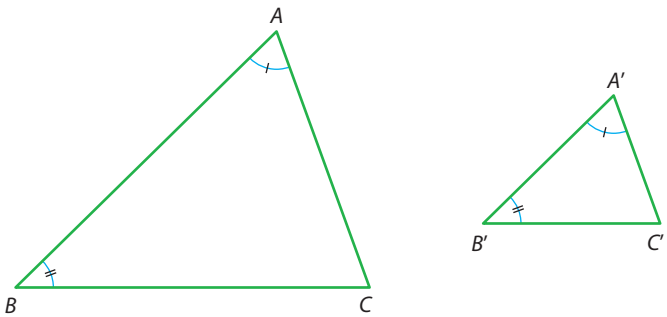
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Casos de semelhança de triângulos

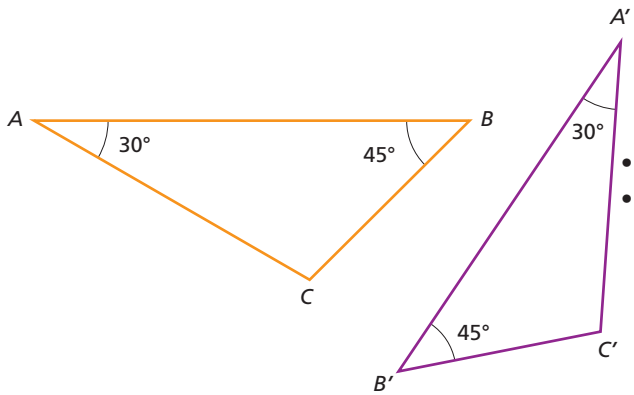
Caso ângulo-ângulo (AA)

Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes respectivamente congruentes, esses triângulos são semelhantes.



Se $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ e $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Os triângulos a seguir são semelhantes, pois têm dois ângulos correspondentes congruentes.



Note que:

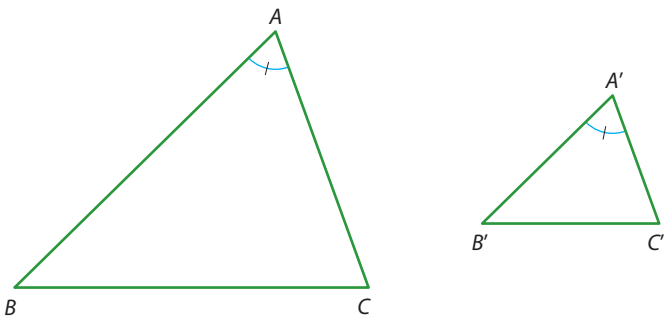
- $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, pois $m(\widehat{A}) = m(\widehat{A'}) = 30°$;
- $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$, pois $m(\widehat{B}) = m(\widehat{B'}) = 45°$.

Observações

- Quando dois ângulos têm a mesma medida de abertura, dizemos que eles são **congruentes**.
- Lembre-se de que o símbolo $\cong$ é usado para indicar uma congruência. $\widehat{A} \cong \widehat{P}$ significa que o ângulo $\widehat{A}$ é congruente ao ângulo $\widehat{P}$, ou seja, eles têm a mesma medida de abertura.
- O símbolo $\sim$ é usado para indicar a semelhança.

Caso lado-ângulo-lado (LAL)

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais, e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

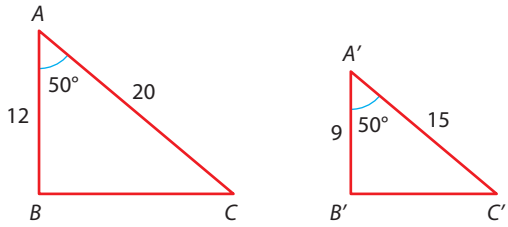


Se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ e $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Os triângulos a seguir são semelhantes, pois têm dois lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais, e os ângulos compreendidos por esses lados são congruentes.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

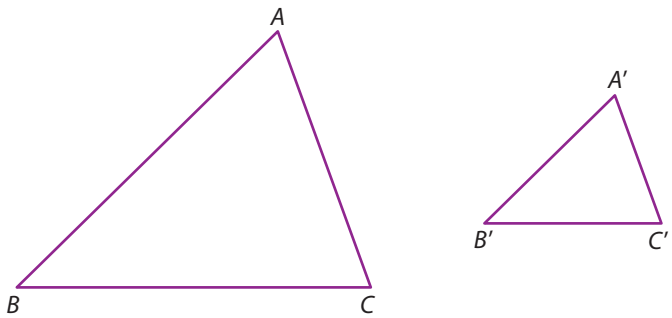


Note que:

- $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, pois $\frac{12}{9} = \frac{20}{15}$.
- $\hat{A} \cong \hat{A'}$, pois $m(\hat{A}) = m(\hat{A'}) = 50°$.

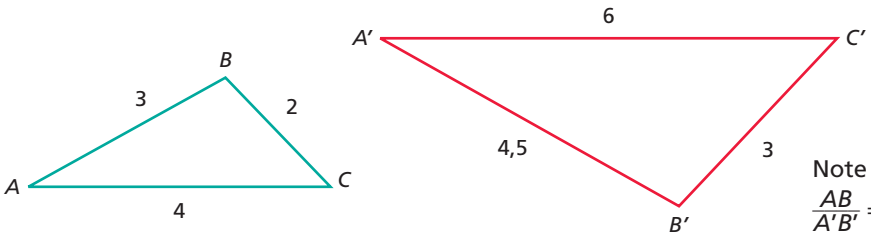
Caso lado-lado-lado (LLL)

Se dois triângulos têm os três lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.



Se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Os triângulos a seguir são semelhantes, pois têm os três lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais.



Note que:

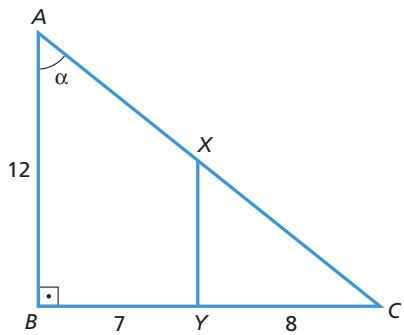
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, pois $\frac{3}{4,5} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,666...$

Observação

Os lados correspondentes podem ser identificados de acordo com suas medidas de comprimento. Por exemplo, o maior lado de um triângulo é correspondente ao maior lado do outro.

Atividades resolvidas

R4. No triângulo ABC representado a seguir, os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{XY}$ são paralelos. O ângulo $\hat{A}$ mede α, e o ângulo $\hat{B}$ é reto. As medidas de comprimento estão expressas em centímetro. Calcular a medida $\overline{XY}$.



▶ Resolução

Como $\overline{AB}$ e $\overline{XY}$ são paralelos e interceptados pelos segmentos transversais $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, temos $B\hat{A}C \cong Y\hat{X}C$ e $A\hat{B}C \cong X\hat{Y}C$. Assim, os triângulos ABC e XYC são semelhantes pelo caso AA.

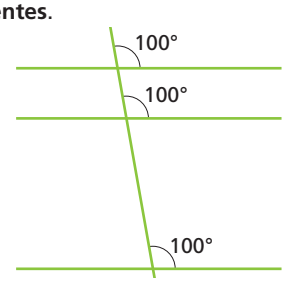
Logo, os lados correspondentes desses triângulos são proporcionais, isto é:

$$\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YC} \Rightarrow \frac{12}{XY} = \frac{7+8}{8} \Rightarrow XY = \frac{8 \cdot 12}{15} \Rightarrow XY = 6,4$$

Portanto, $\overline{XY}$ mede 6,4 cm.

Observação

Os ângulos indicados na figura a seguir são **ângulos correspondentes**.

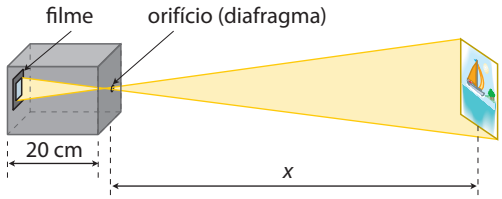


Uma reta transversal a um feixe de paralelas determina sobre elas ângulos correspondentes congruentes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

R5. Podemos construir uma câmera fotográfica rudimentar inserindo um filme fotográfico em uma caixa de sapatos com um pequeno orifício, chamado diafragma, em uma de suas faces. Quando a luz entra pelo orifício, uma imagem invertida é produzida sobre o filme.

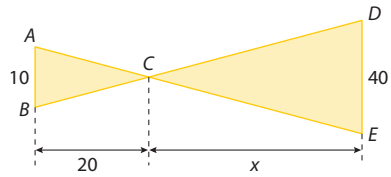


a. Suponha que você queira fotografar um quadro cujas medidas são 32 cm de largura por 40 cm de altura usando essa câmera improvisada, com medida de profundidade de 20 cm. Qual deve ser a medida da distância x entre a câmera e o quadro para que seja produzida uma imagem que mede 8 cm de largura por 10 cm de altura?

b. Se a imagem produzida medisse 5 cm de altura por 4 cm de largura, a que medida de distância do quadro a câmera deveria ficar?

▶ **Resolução**

a. Fazendo um esquema da visão lateral, temos:



Sendo as alturas $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ paralelas entre si, temos:

- $B\hat{A}C \cong D\hat{E}C$ (ângulos alternos internos)
- $A\hat{C}B \cong D\hat{C}E$ (ângulos opostos pelo vértice)

Por isso, $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ pelo caso AA. Assim:

$$\frac{10}{40} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 20}{10} = \frac{800}{10} = 80$$

Logo, a medida da distância deve ser 80 cm.

b. Nesse caso, teríamos:

$$\frac{5}{40} = \frac{20}{x} \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 20}{5} = \frac{800}{5} = 160$$

Logo, a medida da distância deveria ser de 160 cm ou 1,6 m.

OBJETO DIGITAL

Carrossel de imagens: Câmara escura

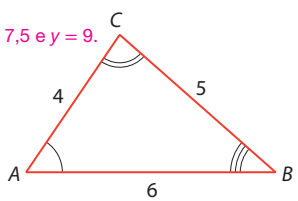
Este carrossel de imagens enriquece a **atividade resolvida R5**, uma vez que apresenta aos estudantes outras informações sobre as câmaras escuras.

Atividades propostas

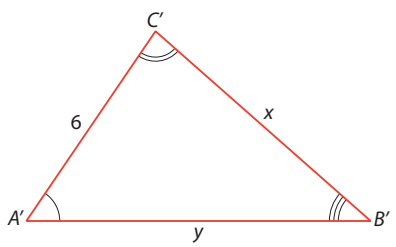
Registre em seu caderno

16. Determine, em cada item, o valor das incógnitas.

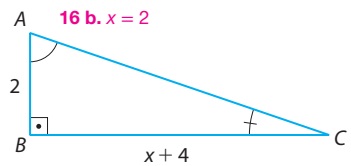
a.



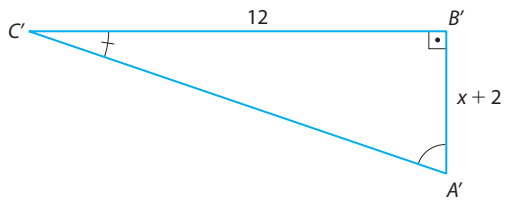
16 a. $x = 7{,}5$ e $y = 9$.



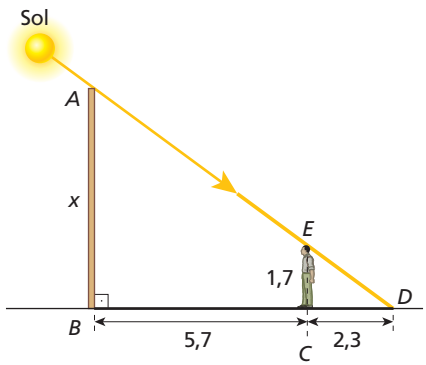
b.



16 b. $x = 2$



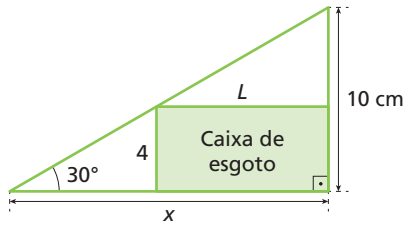
17. Uma pessoa de 1,7 m de medida de altura está a 5,7 m da base de um poste e projeta uma sombra de 2,3 m, como mostra o esquema. Qual é a medida de altura aproximada do poste? **17.** 5,9 m



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

18. (UFVJM-2023) Para finalizar o acabamento de um piso em um canto de parede que possui uma caixa de esgoto retangular de lado maior L e lado menor 4 cm, um pedreiro necessita saber o comprimento x em função de L. **18.** Alternativa **d**.

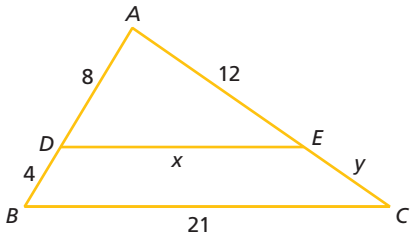


Nessas condições, o valor de x em função de L é:

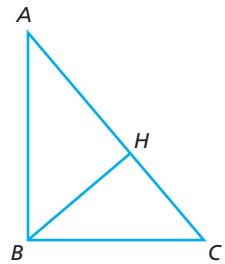
a. $x = \frac{5L}{2}$ **c.** $x = \frac{3L}{5}$

b. $x = \frac{2L}{5}$ **d.** $x = \frac{5L}{3}$

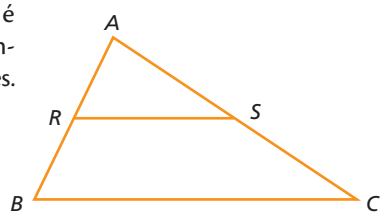
19. Determine x e y sabendo que $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$. **19.** $x = 14$ e $y = 6$.



20. O ângulo B de um triângulo ABC é reto. A altura relativa à hipotenusa desse triângulo divide-o em dois triângulos: ABH e CBH. Mostre que esses três triângulos são semelhantes.
20. Resposta no *Suplemento para o professor*.



21. Com esta figura, é possível obter conclusões importantes.
21. Respostas no *Suplemento para o professor*.



Sabendo que $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e que R é ponto médio de $\overline{AB}$, faça o que se pede.

a. Mostre que S é ponto médio de $\overline{AC}$.

b. Pela conclusão do item **a**, mostre que $\overline{RS}$ é metade de $\overline{BC}$.

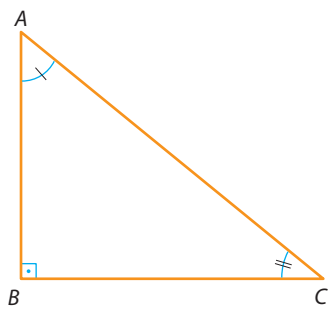
c. Agora, verifique que a medida da altura do triângulo ARS relativa ao lado $\overline{RS}$ é metade da medida da altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.

d. **EM DUPLA** **ARGUMENTAÇÃO** Converse com um colega e, em seguida, elaborem um pequeno texto com as conclusões a que vocês chegaram.

Relações métricas no triângulo retângulo

Triângulos retângulos são triângulos que têm um ângulo interno reto.

No triângulo retângulo a seguir, $\overline{AC}$ é a hipotenusa, e $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são os catetos.

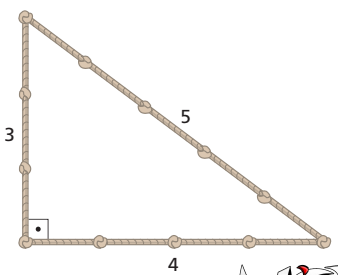


Em qualquer triângulo retângulo, o maior lado chama-se **hipotenusa**, e os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos**.

Há registros de que os egípcios utilizavam como um esquadro o triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5.

Esse esquadro consistia em uma corda com 12 nós igualmente espaçados. A medida da distância entre os nós correspondia a uma unidade de medida de comprimento. Esse instrumento era usado por agrimensores na demarcação de ângulos retos.

É possível inserir as medidas de comprimento 3, 4 e 5 desse triângulo em uma importante relação: $a^2 + b^2 = c^2$, que ficou conhecida como **relação pitagórica**, pois acredita-se que tenha sido estudada pelos pensadores gregos da escola de Pitágoras. Com a soma dos quadrados $3^2 + 4^2$, obtemos 25, que é o quadrado de 5; assim: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Outros números naturais servem a essa relação, como 5, 12 e 13.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

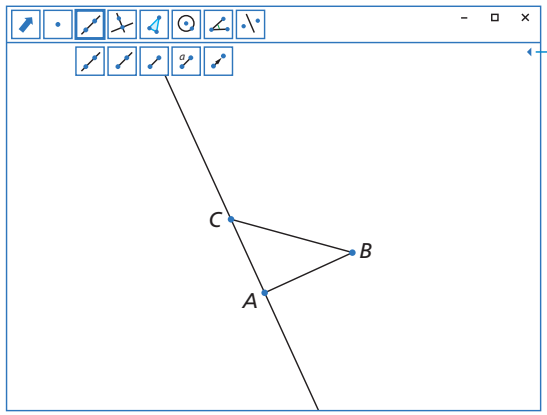
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explorando o teorema de Pitágoras

Vamos explorar uma relação demonstrada pelos gregos há cerca de 2.500 anos.

Em um *software* de Geometria dinâmica, podem ser realizados os seguintes passos:

1. Construímos um triângulo retângulo qualquer.

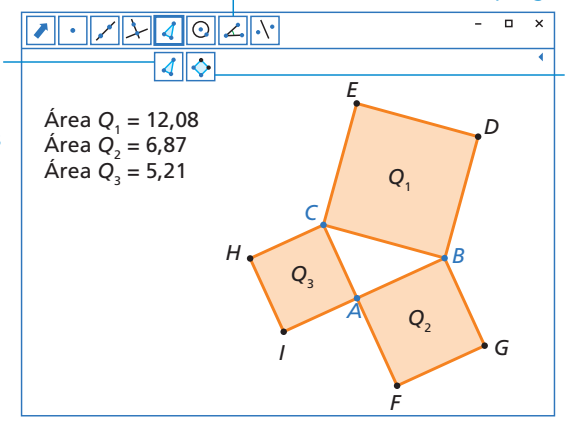


Ícone para exibir os botões de eixos cartesianos e a malha quadriculada.

Observação

Ao medir áreas, em um *software* de Geometria dinâmica, pode ocorrer erro de aproximação na última casa decimal, o que pode acarretar uma pequena diferença na soma das medidas das áreas. Desconsidere essas eventuais diferenças.

2. Construímos um quadrado sobre cada um dos lados, chamados de Q_1, Q_2 e Q_3. Depois, com a ferramenta do *software*, medimos a área desses quadrados.

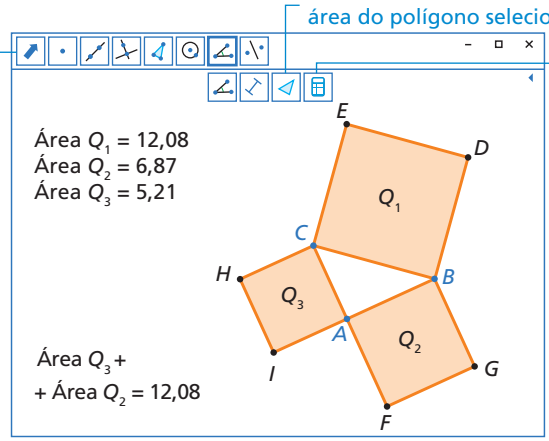


Este botão disponibiliza ferramentas de medidas, entre elas a que fornece a medida da área de um polígono.

Esta ferramenta constrói polígonos quaisquer (irregulares).

Esta ferramenta constrói polígonos regulares.

3. Com a "calculadora dinâmica" do *software*, adicionamos as medidas das áreas dos dois quadrados menores.



Esta ferramenta fornece a medida da área do polígono selecionado.

Esta ferramenta pode ser usada para selecionar um objeto ou mover uma construção através de seus pontos.

A ferramenta "calculadora dinâmica" atualiza os resultados dos cálculos simultaneamente à movimentação das construções geométricas.

Observe que essa soma é igual à medida da área do quadrado maior (construído sobre a hipotenusa).

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Agora, movimente um dos vértices do triângulo *ABC*. Observando a soma das medidas das áreas dos quadrados menores, verificamos que a relação anterior continua válida.

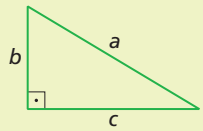
Portanto, a soma das medidas das áreas dos quadrados sobre os catetos é igual à medida da área do quadrado sobre a hipotenusa. Esse é o princípio do **teorema de Pitágoras**.

Demonstrando o teorema de Pitágoras

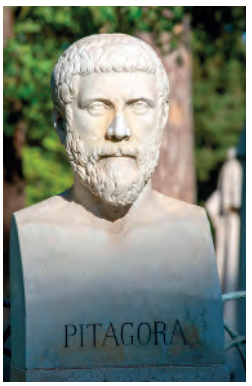
O teorema de Pitágoras pode ser enunciado da seguinte forma:

Em um triângulo retângulo com os catetos de medidas de comprimento b e c e a hipotenusa de medida de comprimento a, o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos, ou seja:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



PANTHER MEDIA GMBH/ALAMY/FOTOARENA

Busto de Pitágoras nos jardins da Villa Borghese, em Roma, Itália. Foto de 2020.

Existem diversas demonstrações para esse teorema. Acompanhe a seguir uma delas com base na medida de área de figuras planas.

Demonstração

Vamos considerar um quadrado cujo comprimento do lado mede $b + c$. Se retirarmos quatro triângulos retângulos com catetos de medidas de comprimento b e c e hipotenusa de medida de comprimento a, restará um quadrado cujo comprimento do lado mede a, como mostra a figura 1. Note que os triângulos retângulos são congruentes.

Na figura 2, também temos um quadrado cujo comprimento do lado mede $b + c$. Retiramos quatro triângulos retângulos com catetos de medidas de comprimento b e c e hipotenusa de medida de comprimento a, porém os triângulos estão em posições diferentes da mostrada na figura 1.

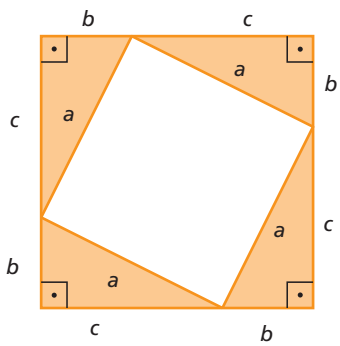


figura 1

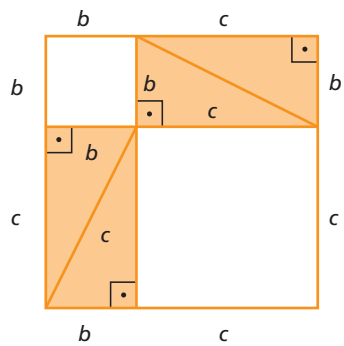


figura 2

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Comparando as duas figuras, podemos verificar que a medida da área do quadrado cujo comprimento do lado mede a é igual à soma da medida da área do quadrado cujo comprimento do lado mede b com a medida da área do quadrado cujo comprimento do lado mede c.

Observando a figura 1, a medida da área do quadrado cujo comprimento do lado mede $b + c$ pode ser dada por $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2$ e, observando a figura 2, a medida da área do quadrado cujo comprimento do lado mede $b + c$ pode ser dada por $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + b^2 + c^2$.

Como essas medidas de áreas são iguais, temos:

$$4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + a^2 = 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

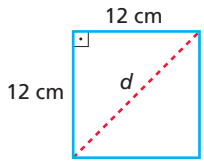
Observação

A recíproca do teorema de Pitágoras também é válida. Ou seja, um triângulo com lados de medidas de comprimento a, b e c tal que $a^2 = b^2 + c^2$ é um triângulo retângulo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Considere os exemplos.

a. O comprimento do lado de um quadrado mede 12 cm. Quanto mede o comprimento de cada uma de suas diagonais?

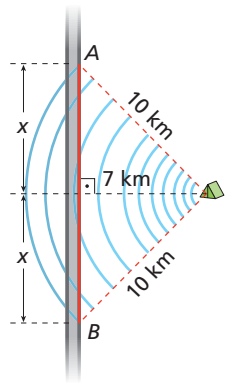


A diagonal d desse quadrado forma com dois de seus lados consecutivos um triângulo retângulo cujos comprimentos dos lados medem 12 cm, 12 cm e d (em cm).
Assim, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$d^2 = 12^2 + 12^2 \Rightarrow d^2 = 144 + 144 \Rightarrow d = \sqrt{288} \Rightarrow d = 12\sqrt{2}$

Como as diagonais de um quadrado são congruentes, o comprimento de cada uma delas mede $12\sqrt{2}$ cm.

b. Um grupo de amigos acampou a 7 km de uma estrada. Com um equipamento de rádio cujo alcance é de 10 km, eles pretendem se comunicar com os caminhoneiros que circulam nessa estrada. Quantos quilômetros da estrada podem ser alcançados pela onda sonora do rádio?



Vamos indicar por $2x$ a medida do comprimento da parte da estrada ($\overline{AB}$) atingida pelas ondas desse rádio.
Observando o triângulo isósceles representado na figura, notamos que ele pode ser decomposto em dois triângulos retângulos congruentes. Aplicando o teorema de Pitágoras em um desses triângulos retângulos, temos:

$$x^2 + 7^2 = 10^2 \Rightarrow x = \sqrt{51} \Rightarrow x \simeq 7{,}14$$

De A até B, temos: $2x \simeq 2 \cdot 7{,}14 = 14{,}28$
Portanto, a onda de rádio alcança aproximadamente 14,28 km da estrada.

Observação

No exemplo **b**, foi usada a propriedade de que, em um triângulo isósceles, a altura relativa à base coincide com a mediana relativa a essa mesma base.

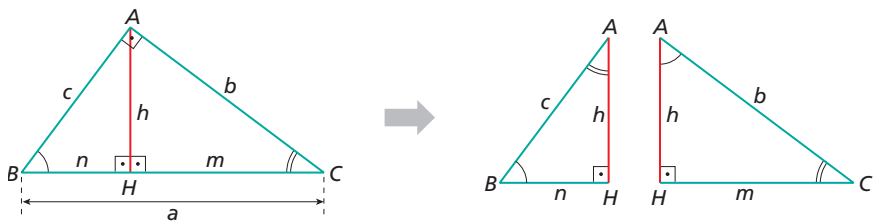
A semelhança e o teorema de Pitágoras: outras relações métricas no triângulo retângulo

É possível demonstrar o teorema de Pitágoras por meio da semelhança de triângulos. Nessa demonstração, encontramos outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo. Acompanhe a seguir.

Demonstração

Considere:
- um triângulo retângulo com catetos de medidas de comprimento b e c e hipotenusa de medida de comprimento a;
- a altura relativa à hipotenusa desse triângulo, de medida h;
- os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{BH}$ de medidas de comprimento m e n, respectivamente.

A altura $\overline{AH}$ do triângulo ABC determina dois triângulos retângulos: HAC e HBA. Esses três triângulos são semelhantes, pois possuem três ângulos internos respectivamente congruentes.



Pela semelhança entre os triângulos, obtemos:
- $\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow \mathbf{bc = ah}$ (I) e $\mathbf{b^2 = am}$ (II)
- $\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow \mathbf{c^2 = an}$ (III)
- $\triangle AHC \sim \triangle BHA \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HC}{HA} \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \mathbf{h^2 = mn}$ (IV)

Adicionando as relações II e III, membro a membro, obtemos:

$$b^2 + c^2 = a(m + n) \Rightarrow \mathbf{b^2 + c^2 = a^2}$$

Assim, demonstramos o teorema de Pitágoras e obtemos outras relações no triângulo retângulo.

Observação

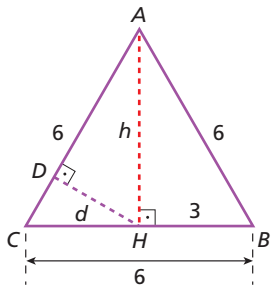
Os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{BH}$, de medidas de comprimento m e n, respectivamente, são conhecidos por **projeções ortogonais dos catetos** sobre a hipotenusa.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividade resolvida

R6. Na figura, o triângulo *ABC* é equilátero. Determinar:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a. a medida *h* da altura desse triângulo;

b. a medida *d* da altura relativa ao lado $\overline{AC}$ no triângulo *HCA*.

▶ **Resolução**

a. No triângulo *ABC*, a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ determina dois triângulos retângulos congruentes (*AHC* e *AHB*). O comprimento da hipotenusa desses triângulos mede 6, e os comprimentos dos catetos medem *h* e 3. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AHB*, obtemos:

$$h^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow h = \sqrt{36 - 9} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$$

b. No triângulo *HCA*, a altura relativa ao lado $\overline{AC}$ determina o triângulo retângulo *DHA*, semelhante ao triângulo *HCA*. Da proporcionalidade entre os lados correspondentes, temos: $\frac{AH}{AC} = \frac{DH}{HC}$

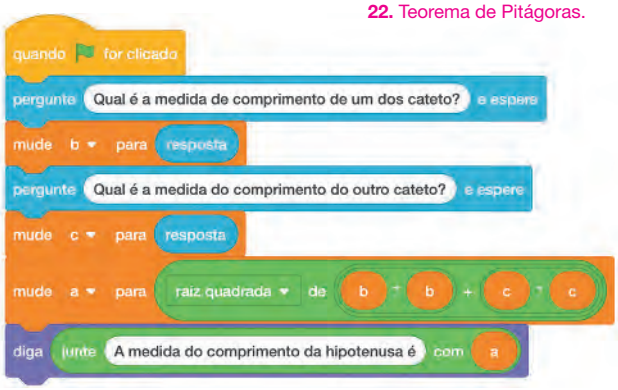
Assim: $\frac{h}{6} = \frac{d}{3} \Rightarrow 3\sqrt{3} \cdot 3 = 6 \cdot d \Rightarrow d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

22. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Qual relação métrica no triângulo retângulo é utilizada no algoritmo a seguir?

22. Teorema de Pitágoras.



23. **HISTÓRIA DA MATEMÁTICA** Leia o texto a seguir.

O chamado papiro matemático Cairo foi desenterrado em 1938 e investigado em 1962. O papiro, que data de 300 a.C. aproximadamente, contém 40 problemas de matemática, 9 dos quais lidam exclusivamente com o teorema de Pitágoras e mostram que os egípcios dessa época não só sabiam que o triângulo 3, 4, 5 era retângulo, mas que também acontecia o mesmo para os triângulos 5, 12, 13 e 20, 21, 29.

Fonte: EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011. p. 87.

Agora, resolva o seguinte problema encontrado no papiro matemático Cairo:

Uma escada que mede 10 **cúbitos** de comprimento está encostada em uma parede com seus pés afastados 6 cúbitos da parede. Quanto mede a altura que a escada atinge?

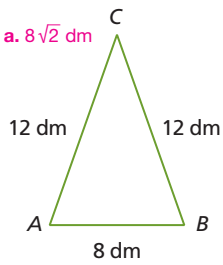
23. 8 cúbitos.

cúbito: medida do comprimento do antebraço.

24. Calcule as medidas das alturas das figuras em relação ao lado $\overline{AB}$.

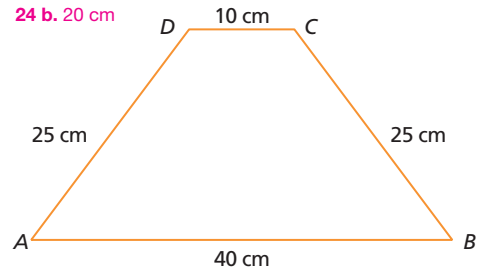
a.

24 a. $8\sqrt{2}$ dm



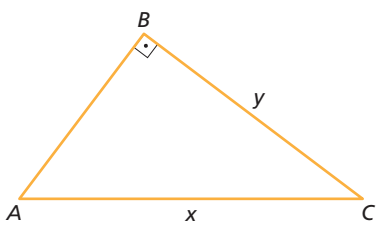
ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

b. 24 b. 20 cm



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

25. **(EPCAr-2023)** Considere o triângulo *ABC*, mostrado na figura abaixo, em que o lado $\overline{AC}$ mede *x* cm e $\overline{BC}$ mede *y* cm.



As medidas dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ satisfazem o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x = 4\sqrt{3} + 2y \\ 2x - \sqrt{3} = 3y \end{cases}$$

A área do triângulo *ABC*, em cm^2, é igual a

25. Alternativa d.

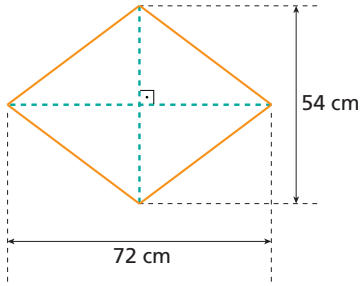
a. 6 **b.** 3 **c.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **d.** $\frac{(3\sqrt{3})}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY, CAMBRIDGE, EUA

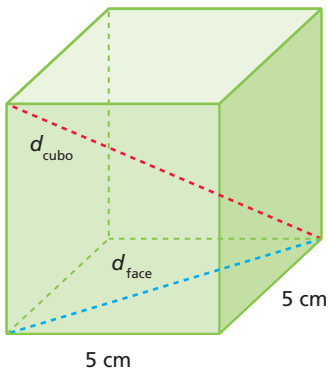
29. Espera-se que os estudantes percebam que as relações são válidas nas diferentes configurações do triângulo retângulo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

26. Determine a medida do perímetro do losango. **26.** 180 cm



27. Considere um cubo cujo comprimento da aresta mede 5 cm.

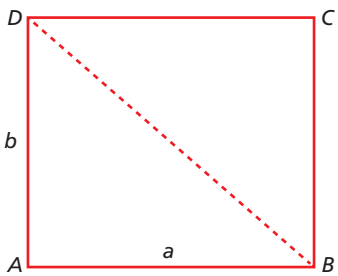


a. Determine a medida do comprimento da diagonal de uma face e a medida do comprimento da diagonal do cubo. **27 a.** $5\sqrt{2}$ cm e $5\sqrt{3}$ cm.

b. **EM DUPLA** Com um colega, analisem o item anterior e respondam: Dado um cubo cujo comprimento da aresta mede a, qual é a relação entre as medidas de comprimento de sua aresta e de sua diagonal? **27 b.** $d_{cubo} = a\sqrt{3}$

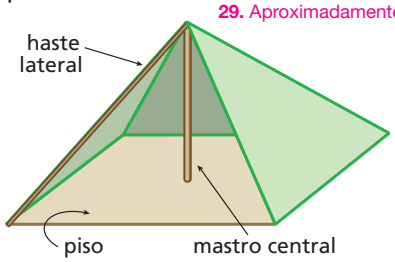
28. No retângulo a seguir, temos $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ e $BD = 10$ cm. Quanto mede o comprimento de cada lado do retângulo?

28. $a = 8$ cm e $b = 6$ cm.

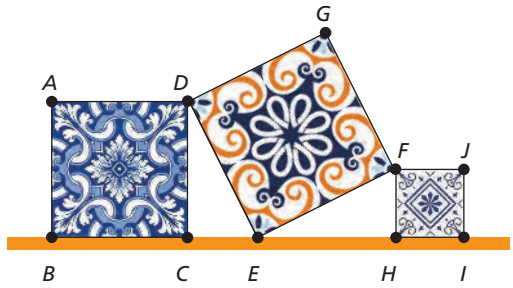


29. Uma barraca tem o mastro central de sustentação perpendicular ao centro do piso quadrado. Sabendo que o mastro tem 1,60 m de altura e o piso, 5,76 m² de medida de área, determine, com o auxílio de uma calculadora, a medida do comprimento de cada haste lateral da barraca.

29. Aproximadamente 2,33 m.



30. **(UFRJ-2024)** Os azulejos quadrados *ABCD*, *DEFG* e *FHIJ* foram dispostos em um mostruário, conforme ilustrado na imagem. Nesse arranjo, os vértices *B*, *C*, *E*, *H* e *I* são colineares.



As medidas das áreas revestidas pelos azulejos *ABCD*, *DEFG* e *FHIJ*, em cm², são, respectivamente, 93, 157 e *X*.

O lado, em centímetros, do azulejo de menor área é igual a:

30. Alternativa **d**.

a. 5

b. 6

c. 7

d. 8

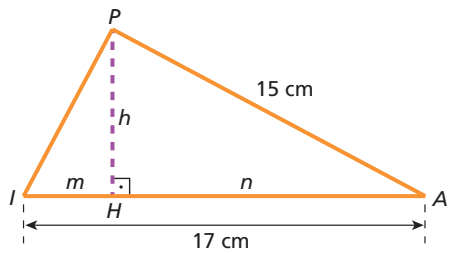
31. Três números **naturais** não nulos que obedecem à relação pitagórica são conhecidos como **terno pitagórico**. Por exemplo, o terno pitagórico 3, 4 e 5, forma um triângulo pitagórico.

a. Dê as medidas de comprimento de outros dois triângulos pitagóricos. **31 a.** Exemplo de resposta: 6, 8, 10 e 5, 12, 13.

b. Que tipo de triângulo obtemos quando as medidas de comprimento de seus lados formam um terno pitagórico? Justifique. **31 b.** Triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.

c. **ARGUMENTAÇÃO** Pode existir um triângulo retângulo cujas medidas de comprimento não formam um terno pitagórico? Justifique sua resposta.

32. Observe o triângulo retângulo *PIA*.



Sabendo que $\overline{PH}$ é a altura relativa à hipotenusa, determine:

a. a medida de comprimento do cateto $\overline{PI}$; **32 a.** $PI = 8$ cm

b. a medida aproximada h dessa altura; **32 b.** $h \simeq 7{,}1$ cm

c. as medidas de comprimento aproximadas m e n das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa. **32 c.** $m \simeq 3{,}8$ cm e $n \simeq 13{,}2$ cm.

33. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** **EM DUPLA** Em duplas, elaborem uma situação-problema que utilize, em sua resolução, uma ou mais relações métricas do triângulo retângulo apresentadas neste capítulo. Depois, troquem a questão com outra dupla para que ela resolva a questão que vocês elaboraram e vice-versa. **33.** Resposta pessoal.

RENAN ORACIO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

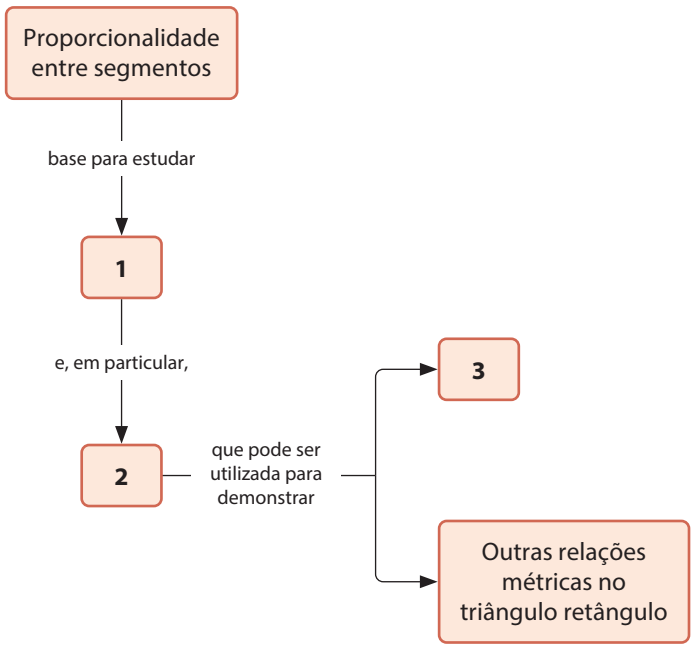
31 c. Sim; por exemplo, 1, 1 e $\sqrt{2}$ formam um triângulo retângulo, mas não u triângulo pitagórico, já que $\sqrt{2}$ não é um número natural.

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 6

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 1; C – 2.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Teorema de Pitágoras

B. Semelhança de figuras

C. Semelhança de triângulos

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

Razão áurea: A história de fi, um número surpreendente

Mario Livio

Rio de Janeiro: Record, 2006.

O que há em comum entre a disposição dos flóculos do girassol, a espiral que delineia a concha de um molusco, a conformação de uma galáxia, a estrutura molecular de cristais e a árvore genealógica de um zangão? Uma razão constante, que há muito tempo intriga a mente humana: a chamada razão áurea. Com uma linguagem acessível e fartamente ilustrada, a obra de Mario Livio fascina os leitores do início ao fim.

REPRODUÇÃO/EDITORA RECORD

Museu

Museu da Matemática Prandiano

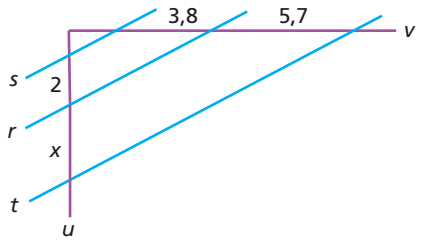
Esse museu dispõe de uma coleção de pinturas que realçam a história da matemática e de diversos experimentos e objetos que materializam ideias abstratas, como máquinas de calcular, experimentos sobre o teorema de Pitágoras e de Tales, além de máquinas trigonométricas e outros objetos matemáticos interessantes.

Mais informações estão disponíveis em: https://www.prandiano.com.br/museu. Acesso em: 19 set. 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

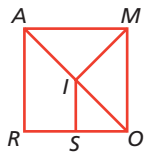
AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Na figura a seguir, as retas *s*, *r* e *t* são paralelas e *u* e *v* são transversais que interceptam essas paralelas. Os valores indicam as medidas de comprimento dos segmentos determinados. Quanto vale *x*? **Q1.** Alternativa **c.**



a. 1 **b.** 2 **c.** 3 **d.** 1,9

Q2. No quadrado *AMOR*, o segmento $\overline{MI}$ é parte de uma de suas diagonais. Portanto, é possível afirmar que os pares de polígonos [redacted] são semelhantes. **Q2.** Alternativa **a.**



a. *AIM* e *AMO*

b. *ARSI* e *AMOR*

c. *AISOM* e *AISR*

d. *ROIMA* e *MAISO*

Q3. Todos os triângulos equiláteros são semelhantes, pois eles: **Q3.** Alternativa **c.**

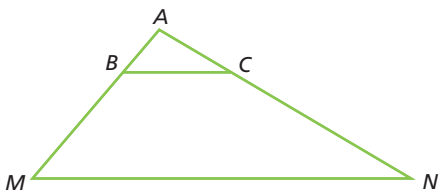
a. são acutângulos.

b. não são retângulos.

c. têm todos os ângulos internos com abertura medindo 60°.

d. têm os lados de medidas de comprimento diferentes.

Q4. Na figura a seguir, $\overline{BC}$ e $\overline{MN}$ são paralelos.



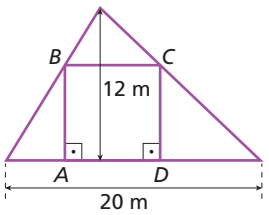
Se $AB = 10$ cm, $AM = 35$ cm e $AC = 15$ cm, a medida de comprimento de $\overline{CN}$, em centímetro, é: **Q4.** Alternativa **c.**

a. 7,5. **b.** 4,5. **c.** 37,5. **d.** 30.

Q5. O Sol projeta no chão plano as sombras de um poste e de uma haste verticais, que medem, respectivamente, 12 m e 0,6 m de comprimento. Se a altura da haste mede 1 m, a altura do poste mede: **Q5.** Alternativa **d.**

a. 6 m. **b.** 7,2 m. **c.** 12 m. **d.** 20 m.

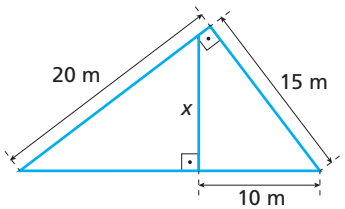
Q6. Um triângulo com comprimento de base medindo 20 m e altura relativa a essa base medindo 12 m está circunscrito a um quadrado *ABCD*. O comprimento do lado desse quadrado mede:



a. 7,5 m. **b.** 4,5 m. **c.** 30 m. **d.** 18 m.

Q6. Alternativa **a.**

Q7. Observe a figura. A medida de comprimento *x* vale:



a. 11,75 m.

b. 12,25 m.

c. 11,75 m.

d. 11,25 m.

Q7. Alternativa **d.**

Q8. Em um triângulo retângulo, os comprimentos dos catetos medem 9 cm e 12 cm. A medida de comprimento da hipotenusa é [redacted] cm, a medida da altura relativa à hipotenusa é [redacted] cm e as medidas de comprimento dos segmentos determinados por essa altura sobre a hipotenusa são [redacted] cm e [redacted] cm.

A alternativa que completa, adequadamente, o texto anterior é: **Q8.** Alternativa **d.**

a. 17; 7,2; 7,4; 9,6.

b. 15; 5,4; 7,2; 9,6.

c. 19; 7,2; 10,6; 8,4.

d. 15; 7,2; 5,4; 9,6.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8
Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.	X		X	X	X	X	X	X
Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.		X	X		X	X	X	X
Resolver situações-problema que envolvam o teorema de Pitágoras e as demais relações métricas no triângulo retângulo.							X	X

Capítulo 7

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

LUIZ IRIA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA SEM ESCALA; CORES FANTASIA.

OBJETO DIGITAL

Carrossel de imagens: Aplicações da Trigonometria

Este carrossel de imagens mostra situações do dia a dia em que a Trigonometria é utilizada, destacando como diversas profissões dependem desse conhecimento em suas atividades diárias, o que enriquece o contexto introdutório do capítulo.

Você já se perguntou como os astrônomos fizeram para calcular a medida da distância entre a Terra e a Lua? E entre a Terra e o Sol?

Resolver problemas de Astronomia, como descobrir essas medidas de distância entre a Terra, o Sol e a Lua, sempre despertou o interesse do ser humano. Desse tipo de especulação nasceu a Trigonometria, parte da Matemática que se dedica ao estudo das relações entre as medidas de comprimento dos lados e as medidas de abertura dos ângulos de um triângulo.

O grego Aristarco de Samos (310 a.C.-230 a.C.), considerado por muitos o primeiro grande astrônomo da História, usou as ideias da Trigonometria ao estabelecer um método geométrico para investigar a razão entre as medidas de distância Terra-Sol e Terra-Lua.

Seus cálculos partiram da observação de que, quando a Lua está no quarto crescente – ocasião em que exatamente metade dela aparece iluminada pelo Sol –, a abertura do ângulo $\hat{L}$, do triângulo cujos vértices coincidem com a posição do Sol (*S*), da Lua (*L*) e da Terra (*T*), mede 90°, conforme mostrado na ilustração anterior.

Aplicando os conhecimentos da época, Aristarco observou que β, medida da abertura do ângulo formado entre as linhas de vista da Terra ao Sol e da Terra à Lua, é igual a 87°. A partir disso, com conceitos trigonométricos, concluiu que a razão entre as medidas de distância Terra-Sol e Terra-Lua $\left(\frac{TS}{TL}\right)$ estaria entre 18 e 20, o que significa que a medida de distância Terra-Sol era de 18 a 20 vezes a medida de distância Terra-Lua.

Atualmente, sabemos que a medida de distância Terra-Sol é cerca de 400 vezes a medida de distância Terra-Lua. A grande diferença entre esse valor e o encontrado por Aristarco está relacionada ao ângulo entre as linhas de vista da Terra ao Sol e da Terra à Lua cuja medida de abertura correta é de aproximadamente 89,83°. Mesmo assim, o raciocínio de Aristarco foi perfeito.

Neste capítulo, estudaremos conceitos básicos da Trigonometria no triângulo retângulo e verificaremos que ela tem grande aplicação no cálculo de medidas de distância inacessíveis: na Astronomia, como fez Aristarco; na Topografia, para determinar a medida de altura de morros, montanhas e colinas; na Engenharia, para estabelecer a medida de comprimento de uma rampa etc.

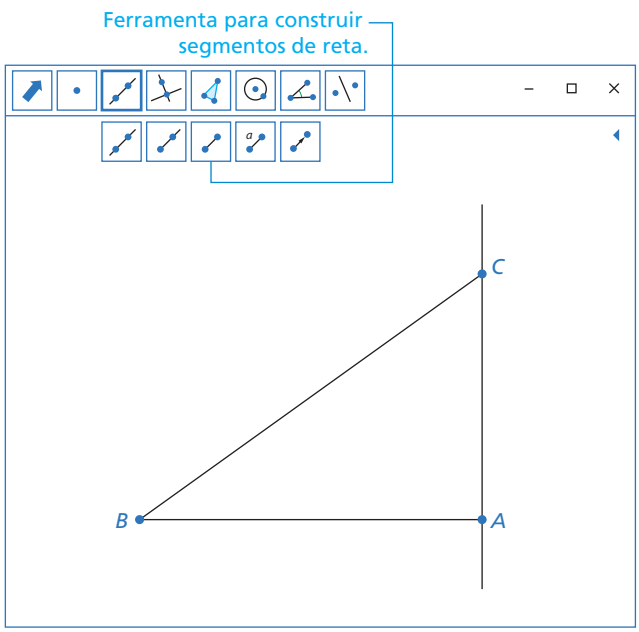
Razões trigonométricas

Com base no conceito de semelhança de triângulos, dados dois ou mais triângulos retângulos semelhantes, exploraremos algumas razões entre as medidas de comprimento de seus lados.

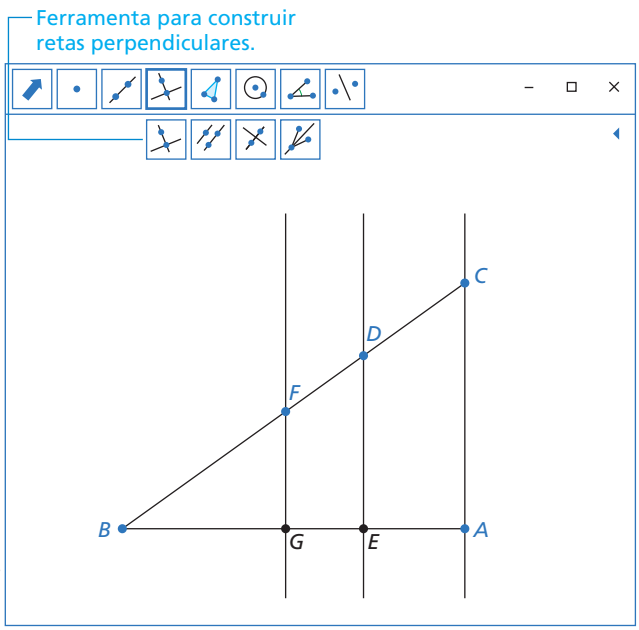
Explorando razões em triângulos retângulos usando o computador

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, vamos acompanhar o passo a passo da construção a seguir.

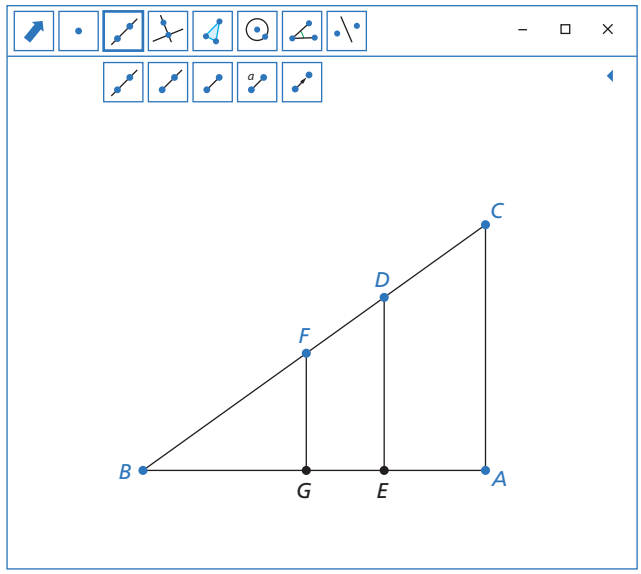
1. Construímos um triângulo retângulo *BCA*, retângulo em *A*, traçando primeiramente o segmento $\overline{AB}$ e, em seguida, uma reta perpendicular a esse segmento passando pelo ponto *A*. Marcamos um ponto *C* qualquer nessa reta, $C \neq A$, e traçamos o segmento $\overline{BC}$.



2. Construímos $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{FG}$, paralelas à reta $\overleftrightarrow{CA}$.



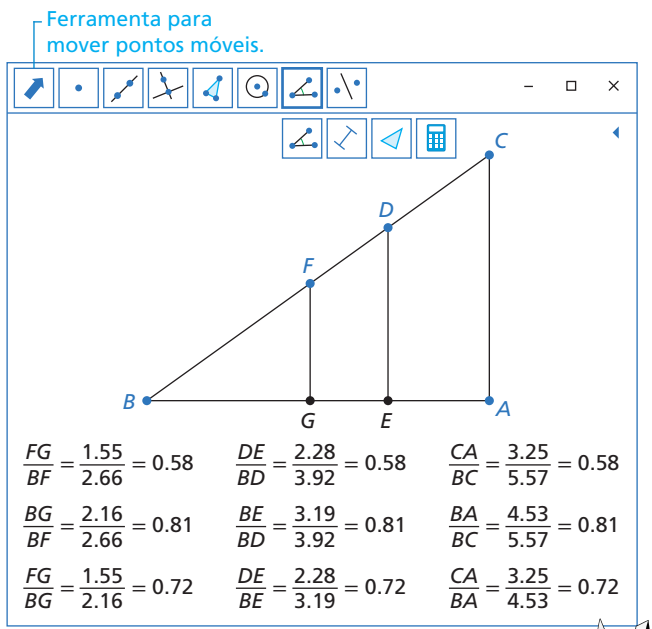
3. Traçamos os segmentos $\overline{CA}$, $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$ e utilizamos um recurso do *software* para esconder as retas que os continham.



Os triângulos *BFG*, *BDE* e *BCA* são semelhantes, pois têm ângulos correspondentes congruentes.

4. Com a ferramenta apropriada, medimos o comprimento dos lados de cada triângulo. Utilizando a calculadora do *software*, obtemos as seguintes razões:

- $\frac{FG}{BF}$, $\frac{DE}{BD}$ e $\frac{CA}{BC}$
- $\frac{BG}{BF}$, $\frac{BE}{BD}$ e $\frac{BA}{BC}$
- $\frac{FG}{BG}$, $\frac{DE}{BE}$ e $\frac{CA}{BA}$



$\frac{FG}{BF} = \frac{1.55}{2.66} = 0.58$ $\quad \frac{DE}{BD} = \frac{2.28}{3.92} = 0.58$ $\quad \frac{CA}{BC} = \frac{3.25}{5.57} = 0.58$

$\frac{BG}{BF} = \frac{2.16}{2.66} = 0.81$ $\quad \frac{BE}{BD} = \frac{3.19}{3.92} = 0.81$ $\quad \frac{BA}{BC} = \frac{4.53}{5.57} = 0.81$

$\frac{FG}{BG} = \frac{1.55}{2.16} = 0.72$ $\quad \frac{DE}{BE} = \frac{2.28}{3.19} = 0.72$ $\quad \frac{CA}{BA} = \frac{3.25}{4.53} = 0.72$

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe que as razões entre as medidas de comprimento dos lados correspondentes são constantes. Em geral, o *software* de Geometria dinâmica aproxima as razões para duas casas decimais e usa o sinal de igual para essas aproximações.

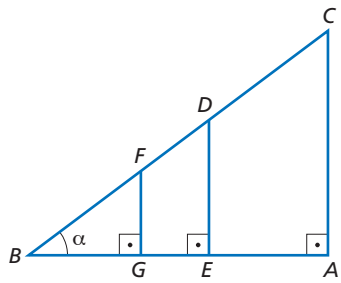
Se usarmos a ferramenta para mover os pontos móveis dos triângulos, modificando as medidas de comprimento dos lados, vamos observar que as razões continuam constantes.

Seno, cosseno e tangente de um ângulo

Seja α a medida da abertura do ângulo $\widehat{B}$.

A semelhança entre os triângulos *BFG*, *BDE* e *BCA* nos permite escrever as seguintes proporções:

$$\frac{FG}{BF} = \frac{DE}{BD} = \frac{CA}{BC}$$



As razões entre as medidas de comprimento dos catetos opostos ao ângulo de medida de abertura α e das hipotenusas dos triângulos são iguais a uma constante, chamada de **seno do ângulo de medida de abertura α**.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura } \alpha}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}}$$

Do mesmo modo, podemos dizer que:

$$\frac{BG}{BF} = \frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC}$$

As razões entre as medidas de comprimento dos catetos adjacentes ao ângulo de medida de abertura α e das hipotenusas dos triângulos são chamadas de **cosseno do ângulo de medida de abertura α**.

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura } \alpha}{\text{medida do comprimento da hipotenusa}}$$

Igualmente, podemos escrever:

$$\frac{FG}{BG} = \frac{DE}{BE} = \frac{CA}{BA}$$

As razões entre as medidas de comprimento dos catetos opostos ao ângulo de medida de abertura α e dos catetos adjacentes ao mesmo ângulo são chamadas de **tangente do ângulo de medida de abertura α**.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura } \alpha}{\text{medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura } \alpha}$$

As razões sen α, cos α e tg α são conhecidas como **razões trigonométricas**.

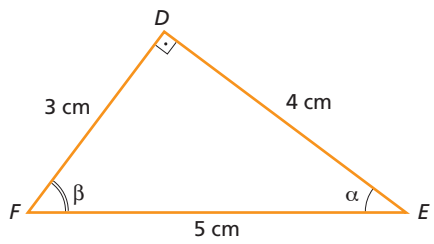
O seno, o cosseno e a tangente podem ser números irracionais?

Considere o exemplo a seguir.

No triângulo retângulo *DEF*, α e β são as medidas de abertura de ângulos agudos, $\overline{DF}$ é o cateto oposto ao ângulo de medida de abertura α e $\overline{DE}$ é o cateto adjacente a esse ângulo.

Considerando o ângulo de medida de abertura α e aplicando as definições, podemos escrever:

- sen $\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6$
- tg $\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$
- cos $\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$



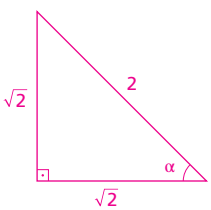
Em relação ao ângulo agudo de medida de abertura β, o cateto oposto é $\overline{DE}$ e o cateto adjacente é $\overline{DF}$. Aplicando as definições, obtemos:

- sen $\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8$
- cos $\beta = \frac{3}{5} = 0{,}6$
- tg $\beta = \frac{4}{3} \simeq 1{,}33$

OBJETO DIGITAL **Vídeo: Razão seno**

Este vídeo explica aos estudantes o desenvolvimento da ideia da razão trigonométrica seno e mostra como calculá-la em um triângulo retângulo. Esse OED contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**.

Questão. Sim, pois a medida de comprimento de um dos lados do triângulo pode ser um número irracional, por exemplo:



Nesse caso, sen α e cos α são o número irracional $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

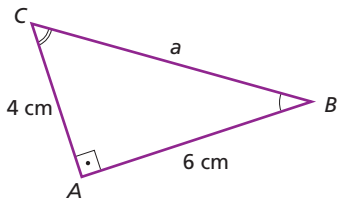
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Podemos usar as razões trigonométricas para determinar medidas de comprimento desconhecidas de um triângulo retângulo, como nas **atividades resolvidas R2** e **R3**.

Atividades resolvidas

R1. Determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 4 cm de comprimento.



▶ **Resolução**

Para o cálculo do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos de medidas de abertura α e β, é necessário determinar a medida de comprimento a da hipotenusa. Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$a^2 = 36 + 16 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$

Agora, podemos calcular as razões:

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{4}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\operatorname{sen}\beta = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{6}{2\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

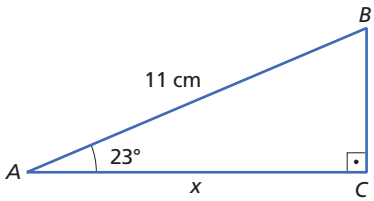
$\cos\alpha = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\cos\beta = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

R2. Determinar a medida de comprimento do lado $\overline{AC}$ do triângulo retângulo representado a seguir. (*Considerar:* sen 23° = 0,39; cos 23° = 0,92; tg 23° = 0,42)



▶ **Resolução**

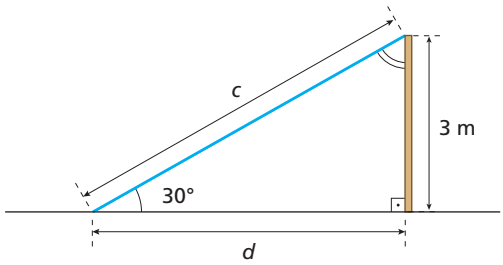
Pela figura, temos a medida do comprimento da hipotenusa e queremos obter a medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo cuja abertura mede 23°. A razão trigonométrica que relaciona essas duas medidas de comprimento é o cosseno de 23°.

Como $\cos 23° = 0{,}92$ e $\cos 23° = \frac{x}{11}$, temos:

$0{,}92 = \frac{x}{11} \Rightarrow x = 11 \cdot 0{,}92 \Rightarrow x = 10{,}12$

Portanto, o lado $\overline{AC}$ mede 10,12 cm de comprimento.

R3. Na dança folclórica de trança-fitas, usa-se um mastro que mede, geralmente, 3 metros de altura. Para certa passagem da dança, precisa-se que a abertura do ângulo formado entre a fita esticada (com a ponta no chão) e a horizontal meça 30°. Sabendo que sen 30° = 0,5, determinar a medida de comprimento da fita e a medida de distância dessa ponta ao mastro.



CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Grupo de dança folclórica de trança-fitas, no evento Revelando São Paulo, festival de economia criativa e cultura tradicional do estado de São Paulo, em Iguape (SP). Foto de 2024.

▶ **Resolução**

No esquema, c representa a medida de comprimento da fita, e d, medida de distância da ponta da fita ao mastro.

Considerando as informações apresentadas, podemos escrever:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{3}{c}$$

Substituindo sen 30° por 0,5, obtemos o valor de c:

$$0{,}5 = \frac{3}{c} \Rightarrow c = 6$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$d^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow d^2 = 27 \Rightarrow d = 3\sqrt{3} \Rightarrow d \simeq 5{,}2$

Portanto, a fita mede 6 metros de comprimento e sua ponta está a uma medida de distância de, aproximadamente, 5,2 metros do mastro.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

1. É verdadeira, pois, como são razões entre medidas de comprimento dos lados de um triângulo, devem ser maiores que zero; e como no denominador dessas razões está a medida do comprimento da hipotenusa, que é o maior lado de um triângulo retângulo, o valor sempre será um número menor que 1.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

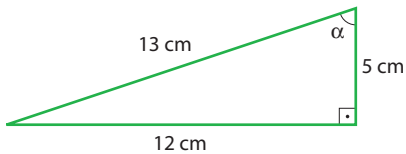
1. **ARGUMENTAÇÃO** Considere a afirmação: o seno e o cosseno de um ângulo agudo são sempre um número maior que zero e menor que 1.

Ela é verdadeira? Explique.

2. **ARGUMENTAÇÃO** Que relações podemos estabelecer entre os valores obtidos na **atividade resolvida R1**? Explique.

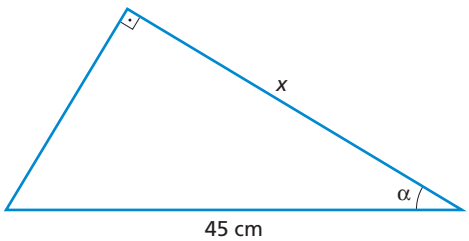
3. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de medida de abertura α do triângulo retângulo representado a seguir.

3. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$.



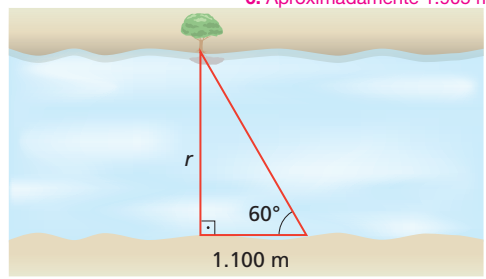
4. Em um triângulo ABC, retângulo em C, o comprimento do cateto oposto ao vértice A mede 8 cm e o comprimento da hipotenusa mede 12 cm. Determine o seno, o cosseno e a tangente do ângulo $\widehat{A}$.

5. No triângulo retângulo representado a seguir, considere $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6$, $\cos\alpha = 0{,}8$ e $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}75$. Calcule a medida de comprimento x. **5.** 36 cm



6. Na região do município de Óbidos, no Pará, encontra-se a garganta mais estreita do rio Amazonas. De um ponto na margem esquerda avista-se, perpendicularmente, certa árvore na outra margem. Caminhando 1.100 m pela margem esquerda, avista-se a mesma árvore sob um ângulo cuja abertura mede 60°, conforme a figura a seguir.

6. Aproximadamente 1.905 m.



Sabendo que $\operatorname{tg} 60° \simeq 1{,}7321$, calcule a medida da largura aproximada do rio Amazonas nesse local.

7. Um avião levanta voo sob um ângulo de medida de abertura α. Depois de percorrer uma medida de distância x, em quilômetro, ele atinge 4 km de medida de altura.

a. Faça um esquema dessa situação.

b. Calcule a medida de distância x. (*Dados*: $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}1045$; $\cos\alpha = 0{,}9945$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1051$) **7 b.** Aproximadamente 38,3 km.

8. **ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS** **EM DUPLA** Elabore um problema em que seja necessário utilizar, ao menos, uma das razões trigonométricas para determinar a medida de altura de um penhasco. Use $\operatorname{sen} 60° = 0{,}86$; $\cos 60° = 0{,}5$ e $\operatorname{tg} 60° = 1{,}73$.

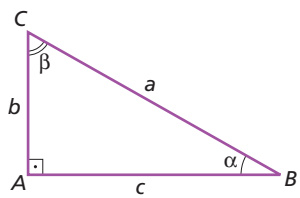
Peça a um colega da sala que resolva seu problema e você deve resolver o dele. **8.** Resposta pessoal.

4. $\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{2}{3}$; $\cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\widehat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Relações entre seno, cosseno e tangente de ângulos agudos

Seno e cosseno de ângulos complementares

Considere o triângulo ABC, retângulo em A, e todas as razões trigonométricas que envolvem os ângulos agudos e complementares cujas medidas de abertura são α e β.



- $\operatorname{sen}\alpha = \frac{b}{a}$
- $\cos\alpha = \frac{c}{a}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}$
- $\operatorname{sen}\beta = \frac{c}{a}$
- $\cos\beta = \frac{b}{a}$
- $\operatorname{tg}\beta = \frac{c}{b}$

Com base nessas razões, vamos estabelecer algumas relações importantes.

Note que podemos escrever β em função de α, ou seja, $\beta = 90° - \alpha$.

2. Espera-se que os estudantes percebam as seguintes relações:

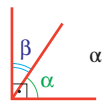
$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$;

$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$.

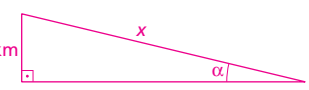
Observação

Ângulos complementares são ângulos cuja soma das medidas de suas aberturas resulta em 90°.



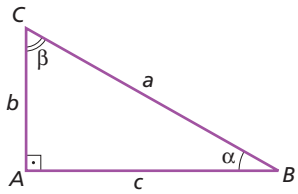
$\alpha + \beta = 90°$

7 a.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Observe que $\frac{b}{a} = \text{sen } \alpha = \cos \beta$. Como $\beta = 90° - \alpha$, concluímos que:

$$\text{sen } \alpha = \cos (90° - \alpha)$$

Observe também que $\frac{c}{a} = \cos \alpha = \text{sen } \beta$.

Substituindo $\beta = 90° - \alpha$ nessa igualdade, concluímos que:

$$\cos \alpha = \text{sen } (90° - \alpha)$$

Relação fundamental da Trigonometria

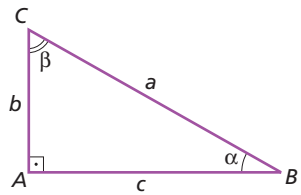
Sendo a medida de abertura de α um ângulo agudo, a equação a seguir, conhecida como **relação fundamental da Trigonometria**, é sempre válida:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Demonstração

No triângulo *ABC*, sabemos que

$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos \alpha = \frac{c}{a}$.



Assim:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 =$$

$$= \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \text{ (I)}$$

Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo *ABC*, temos: $a^2 = b^2 + c^2$ (II)

De (I) e (II), podemos escrever: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$

Portanto, quaisquer que sejam as medidas das aberturas dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, vale a igualdade: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Relação entre o seno, o cosseno e a tangente

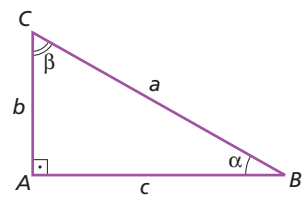
Agora, vamos demonstrar a equação a seguir, que relaciona o seno e o cosseno do ângulo agudo de medida de abertura α com sua tangente.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Demonstração

No triângulo *ABC*, sabemos que

$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$, $\cos \alpha = \frac{c}{a}$ e $\text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$.



Escrevendo *b* em função de sen α, temos:

$\text{sen } \alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a \cdot \text{sen } \alpha$ (I)

Também podemos escrever *c* em função de cos α:

$\cos \alpha = \frac{c}{a} \Rightarrow c = a \cdot \cos \alpha$ (II)

Substituindo (I) e (II) na razão que fornece a tangente de α, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{a \cdot \text{sen } \alpha}{a \cdot \cos \alpha} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

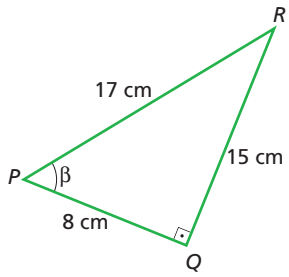
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

9. Dado o triângulo representado a seguir, verifique que $\text{sen}^2\,\beta + \cos^2\,\beta = 1$.



9. $\text{sen}^2\,\beta + \cos^2\,\beta = \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 =$

$= \frac{225}{289} + \frac{64}{289} = \frac{289}{289} = 1$

10. Copie o quadro preenchendo as lacunas com as informações que faltam. (Você pode usar uma calculadora, mas não use as funções "sin", "cos" ou "tan".)

Seno, cosseno e tangente de 20°, 70°, 50° e 40°

Medida da abertura do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	
70°			
50°			
40°	0,6428		0,8391

MODELO MODELO

10. **Seno, cosseno e tangente de 20°, 70°, 50° e 40°**

Medida da abertura do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	0,3639
70°	0,9397	0,3420	2,7477
50°	0,7661	0,6428	1,1918
40°	0,6428	0,7661	0,8391

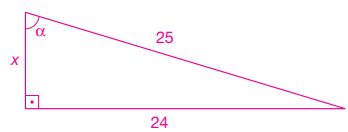
11. Seja α a medida da abertura de um ângulo agudo. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{24}{25}$, vamos calcular o cosseno e a tangente desse ângulo de dois modos diferentes.

a. Realize os passos a seguir.

- Desenhe um triângulo retângulo, de modo que a medida da abertura de um de seus ângulos agudos seja α.
- Depois, com base no valor de sen α, escreva as medidas de comprimento da hipotenusa e de um dos catetos.
- Calcule a medida do comprimento do outro cateto.
- Finalmente, calcule cos α e tg α.

b. A partir da relação fundamental da Trigonometria ($\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1$), calcule cos α. Depois, calcule tg α.

11 a.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$x^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

Logo, $\cos\,\alpha = \frac{7}{25}$ e $\text{tg}\,\alpha = \frac{24}{7}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

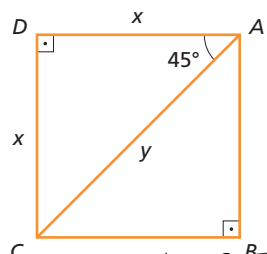
Na Trigonometria, os ângulos cujas aberturas medem 30°, 45° e 60° são conhecidos como **ângulos notáveis**. Com figuras geométricas conhecidas, podemos obter os valores do seno, do cosseno e da tangente desses ângulos. Acompanhe a seguir.

11 b. $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \cos^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\,\alpha = 1 - \frac{576}{625} \Rightarrow \cos^2\,\alpha = \frac{49}{625} \Rightarrow \cos\,\alpha = \frac{7}{25}$

Ângulo cuja abertura mede 45°

Temos: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$

Considere o triângulo retângulo ACD representado, obtido da divisão do quadrado $ABCD$ por sua diagonal $\overline{AC}$.



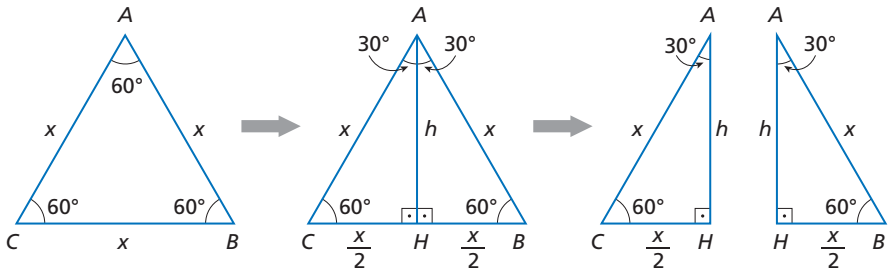
Aplicando o teorema de Pitágoras, temos $y^2 = x^2 + x^2$, ou seja, $y = x\sqrt{2}$.

De acordo com as definições, temos:

- $\text{sen}\,45° = \cos\,45° = \frac{x}{y} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\text{tg}\,45° = \frac{x}{x} = 1$

Ângulos cujas aberturas medem 30° e 60°

Agora, considere o triângulo equilátero *ABC* dividido pela sua altura $\overline{AH}$ em dois triângulos: *ACH* e *ABH*.



Aplicando o teorema de Pitágoras em um dos triângulos obtidos, temos:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \Rightarrow h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Então, de acordo com as definições:

- $\text{sen } 60° = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$
- $\text{tg } 60° = \frac{h}{\frac{x}{2}} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$
- $\text{sen } 30° = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \frac{h}{x} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\text{tg } 30° = \frac{\frac{x}{2}}{h} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Os resultados obtidos, frequentemente usados em problemas de Trigonometria, podem ser organizados no quadro a seguir.

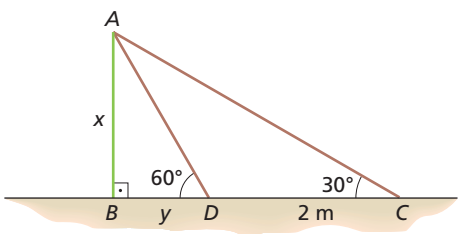
Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°

	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Nas próximas atividades, vamos usar esses valores.

Atividade resolvida

R4. Uma pequena árvore, cuja medida de altura está representada por *x*, ao ser replantada, foi escorada por duas vigas de madeira representadas por $\overline{AD}$ e $\overline{AC}$, como mostra o esquema.



Determinar a medida de altura *x* da árvore e a medida de distância *y* até a escora mais próxima à árvore.

▶ Resolução

Analisando o triângulo *ABC*, observamos que podemos usar a tangente de 30°, pois ela relaciona *x* (medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo cuja abertura mede 30°) com $y + 2$ (medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo cuja abertura mede 30°):

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{y+2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{y+2} \Rightarrow x = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} \text{ (I)}$$

Agora, analisando o triângulo *ABD*, observamos que podemos usar a tangente de 60°, pois ela relaciona *x* (medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo cuja abertura mede 60°) com *y* (medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo cuja abertura mede 60°):

$$\text{tg } 60° = \frac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y\sqrt{3} \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$y\sqrt{3} = \frac{y\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = 1$$

Como $x = y\sqrt{3}$, temos $x = \sqrt{3}$.

Assim, $x = \sqrt{3}$ m e $y = 1$ m.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

14 a. Medida da altura da coluna: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m; medida da distância da tábua: $\frac{1}{2}$ m.

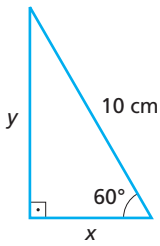
Atividades propostas

Registre em seu caderno

12. Considerando o fato de que o triângulo *ADC* é isósceles, resolva a **atividade resolvida R4** de uma maneira diferente da que foi apresentada.

13. Determine x e y nos seguintes triângulos:

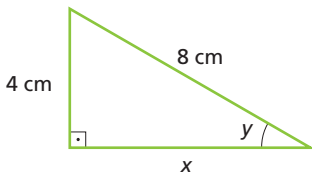
a.



ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

13 a. $x = 5$ cm; $y = 5\sqrt{3}$ cm.

b.



13 b. $x = 4\sqrt{3}$ cm; $y = 30°$.

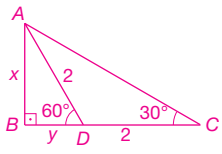
14. Um construtor civil escorou uma coluna com duas tábuas de madeira de reflorestamento. Uma tábua formava um ângulo de abertura que media 60º em relação ao solo, e a outra formava um ângulo de abertura que media 30º, também em relação ao solo. As tábuas estavam separadas a uma medida de distância de 2 m entre si e se encontravam no ponto mais alto da coluna. O construtor cobrou R$ 420,00 pelo serviço, e as tábuas custaram R$ 50,00.

a. Qual é a medida da altura da coluna escorada e qual é a medida da distância da tábua que forma um ângulo cuja abertura mede 60º em relação ao solo da referida coluna? **14 b.** O tipo da madeira, o valor do serviço e o preço das tábuas.

b. Quais dados não foram necessários para você responder às questões do item anterior?

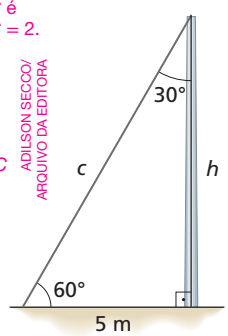
15. Uma das extremidades de um cabo de aço está presa ao topo de um poste, formando com este um ângulo cuja abertura mede 30°, enquanto a outra extremidade está fixada no chão a uma medida de distância de 5 m do pé do poste.

12. Como o triângulo *ADC* é isósceles, temos $AD = DC = 2$.



$\text{sen } 60° = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 1$



ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

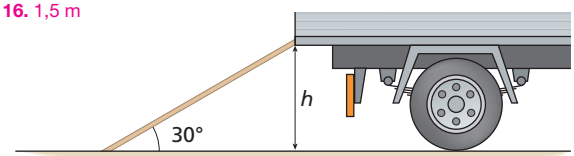
Considerando essas informações, determine: **15 a.** $c = 10$ m

a. a medida de comprimento c do cabo de aço;

b. a medida de altura h do poste. **15 b.** $h \simeq 8{,}7$ m

16. Um ajudante de pedreiro estava descarregando areia de um caminhão por uma rampa de madeira apoiada à caçamba. Se a rampa tem 3 m de medida de comprimento e forma com o solo um ângulo cuja abertura mede 30°, qual é a medida de altura entre a caçamba e o solo, representada por h?

16. 1,5 m



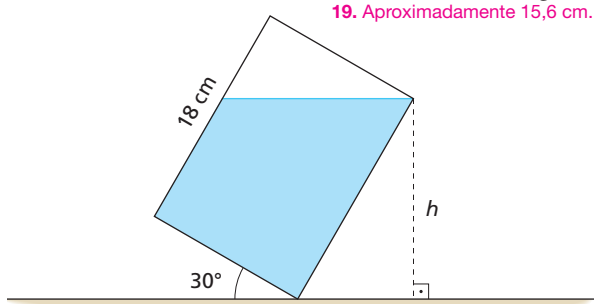
17. Um triângulo equilátero tem 18 cm de medida de altura. Determine a medida de comprimento aproximada de seus lados.

17. Aproximadamente 20,8 cm.

18. Uma antena de 15 m de medida de altura é presa ao chão por quatro cabos de aço. A abertura do ângulo que cada um deles forma com a ponta da antena mede 45°. Quantos metros de cabo de aço foram usados, aproximadamente, para prender essa antena? **18.** Aproximadamente 85 m.

19. Um recipiente com formato de bloco retangular, com 18 cm de medida de altura, foi tombado, como mostra a figura.

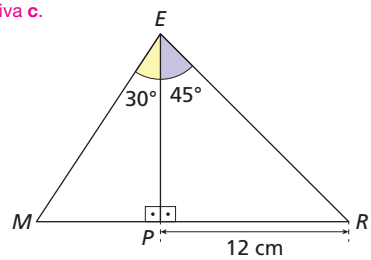
19. Aproximadamente 15,6 cm.



Determine a medida de altura aproximada h entre o solo e o nível da água contida no recipiente tombado.

20. **(Famerp – 2024)** A figura mostra os triângulos *MEP* e *REP*, que compartilham o lado $\overline{EP}$.

20. Alternativa **c**.



A área do triângulo *MER*, em cm², é igual a

a. $6(\sqrt{3} + 3)$

b. $12(\sqrt{3} + 3)$

c. $24(\sqrt{3} + 3)$

d. $48(\sqrt{3} + 3)$

e. $3(\sqrt{3} + 3)$

Dado:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

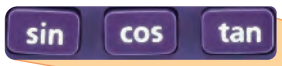
Uso da calculadora e da tabela trigonométrica

As razões trigonométricas dos ângulos notáveis são valores conhecidos e, para obter aproximações, basta usar uma calculadora simples.

Mas como obtemos as razões trigonométricas de outros ângulos agudos?

Esses valores podem ser encontrados em tabelas trigonométricas, que contêm as razões trigonométricas de diversos ângulos agudos. Elas foram desenvolvidas inicialmente por astrônomos da Antiguidade, devido à necessidade de usar esses valores em seus estudos. Com base em conhecimentos babilônicos, Hiparco de Niceia (190 a.C.-120 a.C.) construiu o que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica.

No entanto, após a invenção e a difusão das calculadoras, essas tabelas passaram a ser menos usadas. Atualmente, podemos calcular o seno, o cosseno e a tangente de ângulos em calculadoras científicas, em computadores e até mesmo em alguns telefones celulares.



Detalhe da imagem ampliado em 3 vezes.

NATROT/SHUTTERSTOCK

Calculadora com as teclas "sin", "cos" e "tan" (seno, cosseno e tangente, respectivamente). As calculadoras científicas costumam ter também as funções "$\sin^{-1}$", "$\cos^{-1}$" e "$\tan^{-1}$", que fornecem a medida da abertura do ângulo a partir do seno, do cosseno ou da tangente dele, conforme verificaremos na **atividade resolvida R6**.

Considere os exemplos a seguir.

a. Vamos calcular sen 53° na calculadora.

Primeiro, verificamos se a opção "graus" está selecionada para que a calculadora reconheça 53 como 53°. Em geral, essa opção é indicada por [deg], que significa "grau" (grau, em inglês, é *degree*).

Em seguida, digitamos: [5] [3] [sin] [=]

O resultado será 0,7986355, que é uma aproximação para sen 53°.

b. Para calcular cos 12°, pressionamos as teclas: [1] [2] [cos] [=]
Concluímos que: cos 12° ≃ 0,9781476

c. Para calcular tg 73°, digitamos: [7] [3] [tan] [=]

Assim: tg 73° ≃ 3,2708526

Observações

1. Normalmente, as calculadoras oferecem três opções para as unidades de medida de abertura dos ângulos: [deg] [rad] [grad]
   Por isso, é importante verificar se a opção [deg] está selecionada.
2. Em algumas calculadoras, dependendo do modelo, o procedimento pode ser outro: primeiro, digitamos a tecla [sin]; em seguida, a medida da abertura do ângulo escolhido; e, por último, pressionamos [=].
3. O número de casas decimais que aparecerá para sen 53°, por exemplo, vai depender da capacidade máxima de dígitos do visor da calculadora, já que o valor é uma aproximação de um número irracional, com infinitas casas decimais não periódicas.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Tabela de razões trigonométricas

A seguir apresentamos aproximações para as razões trigonométricas.

Razões trigonométricas

Medida da abertura do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente	Medida da abertura do ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,6820	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,7660	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,7880	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,3270
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,8090	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,8290	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,2250	0,9744	0,2309	58°	0,8480	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,5150	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,8660	0,5000	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,8040
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,3090	0,9511	0,3249	63°	0,8910	0,4540	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,3420	0,9397	0,3640	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,2460
22°	0,3746	0,9272	0,4040	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,3420	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,4540	0,8910	0,5095	72°	0,9511	0,3090	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5000	0,8660	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,5150	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,8480	0,6249	77°	0,9744	0,2250	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,8290	0,6745	79°	0,9816	0,1908	4,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,8090	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,7880	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,7660	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,6820	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,2900
45°	0,7071	0,7071	1,0000	–	–	–	–

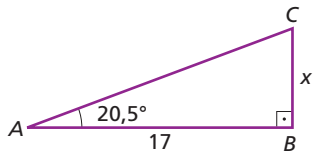
Observação

Note que, para $0° < x < 90°$, um aumento na medida da abertura do ângulo x implica aumento do sen x, diminuição do cos x e aumento da tg x.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades resolvidas

R5. Calcular o valor de x no triângulo ABC representado a seguir.



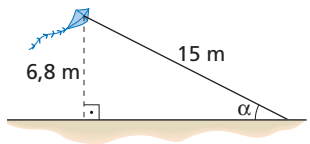
▶ **Resolução**

Observando a figura, podemos escrever: $\text{tg } 20{,}5° = \frac{x}{17}$

Em uma calculadora, obtemos $\text{tg } 20{,}5° \simeq 0{,}37$.

Assim: $\text{tg } 20{,}5° = \frac{x}{17} \Rightarrow 0{,}37 \simeq \frac{x}{17} \Rightarrow x \simeq 6{,}29$

R6. Um fio de 15 m de medida de comprimento, esticado, eleva uma pipa até a altura medindo 6,8 m. Determinar a medida da abertura do ângulo formado pelo fio com o solo.



▶ **Resolução**

Pelos dados informados no enunciado, podemos escrever:

$\text{sen } \alpha = \frac{6{,}8}{15} \Rightarrow \text{sen } \alpha \simeq 0{,}4533$

Na calculadora científica, temos as teclas:

[sin], que, dada a medida da abertura do ângulo, calcula o valor de seu seno;

[$\sin^{-1}$], que, dado o valor do seno, calcula a medida da abertura do ângulo agudo.

Então, para determinar a medida α, digitamos 0,4533 e pressionamos a tecla [$\sin^{-1}$], obtendo 26,955606.

Logo, o fio forma um ângulo com abertura que mede aproximadamente 27° com o solo.

25. Na tabela trigonométrica, não há o ângulo de medida de abertura 20,5°. No entanto, espera-se que os estudantes observem os valores:
• tg 20° = 0,3640 • tg 21° = 0,3839
Assim, devem concluir que a tg 20,5° está entre esses valores, ou seja, é aproximadamente 0,37.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

21. Considerando os valores do quadro **Seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°** da página 160 e usando uma calculadora simples, obtenha uma aproximação, com três casas decimais, para:

a. sen 45°; **21 a.** 0,707

b. cos 30°; **21 b.** 0,866

c. tg 30°. **21 c.** 0,577

22. Usando uma calculadora científica, calcule cos α (escolha α, sendo $0° < \alpha < 90°$). Anote o valor obtido com aproximação de quatro casas decimais. Em seguida, calcule sen α e divida-o por cos α. Verifique que o quociente obtido é uma aproximação de tg α. **22.** Resposta pessoal.

23. Sendo x e y medidas de abertura de ângulos disponíveis no quadro de razões trigonométricas, você percebe alguma relação entre x e y, de forma que sen x = cos y?

23. Para que sen x = cos y, devemos ter $x + y = 90°$, isto é, x e y devem ser medidas de abertura de ângulos complementares.

24. ***SOFTWARE*** Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construa um triângulo retângulo qualquer. Meça o comprimento dos lados do triângulo e, com a calculadora do *software*, calcule o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos agudos; então, procure na tabela trigonométrica essas razões para descobrir as medidas aproximadas de abertura desses ângulos. Usando a ferramenta de medidas do *software*, meça as aberturas dos ângulos agudos e compare essas medidas com as medidas de abertura que foram obtidas ao consultar a tabela trigonométrica.

(*Dica*: Da maneira que construímos os triângulos retângulos no início do tópico *Razões trigonométricas*, podemos modificar as medidas da abertura dos ângulos agudos.)

25. Como você usaria a tabela trigonométrica para obter tg 20,5°?

24. Espera-se que os estudantes percebam que as medidas de abertura dos ângulos agudos correspondentes são aproximadamente iguais.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

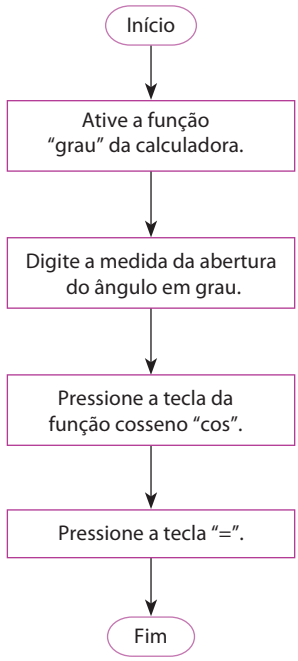
26. Espera-se que os estudantes procurem na coluna dos senos da tabela trigonométrica o valor mais próximo de 0,4533. Eles encontrarão 0,4540, que é o seno de 27°.

26. Resolva a **atividade resolvida R6** usando a tabela trigonométrica da página anterior.

27. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Considere o fluxograma a seguir.

27. a. Calcular o valor do cosseno de um ângulo utilizando uma calculadora.

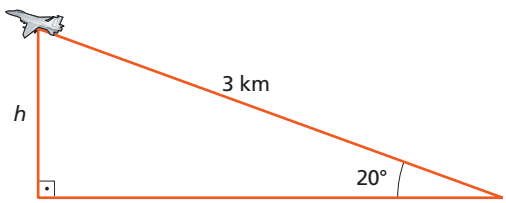
27. b. Exemplo de resposta:
Passo 1. Ative a função "grau" da calculadora.
Passo 2. Digite a medida da abertura do ângulo em grau.
Passo 3. Pressione a tecla da função cosseno "cos".
Passo 4. Pressione a tecla "igual".



a. Qual é a finalidade deste algoritmo?

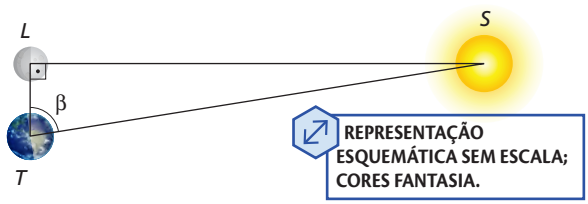
b. Represente esse algoritmo na linguagem materna.

28. Ao levantar voo, um avião percorre uma trajetória retilínea com um ângulo de inclinação cuja abertura mede 20° em relação à horizontal, conforme mostra a figura.



Calcule a medida de altura em que ele estará após percorrer 3 km. **28.** Aproximadamente 1,026 km.

29. Vamos voltar à ideia de Aristarco, vista na abertura do capítulo. Quando a Lua está no quarto crescente, um triângulo retângulo *LTS* tem os vértices coincidindo com a Lua, a Terra e o Sol, conforme mostra a figura.



Sabendo que β é igual a aproximadamente 89,83° e considerando $TL = 384.000$ km, determine:

a. a medida de comprimento *TS*; **29 a.** Aproximadamente 128.000.000 km.

b. a razão $\frac{TS}{TL}$. **29 b.** Aproximadamente 333.

30. Na construção civil, existem diversas regras de acessibilidade para pessoas com deficiência.

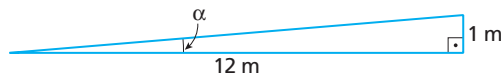
XARTPRODUCTION/SHUTTERSTOCK

Cadeirante usando uma rampa acessível.

Uma delas é que a rampa de acesso tenha medida da inclinação máxima de 8,33%. Isso significa que, a cada 1 m de medida de altura, deve-se ter, no mínimo, 12 m de medida de comprimento de afastamento horizontal a partir do início da rampa. (Note que 1 : 12 ≃ 0,0833 = 8,33%.)

Considerando uma rampa com medida da inclinação máxima, responda às questões a seguir.

a. Qual é a medida da abertura do ângulo formado entre a rampa e a horizontal? (Considere o número inteiro mais próximo.) **30 a.** Aproximadamente 5°.



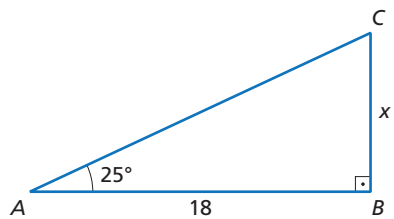
b. Para um desnível de 3 m de medida de comprimento entre dois andares, quantos metros lineares de rampa devem ser construídos? **30 b.** Aproximadamente 34,5 m.

c. **EM GRUPO** Na construção de uma rampa de acessibilidade, além de sua inclinação, outros elementos devem ser levados em consideração, como o tipo de corrimão e a sinalização com piso tátil, por exemplo.

Em grupo, pesquisem o tema e produzam um texto que especifique como esses outros elementos devem ser integrados à rampa para permitir a acessibilidade.

30 c. Resposta pessoal.

31. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** ***SOFTWARE*** Observe a figura a seguir.



31 a. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

a. No Scratch crie duas variáveis: tangente e cateto adjacente. Depois, elabore um algoritmo que use os valores dessas variáveis para calcular o valor aproximado de *x* e fazer o personagem dizer esse valor por 2 segundos.

b. Se a medida da abertura do ângulo fosse 35°, qual seria o valor aproximado de *x*? Para responder a essa questão, adapte o algoritmo que você fez no item **a**.

31 b. 12,60

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

TRABALHO E JUVENTUDES

Inclusão no mercado de trabalho: lei de cotas para pessoas com deficiência completa 29 anos

ODS 3

Há quase três décadas uma lei garante a inclusão de pessoas com deficiência no mercado de trabalho. A medida para contratação desse público é prevista na Lei de Cotas para Pessoas com Deficiência (8.213/91) [que completou 29 anos em 24 de julho de 2020] [...]

A legislação determina que empresas com cem empregados ou mais reservem vagas para o segmento. De acordo com o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), 45 milhões de pessoas possuem algum tipo de deficiência no Brasil.

Para a secretária nacional dos Direitos da Pessoa com Deficiência, Priscilla Gaspar, o texto foi fundamental para minimizar a discriminação, alertar sobre a importância da inclusão e garantir o pleno exercício da cidadania.

"Os direitos conquistados pelas pessoas com deficiência precisam ser preservados e ampliados. Para tanto, é de fundamental importância a mais ampla articulação e união de esforços dos diferentes segmentos da sociedade, com especial destaque para o protagonismo das próprias pessoas com deficiência", destacou.

Em 2018, o mercado de trabalho formal contabilizou a presença de 456,7 mil pessoas com deficiência e reabilitadas no Brasil. Os dados são da Relação Anual de Informações Sociais (Rais), do Ministério da Economia. O documento foi publicado em outubro de 2019.

A lei

Conforme a legislação, as proporções para empregar pessoas com deficiência variam de acordo com a quantidade de funcionários. De 100 a 200 empregados, a reserva legal é de 2%; de 201 a 500, de 3%; de 501 a 1.000, de 4%. As empresas com mais de [1.000] empregados devem reservar 5% das vagas para esse grupo.

As multas para instituições que descumprirem a legislação podem chegar a R$ 228 mil. A medida também inclui pessoas reabilitadas do Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS). [...]

Fonte: BRASIL. Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania. **Inclusão no mercado de trabalho:** lei de cotas para pessoas com deficiência completa 29 anos. Brasília (DF): MDHC, 2022. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/assuntos/noticias/2020-2/julho/inclusao-no-mercado-de-trabalho-lei-de-cotas-para-pessoas-com-deficiencia-completa-29-anos. Acesso em: 4 out. 2024.

Atividades

OBJETO DIGITAL *Podcast*: Inclusão no mercado de trabalho

Registre em seu caderno

1. Você conhece alguma pessoa com deficiência que trabalha? Se sim, o que ela faz? Que dificuldades ela precisa resolver no dia a dia? 1. Resposta pessoal.

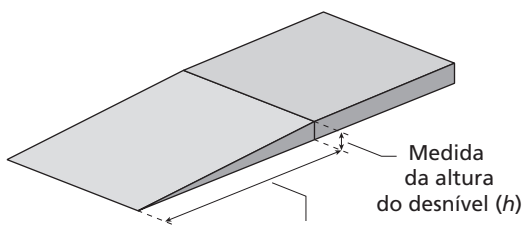
2. EM GRUPO Em sua opinião, a lei de cotas é suficiente para incluir as pessoas com deficiência no mercado de trabalho? Por quê? Converse com os colegas. 2. Comentários no *Suplemento para o professor*.

3. Algumas leis brasileiras buscam garantir a inclusão das pessoas com deficiência na sociedade em geral. Uma dessas leis diz respeito às normas de acessibilidade, como as que estão relacionadas às rampas de acesso.

A norma NBR 9050 da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) estabelece que a medida da inclinação i de rampas, em porcentagem, deve ser calculada por meio da seguinte sentença:

$$i = \frac{(h \cdot 100)}{c},$$

em que h indica a medida da altura do desnível e c indica a medida do comprimento da projeção horizontal.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Para desníveis de até 0,8 m, por exemplo, a medida da inclinação permitida para uma rampa deve estar entre 6,25% e 8,33%. Agora, responda. 3 a. Espera-se que os estudantes percebam que rampas muito íngremes são um obstáculo para cadeirantes e não cadeirantes, e, por isso, é importante ter uma norma que delimita a medida da inclinação máxima de rampas.

a. EM GRUPO Em sua opinião, por que é importante ter uma norma para a construção de rampas? Converse com os colegas.

b. A sentença que estabelece o cálculo da medida da inclinação de rampas de acesso pode ser relacionada com qual razão trigonométrica? Por quê? 3 b. Tangente. Considerando uma rampa vista de perfil, h é a medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo de inclinação e c é a medida do comprimento do cateto adjacente.

c. Considere uma rampa que foi construída para vencer um desnível de 0,5 m e que tem medida do comprimento da projeção horizontal igual a 4 m. Essa rampa está dentro dos padrões estabelecidos pela NBR 9050? Por quê? 3 c. Não, porque a medida da inclinação da rampa é de 12,5% e, para um desnível de 0,5 m, a medida da inclinação máxima da rampa deveria ser de 8,33%.

O *podcast* trata dos direitos garantidos às pessoas com deficiência pelo Estatuto da Pessoa com Deficiência, além de discutir as barreiras que dificultam sua inclusão social. São mencionadas barreiras físicas, de acesso à informação, tecnológicas e outras, enriquecendo o conteúdo abordado nesta seção.

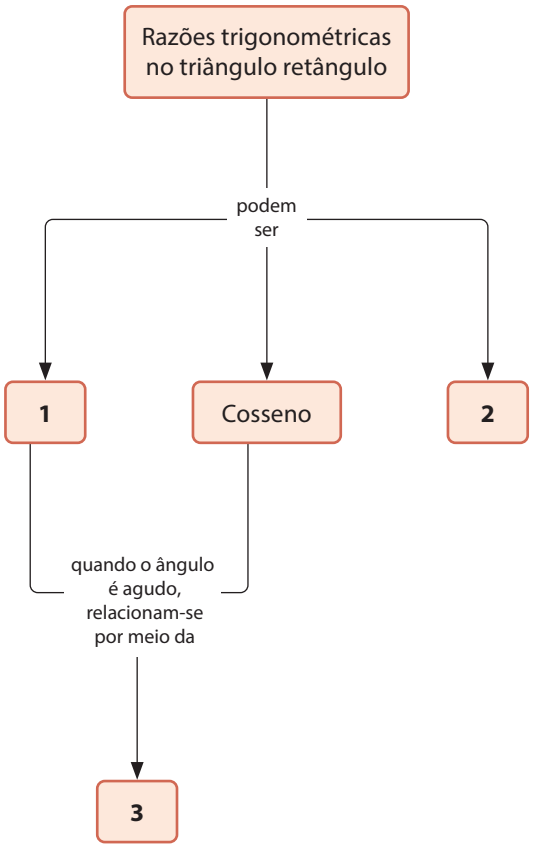
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 7

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir, com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Tangente

B. Relação fundamental da Trigonometria

C. Seno

Conexões entre conceitos. A – 2; B – 3; C – 1.

SUGESTÃO DE AMPLIAÇÃO

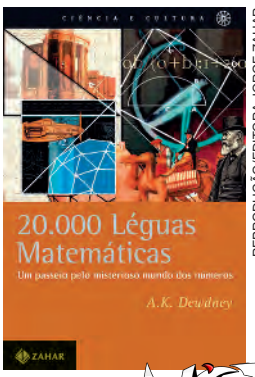
Livro

20.000 léguas matemáticas: um passeio pelo misterioso mundo dos números

A. K. Dewdney

Rio de Janeiro: Zahar, 2000.

Uma viagem à Grécia e a outros países apresenta ao leitor a discussão e a explicação de alguns dos grandes mistérios matemáticos. Além disso, garante diversão e conhecimentos gerais interessantes para estudantes de Ensino Médio. Com um texto bem-humorado, o autor conduz seus estudos sobre teoremas, átomos, equações, Trigonometria e outros assuntos, cativando, informando e, ao mesmo tempo, levando o leitor a ampliar a matemática vista na escola e fora dela. Trata-se de uma leitura que estimula o aprendizado, tirando dúvidas e divertindo.

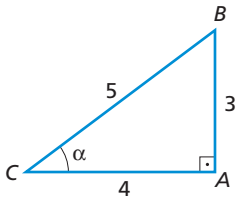


REPRODUÇÃO/EDITORA JORGE ZAHAR

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. No triângulo retângulo *ABC* representado a seguir, os valores do seno, do cosseno e da tangente do ângulo de abertura medindo α são, respectivamente: **Q1.** Alternativa **c.**



a. $\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{4}{3}$

b. $\frac{4}{5}; \frac{3}{5}; \frac{3}{4}$

c. $\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{3}{4}$

d. $\frac{5}{3}; \frac{5}{4}; \frac{4}{3}$

Q2. O ângulo agudo com abertura medindo α de um triângulo retângulo é tal que sen α = 0,6. Podemos, então, afirmar que: cos α = ▬ e tg α = ▬. **Q2.** Alternativa **b.**

a. 0,6; 1

b. 0,8; 0,75

c. 0,75; 0,8

d. 1; 0,6

Q3. Um triângulo retângulo tem um ângulo medindo 30° de abertura. Se a hipotenusa desse triângulo mede 8 cm de comprimento, então seus catetos medem ▬ cm e aproximadamente ▬ cm de comprimento. **Q3.** Alternativa **a.**

a. 4; 6,93

b. 4; 5

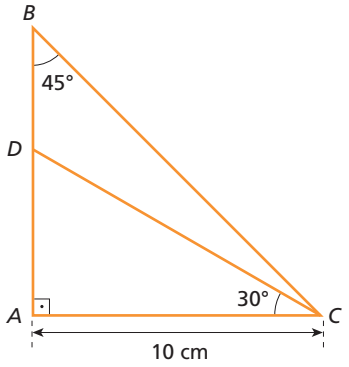
c. 4,5; 5

d. 5; 6

Q4. Ao levantar voo, um avião percorre uma trajetória retilínea com abertura do ângulo de inclinação medindo 20° com a horizontal. Determine a medida da altitude, em metro, em que o avião estará quando passar sobre um prédio situado a 1,5 km do ponto de partida. (*Dados*: sen 20° ≃ 0,3420; cos 20° ≃ 0,9397; tg 20° ≃ 0,3640)
Q4. Aproximadamente 546 m.

Q5. Uma turista está em uma das margens de um rio. Perpendicularmente a essa margem, ela avista uma pedra na outra margem. Depois de percorrer 35 m de medida de comprimento pela beira do rio, avista a mesma pedra sob um ângulo com abertura que mede 55° em relação à sua trajetória. Qual é, nesse local, a medida de largura aproximada do rio? **Q5.** Aproximadamente 50 m.

Q6. Considerando a figura a seguir, a medida de comprimento do segmento $\overline{BD}$ é ▬ cm. **Q6.** Alternativa **a.**



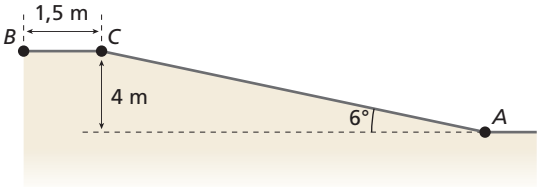
a. $\frac{10(3-\sqrt{3})}{3}$

b. $\frac{10\sqrt{3}}{2}$

c. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$

d. 1

Q7. Uma rampa para pedestres tem 6° de medida da abertura do ângulo de inclinação e 4 m de medida de altura.



Logo, a medida de distância (*d*) entre o início *A* da rampa e a porta *B* do prédio a que ela dá acesso mede aproximadamente: **Q7.** Alternativa **d.**

a. 33,8 m

b. 40,9 m

c. 38,3 m

d. 39,8 m

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7
Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.	X	X					
Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.			X	X	X	X	X
Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.					X		X

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORAa

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

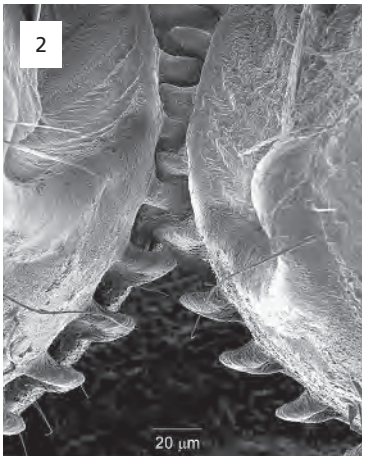
Capítulo 8

CICLO TRIGONOMÉTRICO E TRIGONOMETRIA EM UM TRIÂNGULO QUALQUER

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Exposição de engrenagem antiga de moenda de cana, no município de Valença (RJ). Foto de 2021.

FRANKRAMSPOTT/ISTOCK/GETTY IMAGES



MALCOLM BURROWS GREG SUTTON - UNIVERSIDADE DE CAMBRIDGE, CAMBRIDGE

1. Inseto *Issus coleoptratus*.
2. Engrenagens nas patas do inseto *Issus coleoptratus*. Esta imagem foi obtida por um microscópio eletrônico com ampliação de 352 vezes.

As engrenagens são peças dentadas, normalmente circulares, que, unidas a eixos, transmitem movimento a diversos tipos de máquina. As engrenagens funcionam em pares, encaixando os dentes de uma na outra.

A primeira engrenagem de que se tem conhecimento foi usada em uma carruagem chinesa do ano 260 a.C., chamada "carro que segue o sul", que movia uma estátua com um braço estendido apontando em certa direção; era usada como uma espécie de bússola. Os primeiros registros escritos de uma engrenagem foram feitos por Aristóteles, no século IV a.C.

Em 2013, cientistas descobriram uma estrutura similar a uma engrenagem em um inseto, o *Issus coleoptratus*, uma espécie de percevejo encontrada nos jardins europeus. Os pesquisadores afirmam que essa engrenagem biológica é muito parecida com os mecanismos utilizados nas máquinas.

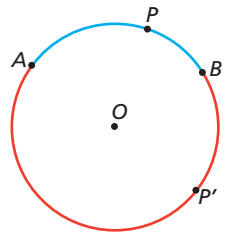
Nos capítulos anteriores, estudamos as razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) em um triângulo retângulo e as usamos para obter a medida do comprimento de lados e a medida da abertura de ângulos. No entanto, elas foram definidas apenas para ângulos agudos e não se mostram práticas para trabalhar com triângulos que não sejam retângulos.

Neste capítulo, definiremos os conceitos de seno, cosseno e tangente em uma circunferência, o que possibilitará a aplicação da Trigonometria a quaisquer triângulos e servirá de base para o desenvolvimento do próximo capítulo.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Arcos de uma circunferência

Dois pontos, A e B, de uma circunferência a dividem em duas partes. Cada uma das partes, incluindo esses pontos, é chamada de **arco de circunferência**.



Nessa figura, temos:

- $\overset{\frown}{APB}$: arco de extremidades A e B, contendo P;
- $\overset{\frown}{AP'B}$: arco de extremidades A e B, contendo P'.

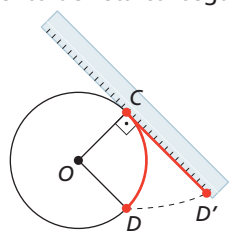
Se não houver dúvida sobre qual das partes estamos considerando, podemos indicar o arco apenas por $\overset{\frown}{AB}$.

Podemos obter duas medidas de um arco: a medida do comprimento e a medida angular.

Medida de comprimento de um arco

A **medida de comprimento** de um arco é sua medida linear e pode ser indicada em milímetro, centímetro, metro etc.

Considere o arco $\overset{\frown}{CD}$, destacado em vermelho na figura a seguir. Se pudéssemos retificar esse arco transformando-o em um segmento de reta conseguiríamos medir seu comprimento com uma régua graduada.



No Ensino Fundamental, foi trabalhado o conceito de medida de comprimento de uma circunferência (C), chegando-se à fórmula $\mathbf{C = 2\pi r}$ (sendo r a medida de comprimento do raio da circunferência). Essa fórmula será usada para obter a medida de comprimento de arcos de circunferência, como na **atividade resolvida** R1.

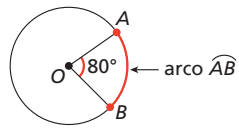
Medida angular de um arco

Observação

Um ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é denominado **ângulo central**.

Sempre que nos referimos à medida de um arco de circunferência, estamos fazendo referência à sua **medida angular**, que é igual à medida de abertura do ângulo central correspondente.

Por exemplo, na figura representada a seguir, temos o arco $\overset{\frown}{AB}$ (destacado em vermelho) e seu ângulo central correspondente $A\hat{O}B$.



Como a abertura do ângulo $A\hat{O}B$ mede 80°, o arco $\overset{\frown}{AB}$ também mede 80°.

Indicamos: $m(\overset{\frown}{AB}) = m(A\hat{O}B) = 80°$

Geralmente, as unidades usadas para medir um arco são o grau ou o radiano.

O grau

Considere uma circunferência dividida em 360 arcos de medidas de comprimento iguais. Define-se **um grau** (1°) como a medida angular de cada um desses arcos. Por isso, dizemos que a circunferência mede 360°.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A ideia de dividir uma circunferência em 360 partes surgiu com os astrônomos babilônicos milênios antes da Era Comum. Acredita-se que esses estudiosos tenham escolhido essa divisão ao notar que um ano tem aproximadamente 360 dias. Essa divisão também foi adotada por matemáticos gregos, como Hiparco de Niceia (século II a.C.) e Ptolomeu de Alexandria (*c.* 90-168 d.C.), tornando-se usual na Geometria e na Trigonometria.

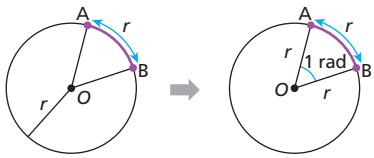
Também foram criados **submúltiplos do grau**, como se pode observar a seguir.

- Dividindo 1 grau em 60 partes iguais, obtemos 1 minuto (1′). Logo, 1° = 60′.
- Dividindo 1 minuto em 60 partes iguais, obtemos 1 segundo (1″). Logo, 1′ = 60″.

O radiano

Para medir arcos e abertura de ângulos, também podemos usar o **radiano**. A medida angular de um arco é 1 radiano (1 rad) quando sua medida de comprimento é igual à medida de comprimento do raio da circunferência que o contém.

O comprimento do raio da circunferência representada a seguir mede *r*. Como a medida de comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é *r*, sua medida angular é 1 radiano. Indicamos: $m(\overset{\frown}{AB}) = 1$ rad.



Na **atividade resolvida R2**, concluiremos que uma circunferência (ou seja, um arco de 360°) mede 2π rad.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades resolvidas

R1. Em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 8 cm, está contido um arco com medida angular de 50°. Calcular a medida de comprimento desse arco.

▶ **Resolução**

Lembrando que a medida angular de uma circunferência é 360° e sua medida de comprimento é dada por $2\pi r$, em que *r* é a medida de comprimento do raio da circunferência, podemos aplicar a regra de três:

medida angular do arco (em grau)		medida de comprimento (em cm)
360	———	$2\pi \cdot 8$
50	———	x

$x \cdot 360 = 50 \cdot 2\pi \cdot 8$

$x = \frac{2\pi \cdot 8 \cdot 50}{360} = \frac{20\pi}{9}$

Substituindo π por 3,14, obtemos:

$$x \simeq \frac{20 \cdot 3{,}14}{9} \Rightarrow x \simeq 6{,}98$$

Logo, o comprimento do arco mede aproximadamente 6,98 cm.

R2. Calcular a medida angular, em radiano, de uma circunferência.

▶ **Resolução**

Dada uma circunferência cujo comprimento do raio mede *r*, um arco de medida angular 1 rad tem a medida de comprimento igual a *r*. Como a medida de comprimento da circunferência é $2\pi r$, temos:

medida angular do arco (em rad)		medida de comprimento (em cm)
1	———	r
α	———	$2\pi r$

$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

Logo, uma circunferência mede 2π rad.

Observação

Lembre-se de que π é um número irracional cujo valor é 3,14159265...
Para fins de cálculos, é comum adotarmos como aproximação $\pi \simeq 3{,}14$.

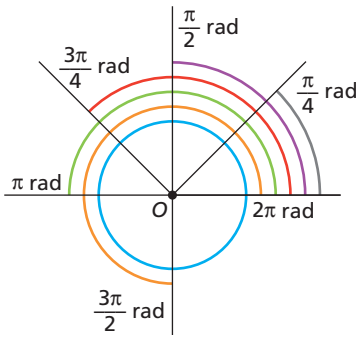
Relação entre grau e radiano

Em uma circunferência, se um ângulo central determina um arco que mede 360° ou 2π rad, esse arco corresponde à circunferência. Assim, um ângulo central raso determina um arco que mede 180° ou π rad, que corresponde a uma semicircunferência.

O quadro a seguir fornece a relação entre as medidas angulares, em grau e em radiano, de alguns arcos. Observe também a figura a seguir.

Relação entre algumas medidas angulares em grau e em radiano

Grau	0	45	90	135	180	270	360
Radiano	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Considere os exemplos a seguir.

a. Vamos obter a medida angular, em grau, de um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad.

medida angular do arco (em grau)		medida angular do arco (em rad)
180		π
x		$\frac{\pi}{6}$

$$x = \frac{180 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} = 30$$

Assim, um arco de $\frac{\pi}{6}$ rad mede 30°.

b. Vamos obter a medida angular, em radiano, de um arco de 200°.

medida angular do arco (em rad)		medida angular do arco (em grau)
π		180
x		200

$$x = \frac{200 \cdot \pi}{180} = \frac{10\pi}{9}$$

Assim, um arco de 200° mede $\frac{10\pi}{9}$ rad.

c. Vamos determinar a medida angular x, em grau e em radiano, de um arco com aproximadamente 12,56 cm de medida de comprimento, em uma circunferência com 12 cm de medida de comprimento do raio.

- Medida angular em grau:

medida de comprimento (em cm)		medida angular do arco (em grau)
12,56		x
$2 \cdot \pi \cdot 12$		360

$$x \simeq \frac{360 \cdot 12{,}56}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 12} = 60$$

Assim, o arco mede aproximadamente 60°.

- Medida angular em radiano:

medida de comprimento (em cm)		medida angular do arco (em grau)
12,56		x
$2 \cdot \pi \cdot 12$		2π

$$x = \frac{2\pi \cdot 12{,}56}{2 \cdot \pi \cdot 12} = \frac{12{,}56}{12} \simeq 1{,}047$$

Assim, o arco mede aproximadamente 1,047 rad.

Observação

Pela definição de radiano, também poderíamos ter feito o cálculo da medida angular em radiano, assim:

medida de comprimento (em cm)		medida angular do arco (em rad)
12,56		x
12		1

$$x = \frac{12{,}56}{12} \simeq 1{,}047$$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Espera-se que os estudantes percebam que a razão é constante e aproximadamente igual a 3,14.

2. Aproximadamente 30,5 cm.

3 b. Não, as medidas de comprimento dos arcos são diferentes, pois dependem da medida de comprimento do raio da circunferência que contém cada um deles.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

3 a. Sim, as medidas angulares desses arcos são iguais, pois o ângulo central de medida de abertura α é o mesmo.

1. **SOFTWARE** Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, realize os procedimentos a seguir.

1. Trace uma circunferência de centro A passando por um ponto qualquer B.
2. Trace uma reta passando pelos pontos A e B; essa reta interceptará a circunferência em B e em outro ponto, que denominaremos D; depois, trace o segmento $\overline{BD}$, que é um diâmetro da circunferência.
3. Com a ferramenta para medir comprimentos, obtenha a medida C do comprimento da circunferência e a medida d do comprimento do diâmetro (segmento $\overline{BD}$).
4. Com a calculadora do *software*, calcule $\frac{C}{d}$.
5. Movimente os pontos A e B.

O que acontece com a razão calculada no passo 5?

2. Um pêndulo oscila e forma, entre suas posições extremas, um ângulo cuja abertura mede 70°. Sabendo que o comprimento desse pêndulo mede 25 cm, calcule a medida de comprimento do arco que ele descreve.

3. **ARGUMENTAÇÃO** **SOFTWARE** Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, construa duas circunferências concêntricas, com medidas de comprimento dos raios diferentes. Em seguida, represente um ângulo central com medida de abertura α qualquer, que determine, nessas circunferências, respectivamente os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$.

a. As medidas angulares de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ são iguais? Justifique sua resposta.

b. As medidas de comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ são iguais? Justifique sua resposta.

4. Estabeleça, em grau, a medida angular dos arcos de:

a. $\frac{5\pi}{4}$ rad; **4 a.** 225° **b.** $\frac{7\pi}{6}$ rad; **4 b.** 210° **c.** $\frac{\pi}{2}$ rad. **4 c.** 90°

5. Determine, em radiano, a medida angular dos arcos de:

a. 30°; **5 a.** $\frac{\pi}{6}$ rad

b. 60°; **5 b.** $\frac{\pi}{3}$ rad

c. 120°; **5 c.** $\frac{2\pi}{3}$ rad

d. 150°; **5 d.** $\frac{5\pi}{6}$ rad

e. 210°; **5 e.** $\frac{7\pi}{6}$ rad

f. 240°. **5 f.** $\frac{4\pi}{3}$ rad

6. Determine, em grau e em radiano, a medida angular do arco que representa $\frac{2}{5}$ da circunferência. **6.** 144°; $\frac{4\pi}{5}$ rad.

7. O ponteiro das horas de um relógio tem 7 cm de medida de comprimento.

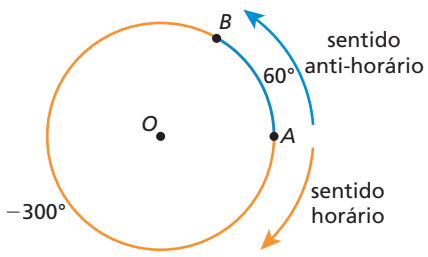
a. Quantos graus esse ponteiro percorre das 13 h às 17 h? Qual é essa medida em radiano? **7 a.** 120°; $\frac{2\pi}{3}$ rad.

b. Quantos centímetros a extremidade do ponteiro percorre das 13 h às 17 h? **7 b.** Aproximadamente 14,65 cm.

Ciclo trigonométrico

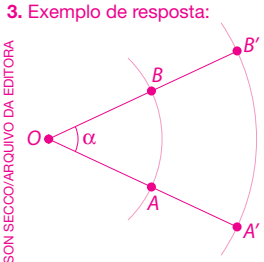
Em uma circunferência, pode-se adotar dois sentidos: o sentido horário e o sentido anti-horário. Na circunferência representada a seguir, sendo A o ponto de partida, estabelecemos:

- o sentido anti-horário para medidas angulares positivas: $m(\overset{\frown}{AB}) = 60°$;
- o sentido horário para medidas angulares negativas: $m(\overset{\frown}{AB}) = -300°$.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Exemplo de resposta:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

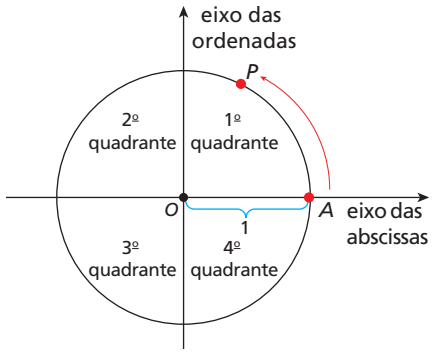
Observação

Daqui em diante, convencionamos que a notação $\overset{\frown}{AB}$ representa um arco da circunferência orientada no sentido anti-horário, com origem em A e extremidade em B.

A **circunferência trigonométrica**, ou **ciclo trigonométrico**, tem centro na origem $O(0, 0)$ de um plano cartesiano e o comprimento do raio mede 1 unidade de medida de comprimento. O **eixo das abscissas** e o **eixo das ordenadas** do plano cartesiano dividem o ciclo em quatro **quadrantes**. No ciclo trigonométrico, o ponto $A(1, 0)$ é a **origem** de todos os arcos, ou seja, é o ponto a partir do qual percorremos a circunferência até um ponto P qualquer para determinar o arco $\overset{\frown}{AP}$ (P é a extremidade do arco). Como as medidas angulares são positivas no sentido anti-horário, associaremos, a cada ponto P da circunferência, a medida angular de $\overset{\frown}{AP}$ tal que $0 \text{ rad} \leqslant m(\overset{\frown}{AP}) \leqslant 2\pi \text{ rad}$, ou $0° \leqslant m(\overset{\frown}{AP}) \leqslant 360°$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Confira os quadrantes no ciclo trigonométrico a seguir.

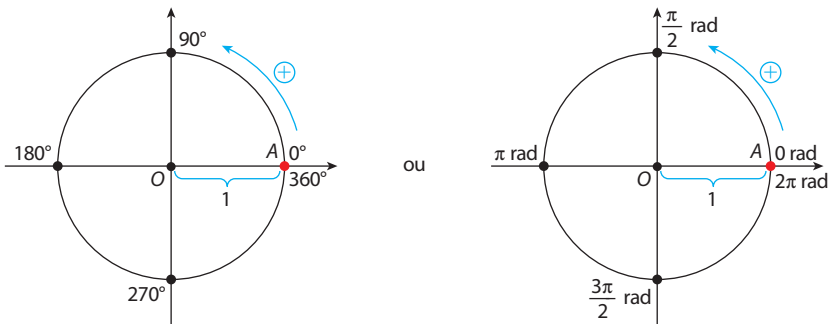


Observação

No ciclo trigonométrico, pelo fato de a medida de comprimento do raio ser unitária, a medida angular de um arco em radiano é numericamente igual à sua medida de comprimento.

Observe que a medida angular de um arco do 1º quadrante, por exemplo, está entre 0° e 90°.

As intersecções entre os eixos e o ciclo trigonométrico são as extremidades dos arcos de 0°, 90°, 180°, 270° e 360° $\left(\text{ou } 0 \text{ rad}, \frac{\pi}{2} \text{ rad}, \pi \text{ rad}, \frac{3\pi}{2} \text{ rad e } 2\pi \text{ rad}\right)$.



Observação

Quando a extremidade *P* de um arco $\overset{\frown}{AP}$ pertence a algum quadrante, dizemos que o arco $\overset{\frown}{AP}$ é um arco desse quadrante.

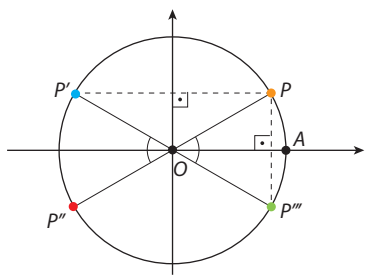
A partir do que verificamos para o primeiro quadrante, responda: Entre quais valores, em grau, está a medida angular de um arco do 2º quadrante? E em radiano?

Questão. No segundo quadrante, a medida angular de um arco está entre 90° e 180°. Já em radiano está entre $\frac{\pi}{2}$ rad e π rad.

Simetria no ciclo trigonométrico

Vamos estudar três tipos de simetria no ciclo trigonométrico: em relação ao eixo das ordenadas, em relação à origem *O* e em relação ao eixo das abscissas.

Considere a figura a seguir.



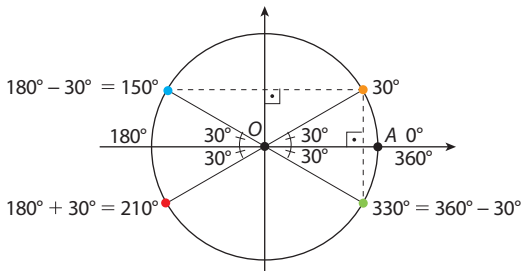
Na figura, temos que:

- *P* e *P'* são simétricos em relação ao eixo das ordenadas;
- *P* e *P''* são simétricos em relação à origem *O*;
- *P* e *P'''* são simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Se as extremidades de dois arcos são pontos que apresentam uma dessas simetrias, dizemos que os arcos são **arcos simétricos**.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Considere o exemplo.
Dado o arco de 30°, vamos obter as medidas angulares de seus arcos simétricos.
Observe o ciclo trigonométrico representado a seguir.



As medidas angulares de seus arcos simétricos são:
- em relação ao eixo das ordenadas: 180° − 30° = 150°;
- em relação à origem *O*: 180° + 30° = 210°;
- em relação ao eixo das abscissas: 360° − 30° = 330°.

Esse mesmo raciocínio pode ser usado para outros arcos, medidos em grau ou em radiano.

Atividade resolvida

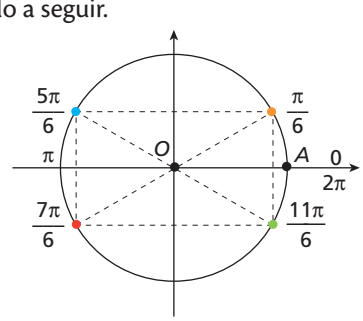
R3. Determinar as medidas angulares, em radiano, dos arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ rad em relação ao eixo das ordenadas, à origem *O* e ao eixo das abscissas.

▶ Resolução

Os arcos simétricos ao arco de $\frac{\pi}{6}$ medem:

- em relação ao eixo das ordenadas: $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$;
- em relação à origem *O*: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$;
- em relação ao eixo das abscissas: $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Observe a solução gráfica no ciclo trigonométrico representado a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Em um ciclo trigonométrico, quando um valor, sem unidade de medida angular, estiver associado a um ponto, subentende-se que esse valor representa a medida angular de um arco em radiano.

8. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

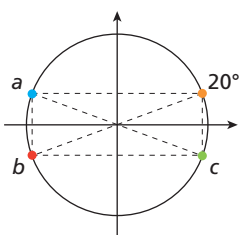
8. No caderno, represente um ciclo trigonométrico e assinale os pontos que são extremidades dos arcos que medem 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° e 360°.

9. Considere o ciclo trigonométrico representado na atividade anterior. Determine, em radiano, as medidas angulares dos arcos indicados no ciclo.

9. Resposta no *Suplemento para o professor*.

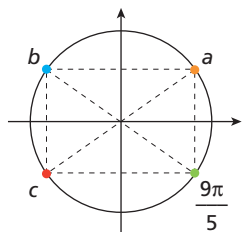
10. Calcule as medidas angulares *a*, *b* e *c* dos arcos nos ciclos trigonométricos representados a seguir.

a.



10 a. $a = 160°$, $b = 200°$, $c = 340°$.

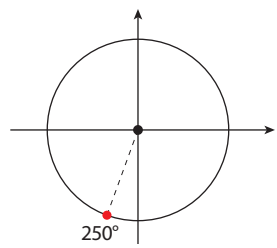
b.



10 b. $a = \frac{\pi}{5}$, $b = \frac{4\pi}{5}$, $c = \frac{6\pi}{5}$.

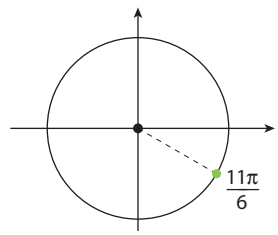
11. Obtenha a medida angular dos arcos do 1º quadrante que são simétricos aos arcos cujas medidas angulares estão indicadas nas figuras.

a.



11 a. 70°

b.



11 b. $\frac{\pi}{6}$ rad

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

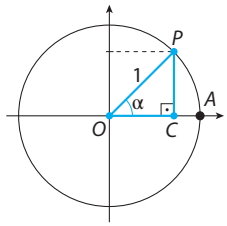
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Seno, cosseno e tangente

Já estudamos o seno, o cosseno e a tangente de ângulos agudos em um triângulo retângulo. Agora, vamos ampliar esses conceitos para arcos do ciclo trigonométrico.

Seno e cosseno de um arco

Considere um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α no 1º quadrante do ciclo trigonométrico.



Lembrando que o ciclo trigonométrico tem medida de comprimento do raio unitária, no triângulo *OPC* temos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura } \alpha}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}} = \frac{CP}{OP} = \frac{CP}{1} = CP$$

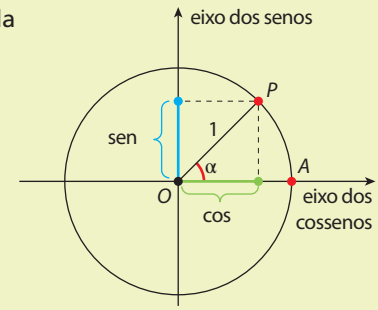
$$\cos\alpha = \frac{\text{medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura } \alpha}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}} = \frac{OC}{OP} = \frac{OC}{1} = OC$$

Ou seja, nesse caso, o seno de α corresponde à ordenada do ponto *P*, e o cosseno de α, à abscissa de *P*.

Essa conclusão, obtida a partir de um arco do 1º quadrante, pode ser ampliada. Vamos definir seno e cosseno para qualquer arco do ciclo trigonométrico.

Para todo arco $\overset{\frown}{AP}$ do ciclo trigonométrico, de medida angular α rad, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, temos:

- o **seno** de α é a ordenada do ponto *P*;
- o **cosseno** de α é a abscissa do ponto *P*.



Assim, podemos chamar o eixo das ordenadas de **eixo dos senos** e o eixo das abscissas de **eixo dos cossenos**.

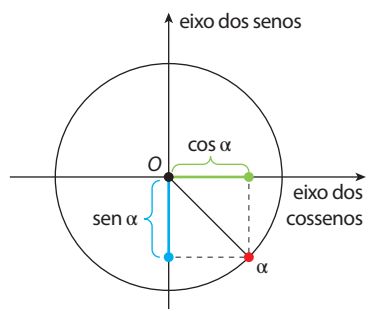
Note, portanto, que o seno e o cosseno podem ser positivos ou negativos, dependendo do quadrante ao qual o arco pertence.

Considere o exemplo a seguir.

Vamos analisar o sinal do seno e do cosseno de um arco do 4º quadrante de medida angular α.

Observando o ciclo, concluímos que:

- seno de α é negativo ($\operatorname{sen}\alpha < 0$);
- cosseno de α é positivo ($\cos\alpha > 0$).



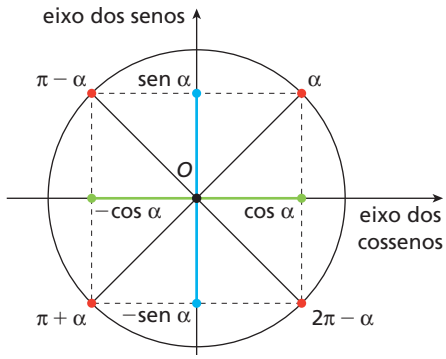
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Analise o ciclo trigonométrico em que está indicada a medida angular α rad de um arco do 1º quadrante e as medidas angulares de seus arcos simétricos.

Pelo ciclo, podemos concluir que:

- para a medida angular $\pi - \alpha$, temos sen $(\pi - \alpha) =$ $= \text{sen } \alpha$ e cos $(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$;
- para a medida angular $\pi + \alpha$, temos sen $(\pi + \alpha) =$ $= -\text{sen } \alpha$ e cos $(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$;
- para a medida angular $2\pi - \alpha$, temos sen $(2\pi - \alpha) =$ $= -\text{sen } \alpha$ e cos $(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$.



Atividades resolvidas

R4. Considere as medidas angulares π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{4}$ e $\frac{10\pi}{9}$ de alguns arcos, represente-as no ciclo trigonométrico e escreva os senos dessas medidas em ordem crescente.

▶ **Resolução**

Como não aparece a unidade, consideramos que as medidas angulares dos arcos estão em radiano. Para facilitar, podemos converter essas medidas angulares em grau:

$\pi = 180°$

$\frac{\pi}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$

$\frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

$\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \cdot 180°}{2} = 270°$

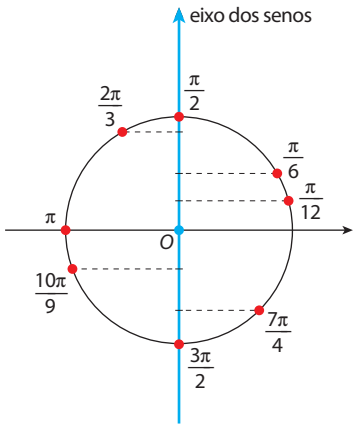
$\frac{2\pi}{3} = \frac{2 \cdot 180°}{3} = 120°$

$\frac{\pi}{12} = \frac{180°}{12} = 15°$

$\frac{7\pi}{4} = \frac{7 \cdot 180°}{4} = 315°$

$\frac{10\pi}{9} = \frac{10 \cdot 180°}{9} = 200°$

Agora, vamos representá-las no ciclo trigonométrico.



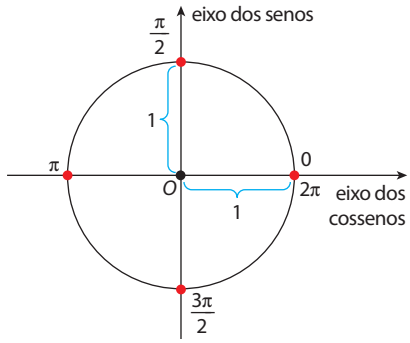
Observando o eixo dos senos, escrevemos os senos em ordem crescente:

$\text{sen } \frac{3\pi}{2}, \text{sen } \frac{7\pi}{4}, \text{sen } \frac{10\pi}{9}, \text{sen } \pi, \text{sen } \frac{\pi}{12}, \text{sen } \frac{\pi}{6}, \text{sen } \frac{2\pi}{3}, \text{sen } \frac{\pi}{2}$

R5. Obter o seno e o cosseno de 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

▶ **Resolução**

Vamos representar essas medidas angulares no ciclo trigonométrico.



Lembrando que o raio do ciclo mede 1 unidade de medida de comprimento, obtemos:

$\text{sen } 0 = \text{sen } 2\pi = 0$ $\quad$ $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$

$\text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$ $\quad$ $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\text{sen } \pi = 0$ $\quad$ $\cos \pi = -1$

$\text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$ $\quad$ $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

Observação

Em um ciclo trigonométrico, sendo α a medida angular de um arco, sempre teremos:

$-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$ $\quad$ $-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$

R6. Obter o seno e o cosseno de 150°.

▶ **Resolução**

Considerando que o arco de 150° está no 2º quadrante, temos:

$150° = 180° - x$, em que x é a medida do arco simétrico do 1º quadrante

Logo, $x = 30°$.

Como o arco de 150° está no 2º quadrante, temos:

- sen 150° é positivo e tem o mesmo valor que sen 30°;
- cos 150° é negativo e vale o oposto de cos 30°.

Como conhecemos os valores para 30°, concluímos que:

- $\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 150° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Podemos aplicar raciocínio similar para arcos de outros quadrantes.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

14. $\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$

Observação

Vamos relembrar os valores do seno e do cosseno dos ângulos notáveis.

Seno e cosseno de 30°, 45° e 60°

	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

15 a. Aproximadamente 0,8.

15 b. Aproximadamente –0,8.

15 c. Aproximadamente –0,8.

16 a. Aproximadamente –0,9.

16 b. Aproximadamente –0,9.

16 c. Aproximadamente 0,9.

12 a. sen $\alpha > 0$; cos $\alpha > 0$. **12 b.** sen $\alpha > 0$; cos $\alpha < 0$. **12 c.** sen $\alpha < 0$; cos $\alpha < 0$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

12. Determine o sinal do seno e do cosseno de arcos de medida α do:

a. 1º quadrante; **b.** 2º quadrante; **c.** 3º quadrante.

13. Indique se cada expressão a seguir é positiva ou negativa.

a. sen 215° · sen 280° **13 a.** Positiva.

b. (cos 50° + cos 325°) · (cos 215° + cos 145°) **13 b.** Negativa.

14. Escreva os cossenos de 0, $\frac{4\pi}{7}$, $\frac{6\pi}{7}$, π e $\frac{8\pi}{5}$ em ordem crescente sem calcular seus valores.

15. Dado sen 55° ≃ 0,8, calcule o valor aproximado de:

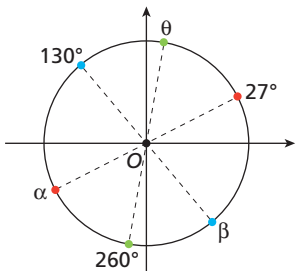
a. sen 125°; **b.** sen 235°; **c.** sen 305°.

16. Sabendo que cos 25° ≃ 0,9, registre o valor aproximado de:

a. cos 155°; **b.** cos 205°; **c.** cos 335°.

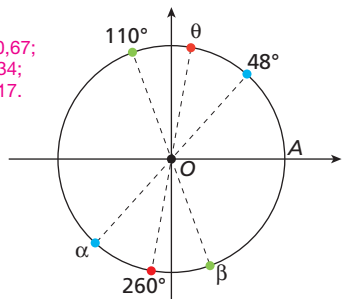
17. Descubra os valores aproximados de sen α, sen β e sen θ, sabendo que os pontos de mesma cor são extremidades de arcos simétricos em relação à origem *O* cujas medidas angulares estão indicadas no ciclo a seguir. (*Dados*: sen 27° ≃ 0,45; sen 50° ≃ 0,77 e sen 80° ≃ 0,98)

17. sen $\alpha \simeq -0{,}45$; sen $\beta \simeq -0{,}77$; sen $\theta \simeq 0{,}98$.



18. Descubra os valores aproximados de cos α, cos β e cos θ, sabendo que os pontos de mesma cor são extremidades de arcos simétricos em relação à origem *O* cujas medidas angulares estão indicadas no ciclo a seguir. (*Dados*: cos 48° ≃ 0,67; cos 70° ≃ 0,34 e cos 80° ≃ 0,17)

18. cos $\alpha \simeq -0{,}67$; cos $\beta \simeq 0{,}34$; cos $\theta \simeq 0{,}17$.



19. Determine o seno dos arcos simétricos ao arco de medida angular $\frac{\pi}{6}$ rad. **19.** $\text{sen } \frac{\pi}{6} = \text{sen } \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\text{sen } \frac{7\pi}{6} = \text{sen } \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

20. Calcule o valor das expressões.

a. $\text{sen } 2\pi + \cos 2\pi + \text{sen } \pi + \cos \pi$ **20 a.** 0

b. $\text{sen } \frac{\pi}{2} - \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}$ **20 b.** 2

c. $\text{sen } \frac{2\pi}{3} - \text{sen } \frac{11\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6}$ **20 c.** 0

d. $\dfrac{\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3}}{2 \cdot \text{sen } \frac{5\pi}{6}}$ **20 d.** $\frac{1}{2}$

21. Para calcular o seno de $\frac{2\pi}{5}$, Edna alterou a configuração da calculadora do seu celular do modo grau para o modo radiano. Digitando no painel a sequência de teclas [sin] [(] [2] [×] [π] [÷] [5] [)] [=], obteve 0,9510565162951.

Assim, concluiu que $\text{sen } \frac{2\pi}{5} \simeq 0{,}95$.

Agora, com a calculadora de um celular ou com uma calculadora científica, calcule os valores a seguir escrevendo o resultado com três casas decimais. **21 c.** 0,866

a. $\text{sen } \frac{\pi}{9}$ **21 a.** 0,342 **b.** $\text{sen } \frac{2\pi}{9}$ **21 b.** 0,643 **c.** $\text{sen } \frac{3\pi}{9}$

(*Observação*: O procedimento pode variar dependendo do modelo do aparelho. Em alguns, por exemplo, a medida angular deve ser digitada antes da tecla [sin]. Nas calculadoras científicas, também é preciso verificar se a unidade de medida angular utilizada – rad – está selecionada.)

22. Com base nos valores encontrados na atividade anterior, classifique cada igualdade em verdadeira ou falsa.

a. $2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{9} = \text{sen } \frac{2\pi}{9}$ **22 a.** Falsa.

b. $\text{sen } \frac{\pi}{9} + \text{sen } \frac{2\pi}{9} = \text{sen } \frac{3\pi}{9}$ **22 b.** Falsa.

23. Em que quadrantes os arcos têm seno e cosseno com mesmo sinal? Nesses quadrantes, para que valores de α tem-se sen α = cos α? **23.** 1º quadrante: $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 3º quadrante: $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

24. Dê as medidas angulares *x*, em grau, com $0° \leqslant x \leqslant 360°$, para as quais:

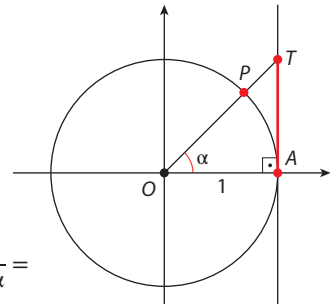
a. $\text{sen } x = \frac{1}{2}$ **24 a.** $x = 30°$ ou $x = 150°$.

b. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ **24 b.** $x = 135°$ ou $x = 225°$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Tangente de um arco



Considere o ciclo trigonométrico representado, um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α do 1º quadrante e a reta perpendicular ao eixo das abscissas pelo ponto A. Prolongando o segmento $\overline{OP}$, obtemos o ponto T na reta vertical, conforme mostra a figura.

Lembrando que o ciclo trigonométrico tem medida de comprimento do raio unitária, no triângulo AOT, temos:

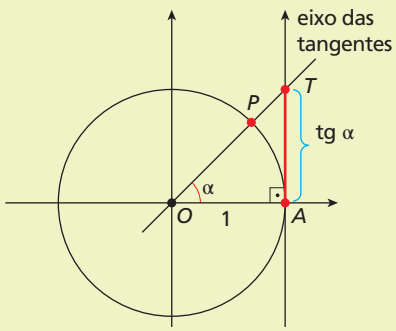
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura } \alpha}{\text{medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura } \alpha} =$$

$$= \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$$

Note que, nesse caso, a tangente de α corresponde à ordenada do ponto T.

Essa conclusão, obtida a partir de um arco do 1º quadrante, pode ser ampliada. Vamos definir tangente para qualquer arco do ciclo trigonométrico que não tenha extremidade no eixo das ordenadas.

Considere um arco $\overset{\frown}{AP}$ do ciclo trigonométrico, de medida angular α rad, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$. Seja T o ponto de intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a reta perpendicular ao eixo das abscissas, passando pelo ponto A.



A **tangente** de α é a ordenada do ponto T.

Observação

Note que a medida angular α rad do arco $\overset{\frown}{AP}$, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, tem as restrições $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ e $\alpha \neq \frac{3\pi}{2}$. Isso acontece porque, em arcos medindo $\frac{\pi}{2}$ rad e $\frac{3\pi}{2}$ rad, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ seria paralela à reta $\overleftrightarrow{AT}$ e, nesses casos, não existe um ponto T de intersecção dessas duas retas.

Verificamos que, para qualquer valor α, os valores de seno e cosseno estão contidos nos intervalos:

$$-1 \leqslant \text{sen } \alpha \leqslant 1$$

$$-1 \leqslant \cos \alpha \leqslant 1$$

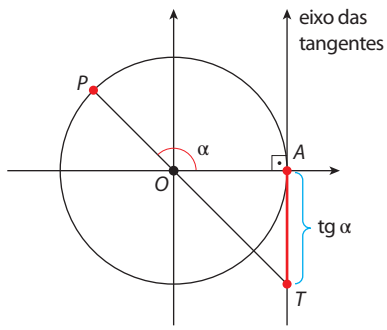
Observando a figura anterior, você acha que isso também é válido para tg α?

Questão. Não, pois não há limitação para tg α, uma vez que ela pode assumir qualquer valor real.

Vamos considerar a reta $\overleftrightarrow{AT}$ como **eixo das tangentes**, com origem A e o mesmo sentido e a mesma unidade de medida de comprimento do eixo dos senos.

Observe, portanto, que a tangente pode ser positiva ou negativa, dependendo do quadrante ao qual o arco pertence.

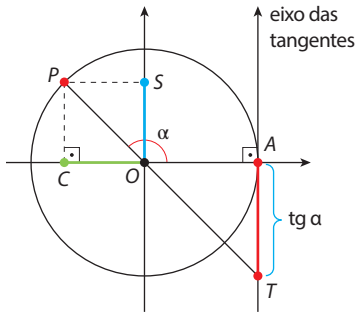
Considere um arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α do 2º quadrante. A intersecção do prolongamento do segmento $\overline{OP}$ com o eixo das tangentes é o ponto T, conforme mostra a figura a seguir. Observe que, nesse caso, tg α é negativa.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe a figura a seguir. Note que os triângulos *AOT* e *COP* são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA). Então:



$$\frac{AT}{OA} = \frac{CP}{OC} \Rightarrow \frac{AT}{1} = \frac{OS}{OC}$$

Assim, concluímos que, no ciclo trigonométrico, também vale a seguinte relação:

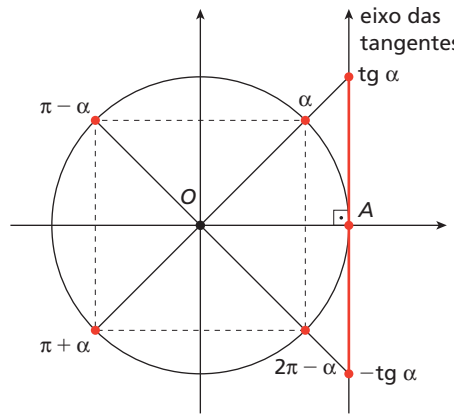
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

Perceba que essa relação é coerente com o fato de a tangente não estar definida para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e $\alpha = \frac{3\pi}{2}$; para tais arcos, cos α = 0, e assim teríamos uma divisão com o denominador zero, o que é impossível.

Agora, analise o ciclo trigonométrico em que está indicada a medida angular α rad de um arco do 1º quadrante e as medidas angulares de seus arcos simétricos.

Pelo ciclo, podemos concluir que:

- tg (π – α) = –tg α;
- tg (π + α) = tg α;
- tg (2π – α) = –tg α.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades resolvidas

R7. Considere as medidas angulares $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \frac{11\pi}{10}$ e $\frac{15\pi}{8}$ de alguns arcos, represente-as no ciclo trigonométrico e escreva as tangentes dessas medidas em ordem crescente.

▶ Resolução

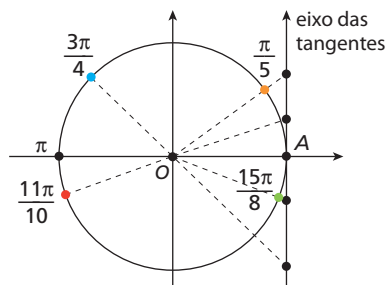
Inicialmente, vamos converter essas medidas angulares em grau e, em seguida, representá-las no ciclo trigonométrico.

$\frac{\pi}{5} = \frac{180°}{5} = 36°$

$\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$

$\frac{11\pi}{10} = \frac{11 \cdot 180°}{10} = 198°$

$\frac{15\pi}{8} = \frac{15 \cdot 180°}{8} = 337{,}5°$



Observando o eixo das tangentes, escrevemos as tangentes em ordem crescente:

$\text{tg } \frac{3\pi}{4}, \text{tg } \frac{15\pi}{8}, \text{tg } \frac{11\pi}{10}, \text{tg } \frac{\pi}{5}$

Observação

Na figura anterior, podemos notar que:

- tg 0 = 0;
- tg π = 0;
- tg 2π = 0.

R8. Obter a tangente de 120° e de 210°.

▶ **Resolução**

Considerando que os arcos de 120° e 210° estão, respectivamente, no 2º e no 3º quadrantes, temos:

$120° = 180° - x$, em que x é a medida do arco simétrico ao arco de 120° no 1º quadrante

$210° = 180° + y$, em que y é a medida do arco simétrico ao arco de 210° no 1º quadrante

Logo, $x = 60°$ e $y = 30°$.

Como os arcos de 120° e 210° estão, respectivamente, no 2º e no 3º quadrantes, temos:

- tg 120° é negativa e tem valor oposto a tg 60°;
- tg 210° é positiva e tem o mesmo valor que tg 30°.

Como conhecemos os valores das tangentes de 30° e 60°, concluímos que:

- $\text{tg } 120° = -\text{tg } 60° = -\sqrt{3}$
- $\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Podemos aplicar raciocínio similar para arcos de outros quadrantes.

Observação

Vamos relembrar os valores da tangente dos ângulos notáveis.

Tangente de 30°, 45° e 60°

	30° ou $\frac{\pi}{6}$	45° ou $\frac{\pi}{4}$	60° ou $\frac{\pi}{3}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

25. Positiva: 1º e 3º quadrantes; Negativa: 2º e 4º quadrantes.

28 a. Aproximadamente –0,7.

28 b. Aproximadamente 0,7.

28 c. Aproximadamente –0,7.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

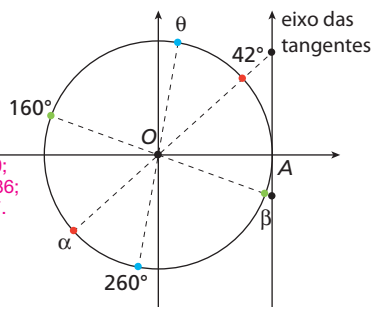
25. Para arcos de quais quadrantes a tangente é positiva? E para quais ela é negativa?

26. Indique se cada expressão a seguir é positiva ou negativa.

a. $(\text{tg } 40° + \text{tg } 220°) \cdot (\text{tg } 315° + \text{tg } 165°)$ **26 a.** Negativa.

b. $\frac{2 \cdot \text{tg } \frac{4\pi}{6} \cdot \text{tg } \frac{5\pi}{4}}{-2}$ **26 b.** Positiva.

27. Descubra os valores aproximados de tg α, tg β e tg θ, sabendo que os pontos de mesma cor são extremidades de arcos simétricos em relação à origem O cujas medidas angulares estão indicadas no ciclo a seguir. (*Dados*: tg 20° ≃ 0,36; tg 42° ≃ 0,90 e tg 80° ≃ 5,67)



27. tg α ≃ 0,90; tg β ≃ –0,36; tg θ ≃ 5,67.

28. Dado tg 35° ≃ 0,7, registre o valor aproximado de:

a. tg 145°; **b.** tg 215°; **c.** tg 325°.

29. ARGUMENTAÇÃO Escolha um arco de medida angular α, com $0° < \alpha < 45°$.

Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule tg α e tg 2α. Podemos afirmar que $\text{tg } 2\alpha = 2 \cdot \text{tg } \alpha$? Justifique sua resposta. **29.** Não. Exemplo de justificativa no *Suplemento para o professor*.

30. Considerando cos α ≃ 0,84 e sen α ≃ 0,55, responda às questões.

a. Sem efetuar cálculos, apenas analisando os valores dados anteriormente, verifique se o valor de tg α é maior ou menor que 1. **30 a.** Menor que 1.

b. Determine o valor aproximado de tg α e compare-o com a resposta do item anterior. **30 b.** Aproximadamente 0,65.

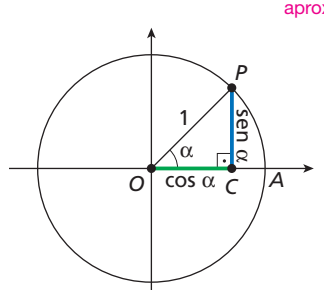
c. Em qual quadrante está o arco de medida angular α? **30 c.** 1º quadrante.

d. Determine se cada expressão é positiva ou negativa: tg (π − α), tg (π + α) e tg (2π − α). **30 d.** Negativa; positiva; negativa.

e. Determine os valores aproximados de tg (π − α), tg (π + α) e tg (2π − α). **30 e.** Aproximadamente –0,65; aproximadamente 0,65; aproximadamente –0,65.

Relação fundamental da Trigonometria

Observe o ciclo trigonométrico representado. O ponto P é extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida angular α rad; logo, P tem coordenadas cos α e sen α. As medidas de comprimento dos lados do triângulo COP são: $OC = \cos \alpha$, $CP = \text{sen } \alpha$ e $OP = 1$.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo *COP*, obtemos a **relação fundamental da Trigonometria**:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Verificamos que essa relação é válida para um arco do 1º quadrante. Agora, vamos conferir se ela continua válida para arcos dos demais quadrantes.

2º quadrante

- $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2(\pi - \alpha) = (-\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$

Então, $\operatorname{sen}^2(\pi - \alpha) + \cos^2(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

3º quadrante

- $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2(\pi + \alpha) = (-\operatorname{sen} \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos^2(\pi + \alpha) = (-\cos \alpha)^2 = \cos^2 \alpha$

Então, $\operatorname{sen}^2(\pi + \alpha) + \cos^2(\pi + \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

4º quadrante

- $\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2(2\pi - \alpha) = (-\operatorname{sen} \alpha)^2 = \operatorname{sen}^2 \alpha$
- $\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha \Rightarrow \cos^2(2\pi - \alpha) = \cos^2 \alpha$

Então, $\operatorname{sen}^2(2\pi - \alpha) + \cos^2(2\pi - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Verificamos, assim, que a relação é válida para um arco de qualquer quadrante.

Nos casos em que *P* pertence a um dos eixos, temos:

- $\operatorname{sen}^2 0 + \cos^2 0 = 0^2 + 1^2 = 1$
- $\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} + \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1^2 + 0^2 = 1$
- $\operatorname{sen}^2 \pi + \cos^2 \pi = 0^2 + (-1)^2 = 1$
- $\operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{2} + \cos^2 \frac{3\pi}{2} = (-1)^2 + 0^2 = 1$

Dessa forma, verificamos que, para qualquer arco $\overset{\frown}{AP}$ tal que $m(\overset{\frown}{AP}) = \alpha$ rad, com $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, a relação fundamental da Trigonometria é válida.

Atividades resolvidas

R9. Sabendo que $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}5$ e que α é a medida angular de um arco do 2º quadrante, obter $\cos \alpha$.

▶ **Resolução**

Podemos obter esse valor pela relação fundamental da Trigonometria:

$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$(0{,}5)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = 0{,}75$

Com o auxílio de uma calculadora, obtemos: $\cos \alpha \simeq \pm 0{,}87$

Como o arco é do 2º quadrante, concluímos que $\cos \alpha$ é negativo.

Logo, $\cos \alpha \simeq -0{,}87$.

R10. Sabe-se que α é a medida angular de um arco do 4º quadrante e que $\operatorname{tg} \alpha = -2{,}4$. Calcular $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$.

▶ **Resolução**

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -2{,}4$

$\operatorname{sen} \alpha = -2{,}4 \cdot \cos \alpha$

Substituindo o valor de $\operatorname{sen} \alpha$ na relação fundamental da Trigonometria, obtemos:

$(-2{,}4 \cdot \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$6{,}76 \cdot \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = \frac{100}{676}$

$\cos \alpha = \pm \frac{10}{26} = \pm \frac{5}{13}$

Como o arco é do 4º quadrante, $\cos \alpha = \frac{5}{13}$.

Substituindo $\cos \alpha$ por $\frac{5}{13}$ em $\operatorname{sen} \alpha = -2{,}4 \cdot \cos \alpha$, obtemos $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{12}{13}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

31. Determine $\cos x$ sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$ e que x é um arco do 1º quadrante. **31.** $\frac{12}{13}$

32. Se $\cos x = 0{,}8$ e x é um arco do 4º quadrante, determine:

a. $\operatorname{sen} x$; **32 a.** $-0{,}6$ **b.** $\operatorname{tg} x$. **32 b.** $-0{,}75$

33. Se α é um arco do 3º quadrante e $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, determine:

a. $\operatorname{sen} \alpha$; **33 a.** $-0{,}8$ **b.** $\cos \alpha$. **33 b.** $-0{,}6$

34. **ARGUMENTAÇÃO** Para um arco de medida angular α, é possível que $\operatorname{sen} \alpha = 0{,}8$ e $\cos \alpha = 0{,}4$? Justifique sua resposta.

34. Não, pois $0{,}8^2 + 0{,}4^2 \neq 1$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trigonometria em um triângulo qualquer

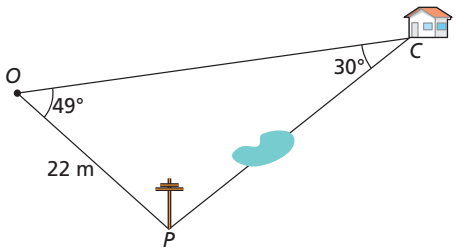
Agora, aplicaremos os conhecimentos sobre razões trigonométricas em um triângulo qualquer.

Lei dos senos

Acompanhe a situação a seguir.

Um fio elétrico será instalado entre um poste *P* e uma casa *C*, separados por um lago em um terreno plano. Como calcular a medida de comprimento de fio necessária?

Observe o esquema que representa essa situação.



As medidas de abertura dos ângulos, apresentadas no esquema, foram obtidas com o auxílio de um **teodolito**. Para obtermos a medida de comprimento *PC* do fio, podemos aplicar a **lei dos senos**, apresentada a seguir.

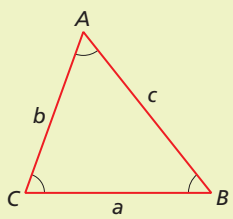
MANIT LARPLUECHAI/ALAMY/FOTOARENA

Topógrafa usando um teodolito.

Teodolito: instrumento de precisão para medir abertura de ângulos horizontais e de ângulos verticais, muito empregado em trabalhos geodésicos e topográficos.

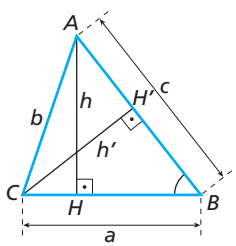
Em um triângulo qualquer, as medidas de comprimento dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos a eles, isto é:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$



Demonstração

Considere um triângulo acutângulo qualquer *ABC*, com altura $\overline{AH}$, de medida de comprimento *h*, relativa ao lado $\overline{BC}$.



Temos: $\operatorname{sen}\widehat{C} = \frac{h}{b}$ ou $h = b \cdot \operatorname{sen}\widehat{C}$, e $\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{h}{c}$ ou $h = c \cdot \operatorname{sen}\widehat{B}$

Portanto: $b \cdot \operatorname{sen}\widehat{C} = c \cdot \operatorname{sen}\widehat{B}$ ou $\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$ (I)

Agora, considere a altura $\overline{AH'}$, de medida de comprimento *h'*, relativa ao lado $\overline{AB}$.

Temos: $\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{h'}{b}$ ou $h' = b \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}$, e $\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{h'}{a}$, ou $h' = a \cdot \operatorname{sen}\widehat{B}$

Portanto: $b \cdot \operatorname{sen}\widehat{A} = a \cdot \operatorname{sen}\widehat{B}$ ou $\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}}$ (II)

De (I) e (II), obtemos: $\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$

Observação

Nesta demonstração, usamos um triângulo acutângulo. É possível demonstrar a lei dos senos também para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo, mas não apresentaremos essas demonstrações nesta coleção.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

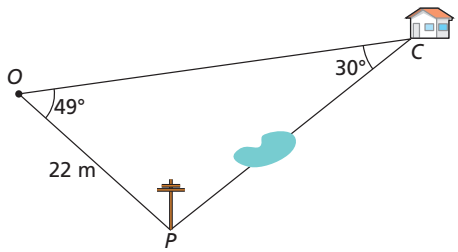
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R11. Retomar a situação anterior e calcular, aproximadamente, a medida de comprimento de fio necessária para unir o poste à casa.

▶ **Resolução**

Temos o seguinte esquema:



Pela lei dos senos:

$$\frac{PC}{\text{sen } 49°} = \frac{OP}{\text{sen } 30°}$$

Em uma calculadora, obtemos: sen 49° ≃ 0,75

Assim:

$$\frac{PC}{0,75} \simeq \frac{22}{0,5} \Rightarrow PC \simeq \frac{22 \cdot 0,75}{0,5} \Rightarrow PC \simeq 33$$

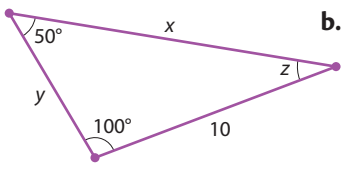
Portanto, são necessários cerca de 33 m de fio para unir o poste à casa.

R12. Considerando as aproximações para os senos apresentados no quadro a seguir, calcular as medidas *x*, *y* e *z* em cada item.

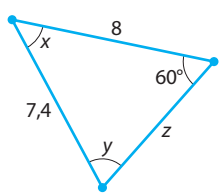
Aproximações para senos de 40°, 45°, 50°, 60°, 70° e 80°

α	sen α
40°	0,64
45°	0,71
50°	0,77
60°	0,87
70°	0,94
80°	0,98

a.



b.



▶ **Resolução**

a. Como a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é 180°, calculamos *z*:

$$z = 180° - 100° - 50° = 30°$$

Observando o triângulo, pela lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{10}{\text{sen } 50°} = \frac{x}{\text{sen } 100°} = \frac{y}{\text{sen } 30°}$$

Agora, calculamos cada uma das incógnitas separadamente:

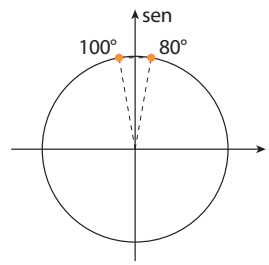
$$\frac{10}{\text{sen } 50°} = \frac{x}{\text{sen } 100°} \Rightarrow \frac{10}{0,77} \simeq \frac{x}{0,98} \Rightarrow x \simeq 12,7$$

$$\frac{10}{\text{sen } 50°} = \frac{y}{\text{sen } 30°} \Rightarrow \frac{10}{0,77} \simeq \frac{y}{0,5} \Rightarrow y \simeq 6,5$$

Assim, $x \simeq 12,7$, $y \simeq 6,5$ e $z = 30°$.

Observação

Lembre-se de que:



sen 100° = sen 80°

b. Pela lei dos senos, podemos escrever:

$$\frac{7,4}{\text{sen } 60°} = \frac{8}{\text{sen } y} = \frac{z}{\text{sen } x}$$

Primeiro, vamos calcular *y*:

$$\frac{7,4}{\text{sen } 60°} = \frac{8}{\text{sen } y} \Rightarrow \frac{7,4}{0,87} = \frac{8}{\text{sen } y} \Rightarrow \text{sen } y \simeq 0,94$$

Observando o quadro dado, concluímos que $y \simeq 70°$.

Agora, podemos calcular *x*:

$x \simeq 180° - 60° - 70° \Rightarrow x \simeq 50°$

Finalmente, calculamos *z*:

$$\frac{7,4}{\text{sen } 60°} = \frac{z}{\text{sen } x} \Rightarrow \frac{7,4}{0,87} \simeq \frac{z}{\text{sen } 50°} \Rightarrow \frac{7,4}{0,87} \simeq \frac{z}{0,77} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z \simeq \frac{7,4 \cdot 0,77}{0,87} \Rightarrow z \simeq 6,55$$

Portanto, $x \simeq 50°$, $y \simeq 70°$ e $z \simeq 6,55$.

ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

Observação

Algumas calculadoras têm a tecla [sin⁻¹], que fornece a medida de abertura do ângulo após a digitação do seno dessa medida de abertura.

Por exemplo, se não tivéssemos o quadro, poderíamos calcular a medida de abertura *y* no item **b** da **atividade resolvida R12** digitando:

[0] [.] [9] [4] [sin⁻¹] [=]

Nesse caso, obteríamos, aproximadamente, 70°.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

38. Aproximadamente 36,2 km.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

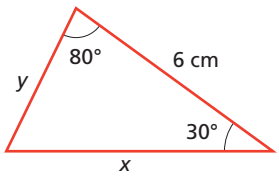
Na resolução das atividades a seguir, se necessário, utilize uma calculadora ou o quadro apresentado na **atividade resolvida R12**.

35. Calcule as medidas aproximadas x e y indicadas em cada figura.

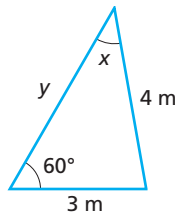
35 a. $x \simeq 6{,}3$ cm; $y \simeq 3{,}2$ cm.

35 b. $x \simeq 40°$; $y \simeq 4{,}5$ m.

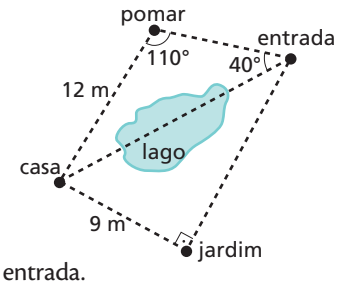
a.



b.



36. Neste esquema, está representado o posicionamento da casa, do pomar, da entrada e do jardim da propriedade de Márcia.



a. Determine a medida da distância aproximada entre a casa e a entrada.

b. Como entre a casa e a entrada existe um lago, verifique algebricamente qual dos caminhos alternativos a seguir é o mais curto para ir da entrada até a casa.

- Caminho 1: entrar, passar pelo pomar e seguir até a casa.
- Caminho 2: entrar, passar pelo jardim e seguir até a casa.

36 a. Aproximadamente 17,6 m.

36 b. Caminho 1.

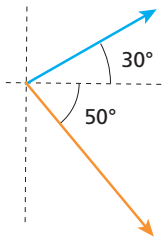
37. Um paralelogramo tem medidas de comprimento dos lados de 3,5 cm e 4,3 cm. Uma de suas diagonais forma com o menor lado um ângulo cuja abertura mede 70°. Qual é a medida de comprimento aproximada dessa diagonal?

37. Aproximadamente 3,95 cm.

38. Um navio é visto no mar por dois pontos de observação, A e B, localizados na costa, distantes 50 km um do outro. A abertura do ângulo formado pelo segmento $\overline{AB}$ e o segmento que une o navio ao ponto de observação A mede 35°. A abertura do ângulo formado pelo segmento $\overline{AB}$ e o segmento que une o navio ao ponto de observação B mede 45°. Qual é a medida da distância aproximada entre o navio e o ponto de observação A?

39. **EM DUPLA** Reúna-se com um colega e resolvam a atividade a seguir.

Dois nadadores partiram de um ponto no mesmo momento e nadaram à medida de velocidade de 0,2 m/s. Um dos nadadores foi na direção 30° nordeste, e o outro, na direção 50° sudeste, conforme este diagrama.



Qual será a medida da distância aproximada entre os nadadores após 5 minutos de viagem?

39. Aproximadamente 76,36 m.

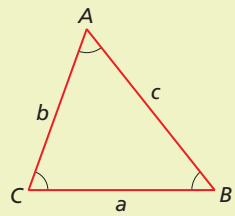
Lei dos cossenos

O teorema de Pitágoras relaciona as medidas de comprimento dos três lados de um triângulo, mas é válido apenas para triângulos retângulos. A **lei dos cossenos** (apresentada a seguir) relaciona as medidas de comprimento dos três lados de um triângulo qualquer, conhecendo a medida da abertura de um de seus ângulos internos.

ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de comprimento de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos outros lados menos o dobro do produto dessas medidas de comprimento pelo cosseno do ângulo formado por esses lados, isto é:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$



Demonstração

Considere um triângulo acutângulo qualquer ABC e sua altura $\overline{AH}$, de medida de comprimento h, relativa ao lado $\overline{BC}$.

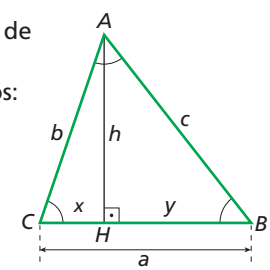
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo AHB, temos:
$c^2 = h^2 + y^2$ ou $c^2 = h^2 + (a - x)^2$

Do triângulo AHC, temos: $h = b \cdot \operatorname{sen} \hat{C}$ e $x = b \cdot \cos \hat{C}$

Assim:
$c^2 = (b \cdot \operatorname{sen} \hat{C})^2 + (a - b \cdot \cos \hat{C})^2$
$c^2 = b^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \hat{C} + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C} + b^2 \cdot \cos^2 \hat{C}$
$c^2 = b^2 \cdot (\operatorname{sen}^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C}) + a^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

Como $\operatorname{sen}^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{C} = 1$, concluímos que: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$

Analogamente, considerando as alturas relativas aos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, temos:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$ e $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$



Observação

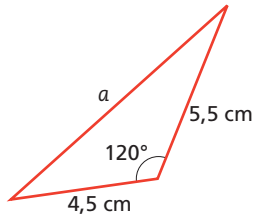
Nesta demonstração, usamos um triângulo acutângulo, mas é possível demonstrar a lei dos cossenos também para um triângulo obtusângulo e para um triângulo retângulo. No caso do triângulo retângulo, a demonstração se reduz ao teorema de Pitágoras. Porém, não apresentaremos essas demonstrações nesta coleção.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

R13. Determinar a medida de comprimento a indicada no triângulo a seguir.



▶ **Resolução**

Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

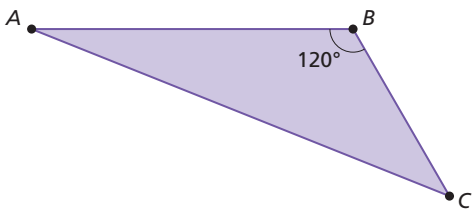
$a^2 = (5{,}5)^2 + (4{,}5)^2 - 2 \cdot 5{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot \cos 120°$

Como $\cos 120° = -\cos 60° = -0{,}5$, temos:

$a^2 = 30{,}25 + 20{,}25 + 24{,}75 \Rightarrow a^2 = 75{,}25 \Rightarrow a \simeq 8{,}7$

Logo, a medida de comprimento a é aproximadamente 8,7 cm.

R14. Considere o triângulo ABC a seguir. Determine BC, dado que $AB = 10$ cm e $AC = 14$ cm.



▶ **Resolução**

Para simplificar a notação, chamaremos BC de x.

Pela lei dos cossenos, temos:

$14^2 = 10^2 + x^2 - 2 \cdot 10 \cdot x \cdot \cos 120°$

$196 = 100 + x^2 - 20 \cdot x \cdot (-0{,}5)$

$x^2 + 10x - 96 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-96) = 100 + 384 = 484$

$x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{484}}{2}$

$x = \dfrac{-10 \pm 22}{2}$

$x = \dfrac{-10 + 22}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

ou

$x = \dfrac{-10 - 22}{2} = \dfrac{-32}{2} = -16$

Como queremos determinar a medida de comprimento do lado de um triângulo, só a raiz positiva da equação nos convém.

Portanto, BC é igual a 6 cm.

43. Aproximadamente 96 cm e 74,7 cm.

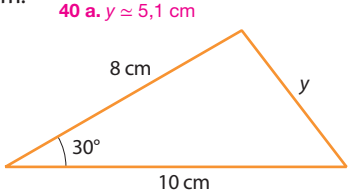
Atividades propostas

Registre em seu caderno

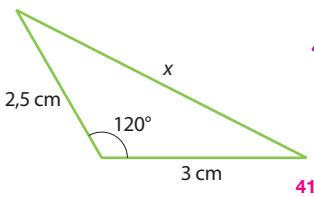
40. Calcule a medida de comprimento desconhecida em cada item.

a.

40 a. $y \simeq 5{,}1$ cm



b.



40 b. $x \simeq 4{,}8$ cm

ATENÇÃO! AS IMAGENS ESTÃO REPRESENTADAS SEM PROPORÇÃO ENTRE ELAS.

41. Um triângulo tem dois lados com medidas de comprimento de 8 cm e 11 cm. Sabendo que a abertura do ângulo interno formado entre esses lados mede 135°, descubra a medida aproximada do comprimento do terceiro lado.

41. Aproximadamente 17,6 cm.

42. Um triângulo tem lados medindo 2 cm, 3,5 cm e 5 cm de comprimento.

42 a. $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$; obtusângulo.

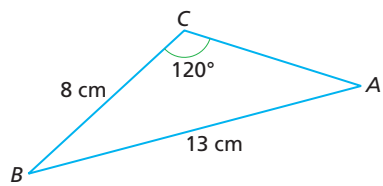
a. Seja α a medida de abertura do ângulo formado entre os lados de medidas 2 cm e 3,5 cm de comprimento. Pela lei dos cossenos, calcule o $\cos \alpha$. Por esse valor, podemos concluir que o triângulo é retângulo, acutângulo ou obtusângulo?

b. Com o auxílio de uma régua e um compasso, faça um esboço desse triângulo no caderno. Atenção! Cuidado ao usar o compasso.

42 b. Resposta no *Suplemento para o professor*.

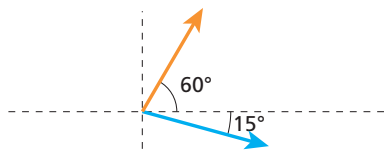
43. Um paralelogramo tem medidas de comprimento dos lados de 50 cm e 70 cm. Calcule a medida de comprimento de cada diagonal desse paralelogramo sabendo que a abertura de seu maior ângulo interno mede 105°. (*Dado*: $\cos 75° \simeq 0{,}26$)

44. No triângulo ABC a seguir, determine AC. **44.** 7 cm



45. Considere um triângulo com estas medidas de comprimento dos lados: $AB = 15$ cm, $BC = 21$ cm e $AC = 24$ cm. Qual é a medida de abertura do ângulo formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$? **45.** 60°

46. Dois navios saíram do porto de Santos às 8 h da manhã. Um dos navios viajou na direção 60° nordeste à medida de velocidade de 24 nós. O outro navio viajou na direção 15° sudeste à medida de velocidade de 18 nós, conforme o esquema a seguir.



Sabendo que $\cos 75° \simeq 0{,}26$, descubra a medida de distância, em quilômetro, entre os navios ao meio-dia. (*Observação*: 1 nó é uma unidade de medida de velocidade equivalente a 1.852 km/h.)

46. Aproximadamente 192,5 km.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

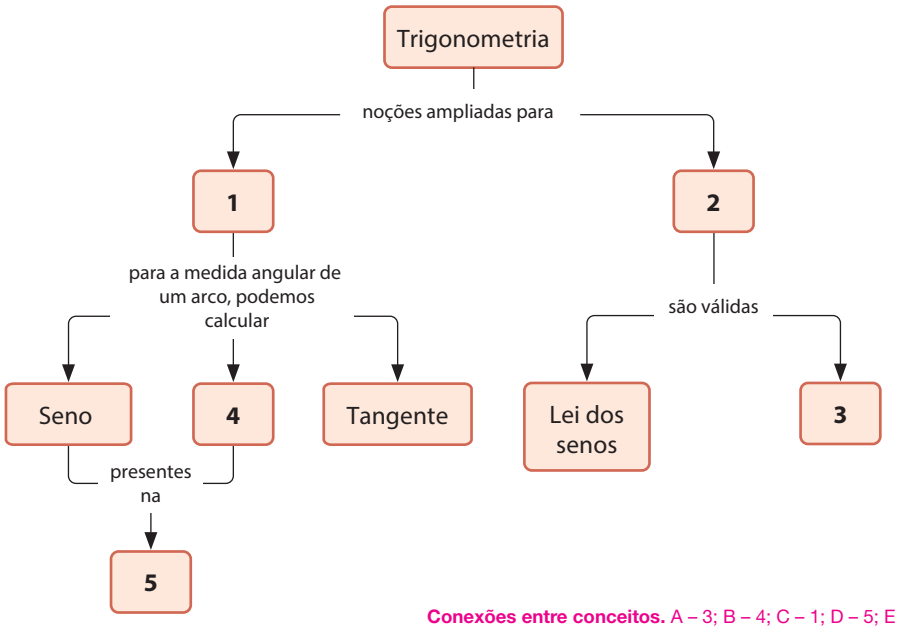
PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 8

Registre em seu caderno

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Conexões entre conceitos. A – 3; B – 4; C – 1; D – 5; E – 2.

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Lei dos cossenos

B. Cosseno

C. Ciclo trigonométrico

D. Relação fundamental da Trigonometria

E. Triângulos quaisquer

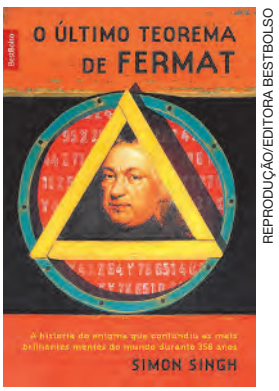
SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro

O último teorema de Fermat

Simon Singh

Rio de Janeiro: BestBolso, 2014.



REPRODUÇÃO/EDITORA BESTBOLSO

Pierre de Fermat (1601-1665), matemático francês amador, tinha o hábito de fazer anotações nos livros que lia. Uma das anotações foi a seguinte: "Eu descobri uma demonstração maravilhosa, mas a margem deste papel é muito estreita para contê-la". Assim nascia o problema que ia confundir e frustrar os matemáticos mais brilhantes do mundo por mais de 350 anos: a busca da demonstração de que não existe solução, em números inteiros, para $x^n + y^n = z^n$, para n maior que 2. Ao narrar a dificuldade de chegar a uma solução, a obra relata a vida e a contribuição dos envolvidos nessa história.

Simulador

***Tour* trigonométrico**

Na plataforma Phet simulações interativas, que é um projeto da Universidade do Colorado em Boulder, está disponível um simulador para observar o comportamento das funções seno, cosseno e tangente ao movimentar um ponto no ciclo trigonométrico.

Disponível em: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/trig-tour. Acesso em: 7 out. 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. Em uma circunferência com medida de comprimento do raio de 12 cm, um arco de 120° tem aproximadamente [redacted] cm de medida de comprimento. **Q1.** Alternativa **d.**

a. 20 **c.** 24
b. 22 **d.** 25

Q2. A medida angular 210° é equivalente a [redacted] rad. **Q2.** Alternativa **c.**

a. $\frac{5\pi}{6}$ **c.** $\frac{7\pi}{6}$
b. $\frac{2\pi}{6}$ **d.** $\frac{3\pi}{6}$

Q3. Um arco de $\frac{11\pi}{12}$ rad pertence ao [redacted] quadrante. **Q3.** Alternativa **b.**

a. 1º **c.** 3º
b. 2º **d.** 4º

Q4. Os arcos simétricos ao arco de $\frac{2\pi}{9}$ rad em relação aos eixos x e y e à origem O, medem, respectivamente: **Q4.** Alternativa **b.**

a. 320°; 220°; 140° **c.** 340°; 160°; 200°
b. $\frac{16\pi}{9}; \frac{7\pi}{9}; \frac{11\pi}{9}$ **d.** $\frac{7\pi}{9}; \frac{11\pi}{9}; \frac{16\pi}{9}$

Q5. O seno e o cosseno de $\frac{13\pi}{7}$ são, respectivamente, iguais a: **Q5.** Alternativa **c.**

a. sen $\frac{\pi}{7}$ e cos $\frac{\pi}{7}$ **c.** $-$sen $\frac{\pi}{7}$ e cos $\frac{\pi}{7}$
b. sen $\frac{\pi}{7}$ e $-$cos $\frac{\pi}{7}$ **d.** $-$sen $\frac{\pi}{7}$ e $-$cos $\frac{\pi}{7}$

Q6. O seno de $\frac{\pi}{6}$ é igual a cos [redacted] e sen [redacted]. **Q6.** Alternativa **a.**

a. $\frac{5\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}$
b. $\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}$
c. $\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}$
d. $\frac{2\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}$

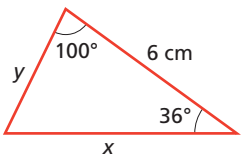
Q7. Qual das seguintes expressões resulta em um número positivo? **Q7.** Alternativa **d.**

a. sen 210° + cos 150°
b. tg 150° · tg 225°
c. cos 270° · sen 125°
d. sen 240° · cos 110°

Q8. Se cos $\alpha = 0{,}8$ e α é medida angular de um arco do 4º quadrante, então tg α é igual a: **Q8.** Alternativa **a.**

a. $-0{,}75$ **c.** $-1{,}33...$
b. $-0{,}6$ **d.** 0,75

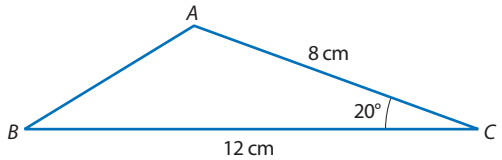
Q9. Considere o triângulo representado a seguir. **Q9.** Alternativa **d.**



Nesse triângulo, pode-se afirmar que:

a. $x = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 44°}{\text{sen } 100°}\right)$ cm **c.** $y = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 100°}\right)$ cm
b. $x = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 44°}\right)$ cm **d.** $y = \left(\frac{6 \cdot \text{sen } 36°}{\text{sen } 44°}\right)$ cm

Q10. Observe o triângulo representado a seguir.



Sabendo que cos 20° ≃ 0,94, a medida de comprimento AB é aproximadamente: **Q10.** Alternativa **c.**

a. 3,25 cm **c.** 5,25 cm
b. 4,25 cm **d.** 6,25 cm

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Calcular a medida de comprimento e a medida angular de um arco, em grau e em radiano.	X	X								
Conhecer o ciclo trigonométrico e identificar arcos simétricos.			X	X	X	X	X			
Ampliar as razões trigonométricas para ângulos com medidas de abertura maiores que 90°.					X	X	X	X		
Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.								X		
Aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.									X	X

Capítulo 9

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

LUCIANO QUEIROZ/PULSAR IMAGENS

Fotografias da Praia de Taipu de Fora em Maraú (BA). A fotografia principal mostra a formação de uma piscina natural devido à maré baixa, e a fotografia menor mostra a maré alta. Fotos de 2023.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Funções periódicas

ODS 14

Oriente os estudantes a consultar as páginas 8 e 9 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Você já foi a alguma praia? Em caso afirmativo, já percebeu diferenças entre a maré alta e a maré baixa? Comente com os colegas e o professor. **Questão.** Respostas pessoais.

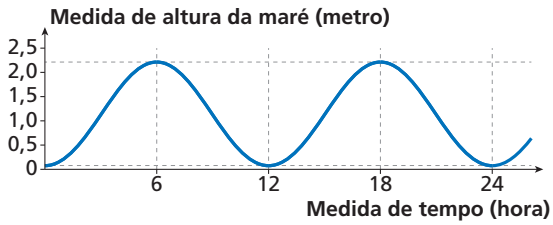
Muitos fenômenos naturais, físicos e sociais têm comportamento cíclico, ou periódico (isto é, que se repetem a cada determinado período de medida de tempo), podendo ser modelados por **funções trigonométricas**. Isso significa que essas funções são capazes de representar, de modo aproximado, as oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de medida de tempo.

A maré – movimento de descida e de subida do nível das águas – é um exemplo de fenômeno periódico causado pela força gravitacional exercida pela Lua e pelo Sol na Terra. Acompanhe a situação a seguir.

Em um município litorâneo do Nordeste brasileiro, em determinada época do ano, a maré baixa acontece por volta das 0 h e das 12 h, e a maré alta ocorre por volta das 6 h e das 18 h. A função trigonométrica a seguir modela, de modo aproximado, a medida da altura h da maré (em metro) nessa época:

$h(t) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos\left(t \cdot \frac{\pi}{6}\right)$, em que a medida de tempo (t) é considerada em hora a partir da meia-noite.

Observe que essa função descreve o comportamento periódico da maré, como mostra o gráfico a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Note que o gráfico "se repete" a cada 12 horas, assim como a medida de altura da maré. Também é possível concluir que:

- a maré alta atinge 2,2 m de medida de altura (ocorre às 6 h e às 18 h);
- a maré baixa tem 0,1 m de medida de altura (ocorre às 0 h e às 12 h).

Pela lei da função, também podemos verificar algebricamente essas conclusões. Por exemplo, às 0 h e às 6 h, temos:

$$h(0) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$
$$h(0) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos(0)$$
$$h(0) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot (1)$$
$$h(0) = 0{,}1$$

$$h(6) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$
$$h(6) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot \cos(\pi)$$
$$h(6) = 1{,}15 - 1{,}05 \cdot (-1)$$
$$h(6) = 2{,}2$$

Analisando essa situação das marés, responda: Qual é o período da função apresentada? O que isso significa no contexto? **Questão.** O período é 12 h; isso significa que a medida de altura da maré se repete a cada 12 horas.

OBJETO DIGITAL
***Podcast*: As ondas de rádio na comunicação humana**

Assim como o nível das marés, as ondas de rádio também apresentam comportamento periódico.

Neste capítulo, vamos estudar as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente – exemplos típicos de funções periódicas –, as quais surgem com frequência na modelagem matemática de fenômenos que apresentam periodicidade, como é o caso das marés.

Este *podcast* trata das ondas de rádio, que são um exemplo de onda eletromagnética cuja variação em um intervalo de medida de tempo pode ser modelada por funções trigonométricas. Desta forma, incentiva-se a interdisciplinaridade com a **área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

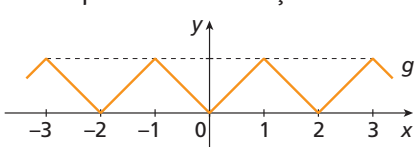
Definição de função periódica

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de **função periódica** quando existe um número real positivo p tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + p)$.

O menor valor positivo de p que satisfaz a igualdade anterior é chamado de **período de *f***.

Atividade resolvida

R1. No plano cartesiano representado a seguir foi traçado o gráfico da função periódica g. Analisando o gráfico, identificar o período dessa função.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

▶ **Resolução**

Analisando alguns pontos do gráfico, podemos verificar que:

• $g(-2) = 0$ • $g(0) = 0$ • $g(2) = 0$

Logo, como a função g é periódica, podemos observar que $g(x) = g(x + 2)$.

Portanto, o período dessa função é 2.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

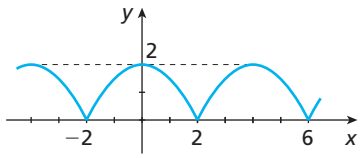
2 a. Mínimo: 0; máximo: 2.
2 b. Mínimo: −1; não tem máximo.
2 c. Mínimo: 8; máximo: 12.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

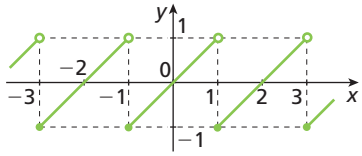
1. Em cada plano cartesiano a seguir está representada graficamente uma função periódica. Qual é o período p de cada uma dessas funções?

a.



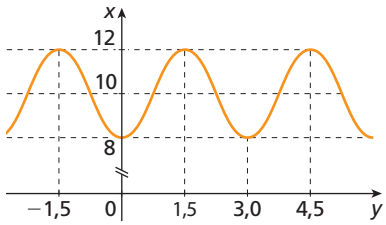
1 a. $p = 4$

b.



1 b. $p = 2$

c.



1 c. $p = 3$

2. Observe os gráficos da atividade anterior. Qual é o valor mínimo e o valor máximo de cada uma das funções?

3. Imagine o ciclo trigonométrico estudado no capítulo anterior e responda às questões.

a. Qual é o valor máximo de cos x? Para quais valores de x, em radiano, isso ocorre? **3 a.** 1; para $x = 0$ e $x = 2\pi$.

b. Qual é o valor mínimo de cos x? Para qual valor de x, em radiano, isso ocorre? **3 b.** −1; para $x = \pi$.

4. Em diversos municípios do litoral brasileiro, com o fenômeno da maré baixa, formam-se piscinas naturais que atraem turistas de diversas regiões, como é o caso da Península de Maraú na praia de Taipu de Fora (BA), mostrada na abertura deste capítulo. Graças a essas paisagens, muitos desses municípios vivem do turismo, o que, algumas vezes, torna difícil a tarefa de preservar a região.

Faça uma pesquisa sobre turismo sustentável e cite algumas atitudes que podem ser tomadas por turistas a fim de preservar o local que estão visitando.

Comunique à turma as atitudes que você relacionou e conversem sobre o tema.

4. Resposta pessoal.

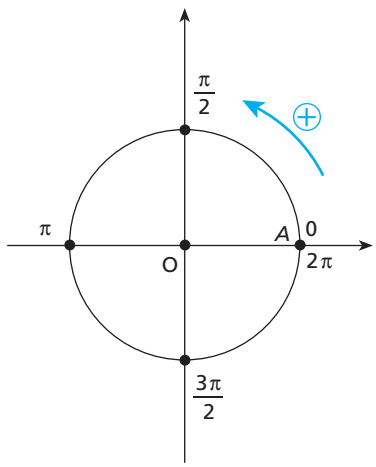
Ciclo trigonométrico

O ciclo trigonométrico tem raio cujo comprimento mede 1 unidade de medida de comprimento e centro na origem do plano cartesiano. O ponto $A(1, 0)$ é a origem de todos os arcos orientados (ângulos) e, por convenção, o sentido positivo é o anti-horário.

No capítulo anterior, estudamos apenas a primeira volta do ciclo trigonométrico (arcos com medidas entre 0 rad e 2π rad). Agora, vamos ampliar esse estudo para as infinitas voltas, associando números reais aos pontos do ciclo trigonométrico. Isso possibilitará, mais adiante, o estudo das funções trigonométricas.

Observação

Vamos relembrar algumas medidas positivas do ciclo trigonométrico.



Não confunda:
$O(0, 0)$ é a origem do plano cartesiano, e $A(1, 0)$ é a origem do ciclo trigonométrico.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

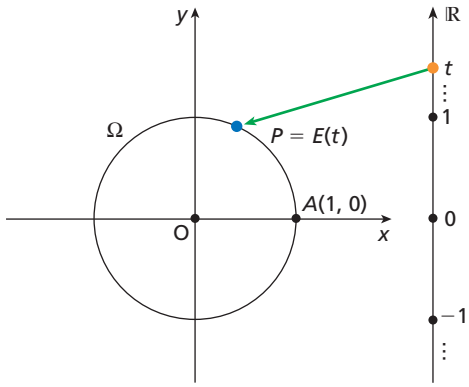
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

JAKOB EMANUEL HANDMANN - MUSEU DE BELAS ARTES DE BASILEIA, SUÍÇA

HANDMANN, Jakob Emanuel. **Retrato de Leonhard Euler**. 1753. Pastel seco sobre papel, 57 cm × 44 cm. Museu das Belas Artes de Basileia, na Suíça.

A função de Euler

Vamos definir a função $E: \mathbb{R} \to \Omega$, que associa a cada número real t um único ponto P localizado na circunferência Ω, conforme ilustrado a seguir.



- Se $t = 0$, então $P \equiv A$, ou seja, os pontos P e A são **coincidentes**.
- Se $t > 0$, percorremos o ciclo no sentido anti-horário (positivo) a partir de A e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$, de medida de comprimento t.
- Se $t < 0$, percorremos o ciclo no sentido horário (negativo) a partir de A e marcamos nele o ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$, de medida de comprimento $|t|$.

Em referência ao seu criador – o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) –, essa função é chamada de **função de Euler**.

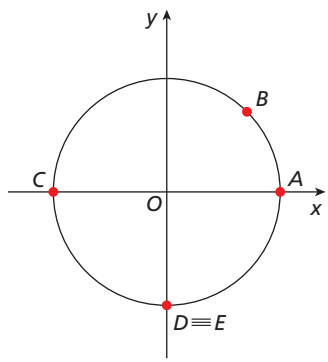
Podemos imaginar que a função de Euler consiste em "enrolar" a reta $\mathbb{R}$ ao redor da circunferência Ω, de modo que o zero da reta coincida com o ponto $A(1, 0)$ e que o sentido positivo da "reta enrolada" seja o sentido anti-horário.

A função de Euler é periódica, de período 2π, ou seja:

$$E(t) = E(t + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Observe o exemplo a seguir.

No ciclo trigonométrico, as imagens dos números reais 0, $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ podem ser representadas assim:



$0 \longrightarrow$ ponto A $\qquad$ $\pi \longrightarrow$ ponto C $\qquad$ $-\frac{\pi}{2} \longrightarrow$ ponto E

$\frac{\pi}{4} \longrightarrow$ ponto B $\qquad$ $\frac{3\pi}{2} \longrightarrow$ ponto D

Note que:

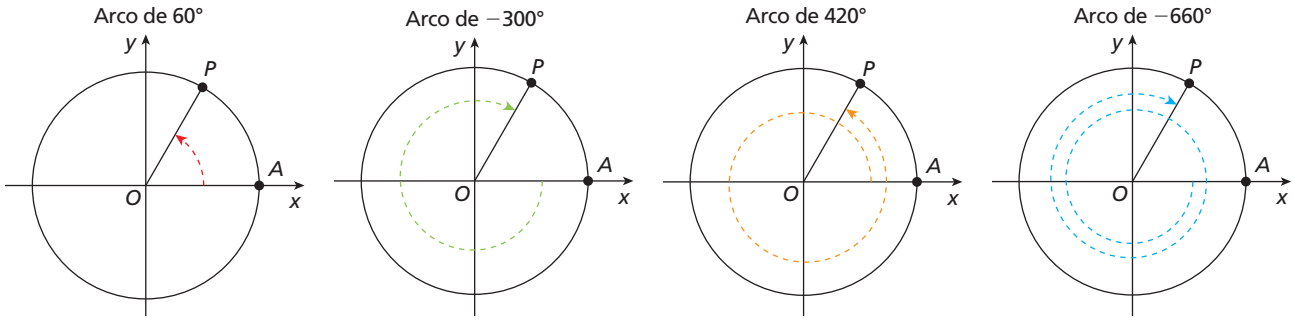
- para obter a imagem do número negativo, percorremos o ciclo no sentido horário;
- um mesmo ponto pode representar mais de um número; por exemplo, as imagens dos números $\frac{3\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$ coincidem ($D \equiv E$).

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Arcos côngruos

Arcos que têm a mesma extremidade no ciclo trigonométrico são chamados de **arcos côngruos**. Por exemplo, ao percorrer 60°, −300°, 420° e −660°, obtemos como extremidade o mesmo ponto *P*, conforme podemos observar nas figuras a seguir.



Observação

Lembre-se de que, no ciclo trigonométrico, a medida de comprimento do raio é unitária. Assim, a medida do comprimento de um arco é numericamente igual à sua medida angular, em radiano.

Por isso, dizemos que esses arcos são côngruos. Indicamos essa congruência da seguinte maneira:

$$60° \equiv -300° \equiv 420° \equiv -660°$$

Note que tanto no sentido positivo quanto no negativo existem infinitos arcos associados a um mesmo ponto do ciclo trigonométrico. É possível escrever uma **expressão geral** para representar esses infinitos arcos. Uma expressão geral para esses arcos é: $60° + k \cdot 360°$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Para arcos trigonométricos medidos em radiano, pela função de Euler, se um ponto *P* é a imagem de um número *t*, também é a imagem dos números $t \pm 2\pi$, $t \pm 4\pi$, ..., ou seja, é a imagem de todos os números $\boldsymbol{t + k \cdot 2\pi}$, com $k \in \mathbb{Z}$. Essa é a expressão geral de todos os arcos côngruos de extremidade *P*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades resolvidas

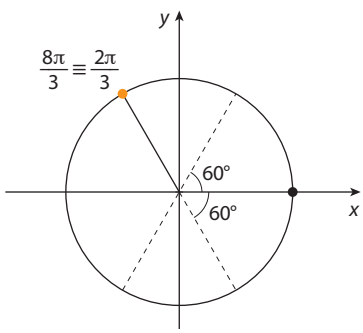
R2. Marcar no ciclo trigonométrico as imagens de cada número.

a. $\frac{8\pi}{3}$ **b.** $-\frac{17\pi}{3}$

▶ **Resolução**

a. Observamos que: $\frac{8\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 1 \cdot 2\pi$

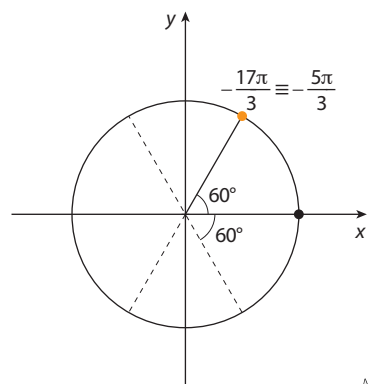
Ou seja, para obter $\frac{8\pi}{3}$, percorremos uma volta completa mais um arco de $\frac{2\pi}{3}$. Então, basta percorrer $\frac{2\pi}{3}$, pois $\frac{8\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}$.



b. Observamos que: $-\frac{17\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} - \frac{12\pi}{3} =$

$= -\frac{5\pi}{3} - 4\pi = -\frac{5\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi$

Ou seja, para obter $-\frac{17\pi}{3}$, percorremos no sentido negativo duas voltas completas mais um arco de $\frac{5\pi}{3}$. Então, basta percorrer $-\frac{5\pi}{3}$, pois $-\frac{17\pi}{3} \equiv -\frac{5\pi}{3}$.



R3. Usando a medida angular da 1ª volta positiva, escrever a expressão geral dos arcos côngruos a:

a. $\frac{41\pi}{6}$ rad; **b.** 1.105°.

▶ **Resolução**

a. Observamos que:

$\frac{41\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + \frac{36\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 3 \cdot 2\pi$

Ou seja, $\frac{41\pi}{6}$ é côngruo ao arco de $\frac{5\pi}{6}$ na primeira volta positiva.

Logo, a expressão pedida é:

$\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

b. Dividindo 1.105° por 360°, descobrimos o número de voltas completas na circunferência:

1.105° ∶ 360° = 3, com resto 25°

1.105° = 3 · 360° + 25°

Ou seja, 1.105° é côngruo ao arco de 25° na primeira volta positiva.

Logo, a expressão pedida é:

25° + k · 360°, com $k \in \mathbb{Z}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

5. Desenhe um ciclo trigonométrico e marque a imagem de cada número a seguir.

a. $\frac{\pi}{4}$ **c.** $-\frac{4\pi}{3}$ **e.** $-\frac{\pi}{6}$

b. $\frac{2\pi}{3}$ **d.** $-\frac{15\pi}{4}$ **f.** $\frac{47\pi}{6}$

6. Usando a medida angular da 1ª volta positiva, escreva uma expressão geral dos arcos côngruos a:

a. 60°; **6 a.** $60° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$ **c.** 385°; **6 c.** $25° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$

b. $\frac{\pi}{6}$ rad; **6 b.** $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$ **d.** $\frac{25\pi}{7}$ rad. **6 d.** $\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

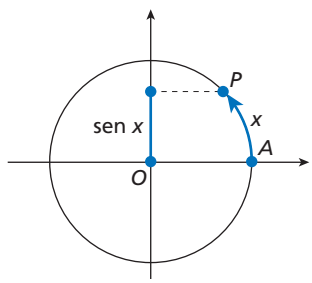
A função seno

OBJETO DIGITAL Vídeo: **A roda-gigante e a função do tipo trigonométrica**

Este vídeo explora a correspondência entre um ponto da circunferência trigonométrica e sua representação no gráfico por meio da analogia com uma roda-gigante.

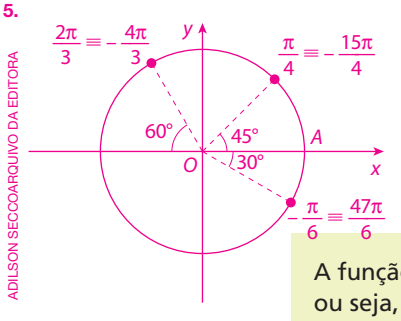
Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

Considerando a projeção ortogonal de P no eixo vertical, a ordenada do ponto P é o seno de x.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

5.



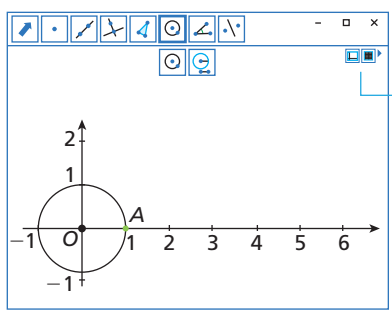
ADILSON SECCOARQUIVO DA EDITORA

A função **seno** é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real sen x, ou seja, $f(x) = \text{sen } x$.

Em quais quadrantes a função seno é positiva? E negativa? **Questão.** Positiva no 1º e no 2º quadrante; negativa no 3º e no 4º quadrante.

Usando um *software* de Geometria dinâmica, podemos estudar o gráfico da função seno construindo-o com base no ciclo trigonométrico.

Começamos construindo em um plano cartesiano uma circunferência com raio de medida de comprimento unitária e centro na origem desse plano. O ponto $A(1, 0)$ é a origem do ciclo trigonométrico.



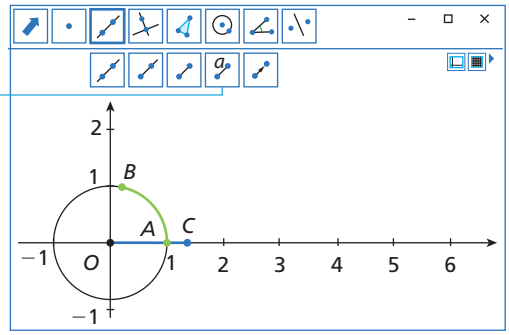
Botões do plano cartesiano e da malha.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

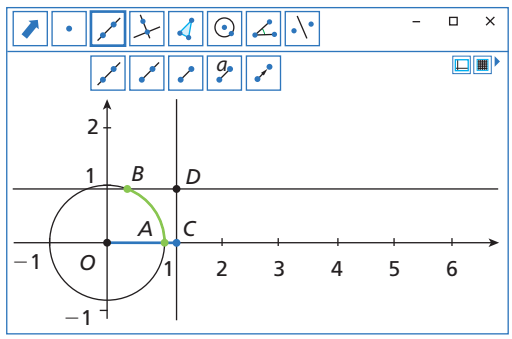
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sobre essa circunferência, construímos um arco $\overset{\frown}{AB}$ qualquer e transportamos a medida de comprimento desse arco para o eixo das abscissas, determinando o segmento de reta $\overline{OC}$.

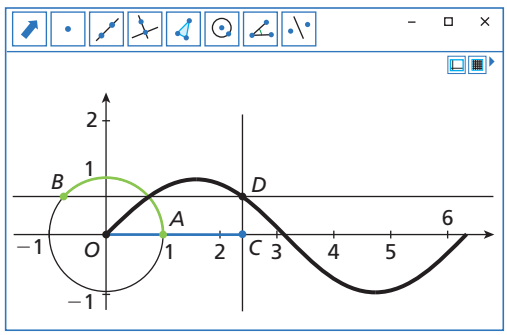
Pode-se construir o segmento de reta de mesma medida de comprimento do arco usando a ferramenta "segmento com comprimento fixo".



Traçamos uma reta paralela ao eixo das ordenadas passando pelo ponto *C* e a reta que contém a projeção ortogonal do ponto *B* nesse eixo. Marcamos o ponto *D*, intersecção dessas duas retas.



Ao movimentarmos o ponto *B* em torno da circunferência, podemos rastrear o movimento do ponto *D*, verificando o caminho que este percorre.



A construção anterior nos permite conhecer o formato da curva da função seno.

Agora, vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \text{sen } x$, com base nos dados de um quadro de valores para *x*. Inicialmente, consideramos alguns valores da 1ª volta, para os quais o seno já é conhecido:

Alguns valores de $f(x) = \text{sen } x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Para alguns valores de *x* maiores que 2π ou menores que zero, temos:

Alguns valores de $f(x) = \text{sen } x$, com $x > 2\pi$ ou $x < 0$

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
sen x	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observações

- $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$

  Logo: $\text{sen } \frac{9\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4}$

- $-\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

  Logo: $\text{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{7\pi}{4}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

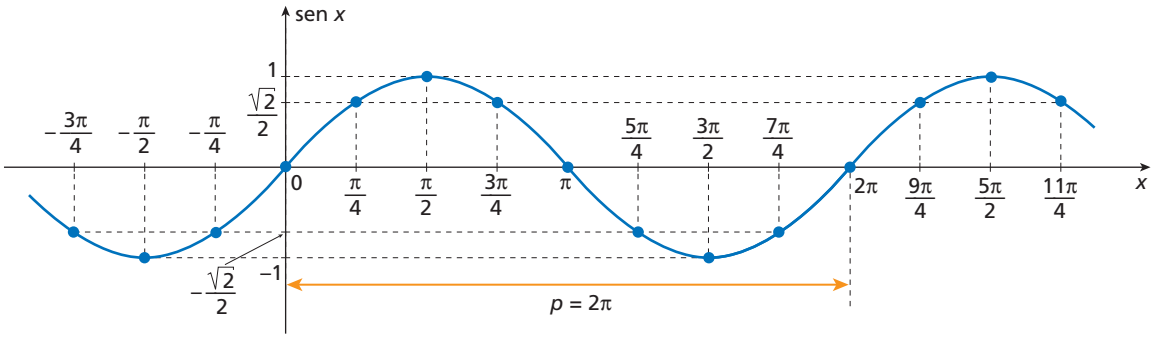
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o seno de x assume os valores do seno de arcos da 1ª volta. Assim, a função seno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 4\pi) = \ldots = \operatorname{sen}(x + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Por isso, a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.

Assim, o gráfico da função seno estende-se por todo o eixo x.



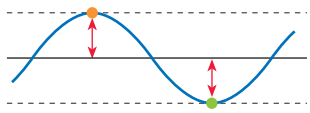
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Características da função seno

Por definição, o domínio e o contradomínio da função seno são iguais a $\mathbb{R}$.

Observação

Observe na figura:
- ordenada máxima
- ordenada mínima
- amplitude



Pelo seu gráfico, chamado de **senoide**, observamos ainda que a função seno:

- é periódica, de período 2π (a curva repete-se a cada intervalo de 2π);
- é limitada, pois os valores de sen x estão no intervalo $[-1, 1]$; logo, seu conjunto imagem é $\text{Im} = [-1, 1]$;
- tem **amplitude** (metade da diferença entre as ordenadas máxima e mínima dos pontos do gráfico) igual a 1.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades resolvidas

R4. Determinar os valores reais de m para os quais existe x tal que $\operatorname{sen} x = 3m - 2$.

▶ **Resolução**

Sabemos que os valores da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ variam no intervalo $[-1, 1]$.

Assim:

$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ — substituindo sen x por $3m - 2$

$-1 \leqslant 3m - 2 \leqslant 1$ — adicionando 2 em todos os membros

$1 \leqslant 3m \leqslant 3$ — dividindo todos os membros por 3

$\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$

Então, m assume valores em $\mathbb{R}$ tais que:

$\frac{1}{3} \leqslant m \leqslant 1$

R5. Em um sistema predador-presa, o número de predadores e de presas tende a variar periodicamente com a medida de tempo. Considere que em determinada região, onde leões são os predadores e zebras são as presas, a população de zebras tenha variado de acordo com a função dada por:

$Z(t) = 850 + 400 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi t}{4}$, em que a medida de tempo t é dada, em ano, a partir de janeiro de 2004 ($t = 0$).

WIRESTOCK/ISTOCK/GETTY IMAGES

Leoa perseguindo zebras no Quênia. Foto de 2021.

Com base no texto, responder às questões.

a. Quantas zebras havia em janeiro de 2024?

b. Qual foi a população mínima de zebras atingida nessa região?

c. De acordo com a função dada, quando foi a primeira vez que a população de zebras foi mínima?

d. De quantos em quantos anos a população de zebras se repete?

▶ Resolução

a. Em janeiro de 2024, temos $t = 20$. Substituindo t por 20 na equação dada, obtemos:

$$Z(20) = 850 + 400 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot 20}{4}\right)$$

$$Z(20) = 850 + 400 \cdot \text{sen}\,(5\pi)$$

$$Z(20) = 850 + 400 \cdot 0 = 850$$

Logo, em janeiro de 2024 havia 850 zebras.

b. A população mínima ocorre quando $\text{sen}\,\frac{\pi t}{4}$ atinge seu valor mínimo, ou seja, quando $\text{sen}\,\frac{\pi t}{4} = -1$. Então, para esse valor, temos:

$Z(t) = 850 + 400 \cdot (-1) = 450$

Logo, a população mínima foi de 450 zebras.

c. Na 1ª volta do ciclo trigonométrico, sen x atinge seu valor mínimo (-1) para $x = \frac{3\pi}{2}$. Então, a função dada será mínima para:

$$\frac{\pi t}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{t}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = \frac{3 \cdot 4}{2} \Rightarrow t = 6$$

Portanto, a população de zebras atingiu seu valor mínimo, pela primeira vez, 6 anos após janeiro de 2004, ou seja, em janeiro de 2010.

d. A função seno tem período 2π. Assim:

$$\frac{\pi t}{4} = 2\pi \Rightarrow \frac{t}{4} = 2 \Rightarrow t = 8$$

Logo, a população de zebras se repete de 8 em 8 anos.

9 a. 1.250 zebras.

12 a. Porque no gráfico I os números irracionais foram aproximados para números racionais com duas casas decimais. Assim, 2π foi representado por 6,28 ($2\pi \simeq 6{,}28$).

Atividades propostas

Registre em seu caderno

7. Calcule:

a. sen 3.465° **7 a.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\text{sen}\,\frac{13\pi}{4}$ **7 b.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. sen 4.230° **7 c.** -1

d. $\text{sen}\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$ **7 d.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e. sen $(-3.465°)$ **7 e.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f. $\text{sen}\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$ **7 f.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

g. sen $(-4.230°)$ **7 g.** 1

h. $\text{sen}\,\frac{10\pi}{3}$ **7 h.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Observando os valores encontrados na atividade anterior, que relação podemos estabelecer entre sen α e sen $(-\alpha)$?

8. sen $(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$ ou sen $\alpha = -\text{sen}\,(-\alpha)$.

9. A respeito da **atividade resolvida R5**, responda às questões a seguir.

a. Qual foi a população máxima de zebras?

b. Quando isso ocorreu pela primeira vez?

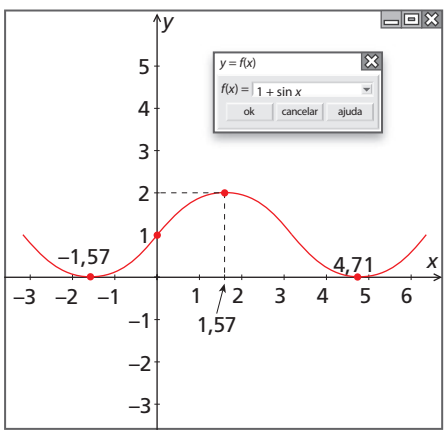
10. Determine os valores reais de k para os quais existe x tal que $\text{sen}\,x = 2k - 3$. **10.** $1 \leqslant k \leqslant 2$

11. Faça um esboço do gráfico de $f(x) = \text{sen}\,x$ para $x \in [2\pi, 4\pi]$.

11. Resposta no *Suplemento para o professor*.

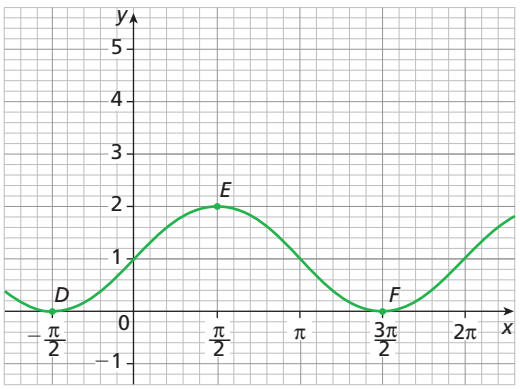
12. ***SOFTWARE*** **EM GRUPO** Foram utilizados dois *softwares* diferentes de construção de gráficos para representar a função f, de lei $f(x) = 1 + \text{sen}\,x$, produzindo os gráficos I e II a seguir.

I



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

II



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Em grupo, analisem os gráficos e respondam às seguintes questões.

a. Por que no gráfico I o período da função f é igual a 6,28 e no gráfico II é 2π?

b. Qual é a amplitude dessa função? **12 b.** 1

c. Quais são o domínio e o conjunto imagem da função f? **12 c.** $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [0, 2]$.

d. Compare o gráfico dessa função, $f(x) = 1 + \text{sen}\,x$, com o da função $g(x) = \text{sen}\,x$. O que você pode concluir?

13. A procura por emprego em certa empresa obedece à função $f(t) = 2.500 + 1.215 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$, em que t, em mês, é contado a partir de janeiro de 2024 e $f(t)$ é o número de pessoas. Determine o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa. **13.** 3.715 pessoas.

14. A medida de altura h, em metro, da maré em certo ponto do litoral, em função da medida de tempo, é dada aproximadamente pela expressão $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, em que t é a medida de tempo, em hora a partir do meio-dia

9 b. 2006.

12 d. Espera-se que os estudantes concluam que o gráfico de f é o gráfico de g deslocado uma unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

14 b. Resposta no *Suplemento para o professor*.

a. Qual foi a medida de altura máxima atingida pela maré? E a mínima? **14 a.** 5 m; 1 m.

b. Com o auxílio de um quadro, esboce o gráfico dessa função.

c. Em um dia qualquer, a que horas ocorre a maré alta? E a maré baixa? **14 c.** Maré alta: às 3 h e às 15 h; maré baixa: às 21 h e às 9 h.

d. De quantas em quantas horas a medida da altura da maré se repete? **14 d.** De 12 em 12 horas.

15. **EM DUPLA** Em uma função do tipo $f(x) = k \cdot \text{sen } x$, a presença do parâmetro k, $k \in \mathbb{R}_+^*$, modifica o gráfico de $g(x) = \text{sen } x$. Utilizando como exemplo a função $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$ e realizando, em duplas, os itens propostos a seguir, verifiquem como isso acontece.

15. Respostas no *Suplemento para o professor*.

a. Criem um quadro com três colunas, intituladas x, $\text{sen } x$ e $2 \cdot \text{sen } x$, e completem-na considerando os valores de x variando no intervalo $[0, 2\pi]$.

b. Em um plano cartesiano, construam o gráfico da função $g(x) = \text{sen } x$.

c. No mesmo plano cartesiano, construam o gráfico da função $f(x) = 2 \cdot \text{sen } x$.

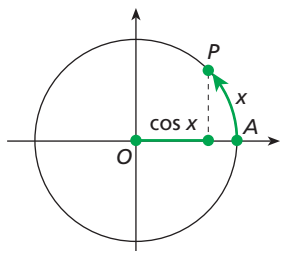
d. Comparem a amplitude da função g com a amplitude da função f. O que vocês observam?

e. Refaçam os procedimentos indicados nos itens **a**, **c** e **d** para a função $h(x) = 3 \cdot \text{sen } x$. Como vocês generalizariam o resultado do item **d** para funções do tipo $i(x) = k \cdot \text{sen } x$, em que $k \in \mathbb{R}_+^*$?

A função cosseno

Seja P a extremidade de um arco no ciclo trigonométrico correspondente ao número real x, conforme definido na função de Euler.

Considerando a projeção ortogonal de P no eixo horizontal, a abscissa do ponto P é o cosseno de x.



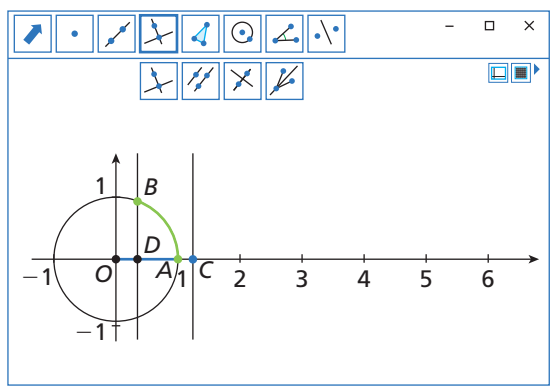
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A função **cosseno** é a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x ao número real $\cos x$, ou seja, $f(x) = \cos x$.

Em quais quadrantes a função cosseno é positiva? E negativa? **Questão.** Positiva no 1º e no 4º quadrante; negativa no 2º e no 3º quadrante.

Assim como fizemos com a função seno, também podemos estudar o gráfico da função cosseno, construindo-o com base no ciclo trigonométrico com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.

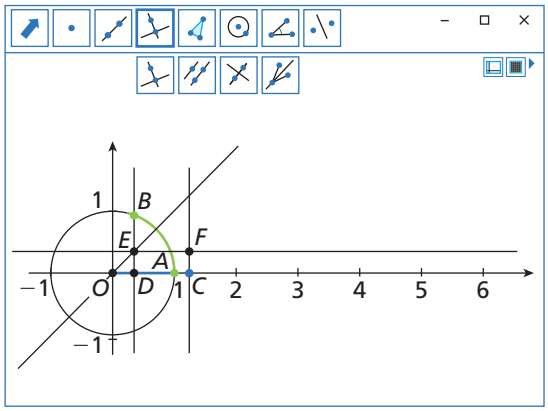
Como na função seno, construímos em um plano cartesiano uma circunferência com raio de medida de comprimento unitária e centro na origem desse plano. Depois, construímos um arco $\overset{\frown}{AB}$ qualquer, com $A(1, 0)$ como origem do ciclo trigonométrico, e transportamos a medida de comprimento desse arco para o eixo das abscissas, determinando o segmento de reta $\overline{OC}$. Traçamos uma reta paralela ao eixo das ordenadas passando pelo ponto C. Em seguida, traçamos a projeção ortogonal do ponto B no eixo das abscissas, marcando o ponto D. A medida de comprimento do segmento $\overline{OD}$ corresponde ao cosseno de $\overset{\frown}{AB}$.



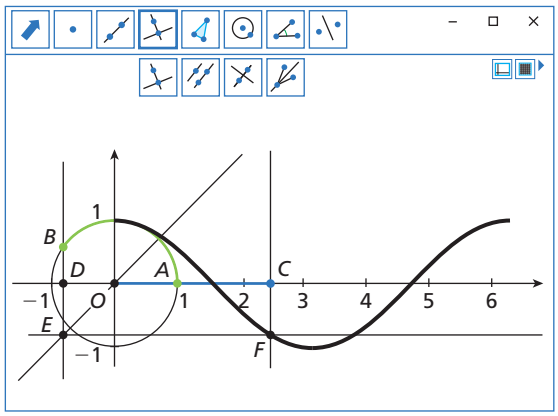
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para obter o ponto que desenhará a curva da função cosseno, é preciso transportar a medida de comprimento de $\overline{OD}$ para o eixo das ordenadas. Para isso, construímos a bissetriz do 1º e do 3º quadrante do plano cartesiano, marcando o ponto E, intersecção dessa bissetriz com a reta $\overleftrightarrow{BD}$, e projetamos o ponto E no eixo das ordenadas. Marcamos, então, o ponto F, intersecção da reta que contém essa projeção ortogonal de E com a reta paralela ao eixo das ordenadas que passa pelo ponto C. O ponto F desenhará a curva da função cosseno.



Movimentando a extremidade B do arco $\overset{\frown}{AB}$ em torno do ciclo trigonométrico, podemos rastrear o movimento do ponto F e observar o desenho da curva da função cosseno.



Agora, vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \cos x$, partindo de um quadro de valores para x. Inicialmente, consideramos alguns valores da 1ª volta para os quais o cosseno já é conhecido:

Alguns valores de $f(x) = \cos x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

Alguns valores de $f(x) = \cos x$, com $x > 2\pi$ ou $x < 0$

x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observações

- $\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{4}$

Logo: $\cos \frac{9\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$

- $-\frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

Logo: $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{7\pi}{4}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

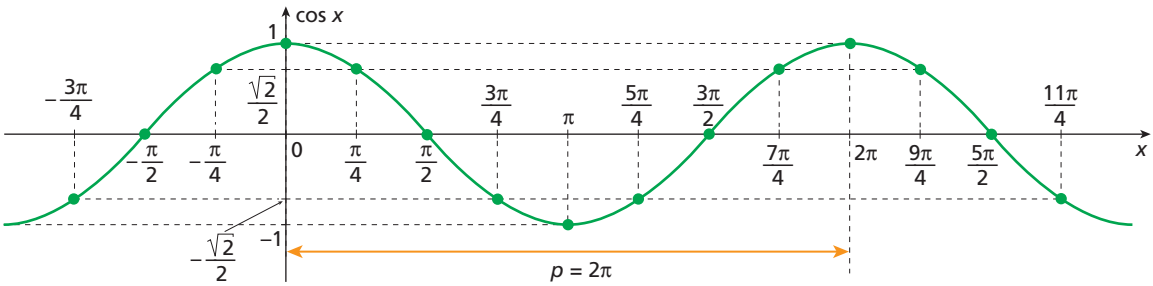
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que, para valores de x maiores que 2π ou menores que zero, o cosseno de x assume os valores do cosseno de arcos da 1ª volta. Assim, a função cosseno é periódica, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\cos x = \cos (x + 2\pi) = \cos (x + 4\pi) = \ldots = \cos (x + 2k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Por isso, a curva obtida no intervalo $[0, 2\pi]$ repete-se para $x > 2\pi$ e $x < 0$.

Assim, o gráfico da função cosseno estende-se por todo o eixo x.



Observe que o gráfico da função cosseno é uma translação (deslocamento) da senoide de $\frac{\pi}{2}$ rad para a esquerda.

Características da função cosseno

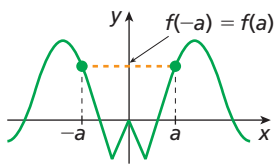
Por definição, o domínio e o contradomínio da função cosseno são iguais a $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, chamado de **cossenoide**, observamos, entre outras características, que a função cosseno:

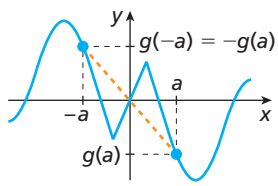
- é periódica, de período 2π (a curva repete-se a cada intervalo de 2π);
- é limitada, pois os valores de $\cos x$ estão no intervalo $[-1, 1]$, o que significa que seu conjunto imagem é $\text{Im} = [-1, 1]$;
- tem amplitude igual a 1.

Observações

- Quando $f(-x) = f(x)$ em todo o domínio de uma função f, ela é chamada de **função par**.



- Quando $g(-x) = -g(x)$ em todo o domínio de uma função g, ela é chamada de **função ímpar**.



Atividade resolvida

R6. Calcular o valor da expressão $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos 10x$ para $x = \frac{\pi}{3}$.

▶ **Resolução**

Substituindo x por $\frac{\pi}{3}$, obtemos a expressão:

$$\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{3\pi}{3} + \ldots + \cos \frac{10\pi}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

Assim, para $x = \frac{\pi}{3}$, a expressão vale $-\frac{3}{2}$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

19. A função cosseno é par; a função seno é ímpar.

21 b. Espera-se que os estudantes digam, por exemplo, que adotariam medidas educativas, como campanhas de conscientização e envolvimento das pessoas em mutirões de limpeza.

Atividades propostas

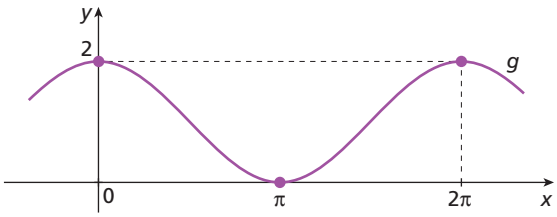
Registre em seu caderno

16. Calcule, para $x = \frac{\pi}{4}$, o valor da expressão: **16.** 0

$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + ... + \cos 78x + \cos 80x$

17. Faça um esboço do gráfico de f, de lei $f(x) = \cos x$, para $x \in [2\pi, 4\pi]$. **17.** Resposta no *Suplemento para o professor.*

18. A curva apresentada a seguir é a representação gráfica da função g, com $g(x) = 1 + \cos x$.



18 c. $D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = [0, 2]$.

Analisando o gráfico, responda às questões.

a. Qual é o período da função g? **18 a.** 2π

b. Qual é a amplitude dessa função? **18 b.** 1

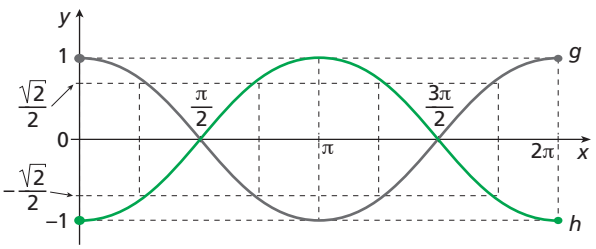
c. Quais são o domínio e o conjunto imagem da função g?

d. Compare o gráfico dessa função, $g(x) = 1 + \cos x$, com o da função $f(x) = \cos x$. O que você pode concluir?

19. A função cosseno pode ser classificada em função par, ímpar ou nem par nem ímpar? E a função seno?

20. Observe que os dois gráficos a seguir, traçados no mesmo plano cartesiano, representam funções no intervalo $[0, 2\pi]$ e são simétricos em relação ao eixo x.

20. Resposta no *Suplemento para o professor*.



São gráficos de funções do tipo $f(x) = k \cdot \cos x$:

- o gráfico cinza representa a função dada por $g(x) = 1 \cdot \cos x$;
- o gráfico verde representa a função dada por $h(x) = -1 \cdot \cos x$.

Com base nessas considerações, construa os gráficos de $m(x) = \text{sen } x$ e $n(x) = -\text{sen } x$ em um mesmo plano cartesiano no intervalo $[0, 2\pi]$.

21. Diversas doenças são sazonais, ou seja, em determinado período do ano têm maior ocorrência. Esse é o caso da dengue, que tem maior ocorrência no período quente e chuvoso do ano, época que propicia condições mais favoráveis para a proliferação do mosquito transmissor da doença.

O número de casos de dengue, em determinada região, variou aproximadamente de acordo com a função $n(t) = 6.380 + 5.900 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right)$, em que t é o mês do ano, sendo $t = 1$ para janeiro, $t = 2$ para fevereiro, ..., $t = 12$ para dezembro.

a. Quantos casos ocorreram no pico da doença? Em qual mês ocorreu esse pico? **21 a.** 12.280 casos; em janeiro.

b. Suponha que você faça parte da equipe responsável pela saúde pública de seu município. Como ajudaria a combater a dengue? Que medidas podem ser adotadas para conscientizar as pessoas sobre prevenção?

THAMKC/SHUTTERSTOCK

Água parada em pneus pode ser um foco de proliferação do mosquito que transmite a dengue.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

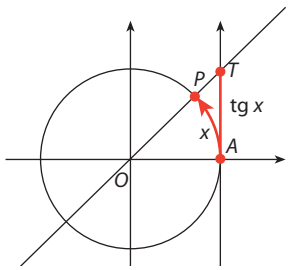
A função tangente

18 d. Espera-se que os estudantes concluam que o gráfico de g é o gráfico de f deslocado uma unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

Seja P a extremidade de um arco, na circunferência trigonométrica de centro O, correspondente ao número real x.

Consideremos o ponto T de intersecção entre a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e a reta tangente à circunferência pelo ponto $A(1, 0)$.

Sabemos que a ordenada do ponto T é a tangente do arco de x.



A função **tangente** é a função $f: \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x do domínio ao número real tg x, ou seja, $f(x) = \text{tg } x$.

Observação

Quando x é a medida de um arco côngruo a $\frac{\pi}{2}$ rad ou a $\frac{3\pi}{2}$ rad, não há intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com a reta tangente à circunferência pelo ponto $A(1, 0)$. Por isso, a função tangente não está definida para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Questão. A função tangente é positiva no 1º e no 3º quadrante e negativa no 2º e no 4º quadrante.
Em quais quadrantes a função tangente é positiva e em quais quadrantes ela é negativa?

Vamos construir o gráfico dessa função, dada por $f(x) = \text{tg } x$, com os dados de um quadro de valores para x. Inicialmente, vamos considerar x no intervalo $[0, 2\pi]$.

Observação

No quadro, o símbolo $\nexists$ indica que não existe tg x para o valor de x correspondente.

Alguns valores de $f(x) = \text{tg } x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
tg x	0	1	$\nexists$	-1	0	1	$\nexists$	-1	0

Para alguns valores de x maiores que 2π ou menores que zero, temos:

Alguns valores de $f(x) = \text{tg } x$, com $x > 2\pi$ ou $x < 0$

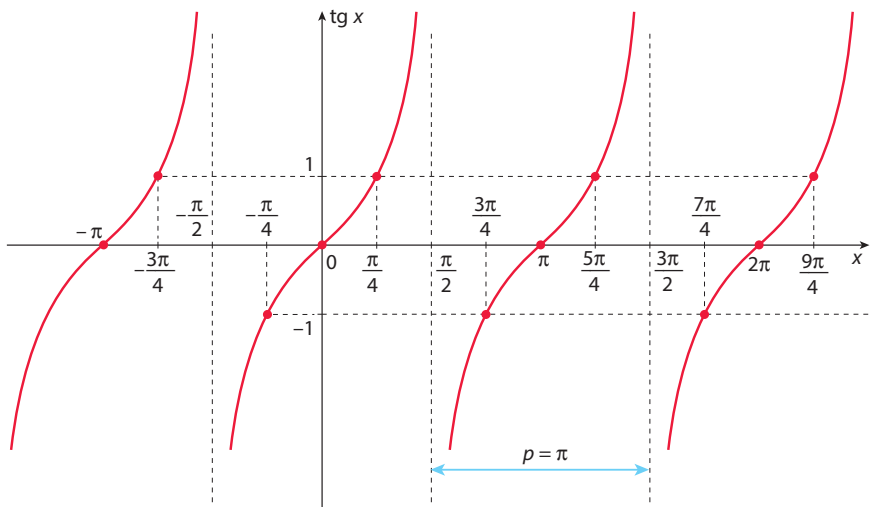
x	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\pi$
tg x	1	$\nexists$	-1	0	-1	$\nexists$	1	0

Observe que, para valores de x maiores que π ou menores que zero, a tangente de x assume os valores da tangente de arcos da 1ª meia-volta. Assim, a função tangente é periódica, pois, para todo x do seu domínio, temos:

$$\text{tg } x = \text{tg } (x + \pi) = \text{tg } (x + 2\pi) = \ldots = \text{tg } (x + k\pi), \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Por isso, a curva obtida no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ repete-se para $x > \frac{\pi}{2}$ e $x < -\frac{\pi}{2}$.

Assim, o gráfico da função tangente tem o seguinte formato:

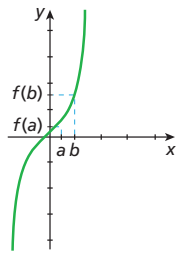


ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

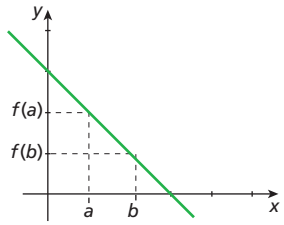
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observações

- Uma função f é **crescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores a e b desse intervalo, com $a < b$, tem-se $f(a) < f(b)$.



- Uma função f é **decrescente** em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores a e b desse intervalo, com $a < b$, tem-se $f(a) > f(b)$.



Características da função tangente

Por definição, o domínio da função tangente é $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, e o contradomínio é $\mathbb{R}$.

Pelo seu gráfico, observamos ainda que a função tangente:

- é periódica, de período π;
- não é limitada, já que seu conjunto imagem é $\text{Im} =]-\infty, +\infty[$ ou $\mathbb{R}$.

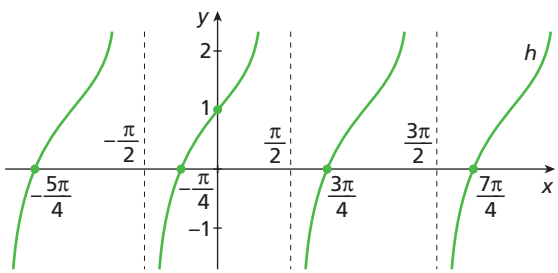
As linhas pontilhadas verticais que passam pelos pontos de abscissa $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, são denominadas **assíntotas** da curva que representa a função f, dada por $f(x) = \text{tg } x$. Observe que, quando x se aproxima de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, a curva se aproxima das assíntotas, lembrando que a função tangente não existe nesses pontos.

23. Espera-se que os estudantes concluam que $g(x) = \text{tg } x$ e $j(x) = -\text{tg } x$ são simétricas em relação ao eixo x.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

22. A curva a seguir é a representação gráfica da função h, tal que $h(x) = 1 + \text{tg } x$. **22 b.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.



Analisando o gráfico, responda às questões.

a. Qual é o período da função h? **22 a.** π

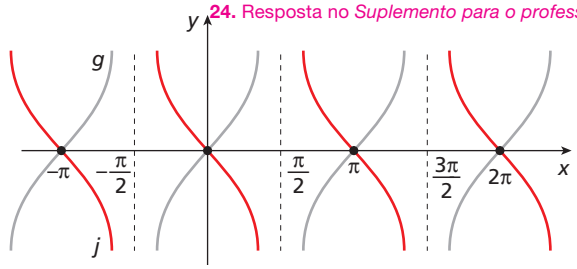
b. Por quais valores de x passam as assíntotas da função h?

c. Quais são o domínio e o conjunto imagem da função h?

22 c. $D(h) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $\text{Im}(h) =]-\infty, +\infty[$.

23. No plano cartesiano a seguir, a curva cinza representa a função $g(x) = \text{tg } x$, e a curva vermelha representa a função $j(x) = -1 \cdot \text{tg } x$.

24. Resposta no *Suplemento para o professor*.



Analisando os gráficos, o que podemos afirmar?

24. ***SOFTWARE*** **EM DUPLA** Com base nas construções dos pontos que rastreiam as funções seno e cosseno apresentadas nos tópicos *A função seno* e *A função cosseno*, respectivamente, façam, em duplas, uma descrição do passo a passo para obter o ponto que rastreia a função tangente. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, realizem testes para verificar a validade da descrição.

25. A função tangente pode ser classificada em função par, ímpar ou nem par nem ímpar?

25. A função tangente é uma função ímpar.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Equações trigonométricas

Toda equação em que aparecem razões trigonométricas com arco de medida desconhecida é chamada de **equação trigonométrica**.

Considere os exemplos a seguir.

a. $\operatorname{sen} x = 0{,}5$

b. $\cos 2x = -\frac{3}{4}$

c. $\operatorname{tg}^2 x + (\sqrt{3} - 1) \cdot \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$

d. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{1}{2}$

Observação

Equações do tipo $3x \cdot \cos \pi = 2$ ou $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + x = \frac{1}{2}$ **não** são equações trigonométricas, pois a incógnita x não representa a medida de um arco.

Resolução de equações trigonométricas no intervalo $[0, 2\pi]$

Vamos estudar a resolução de equações trigonométricas tendo como conjunto universo o intervalo $[0, 2\pi]$.

Observações

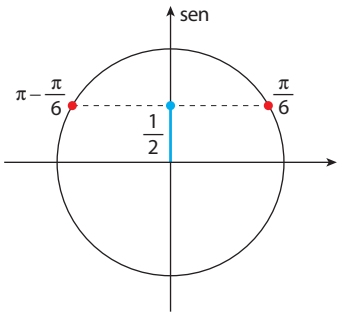
- Na resolução das equações trigonométricas deste capítulo, vamos considerar, para as incógnitas, valores reais que representam as medidas dos arcos em radiano.
- Quando a medida de um arco ou a medida de abertura de um ângulo estiver sem unidade de medida, será considerada a medida em radiano.

Atividades resolvidas

R7. Obter os valores de x, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, para os quais $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$.

▶ **Resolução**

No ciclo trigonométrico, observamos que, para $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$, temos dois arcos:



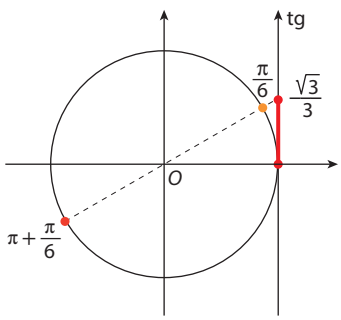
- no 1º quadrante: $x = \frac{\pi}{6}$
- no 2º quadrante: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Logo, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

R8. Encontrar o conjunto solução da equação $\operatorname{tg} 2x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, com $0 \leqslant 2x \leqslant 2\pi$.

▶ **Resolução**

Com tangente igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$, observamos, no ciclo trigonométrico, que existem dois arcos:



- no 1º quadrante: $\frac{\pi}{6}$
- no 3º quadrante: $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Assim:

$2x = \frac{\pi}{6}$ ou $2x = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12}$ ou $x = \frac{7\pi}{12}$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right\}$.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

R9. Quais são os valores de x, em radiano, que satisfazem a equação $\cos x + 1 = \text{sen}^2 x$?

▶ **Resolução**

Da relação fundamental da Trigonometria vem:

$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ (I)

Substituindo (I) na equação dada, obtemos:

$\cos x + 1 = \text{sen}^2 x \Rightarrow \cos x + 1 = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x + \cos x = 0$

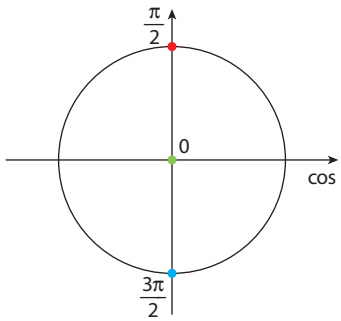
Colocando $\cos x$ em evidência, temos:

$(\cos x) \cdot (\cos x + 1) = 0$

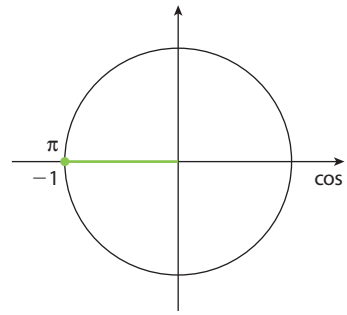
Para um produto ser nulo, um dos fatores deve ser nulo, ou seja:

$\cos x = 0$ ou $\cos x = -1$

Observando os ciclos trigonométricos, encontramos os valores de x:



$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$



$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Portanto, os valores de x, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, que satisfazem a equação são $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ e π.

R10. Determinar o conjunto solução da equação $\text{sen}^2 x - 2 \cdot \text{sen}\, x = 0$.

▶ **Resolução**

Substituindo sen x por y, obtemos: $y^2 - 2y = 0$, com $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

Resolvendo a equação do 2º grau, obtemos:

$y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y - 2) = 0$

$y = 0$ ou $y = 2$ (não convém, pois $-1 \leqslant y \leqslant 1$)

Logo, sen $x = 0$. Obtemos, assim, $x = 0$, $x = \pi$ ou $x = 2\pi$.

Portanto, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos $S = \{0, \pi, 2\pi\}$.

26 a. $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$. **26 b.** $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

26. Determine o valor de x, em radiano, com $x \in [0, 2\pi]$, nas seguintes equações: **26 c.** $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$.

a. $\cos x = \frac{1}{2}$

b. $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\text{tg}\, x = -1$

d. $\text{sen}\, x = 1$ **26 d.** $\frac{\pi}{2}$

e. $\text{sen}\, x = 0$ **26 e.** 0 ou π ou 2π.

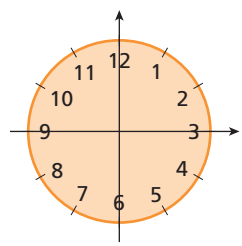
27. Determine os possíveis valores de x, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, nas equações a seguir.

a. $\text{sen}\, x \cdot (\text{sen}\, x + 1) = 0$ **27 a.** 0, π, 2π e $\frac{3\pi}{2}$.

b. $2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x - \cos x = 0$ **27 b.** $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

c. $\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1 = 0$ **27 c.** 0 e 2π.

28. Imagine o ciclo trigonométrico sobreposto ao mostrador de um relógio analógico, com centros coincidentes. Se o ponteiro das horas aponta para a origem do ciclo às 15 h, que horas o relógio indicará quando esse ponteiro apontar para a extremidade de um arco do ciclo cujo seno é igual a −0,5? (*Dica*: Considere somente uma volta do ponteiro de horas, iniciando às 15 horas.) **28.** 16 h ou 20 h.



29. Determine x, em radiano, sabendo que $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$ e que $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. **29.** $\frac{3\pi}{2}$

Resolução de equações trigonométricas no conjunto universo $U = \mathbb{R}$

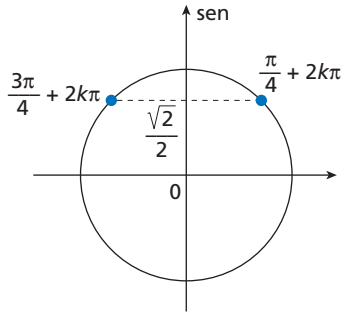
No tópico anterior, estudamos a resolução de equações trigonométricas tendo como conjunto universo o intervalo $[0, 2\pi]$. Agora, vamos estudá-las considerando o conjunto universo $U = \mathbb{R}$.

Nos exemplos a seguir, para obter a solução das equações no conjunto universo $\mathbb{R}$, basta resolvê-las considerando o intervalo $[0, 2\pi]$ e, em seguida, escrever a expressão que fornece as medidas dos arcos côngruos, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Vamos determinar x tal que sen $x = \text{sen } \frac{\pi}{4}$, sendo $U = \mathbb{R}$.

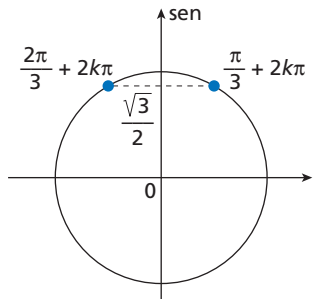


Se sen $x = \text{sen } \frac{\pi}{4}$, então x pode assumir os valores $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$ e todas as medidas associadas a esses pontos, nas infinitas voltas da circunferência trigonométrica.

Portanto, no conjunto universo real, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b. Vamos obter x tal que sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}$.

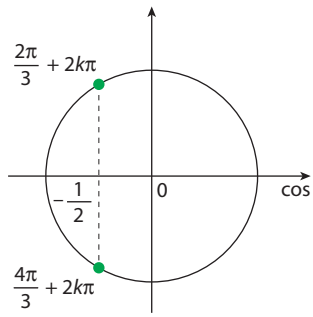


No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo seno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ medem $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

Logo, no conjunto universo real, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c. Vamos obter x tal que $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, sendo $U = \mathbb{R}$.



No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo cosseno vale $-\frac{1}{2}$ medem $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$. Assim:

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

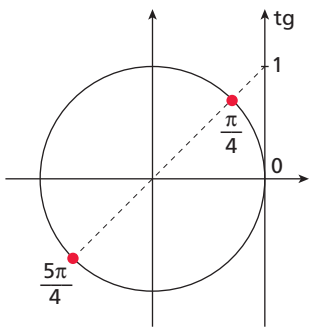
$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{9\pi}{6} + 2k\pi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Então, o conjunto solução, no conjunto universo real, é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d. Vamos resolver a equação tg $2x = 1$.

Os arcos cuja tangente vale 1, considerando a primeira volta no ciclo trigonométrico, medem $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$.



Quando não se menciona o conjunto universo, fica convencionado que $U = \mathbb{R}$.

Repare que, nesse caso, basta adicionar um múltiplo de π ao primeiro ponto para obter todos os pontos que são solução da equação.

Considerando, então, o conjunto universo real, temos:

$$2x = \frac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Assim, o conjunto solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

30 a. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ **30 b.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Atividades propostas

Registre em seu caderno

30. Resolva as equações a seguir, sendo $U = \mathbb{R}$.

a. $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$

c. $\cos x = -\frac{1}{2}$

d. $\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

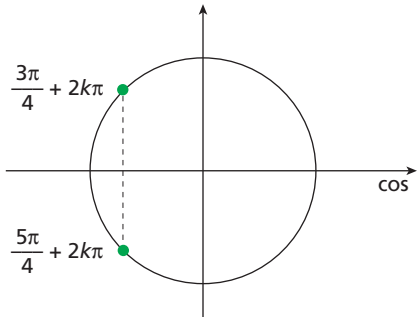
e. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

f. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$

31. Resolva a equação $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $\mathbb{R}$.

32. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = 0$.

33. EM DUPLA Observe a figura do ciclo trigonométrico.



Supondo que a figura destaque as raízes de uma equação trigonométrica, escreva essa equação. Compare sua resposta com a de um colega. **33.** Exemplo de resposta: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

30 c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ **30 d.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Construção de gráficos

30 e. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Até aqui estudamos gráficos das funções trigonométricas fundamentais: seno, cosseno e tangente. Agora, vamos aprender a construir gráficos de outras funções com base nesses gráficos. Inicialmente, construiremos o gráfico de uma das funções fundamentais (cor cinza) e, efetuando algumas transformações nele, obteremos o gráfico pedido.

30 f. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ **32.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Transladando o gráfico

31. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Transladar significa deslocar. Alguns gráficos de funções a seguir podem ser obtidos por meio de deslocamentos verticais ou horizontais dos gráficos das funções fundamentais. Acompanhe os exemplos.

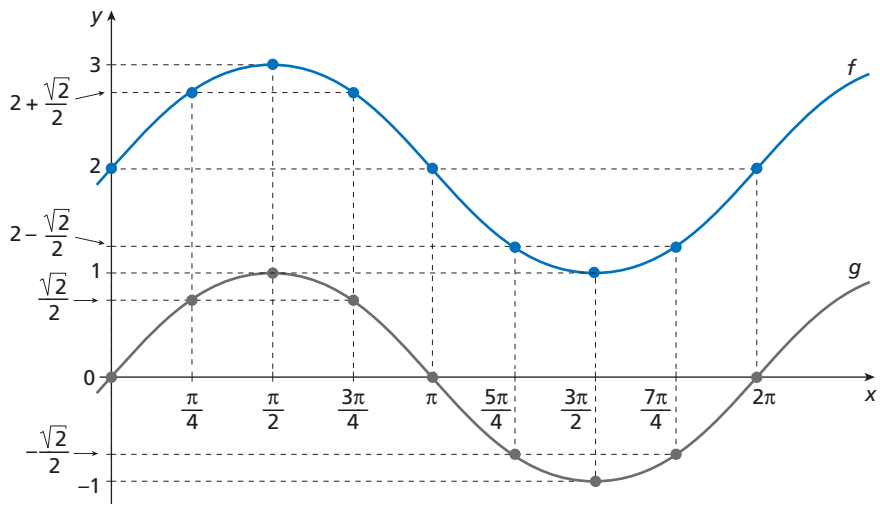
a. $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$

Primeiro, montamos um quadro atribuindo a x alguns valores entre 0 e 2π.

Alguns valores de $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\operatorname{sen} x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2 + \operatorname{sen} x$	2	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	3	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$	2	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	2

Construímos, então, os gráficos das funções dadas por $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, em um mesmo plano cartesiano, para efeito comparativo.



Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que, transladando (deslocando) o gráfico de g, ponto a ponto, duas unidades para cima, obtemos o gráfico de f. Agora, o gráfico oscila entre os valores mínimo 1 e máximo 3. Ou seja, o conjunto imagem de f é [1, 3]. Note que o domínio, o período e a amplitude, em relação à função g, não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = c + \text{sen } x$ são obtidos de uma translação de $|c|$ unidades em relação ao gráfico $y = \text{sen } x$ da seguinte forma:

- se $c > 0$, a translação é para cima;
- se $c < 0$, a translação é para baixo.

O mesmo vale para funções do tipo $y = c + \cos x$ e $y = c + \text{tg } x$.

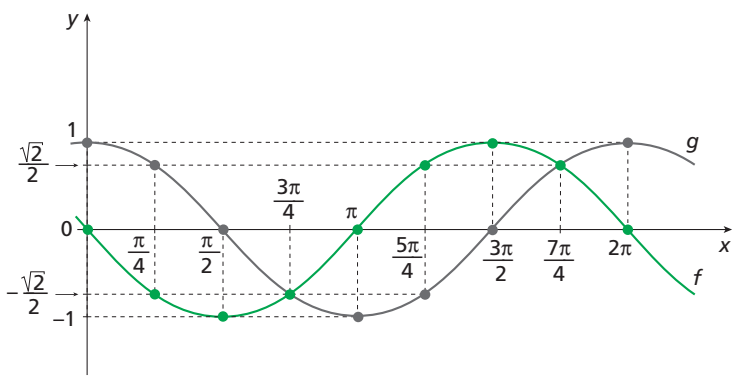
b. $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Novamente, montamos um quadro atribuindo a x alguns valores entre 0 e 2π.

Alguns valores de $g(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

Os gráficos das funções dadas por $g(x) = \cos x$ e $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ são:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A função f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem, mesmo período e mesma amplitude que g, mas o gráfico de g sofreu uma translação (deslocamento) de $\frac{\pi}{2}$ para a esquerda.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Os gráficos de funções do tipo $y = \cos(x + b)$ são obtidos de uma translação de $|b|$ unidades em relação ao gráfico $y = \cos x$ de tal modo que:

- se $b > 0$, a translação é para a esquerda;
- se $b < 0$, a translação é para a direita.

O mesmo pode ser verificado para funções dos tipos $y = \text{sen}(x + b)$ ou $y = \text{tg}(x + b)$.

Observação

Note que para $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ o gráfico sofreria uma translação (deslocamento) de $\frac{\pi}{2}$ para a direita.

Alterando a amplitude

Agora, vamos obter alguns gráficos "esticando" ou "achatando" verticalmente os gráficos das funções fundamentais. Considere o exemplo.

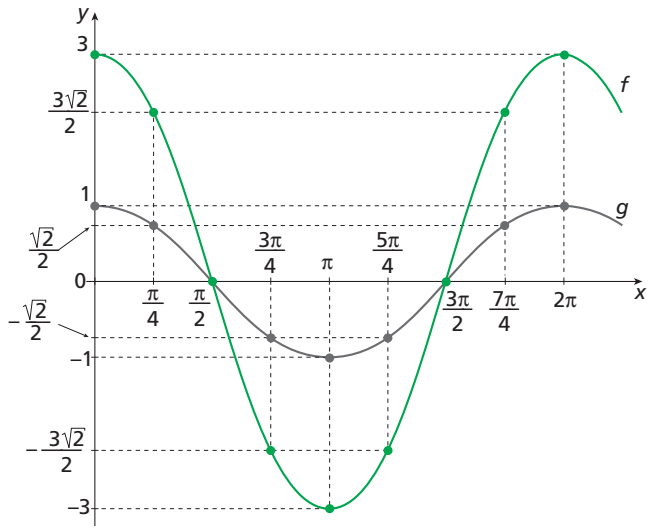
Vamos construir o gráfico de $f(x) = 3 \cdot \cos x$.

Primeiro, montamos um quadro atribuindo a x alguns valores entre 0 e 2π.

Alguns valores de $g(x) = \cos x$ e $f(x) = 3 \cdot \cos x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$3 \cdot \cos x$	3	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	-3	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	3

Os gráficos de f e g, com $g(x) = \cos x$ e $f(x) = 3 \cdot \cos x$, são:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que, multiplicando $g(x) = \cos x$ por 3, "esticamos" o gráfico verticalmente: agora, ele oscila entre -3 e 3. Ou seja, a amplitude de f é 3, o triplo da amplitude de g, e o conjunto imagem de f é $[-3, 3]$.

Note que o domínio e o período não foram alterados.

Analisando casos semelhantes a esse, notamos que:

Gráficos de funções trigonométricas do tipo $y = d \cdot \cos x$ têm amplitude $|d|$.
O mesmo ocorre para funções do tipo $y = d \cdot \operatorname{sen} x$.

Observação

Os procedimentos para obter gráficos de funções nas formas $f(x) + c$, $f(x + c)$ e $c \cdot f(x)$, com base nos gráficos de f, podem ser aplicados para as funções em geral.

Atividades resolvidas

R11. Determinar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude da função dada por $f(x) = 2 \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

▶ **Resolução**

Vamos considerar a função h dada por $h(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

O gráfico de h é obtido por meio de uma translação do gráfico da função g, dada por $g(x) = \cos x$, de $\frac{\pi}{4}$ para a direita.

Como a amplitude da função h é 1, igual à amplitude de g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, então a amplitude de f é 2.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Como o conjunto imagem da função h é $[-1, 1]$, igual ao da função g, e $f(x) = 2 \cdot h(x)$, podemos obter o conjunto imagem da função f multiplicando por 2 os extremos do intervalo $[-1, 1]$.

Logo, $\text{Im}(f) = [-2, 2]$.

O domínio e o período de f são os mesmos de g: $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

R12. Com o auxílio de um *software* de construção de gráficos, com base no gráfico de uma das funções trigonométricas fundamentais, construir passo a passo o gráfico de f, tal que $f(x) = 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, e analisar o que ocorre com ele a cada passo. Indicar o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de f.

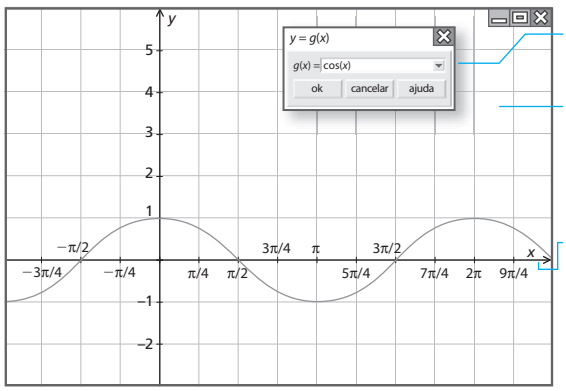
Observação

Em alguns *softwares*, temos de escrever a lei da função de maneira diferente. Observe os exemplos:

- sen $x \rightarrow$ sin(x)
- $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$ $\rightarrow$ 2*cos(x + pi/4)
- $\text{tg}\left(\frac{x + \pi}{2}\right) \rightarrow$ $\rightarrow$ tan((x + pi)/2)

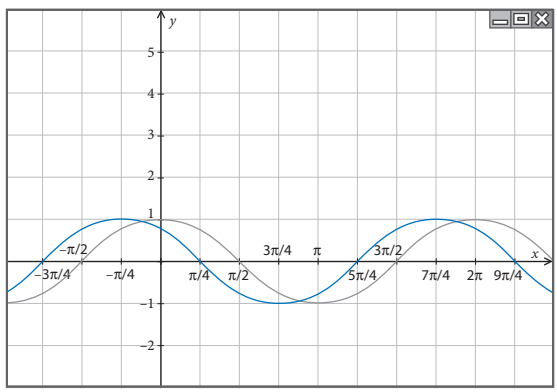
▶ Resolução

Primeiro, vamos traçar o gráfico da função trigonométrica dada por $g(x) = \cos x$.



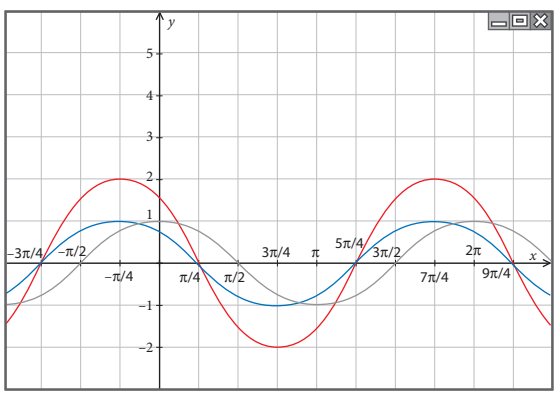
Acompanhe os passos descritos a seguir.

1º passo: $\cos x \rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



O gráfico de g sofreu uma translação de $\frac{\pi}{4}$ para a esquerda.

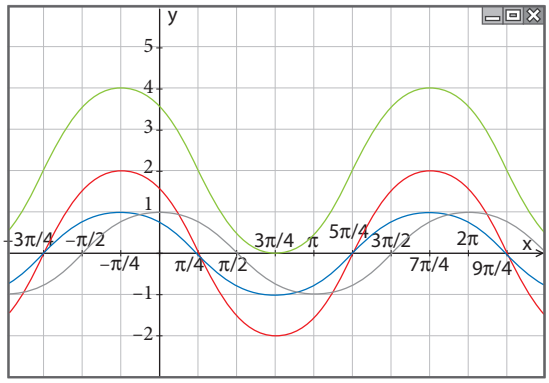
2º passo: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



O gráfico da função tem nova amplitude, igual a 2.

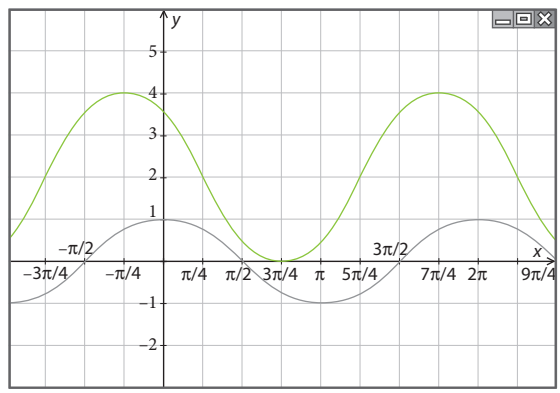
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3º passo: $2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 2 + 2 \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$



O gráfico sofreu uma translação de duas unidades para cima.

O conjunto imagem da função dada por $g(x) = \cos x$ é $[-1, 1]$. Após o 1º passo, adicionando $\frac{\pi}{4}$ a x, o conjunto imagem da nova função continua sendo $[-1, 1]$. Após o 2º e o 3º passos, o conjunto imagem se modificou. Quando a função é multiplicada por 2, o conjunto imagem passa a ser $[-2, 2]$. Adicionando-se 2, o conjunto imagem da nova função passa a ser $[0, 4]$.



Portanto, $\text{Im}(f) = [0, 4]$.

A amplitude de g é 1 e não se modifica após o 1º passo; porém, no 2º passo, a função passa a ter amplitude 2 e permanece assim após o 3º passo.

O domínio e o período de f são os mesmos de g: $D(f) = \mathbb{R}$ e $p = 2\pi$.

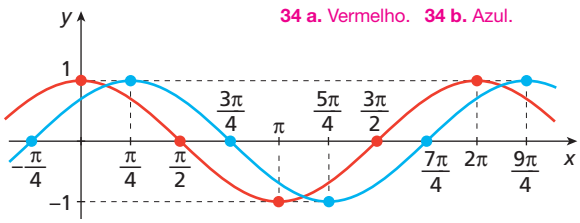
Observe os gráficos das funções f e g.

35. Resposta no *Suplemento para o professor*.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

34. Observe os gráficos a seguir.



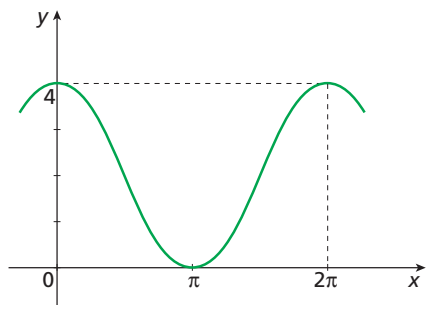
34 a. Vermelho. **34 b.** Azul.

Descubra qual curva representa cada uma destas funções e indique a cor utilizada nos gráficos para representar cada função.

a. $f(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ **b.** $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

35. Com base no gráfico da função g de lei $g(x) = \text{sen}\, x$, construa o gráfico de f, tal que $f(x) = 1 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Indique o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de f.

36. O gráfico a seguir representa a função f de lei $f(x) = a + b \cdot \cos x$.



Determine os valores de a e b. **36.** $a = 2$; $b = 2$.

37. **SOFTWARE** Utilizando um *software* de construção de gráficos ou um papel quadriculado, construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções f e g.

a. $f(x) = 3 + \text{sen}\, x$ e $g(x) = -3 - \text{sen}\, x$

b. $f(x) = -2 + \cos x$ e $g(x) = 2 - \cos x$

37. Respostas no *Suplemento para o professor*.

38. **EM DUPLA** **SOFTWARE** Em duplas, comparem os gráficos das funções f e g de cada item da atividade anterior.

38. Respostas no *Suplemento para o professor*.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

39. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Considere o algoritmo a seguir.

Passo 1. Construa o gráfico de $y = \text{tg } x$.

Passo 2. Verificar o valor de c. Se $c > 0$, vá para o **passo 3**. Se não, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Como $c > 0$, então o gráfico é transladado de c unidades para cima. Termina-se o algoritmo.

Passo 4. Verificar o valor de c. Se $c = 0$, o gráfico não muda e termina-se o algoritmo. Se não, vá para o **passo 5**.

Passo 5. Como $c < 0$, então o gráfico é transladado de c unidades para baixo e termina-se o algoritmo.

a. Qual é a finalidade desse algoritmo?

b. Represente esse algoritmo por meio de um fluxograma.

40. **PENSAMENTO COMPUTACIONAL** Escreva um algoritmo em linguagem materna que descreva a translação horizontal do gráfico de uma função trigonométrica de sua escolha. Em seguida, represente esse algoritmo utilizando um fluxograma.

39 a. Representar como se faz a translação vertical do gráfico de uma função trigonométrica $y = \text{tg } x$ para obter o gráfico da função $y = c + \text{tg } x$.
40. Exemplo de resposta no *Suplemento para o professor*.

Alterando o período

Estudamos alguns gráficos que são obtidos de translações horizontais ou verticais ou da modificação na amplitude dos gráficos das funções trigonométricas fundamentais, embora conservem o período. Agora, estudaremos exemplos de gráficos que sofrem alteração de período em relação às funções fundamentais. Considere o exemplo a seguir.

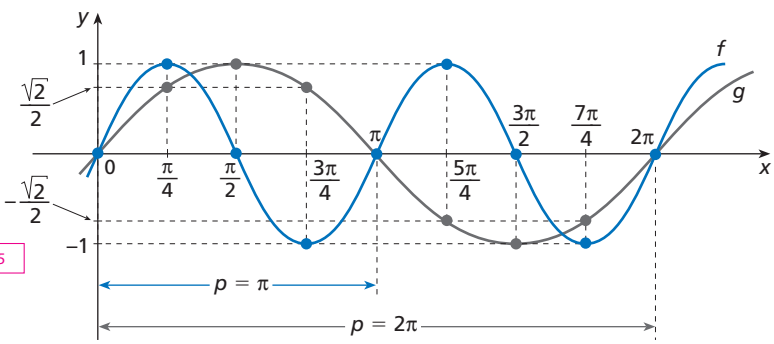
Vamos construir o gráfico da função f dada por $f(x) = \text{sen } 2x$ e compará-lo com o da função g dada por $g(x) = \text{sen } x$.

Primeiro, montamos um quadro atribuindo a x alguns valores entre 0 e 2π.

Alguns valores de $g(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \text{sen } 2x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
sen x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sen $2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

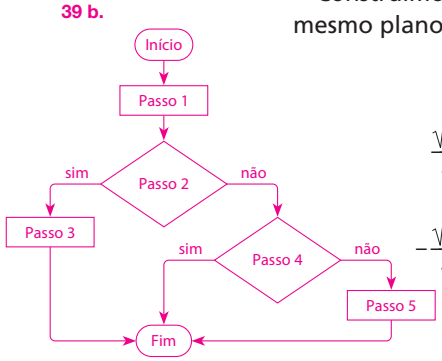
Construímos, então, os gráficos das funções g e f dadas por $g(x) = \text{sen } x$ e $f(x) = \text{sen } 2x$ no mesmo plano cartesiano.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

39 b.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que f apresenta mesmo domínio, mesmo conjunto imagem e mesma amplitude que g, porém tem período igual a π, ou seja, metade do período de g.

Analisando casos semelhantes, notamos que:

As funções trigonométricas dos tipos $y = \text{sen } (ax)$ ou $y = \cos (ax)$ têm período $\frac{2\pi}{|a|}$.

No caso das funções do tipo $y = \text{tg } (ax)$, podemos verificar que o período é $\frac{\pi}{|a|}$.

Atividades propostas

Registre em seu caderno

41. Determine o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude das funções indicadas a seguir.

a. $f(x) = 3 \cdot \text{sen } 2x$ **b.** $f(x) = 5 + 2 \cdot \cos 3x$

41. Respostas no *Suplemento para o professor*.

42. Esboce o gráfico de cada função.

a. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ **c.** $f(x) = 2 \cdot \text{sen } 2x$

b. $f(x) = \text{sen } 4x$ **d.** $f(x) = -2 \cdot \cos x$

42. Respostas no *Suplemento para o professor*.

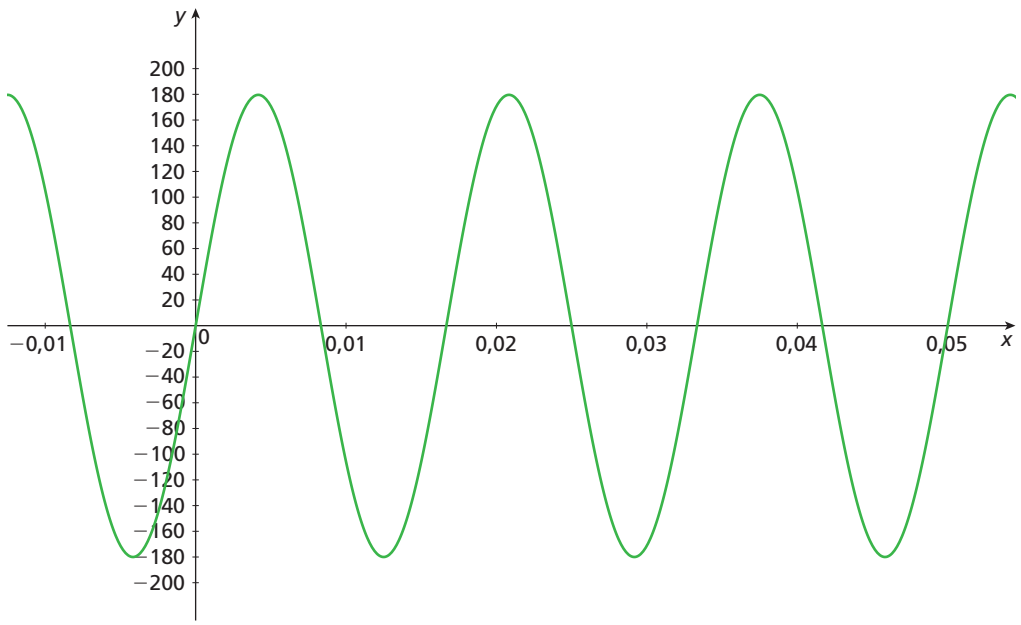
Eletricista

O eletricista é a pessoa responsável pela implementação, manutenção e reparação de instalações elétricas, tanto residenciais quanto industriais. Além disso, o eletricista instala, vistoria e repara aparelhos elétricos e de redes de distribuição de energia. Pode trabalhar como autônomo ou em construtoras, indústrias e empresas de automação, entre outras. Também atua no setor de manutenção de hospitais, comércios, órgãos públicos, concessionárias de energia etc.

Para se tornar eletricista, é necessário realizar um curso de qualificação profissional. Nele, o estudante aprende a interpretar circuitos e diagramas elétricos; a utilizar diversas ferramentas e instrumentos de medição; e a instalar tomadas, sistemas de iluminação e quadros de distribuição de acordo com as normas técnicas, ambientais e de segurança no trabalho, entre outras funções.

No dia a dia do eletricista, duas grandezas estão bastante presentes: tensão elétrica e corrente elétrica. A tensão elétrica corresponde à diferença de potencial elétrico (d.d.p.) entre dois pontos. Sempre que houver uma diferença de potencial elétrico entre dois pontos quaisquer de um circuito elétrico fechado, existirá um fluxo de partículas carregadas eletricamente entre esses dois pontos. À quantidade de carga elétrica por unidade de medida de tempo dá-se o nome de corrente elétrica. A unidade de medida de tensão elétrica é o volt, que indicamos por V, e a unidade de medida de corrente elétrica é o ampere, que indicamos por A.

Tensões e correntes elétricas residenciais mudam periodicamente de intensidade e de polaridade (positiva ou negativa) no tempo. Uma das funções que representam a variação da tensão na rede elétrica na cidade de São Paulo no tempo é $V(t) = 179{,}6 \cdot \text{sen}\,(377t)$, em que t indica a medida do tempo em segundo. O gráfico dessa função está representado a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

Registre em seu caderno

1. O que mais chama a sua atenção no trabalho do eletricista? Por quê? **1.** Respostas pessoais.
2. Quais são os riscos associados ao trabalho do eletricista? Como ele pode minimizar esses riscos?
3. Analise o gráfico da função $V(t) = 179{,}6 \cdot \text{sen}\,(377t)$ apresentado no texto e responda às questões a seguir.
   - **a.** Qual é a amplitude da função? **3 a.** 179,6 V
   - **b.** Qual é o período da função? **3 b.** Aproximadamente 0,0167 s.
   - **c.** Quantas vezes, aproximadamente, a curva se repete em 1 segundo? **3 c.** 60 vezes.

2. Exemplos de resposta: Quedas e choque elétrico; os riscos podem ser minimizados com o uso de Equipamentos de Proteção Individual (EPI) e o cumprimento das normas de segurança.

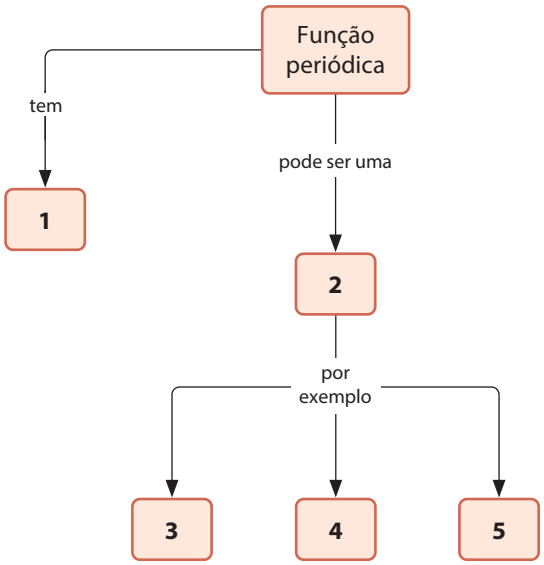
Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PARA FINALIZAR O CAPÍTULO 9

ESTRATÉGIAS DE ESTUDO

CONEXÕES ENTRE CONCEITOS

Analise o mapa conceitual a seguir com a relação entre alguns conteúdos estudados neste capítulo.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Relacione os números do mapa conceitual com os conteúdos apresentados a seguir.

A. Função trigonométrica

B. Função seno

C. Função cosseno

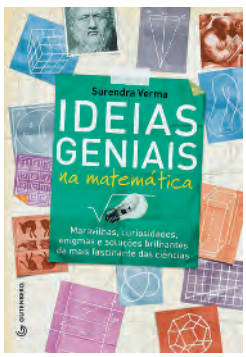
D. Período

E. Função tangente

Conexões entre conceitos. Exemplo de resposta:
A – 2; B – 3; C – 4; D – 1; E – 5.

SUGESTÕES DE AMPLIAÇÃO

Livro



REPRODUÇÃO/EDITORA GUTENBERG

Ideias geniais na Matemática: maravilhas, curiosidades, enigmas e soluções brilhantes da mais fascinante das ciências

Surendra Verma

Belo Horizonte: Gutenberg, 2013.

Com explicações curtas e simples, o leitor descobrirá que a Matemática não é assustadora nem complicada, mas um divertido e fascinante conjunto de ideias que explicam o mundo em que vivemos.

Vídeo

Desenhando ondas

Por meio de uma história fictícia, esse vídeo, da coleção Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), mostra como a música se relaciona com a Matemática por meio do conceito de onda sonora e de funções periódicas e somas de funções periódicas.

Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1086. Acesso em: 23 set. 2024.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AUTOAVALIAÇÃO

Q1. O arco $\frac{16\pi}{3}$ é côngruo a: **Q1.** Alternativa **c**.

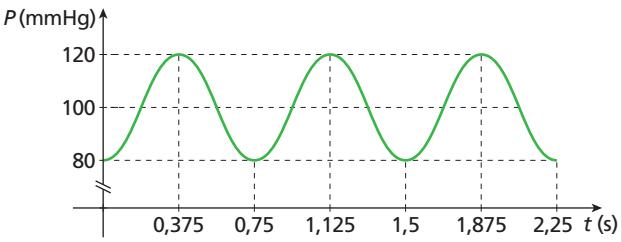
a. $\frac{\pi}{3}$ **b.** $\frac{2\pi}{3}$ **c.** $\frac{4\pi}{3}$ **d.** $\frac{5\pi}{3}$

Q2. Sendo $k \in \mathbb{Z}$, uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{22\pi}{5}$ é: **Q2.** Alternativa **c**.

a. $\frac{\pi}{5} + k \cdot 2\pi$ **c.** $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi$

b. $\frac{\pi}{5} + k \cdot \pi$ **d.** $\frac{2\pi}{5} + k \cdot \pi$

Q3. A variação da medida da pressão sanguínea P, em milímetro de mercúrio, de uma pessoa em função da medida de tempo t, em segundo, pode ser modelada, aproximadamente, pela função trigonométrica representada a seguir, em que cada ciclo completo (período) equivale a um batimento cardíaco.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Então, o intervalo de um batimento cardíaco é aproximadamente: **Q3.** Alternativa **d**.

a. 80 s **c.** 0,375 s

b. 120 s **d.** 0,75 s

Q4. Sabemos que $f(x) = \text{sen}\,(x + 2\pi)$ para todo x. Logo, a função seno é [redacted] e tem [redacted] igual a 2π. **Q4.** Alternativa **b**.

a. limitada; máximo.

b. periódica; período.

c. ilimitada; período.

d. periódica; mínimo.

Q5. Uma solução da equação $2 \cdot \cos x = \sqrt{3}$ é: **Q5.** Alternativa **d**.

a. $\frac{\pi}{3}$ rad **c.** $\frac{\pi}{2}$ rad

b. $\frac{\pi}{4}$ rad **d.** $\frac{11\pi}{6}$ rad

Q6. A equação $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ tem o conjunto solução: **Q6.** Alternativa **b**.

a. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d. $S = \varnothing$

Q7. A função f, tal que $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen}\,(x + \pi)$, tem amplitude: **Q7.** Alternativa **a**.

a. 3 **b.** -2 **c.** 2π **d.** π

Q8. O intervalo [redacted] é o conjunto imagem da função de lei $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos(2x + 1)$. **Q8.** Alternativa **d**.

a. $[-1, 1]$ **c.** $[-1, 5]$

b. $[-2, 2]$ **d.** $[1, 5]$

Q9. A função $f(x) = \text{sen}\,2x$ tem período: **Q9.** Alternativa **b**.

a. $0{,}5\pi$ **b.** π **c.** 2π **d.** 3π

Q10. Alternativa **c**.

Q10. Em certo lago, a medida de massa de algas, em quilograma, varia de maneira periódica conforme a função $m(t) = 4.500 + 3.400 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi t}{60}$, em que t é a medida de tempo, em dias, a partir de 1º de janeiro de cada ano. Entre ocorrências sucessivas de medida de massa máxima ([redacted] kg) e mínima ([redacted] kg) de algas nesse lago, passam-se [redacted] dias.

a. 4.500; 3.400; 60. **c.** 7.900; 1.100; 60.

b. 4.500; 3.400; π. **d.** 7.900; 1.100; 120.

Se você não acertou uma ou mais questões, consulte o quadro a seguir para verificar a quais conceitos cada questão está relacionada. Depois, releia a teoria e refaça as atividades correspondentes. Se necessário, peça ajuda ao seu professor.

Relação entre as questões e os objetivos do capítulo

Objetivos do capítulo	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10
Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.			X	X						X
Estender o conceito de ciclo trigonométrico a $\mathbb{R}$.	X	X	X	X		X	X	X	X	
Resolver equações trigonométricas.					X	X				
Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.							X	X	X	

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 a. Exemplo de resposta: É um campo de pesquisa que engloba diversas áreas do conhecimento e procura construir mecanismos e/ou dispositivos que simulem a capacidade do ser humano de pensar e de resolver problemas. É também um conjunto de novas tecnologias que permitem aos dispositivos inteligentes desempenhar múltiplas tarefas complexas de maneira quase autônoma.

Inteligência Artificial na Educação

ODS 16

Inteligência Artificial: qual a novidade?

Inteligência Artificial (IA) é uma tecnologia com capacidade de raciocinar, aprender e agir de forma independente. E, embora o assunto tenha aparecido com mais frequência na mídia no último ano [2022], não é algo novo. O pesquisador da área de Educação com ênfase em Inteligência Artificial nas Linguagens e na Educação, da Universidade Federal de Sergipe (UFS), Paulo Roberto Boa Sorte Silva, explica que a IA oferece às máquinas e aos computadores a possibilidade de imitar os recursos que temos na mente humana para, de forma mais rápida e até instantânea, solucionar problemas, estabelecer relações, tomar decisões, fazer resumos, traduções e outras inúmeras possibilidades. [...]

O professor do Departamento de Informática Aplicada da Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (Unirio), Mariano Pimentel, explica que a Inteligência Artificial é a continuação desse propósito de automatizar. E que ela está no Brasil desde seus primórdios. "É claro que nós vimos um grande salto da inteligência artificial na década passada com a técnica de *deep learning* [uma forma de aprendizado de máquina que permite aos computadores "aprender" de forma semelhante ao cérebro humano]. Hoje, falamos até em *deep fake* [uso da IA para mudar rostos, simular movimentos labiais e expressões, entre outras possibilidades]. Estamos em uma encruzilhada", alerta o professor. Outra forma de IA que tem sido falada recentemente é o *machine learning*, tecnologia que permite aos computadores irem aprendendo, a partir de dados ou padrões, e utilizarem esse conhecimento para fazer previsões ou tomar decisões.

[...]

Fonte: FARIAS, Erika. Inteligência Artificial na Educação. Rio de Janeiro: Escola Politécnica de Saúde Joaquim Venâncio/Fiocruz. 5 set. 2023. Disponível em: https://www.epsjv.fiocruz.br/noticias/reportagem/inteligencia-artificial-na-educacao. Acesso em: 23 set. 2024.

Atividades

Registre em seu caderno

1. **EM GRUPO** Reúna-se com três colegas e respondam às questões.
   - **a.** O que é Inteligência Artificial (IA)?
   - **b.** Vocês já utilizaram ferramentas que utilizam IA? Em caso afirmativo, para quê?
   - **c.** Na opinião de vocês, quais são os desafios trazidos pelas novas ferramentas que utilizam IA?

1 b. Respostas pessoais.

1 c. Comentários no *Suplemento para o professor*.

2. Analise a questão e a resposta fornecida por um *software* que utiliza IA.

O que é círculo?

Um círculo é uma figura geométrica plana que consiste em um conjunto de pontos igualmente distantes de um ponto central, chamado de centro. Em outras palavras, um círculo é uma forma plana redonda que pode ser criada quando uma linha curva é desenhada em torno de um ponto central, mantendo a mesma distância desse ponto em todas as direções.

2. Espera-se que os estudantes percebam que a definição apresentada desconsidera que o círculo tem região interna e, portanto, os seus pontos não estão igualmente distantes do centro.

Existe algum problema na resposta fornecida? Em caso afirmativo, qual?

3. **EM GRUPO** Acesse um *site* que ofereça um *chatbot* que utiliza IA. Depois, faça perguntas relacionadas a conceitos que foram estudados neste volume. Por fim, escreva as respostas obtidas no caderno, avalie cada uma delas e faça os ajustes quando necessário. Ao final, reúna-se com quatro colegas para compartilhar o que pesquisaram e o que modificaram.

3. Respostas pessoais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

PESQUISA E AÇÃO Maquete

Registre em seu caderno

OBJETIVOS

Pesquisar o Desenho Universal e a norma técnica NBR 9050; planejar as alterações em espaços da estrutura física escolar para se adaptar à norma; construir uma maquete que represente o espaço escolar; expor a maquete para a comunidade escolar.

BIRY SARKIS/ARQUIVO DA EDITORA

ODS 3 ODS 9 ODS 10

Observe a estrutura física de sua escola. Você considera que os pisos, a sinalização e a iluminação são adequados a todas as pessoas, respeitando as diferenças entre os que circulam ou poderiam circular nesse espaço?

Para pensar em questões como essas, desenvolveu-se nos Estados Unidos, no final dos anos 1980, o conceito de **Desenho Universal** (*Universal Design*). Trata-se de um conceito ligado à acessibilidade física, isto é, um conjunto de critérios que visam garantir mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa: crianças, adultos, pessoas idosas, gestantes, obesos, pessoas com deficiência ou com mobilidade reduzida. Idealizado por profissionais da área de Arquitetura, o Desenho Universal objetiva definir projetos de produtos e ambientes que contemplam a diversidade humana com base em sete princípios:

1. Uso igualitário.
2. Uso flexível.
3. Uso simples e intuitivo.
4. Informação de fácil percepção.
5. Tolerância ao erro (segurança).
6. Esforço físico mínimo.
7. Dimensionamento de espaços para acesso e uso abrangente.

No Brasil, a primeira norma técnica relativa à acessibilidade foi criada em 1985 pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Atualmente denominada **NBR 9050 – Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos**, a norma foi revisada pela última vez em 2020 e está em vigor até os dias de hoje para regulamentar os parâmetros técnicos de acessibilidade no país.

Além disso, o Estatuto da Pessoa Idosa (Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003) e o Estatuto da Pessoa com Deficiência (Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência, Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015) estabelecem diretrizes fundamentais sobre a acessibilidade em edificações. O Estatuto da Pessoa Idosa dispõe que os projetos arquitetônicos públicos e privados proporcionem acesso adequado à pessoa idosa, garantindo sua mobilidade e segurança. Da mesma maneira, o Estatuto da Pessoa com Deficiência impõe que as edificações públicas e privadas de uso coletivo sejam acessíveis, adotando as normas técnicas pertinentes de acessibilidade, a fim de garantir a autonomia e a participação plena das pessoas com deficiência na sociedade.

Nessa atividade, você e seus colegas construirão uma maquete da escola em que estudam, contribuindo com o replanejamento do espaço de acordo com o conceito de Desenho Universal e os parâmetros técnicos da NBR 9050.

Etapa 1: Acessibilidade física

Etapa 1: Comentários no *Suplemento para o professor*.

1. Reflita e converse com o professor e os colegas sobre as questões a seguir.
   - **a.** O que é acessibilidade?
   - **b.** O que é acessibilidade física? Cite exemplos.
   - **c.** Por que é preciso pensar em critérios de acessibilidade?

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observações

- O documento **Desenho Universal: habitação de interesse social** está disponível em: https://www.pessoacomdeficiencia.sp.gov.br/wp-content/uploads/2020/03/AA_DIRETRIZES-DO-DESENHO-UNIVERSAL-NA-HABITA%C3%87%C3%83O-DE-INTERESSE-SOCIAL-NO-ESTADO-DE-SP-ESPA%C3%87O-PARA-TODOS-E-POR-TODA-A-VIDA_GOVERNO-DE-SP.pdf. Acesso em 22 out. 2024.
- A norma NBR 9050 de 2020 está disponível em: https://www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/secretarias/upload/NBR9050_20.pdf. Acesso em: 8 out. 2024.

Etapa 2: Desenho Universal e NBR 9050

Etapa 2: Comentários no *Suplemento para o professor*.

2. Organizem-se em grupos de, no máximo, sete integrantes. Pesquisem informações sobre o Desenho Universal e a NBR 9050. Para nortear a pesquisa, considerem os tópicos a seguir.
   - **a.** O que é Desenho Universal? Qual é seu propósito?
   - **b.** Como vocês explicariam cada um dos sete princípios do Desenho Universal? Deem exemplos de como esses princípios podem ser aplicados na prática.
   - **c.** O público-alvo do Desenho Universal é toda a população, contemplando sua diversidade e as dificuldades permanentes ou temporárias. De acordo com o documento publicado pelo governo do estado de São Paulo, em 2010, intitulado **Desenho Universal: habitação de interesse social**, os tipos de restrição de mobilidade e de dificuldades mais significativas foram agrupados e classificados da seguinte maneira:
     - pessoas com mobilidade reduzida ou com deficiência;
     - pessoas em cadeira de rodas;
     - pessoas com deficiências sensoriais;
     - pessoas com deficiência cognitiva.

     Deem exemplos do público-alvo de cada agrupamento e citem dificuldades enfrentadas por eles.
   - **d.** O que a norma NBR 9050 estabelece? O que ela visa proporcionar?
   - **e.** O que foi considerado para se estabelecerem os critérios e os parâmetros técnicos dessa norma?
   - **f.** O que são os parâmetros antropométricos? Como esses padrões foram determinados na NBR 9050?
   - **g.** Quais são os parâmetros antropométricos apresentados pela norma que vocês consideram mais importantes para o espaço escolar?
   - **h.** Quais são os critérios específicos apresentados na NBR 9050 para os edifícios que abrigam escolas?

Etapa 3: Alterações e adequações do espaço físico escolar

Etapa 3: Comentários no *Suplemento para o professor*.

3. Com os materiais adequados, incluindo instrumentos de medição, explorem alguns ambientes da escola, fazendo observações e medições a fim de comparar as informações obtidas com o conceito de Desenho Universal e as exigências da NBR 9050.

   Observação: Independentemente do tamanho da escola, escolham apenas alguns ambientes, como a sala de aula, o banheiro mais próximo, os corredores centrais e o acesso principal da escola. Não há necessidade de analisar toda a estrutura física da escola.

4. De acordo com os critérios específicos para escolas apresentados na NBR 9050, com o conceito de Desenho Universal e observando as informações obtidas na atividade anterior, quais são as alterações e as adequações necessárias na estrutura física dos espaços explorados?

5. Elaborem uma planta baixa com a escala 1 : 50 para representar os espaços analisados com as alterações previstas. Caso seja necessário, elaborem outras plantas para mostrar detalhes da estrutura, como uma escada ou rampa. Não se esqueçam de incluir cotas, especificando as medidas.

6. Apresentem as plantas elaboradas para a turma, explicando quais foram as alterações e as adequações feitas e o motivo pelo qual foram realizadas.

7. Após a apresentação de todos os grupos, respondam às questões.
   - **a.** Os grupos planejaram os novos espaços da mesma maneira?
   - **b.** Todas as especificações dos ambientes escolhidos foram contempladas? Se não, quais faltaram?
   - **c.** Para elaborar as plantas, quais foram os conceitos matemáticos usados?
   - **d.** Há alterações a serem feitas nas plantas apresentadas? Se sim, qual(is)? Realizem as alterações necessárias.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Registre em seu caderno

Etapa 4: Maquete

Etapa 4: Comentários no *Suplemento para o professor*.

8. De acordo com as plantas elaboradas na etapa anterior, vocês vão construir uma maquete que representará os espaços escolhidos pelo grupo.

9. Antes de iniciar a construção da maquete, vocês precisam definir a escala que vão utilizar.

10. Façam um levantamento dos materiais que serão utilizados e a quantidade necessária de cada um. Busquem escolher materiais recicláveis para a construção da maquete e não se esqueçam de que ela precisa ter uma base de apoio.

11. Após reunirem os materiais e fazerem os cálculos necessários, construam a maquete.

Observação

Definir uma escala adequada é importante para garantir que todas as partes da maquete sejam representadas de maneira precisa e proporcional.

Etapa 5: Exposição das maquetes e análise coletiva do trabalho

Etapa 5: Comentários no *Suplemento para o professor*.

12. Após a definição da data e a escolha de um espaço adequado, organizem a exposição das maquetes.

13. Cada grupo também deverá apresentar por escrito o objetivo do trabalho, trazendo informações sobre o Desenho Universal e a NBR 9050, especificando e indicando os critérios adotados.

14. Após a exposição, reúnam-se com toda a turma para avaliar coletivamente o trabalho realizado com a mediação do professor. Vocês podem conversar sobre os seguintes pontos:

- As maquetes construídas estavam de acordo com o que foi pesquisado sobre o Desenho Universal e os critérios da NBR 9050?
- As maquetes representaram espaços que garantem mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa?
- A exposição das maquetes conseguiu transmitir a importância de garantir acessibilidade física?
- A turma trabalhou de maneira colaborativa?
- O que poderia ter sido mais bem executado nesse trabalho?

Etapa 6: Autoavaliação e relatório do trabalho realizado

Etapa 6: Comentários no *Suplemento para o professor*.

15. Agora, você fará uma autoavaliação. Para isso, reflita sobre as questões a seguir.

- O que aprendi sobre acessibilidade física e Desenho Universal?
- Compreendi a importância da acessibilidade física? Por que ela é importante?
- Participei dos momentos de pesquisa, de conversa e de organização propostos no decorrer do trabalho?
- Apresentei ideias, sugestões, mudanças e correções durante a elaboração das plantas e da maquete?
- Ouvi com atenção e respeito as ideias dos colegas?
- Houve dificuldades na execução do trabalho? Em caso afirmativo, qual(is)? Como busquei resolvê-las?
- O que foi necessário para que nosso grupo cumprisse os prazos estabelecidos e alcançássemos os objetivos do trabalho?
- Compreendi como as maquetes podem contribuir para planejar um espaço? Como isso ocorre?
- O que aprendi durante a construção da maquete?
- Quais foram os conteúdos matemáticos utilizados neste trabalho, desde a elaboração das plantas, passando pela escolha dos materiais, até a construção da maquete?
- Tive dificuldade em aplicar os conteúdos matemáticos? Em caso afirmativo, qual(is)? O que fiz para suprir essas dificuldades?

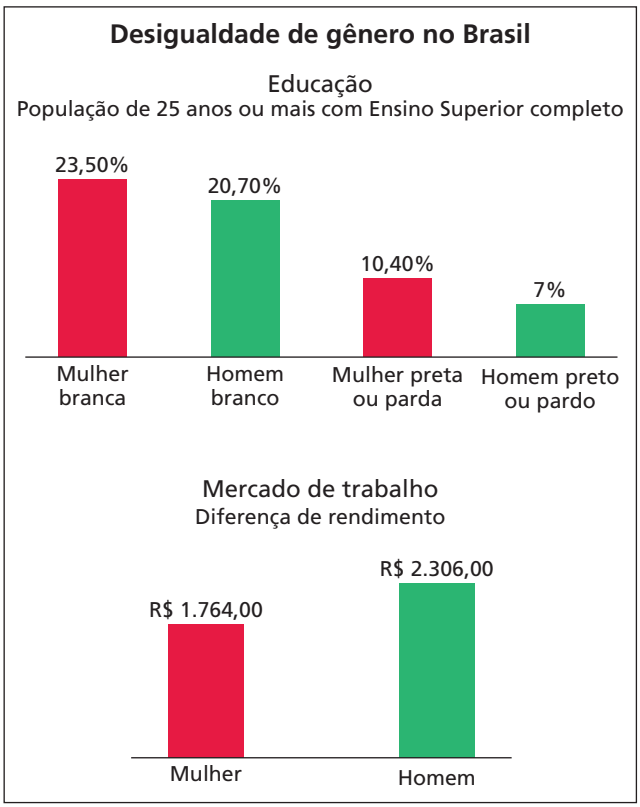
16. Escreva um relatório baseado na reflexão das questões anteriores e acrescente outras informações que julgar relevantes. Entregue o relatório finalizado ao professor.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Registre em seu caderno

ESTRATÉGIA DE ESTUDO

1. **(Santa Casa-2023)** Examine os gráficos que mostram os resultados de um estudo sobre estatísticas de gênero, realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), divulgado em 2018. **1.** Alternativa **b**.



Considerando os dados apresentados e conhecimentos sobre a população brasileira, verifica-se que

a. a diferença entre mulher branca e mulher preta ou parda é maior do que entre homem branco e homem preto ou pardo no ensino superior.

b. o rendimento dos homens é superior ao das mulheres embora eles apresentem menor participação no ensino superior.

c. a diferença de cor ou raça não interfere nos percentuais de homens e mulheres no ensino superior.

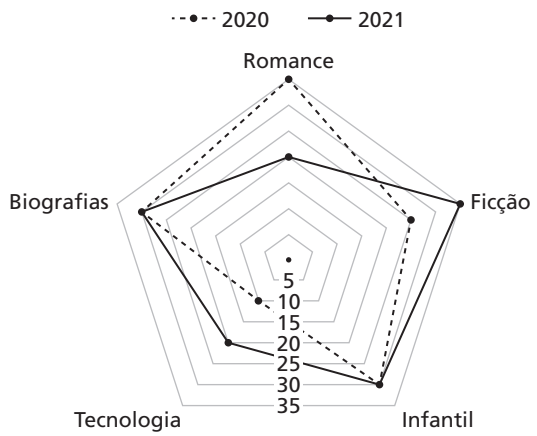
d. o menor rendimento das mulheres está atrelado ao reduzido acesso delas ao ensino superior.

e. a diferença entre os rendimentos é consequência do maior número de homens do que de mulheres no país.

2. **(Unicamp-2023)** Uma forma de apresentar dados é usar um gráfico de radar. Este tipo de gráfico é composto por segmentos uniformemente espaçados, dispostos em torno de um ponto. Os segmentos representam diferentes valores, valores esses que aumentam conforme a distância em relação ao centro se torna maior. Gráficos de radar são frequentemente usados em jogos eletrônicos para representar o desempenho, em diferentes aspectos, dos personagens.

Enzo tem uma livraria e vende obras dos gêneros Romance, Ficção, Tecnologia, Biografias e Infantil. Ele representou no gráfico de radar, a seguir, quantas obras diferentes de cada um desses gêneros foram vendidas em 2020 e 2021. Por exemplo, em 2021, foram vendidas 20 obras do gênero Tecnologia. Note que o gráfico não indica quantos exemplares de cada obra foram efetivamente vendidos, indica apenas o número de obras que tiveram exemplares vendidos para os gêneros indicados. **2.** Alternativa **d**.

Quantidade de obras vendidas



Sobre os dados apresentados no gráfico, é correto afirmar que

a. o gênero que teve maior quantidade de obras vendidas, considerando os dois anos, foi Biografias, cuja venda foi o triplo da venda do gênero que teve menos obras vendidas.

b. os únicos gêneros que venderam mais obras em 2021, quando em comparação com as vendas de 2020, foram os gêneros Ficção e Infantil.

c. o número de obras do gênero Romance que foram vendidas em 2021 é o dobro do que foi vendido em 2020 para este mesmo gênero.

d. a quantidade de obras vendidas, do gênero Infantil, nos dois anos, é a mesma quantidade de obras vendidas, no mesmo período de tempo, do gênero Biografias.

3. **(Enem-2022)** Em busca de diversificar a vivência do filho, seus pais registraram a quantidade de horas de uso diário do aparelho celular dele durante a primeira semana de agosto. O resultado desse registro, em hora, foi o seguinte:

- segunda-feira: 5;
- terça-feira: 2;
- quarta-feira: 9;
- quinta-feira: 2;
- sexta-feira: 8;
- sábado: 12;
- domingo: 4.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Com base nesse registro, os pais planejaram incluir atividades físicas e culturais na vivência do filho no sábado da segunda semana do mesmo mês. Consequentemente, a quantidade de horas de uso do aparelho no sábado deveria ser reduzida, de modo que a média diária de uso na segunda semana fosse, no mínimo, uma hora a menos do que a média diária na primeira semana. Ao longo dos demais dias da segunda semana, a quantidade de horas de uso do aparelho seria a mesma da primeira semana. Qual é a quantidade máxima de horas de uso do aparelho no sábado da segunda semana que atende ao planejamento dos pais?

3. Alternativa **b**.

a. 4 **c.** 6 **e.** 11

b. 5 **d.** 10

4. **(UEA-2024)** Permutando-se os algarismos do número 15.792, obtemos 120 números distintos, incluindo o próprio número 15.792. O total dessas permutações que são números maiores que 30.000 e menores que 70.000 é

4. Alternativa **e**.

a. 96. **c.** 48. **e.** 24.

b. 60. **d.** 30.

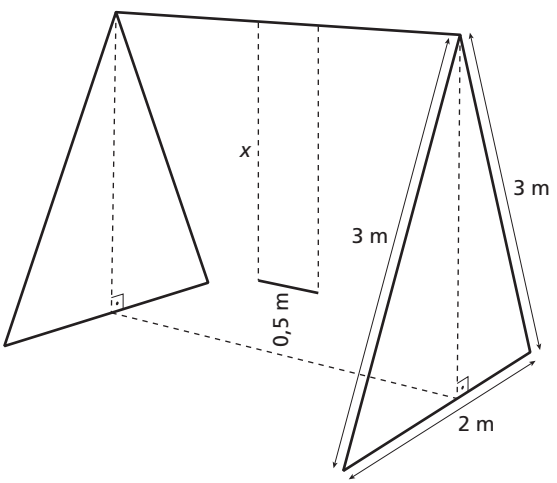
5. **(UERR-2024)** Marcela está jogando com seus amigos um jogo em que é usado um dado que tem o formato de icosaedro, com as 20 faces numeradas de 1 a 20. Segundo as regras do jogo, em uma rodada, se Marcela lançar o dado e sair um número par, ou múltiplo de 3 ou múltiplo de 7, ela será eliminada da partida.

Nessa situação hipotética, a probabilidade de Marcela continuar no jogo após lançar o dado é de 5. Alternativa **b**.

a. 25%. **c.** 45%. **e.** 70%.

b. 30%. **d.** 50%.

6. **(Enem-2021)** Um brinquedo muito comum em parques de diversões é o balanço. O assento de um balanço fica a uma altura de meio metro do chão, quando não está em uso. Cada uma das correntes que o sustenta tem medida do comprimento, em metro, indicada por x. A estrutura do balanço é feita com barras de ferro, nas dimensões, em metro, conforme a figura.



Nessas condições o valor, em metro, de x é igual a

a. $\sqrt{2} - 0{,}5$ **d.** $\sqrt{10} - 0{,}5$

b. 1,5 **e.** $\sqrt{8}$ 6. Alternativa **c**.

c. $\sqrt{8} - 0{,}5$

7. **(Uece-2022)** Um cabo de aço, medindo c metros de comprimento, é estendido em linha reta fixado em três pontos, a saber: P e Q em seus extremos e M em um ponto intermediário. O ponto P está localizado no solo plano horizontal e os pontos M e Q estão localizados nos altos de duas torres erguidas verticalmente no mesmo solo. As medidas, em metros, das alturas das torres e a distância entre elas são respectivamente h, H e d. Se x é a medida em graus do ângulo que o cabo estendido faz com o solo, então, é correto dizer que a medida, em metros, da diferença entre a altura da torre maior e altura da torre menor é igual a 7. Alternativa **b**.

a. $c \cdot \text{tg}(x)$

b. $d \cdot \text{tg}(x)$

c. $\frac{c \cdot h}{H} \text{tg}(x)$

d. $\frac{d \cdot h}{H} \text{tg}(x)$

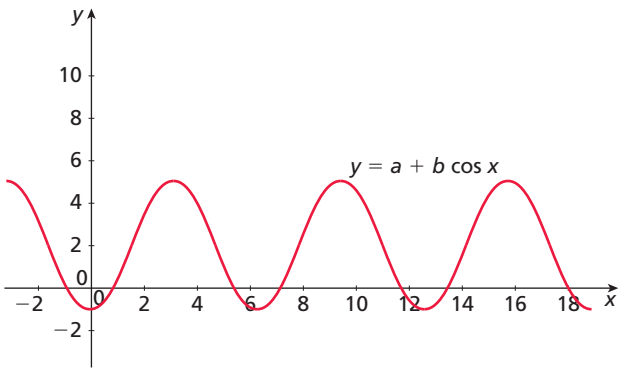
8. **(Ufam-2022)** Em um triângulo retângulo de ângulos agudos α e γ, a tangente de α é igual a 3/4. Então o seno de γ será igual a: 8. Alternativa **a**.

a. $\frac{4}{5}$ **d.** $\frac{4}{7}$

b. $\frac{2}{5}$ **e.** $\frac{3}{5}$

c. $\frac{1}{2}$

9. **(UPE-2024)** A função $f(x) = a + b \cos x$, com a e b reais, representada graficamente a seguir, intersecta o eixo y no ponto $P(0, -1)$, e seu ponto de máximo é $Q(\pi, 5)$. Qual é a imagem de $\frac{\pi}{3}$? 9. Alternativa **c**.



a. −1 **d.** 2

b. −0,5 **e.** 3,5

c. 0,5

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Avaliação diagnóstica 1

1. Alternativa **e**.
2. Alternativa **d**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **a**.
7. Alternativa **c**.

CAPÍTULO 1 Organização e apresentação de dados

1. **a.** 125.000
   b. 800
   c. Resposta pessoal.
2. **a.** Quantitativa discreta.
   b. Qualitativa nominal.
   c. Qualitativa ordinal.
   d. Qualitativa ordinal.
   e. Quantitativa contínua.
   f. Qualitativa nominal.
   g. Qualitativa ordinal.
3. Resposta pessoal.
4. Respostas pessoais.
5. Convém testar uma amostra, porque o teste destrói o palito de fósforo.
6. Resposta pessoal. Alguns exemplos são: memória e medida de tempo de duração da bateria como variáveis quantitativas, e sistema operacional e marca como variáveis qualitativas.
7. O fato de a escolha ter sido aleatória significa que ela foi feita ao acaso, como em um sorteio cujo resultado é incerto.
8. **a.** Exemplos de resposta: número de pessoas que residem no domicílio, escolaridade, sexo, ocupação, número de filhos, tipo de domicílio etc.
   b. Exemplo de resposta: A PNAD Contínua divulga, de forma periódica, informações importantes sobre diversos setores, como: educação, moradia, mobilidade urbana, entre outros, auxiliando na adoção de políticas públicas para cada um deles.
9. **a.** Exemplo de resposta: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.
   b. Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistadas todas as pessoas idosas.
10. **a.** Os jovens brasileiros.
    b. Jovens que participaram das entrevistas da PNAD Contínua.
    c. Entre 2012 e 2022.
    d. Como a amostra foi composta apenas de jovens que participaram das entrevistas da PNAD Contínua, os resultados podem não refletir com exatidão a realidade do Brasil, mas provavelmente apresentam uma boa estimativa.
11. Tarefas do estudante.
12. **a.** Tarefa do estudante.
    b. Os meninos.
13. Resposta pessoal.
14. O candidato A, pois apenas apresentou os finais de placas dos veículos da empresa sem organizar esses dados.
15. Resposta pessoal.
16. **a.** Aproximadamente 431 hab./km^2.
    b. Será necessário a medida da área territorial da Índia, que não é fornecida no livro, mas que pode ser encontrada facilmente em atlas ou *sites* confiáveis na internet (um deles é o *site* do IBGE).
17. **a.** Ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta.
    b. O critério utilizado não facilita esse tipo de análise. Para essa análise, seria melhor que a tabela estivesse organizada em ordem crescente ou decrescente, de acordo com os valores das vendas em 2024.
    c. A empresa Extrações, com aproximadamente 13,9%.
18. Tarefa do estudante.
19. **a.** Não. As porcentagens indicadas em cada gráfico são porcentagens do total de domicílios de cada região; logo, não faz sentido somá-las. Para calcular a porcentagem de domicílios com acesso à internet no Brasil, seria necessário saber o total de domicílios com acesso à internet (de todas as regiões) em relação ao total de domicílios do Brasil.
    b. Não é possível chegar a essa conclusão, pois o gráfico apresenta porcentagens de quantidades de domicílios que não necessariamente são iguais. Poderíamos comparar porcentagens, mas, para comparar os valores absolutos (número de domicílios com acesso à internet) de cada região, seria necessário conhecer o número de domicílios de cada região na ocasião da pesquisa. Por exemplo: 87% de 1.000 é igual a 870, que é menor que 80,1% de 2.500, que é aproximadamente igual a 2.003.
20. Resposta pessoal.
21. Resposta pessoal. Algumas conclusões possíveis: havia aproximadamente 11 milhões de homens ocupados em "comércio e reparação"; havia aproximadamente 4 milhões de mulheres ocupadas na "indústria"; o número de homens ocupados em "serviços domésticos" era maior que o número de mulheres ocupadas em "construção"; menos de 8 milhões de homens estavam ocupados em "administração pública, educação, saúde e serviços sociais".
22. **a.** Tarefa do estudante.
    b. Resposta pessoal.
    c. Em um gráfico de colunas, pois o gráfico de linha é indicado para representar a variação dos valores de uma variável no decorrer de um período, o que não é o caso.
    d. Não é possível responder a essa pergunta, pois não há dados referentes ao ano de 2022.
23. **a.** Tarefa do estudante.
    b. Não seria conveniente, pois, como os números de acidentes são da ordem das dezenas de milhar, e os números de óbitos são da ordem das unidades e das dezenas, a construção do gráfico seria inviável ou não representaria a variação no número de óbitos.
24. Tarefa do estudante.
25. **a.** Tarefa do estudante.
    b. Exemplo de resposta: Em cada um dos anos apresentados, o valor da exportação de soja é maior que o valor da exportação de milho.
26. **a.** Tarefa do estudante.
    b. 69,44%; 30,56%.
    c. e **d.** Tarefas do estudante.
27. O gráfico de segmentos não é adequado para o caso de uma variável qualitativa.

Trabalho e juventudes – Pais não podem tirar licença-paternidade em 67 nações

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. As afirmações **a** e **c** são verdadeiras.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Exemplo de resposta: O trabalho plataformizado é um modelo de trabalho caracterizado pela flexibilização, informalidade e mediação de plataformas digitais, e os trabalhadores de plataformas, por serem autônomos, não têm acesso aos benefícios trabalhistas garantidos aos empregados formais, como a licença-paternidade. Além disso, a natureza instável e imprevisível do trabalho plataformizado pode fazer com que os trabalhadores não se sintam seguros para se afastar temporiamente do trabalho e cuidar dos filhos, devido à perda de renda.

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.

Q2. Alternativa **b**.

Q3. Alternativa **c**.

Q4. Alternativa **d**.

Q5. Alternativa **a**.

CAPÍTULO 2 Análise de dados

1. A abertura do capítulo apresenta porcentagens de valores totais diferentes. Então, somente com as informações apresentadas, não é possível chegar a conclusões sobre o número de pessoas que cada porcentagem representa.

2. Não, pois a frequência relativa é a razão entre uma parte e o todo, sendo, portanto, sempre um número de 0 a 1 ou de 0% a 100%.

3. **a.** Tarefa do estudante.
b. 6 estudantes.
c. 8 estudantes.
d. 31,25%
e. 25%
f. 43,75%

4. **a.** Tarefa do estudante.
b. Quando temos um grande número de valores diferentes, agrupá-los em intervalos possibilita uma análise mais imediata da distribuição de frequência da variável.

5. 22 áreas.

6. Quanto maior a amplitude, menor a quantidade de intervalos, o que implica o comprometimento da análise dos dados por perda de informações.

7. Respostas pessoais.

8. Tarefa do estudante.
a. R$ 100,00
b. De R$ 100,00 a R$ 130,00, inclusive com R$ 100,00.
c. 60,5%
d. 161 quartos.
e. 39 quartos.

9. Tarefa do estudante.

10. **a.** Tarefa do estudante.
b. 17 Unidades Federativas.
c. Aproximadamente 29,6%.

11. **a.** 150, 200, 208, 468, 624, 624, 676, 728, 780, 832, 988, 988, 1.040, 1.092, 1.196, 1.248, 1.404, 1.710, 1.716, 1.976, 2.028, 2.132, 2.132, 2.132, 2.236, 2.392, 2.704, 2.948, 3.172, 3.174, 3.208, 3.728, 3.926, 3.959, 4.040, 4.108, 4.404, 4.472, 5.132, 5.928.
b. Tarefa do estudante.
c. Exemplo de resposta: Usando intervalos com amplitude de 900 reais, há mais ocorrências no intervalo [150, 1.050[.

12. Resposta pessoal.

13. Tarefa do estudante.

14. O segundo histograma.

15. Como os intervalos dos histogramas têm a mesma amplitude, as medidas de área dos retângulos são proporcionais às frequências absolutas (f_i) dos intervalos correspondentes.

16. **a.** Tarefa do estudante.
b. Não, pois é necessário conhecer cada um dos dados para construir o diagrama.

17. **a.** 33 estudantes.
b. Tarefa do estudante.
c. De 10 a 39 minutos.

18. **a.** Na Representação 1.
b. Na Representação 3.
c. 27 apartamentos; tarefa do estudante.
d. Sim; não é possível; tarefa do estudante.
e. Sim; representação 1.

19. Resposta pessoal.

20. O jogador 3, pois tem a pontuação mais alta no critério DEF.

21. Sim; tarefa do estudante.

22. **a.** Não, a balança comercial do turismo foi negativa em todos os anos de 2007 a 2021.
b. 2014; Copa do Mundo de Futebol.

23. **a.** Não, pois teríamos de arredondar todos os valores da tabela para 500.000 (e representá-los por meio símbolo) ou para zero.
b. Tarefa do estudante.
c. Resposta pessoal.

24. **a.** Tarefa do estudante.
b. Não, pois o gráfico de setores é usado para comparar as partes com o todo.

25. **a.** Hidrelétrica.
b. Hidrelétrica, eólica, solar, biocombustíveis e nuclear.
c. 78,33%
d. Porque as usinas nucleares não emitem gases do efeito estufa.

26. Respostas pessoais.
a. Falsa.
b. Verdadeira.
c. Verdadeira.

27. **a.** Verdadeira.
b. Verdadeira.
c. Verdadeira.
d. Verdadeira.
e. Verdadeira.
f. Falsa.

28. **a.** Verdadeira.
b. Falsa.
c. Falsa.
d. Falsa.
e. Falsa.

29. **a.** Samba Nascente, com 30 pontos.
b. Samba Nascente, com 6 quesitos com pontuação máxima.
c. Apenas com as informações do enunciado e dos gráficos não é possível responder à pergunta.

30. Resposta pessoal.

Trabalho e juventudes - Analista de dados

1. Tarefa do estudante.

2. **a.** Coluna B.
b. Sudeste, porque apresentava a maior frota de automóveis em dezembro de 2023.
c. Motocicletas, porque, em dezembro de 2023, a frota de motocicletas só não era maior que a de automóveis. A prioridade deveria ser dada para São Paulo, Minas Gerais e Ceará.
d. Exemplos de resposta: despesas, lucro, grau de satisfação dos clientes, problemas mais frequentes apresentados pelos automóveis que chegaram às oficinas da rede etc.

3. Resposta pessoal.

Autoavaliação

Q1. Alternativa **d**.

Q2. Alternativa **d**.

Q3. Alternativa **a**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Q4. Alternativa **c**.
Q5. Alternativa **b**.
Q6. Alternativa **c**.
Q7. Alternativa **b**.

CAPÍTULO 3 Medidas estatísticas

1. Não, pois a soma do número de vezes que cada valor se repete é sempre positiva.

2. a. Determinar a média aritmética ponderada das notas n_1, n_2 e n_3.
b. Nota n_3; nota n_1.

3. a. 9; 11; 11.
b. 61,14; 65; não há moda.
c. 3,13; 4; 1, 4 e 5.
d. 7; 7; 7.
e. –5; –5; –6.

4. a. 233 quilowatt-hora.
b. 264,5 quilowatt-hora.
c. O consumo mediano.

5. a. Aproximadamente R$ 3.438,67.
b. R$ 3.457,00
c. Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

6. a. Aproximadamente 0,917.
b. 1
c. 1

7. a. A população indígena residente fora de terras indígenas.
b. Aproximadamente 150.653.
c. Não, pois a quantidade de pessoas indígenas vivendo em terras indígenas em cada região varia muito.

8. 5

9. a. Ensino Superior.
b. Não é possível calcular a média e a mediana da distribuição, pois essas medidas só fazem sentido para variáveis quantitativas, e não para variáveis qualitativas.

10. 59 gols.

11. Resposta pessoal.

12. Resposta pessoal. Exemplo de conjunto de dados: 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 10.

13. a. 9,2 segundos.
b. Aproximadamente 9,3 segundos.

14. a. 11 minutos.
b. 17,5 minutos.
c. Não é possível responder a essa questão por falta de informações. Sabemos que 50 pessoas gastam menos de 10 minutos, mas não é possível saber, somente com as informações fornecidas, quantas pessoas gastam menos de 12 minutos no banho.

15. a. R$ 3.576,00
b. R$ 1.720,00
c. Tarefa do estudante.

16. Resposta pessoal.

17. A soma dos desvios é nula.

18. Se os valores x, observados em uma distribuição de frequências fossem todos iguais entre si, eles também seriam iguais à média $\bar{x}$; logo, $x_i - \bar{x} = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Portanto, a variância seria zero.

19. Alternativa **a**.

20. a. $Var \simeq 10{,}07$ e $Dp \simeq 3{,}17$.
b. Os valores do conjunto distanciam-se cerca de 3,17 viagens do valor médio (aproximadamente 15 viagens).

21. Alternativa **d**.

22. a. Promoção A: 4,25; promoção B: 2,3.
b. Promoção A: aproximadamente 0,94; promoção B: aproximadamente 0,84.
c. As notas atribuídas à promoção B apresentam maior homogeneidade que as da promoção A.

23. a. Aproximadamente 27.
b. 25
c. 25
d. 19
e. Aproximadamente 3,67.
f. $Var \simeq 22{,}07$ e $Dp \simeq 4{,}7$.
g. Os valores desse conjunto distanciam-se do valor médio cerca de 4,7 veículos.

24. a. Ao observar os diagramas, percebe-se que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior (os dados estão menos concentrados em torno de alguns valores).
b. Tarefa do estudante.

25. Resposta pessoal.

26. Os valores do conjunto distanciam-se cerca de R$ 202,73 do valor médio (R$ 1.030,00).

27. Os valores do conjunto distanciam-se cerca de 1,92 km/L do valor médio (10,2 km/L).

28. a. $Q_1 = 5$ e $Q_3 = 7$.
b. 40 estudantes.
c. Nota 1.
d. 25%
e. Não é possível saber quantos estudantes tiveram nota 10 apenas com o *box-plot*. É possível saber que 25% de 80 estudantes (ou seja, 20 estudantes) obtiveram notas entre 7 e 10, mas não é possível saber como foi a distribuição das notas nesse intervalo.

29. Alternativa **d**.

30. a. Resposta pessoal. A representação mais adequada depende dos fatores que se pretende analisar.
b. Diagrama de ramo e folhas; sim, por meio do diagrama de ramo e folhas.
c. Não; sim; 44 participantes.
d. A representação mais adequada, nesse caso, seria o *box-plot*.
e. $Me = 18{,}800$; $Q_1 = 12{,}150$; $Q_3 = 34{,}975$.
f. Diagrama de ramo e folhas ou *box-plot*; menor valor: 7,19; maior valor: 58,25.
g. 23 participantes; 6 participantes; diagrama de ramo e folhas.
h. e **i.** Respostas pessoais.

31. Resposta pessoal.

32. a. Resposta pessoal.
b. Resposta pessoal; gráfico de linha.

33. Resposta pessoal.

34. a. Sim; há uma correlação positiva.
b. Dos países representados no diagrama, o Brasil é o que teve a menor média de Matemática no Pisa 2015 e o menor Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural.

35. Alternativa **c**.

36. Sim; a correlação é nula.

37. Tarefa do estudante.

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.
Q2. Alternativa **d**.
Q3. Alternativa **b**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Q4. Alternativa **b**.
Q5. Alternativa **d**.
Q6. Alternativa **d**.
Q7. Alternativa **a**.
Q8. Alternativa **c**.

CAPÍTULO 4 Análise combinatória

1. Para 3 lançamentos, obtemos 8 resultados. Para 2 lançamentos, temos 4 resultados, pois $2^2 = 4$; para 3 lançamentos, 8 resultados, pois $2^3 = 8$. Dessa maneira, pode-se observar que, para 4 lançamentos, teremos 16 resultados, pois $2^4 = 16$; generalizando para n lançamentos, teremos 2^n resultados possíveis.

2. A situação de 7 estudantes escolherem 2 cadeiras é análoga à de 7 cadeiras serem escolhidas por 2 estudantes quanto ao número de possibilidades. Logo, a quantidade seria a mesma.

3. 5.040 maneiras.

4. O número de possibilidades de placas será igual ao do Brasil, pois o total de possibilidades é obtido multiplicando-se quatro fatores iguais a 26 por três fatores iguais a 10.

5. 6 opções.

6. 62^8 senhas.

7. 132 maneiras.

8. 9.000 números.

9. 120 maneiras.

10. 223.560.000 senhas.

11. **a.** 180 números. **b.** 100 números.

12. 96 números.

13. 729 maneiras.

14. 730 pessoas.

15. 720 maneiras.

16. 325 mensagens.

17. 10^{14} ou 100 trilhões de sonetos.

18. Alternativa **d**.

19. 30 letras.

20. 542 números.

21. Tarefa do estudante.

22. **a.** 800 códigos. **d.** 6.399.360 números.
b. 640 prefixos. **e.** 5.119.488.000 números.
c. 9.999 números.

23. Resposta pessoal.

24. Tarefa do estudante.

25. **a.** 210 **b.** $\frac{7}{4}$

26. **a.** 4! **c.** $\frac{205}{4} \cdot 4!$
b. $\frac{5}{2} \cdot 4!$

27. **a.** 6 **b.** 8

28. Respostas possíveis:
$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$
$6 = (4! : 4) + 4 - 4$
$7 = (4 + 4) - (4 : 4)$
$8 = 4 + 4 + 4 - 4$
$9 = (4 : 4) + 4 + 4$
$10 = (44 - 4) : 4$

29. 720 maneiras.

30. Não é possível resolver o problema, pois não é possível pintar cinco portões com cores distintas sendo que há apenas quatro cores disponíveis.

31. 42 números.

32. Resposta pessoal.

33. 120 anagramas.

34. **a.** Sim; tarefa do estudante.
b. Não. Anagramas como AOMR, RMAO ou MROA, por exemplo, formam palavras sem significado.

35. 24 anagramas.

36. 48 anagramas; 36 anagramas.

37. 3.360 anagramas.

38. 4.320 maneiras.

39. 60 sinais.

40. **a.** 479.001.600 possibilidades.
b. 103.680 possibilidades.

41. Alternativa **c**.

42. 3.999.960

43. 2.520 modos.

44. 225 caminhos.

45. Resposta pessoal.

46. 60 modos.

47. 90 resultados.

48. 60 resultados.

49. 380 possibilidades.

50. **a.** e **b.** Tarefas do estudante.

51. Não, pois teríamos de contar os números com algarismos repetidos; nesse caso, haveria 125 números.

52. 13

53. 30 maneiras.

54. 2 horas.

55. 360 sequências.

56. Resposta pessoal.

57. 3.003 formas.

58. Há 20 maneiras de escolher 3 frutas diferentes em um conjunto com 6 frutas disponíveis.

59. Apenas um, o próprio conjunto. Um conjunto não é diferente de "outro" se tiver os mesmos elementos dispostos em outra ordem.

60. Tarefa do estudante.

61. $\frac{n(n-3)}{2}$.

62. 35 comissões.

63. 45 apertos de mão.

64. 300 possibilidades.

65. 1.200 conjuntos.

66. 10 grupos; Nenhum grupo.

67. 1.960 grupos.

68. 286 grupos.

69. 55 maneiras.

70. 126 triângulos.

71. 22.957.480 maneiras.

72. Resposta pessoal.

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.

Q2. Alternativa **b**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Q3. Alternativa **d**.
Q4. Alternativa **b**.
Q5. Alternativa **d**.
Q6. Alternativa **d**.
Q7. Alternativa **a**.
Q8. Alternativa **c**.
Q9. Alternativa **b**.
Q10. Alternativa **c**.

CAPÍTULO 5 Probabilidade

1. $S = \{1, 2, 3, ..., 74, 75\}$;
$E = \{5, 10, 15, ..., 70, 75\}$.
2. 72; 75.
3. Sim, pois $n(E) = 1$ e $n(S) = 52$.
4. $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (1, 6), (2, 1), (2, 2), ..., (2, 6), (3, 1), ..., (6, 6)\}$
a. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
b. $\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$
c. $\varnothing$
d. $\{(6, 6)\}$
e. $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1),(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1),(4, 2), (5, 1), (6, 1)\}$
f. S
g. $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$
h. $\{(6, 3), (3, 6), (6, 6)\}$
5. 20.708.500
6. Resposta pessoal.
7. 1
8. **a.** $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Não, pois não existe a mesma medida da chance de ocorrência de cada evento simples.
b. Não podemos usar a fórmula, pois ela só é válida para espaços amostrais equiprováveis.
c. $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{1}{6}$. As reais probabilidades são: $P(E_1) = \frac{1}{9}$ e $P(E_2) = \frac{4}{9}$.

9. **a.** $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{2}{3}$ **c.** $\frac{1}{3}$ **d.** $\frac{1}{6}$ **e.** 0

10. **a.** $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{1}{5}$ **c.** $\frac{8}{15}$ **d.** 0

11. $\frac{2}{91}$
12. $\frac{1}{24}$
13. $\frac{1}{30}$
14. $\frac{2}{3}$
15. $\frac{5}{7}$
16. **a.** Não.
b. $S = \{ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk\}$
17. **a.** $\frac{3}{8}$ **b.** $\frac{1}{8}$ **c.** $\frac{7}{8}$ **d.** $\frac{1}{4}$
18. **a.** $\frac{1}{56}$ **b.** $\frac{1}{140}$ **c.** $\frac{1}{16}$ **d.** $\frac{7}{80}$
19. **a.** $\frac{4}{13}$ **b.** $\frac{7}{13}$
20. $\frac{2}{3}$
21. $\frac{11}{36}$
22. $\frac{1}{2}$
23. **a.** $\frac{4}{7}$ **b.** $\frac{2}{7}$ **c.** $\frac{1}{7}$ **d.** $\frac{5}{7}$
24. **a.** $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1}{6}$ **d.** $\frac{2}{3}$ **e.** $\frac{1}{3}$ **f.** $\frac{5}{6}$
25. Tarefa do estudante.
26. **a.** $\frac{19}{35}$ **b.** $\frac{16}{35}$ **c.** $\frac{27}{35}$
27. 45%
28. **a.** Tarefa do estudante. **b.** $\frac{4}{15}$ **c.** $\frac{7}{15}$
29. $\frac{9}{20}$
30. $\frac{1}{4}$
31. $\frac{57}{1.771}$
32. Resposta pessoal.
33. **a.** 60% **b.** 26% **c.** 65% **d.** 21% **e.** 40%
34. $\frac{1}{8}$
35. **a.** $\frac{35}{144}$ **b.** $\frac{49}{144}$ **c.** Resposta pessoal.
36. **a.** Não. Tarefa do estudante. **b.** Sim. Tarefa do estudante.
37. **a.** $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{4}{7}$
38. $\frac{2}{9}$
39. Não há dados suficientes para a resolução, pois o enunciado não informa se há reposição de bola após a primeira retirada.
40. Resposta pessoal.
41. Tarefas do estudante.
42. **a.** Tarefa do estudante. **b.** 7.800 **c.** 30% **d.** 5%
43. 20%
44. Modelo A: 3,8%; modelo B: 2,89%; modelo C: 2,54%.

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.
Q2. Alternativa **a**.
Q3. Alternativa **b**.
Q4. Alternativa **d**.
Q5. Alternativa **c**.
Q6. Alternativa **b**.
Q7. Alternativa **d**.
Q8. Alternativa **b**.
Q9. Alternativa **a**.
Q10. Alternativa **b**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Educação midiática – Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar

1. Alternativa **c**.

2. Resposta pessoal.

3. Alternativa **e**.

4. a. Porque a pesquisa não foi feita em 2018.

b. Não, porque não temos os dados referentes ao ano de 2018.

c. Resposta pessoal. É importante notar que a omissão dos dados pode levar a conclusões imprecisas ou enviesadas, prejudicando a compreensão geral do padrão ou da tendência que o gráfico deveria representar.

Pesquisa e ação – Pesquisa estatística

Tarefa do estudante.

Avaliação diagnóstica 2

1. Alternativa **d**.

2. Alternativa **c**.

3. Alternativa **c**.

4. Alternativa **e**.

CAPÍTULO 6 A semelhança e os triângulos

1. $\overline{AB}$ e $\overline{AM}$; $\overline{BC}$ e $\overline{MP}$; $\overline{AC}$ e $\overline{AP}$.

2. Tarefa do estudante.

3. a. 18

b. 5

c. 15

d. Apenas com os dados informados não é possível determinar o valor de x.

4. Resposta pessoal.

5. 1,4 m

6. $x = 35{,}2$ m e $y \simeq 24{,}5$ m.

7. 16,25 cm

8. Tarefas do estudante.

9. São semelhantes; a razão de semelhança é $\sqrt{3}$.

10. Os lados correspondentes devem ter mesma medida de comprimento, assim como a medida das aberturas dos ângulos internos correspondentes deve ser igual.

11. a. A razão entre as medidas de comprimento das diagonais é igual à razão de semelhança r.

b. A razão entre as medidas dos perímetros é igual à razão de semelhança r.

c. A razão entre as medidas de área é igual à razão de semelhança elevada ao quadrado.

12. a. 3 m e 4 m. **b.** $\frac{1}{10.000}$

13. a. 9 cm **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1}{3}$ **d.** $\frac{1}{9}$

14. a. $\frac{4}{25}$; 16%. **b.** 230,4 m^2

15. O retângulo $ABFG$ construído é áureo, pois a razão obtida é uma aproximação do número de ouro: 1,61...

16. a. $x = 7{,}5$ e $y = 9$. **b.** $x = 2$

17. 5,9 m

18. Alternativa **d**.

19. $x = 14$ e $y = 6$.

20. e **21.** Tarefas do estudante.

22. Teorema de Pitágoras.

23. 8 cúbitos.

24. a. $8\sqrt{2}$ dm **b.** 20 cm

25. Alternativa **d**.

26. 180 cm

27. a. $5\sqrt{2}$ cm e $5\sqrt{3}$ cm. **b.** $d_{cubo} = a\sqrt{3}$

28. $a = 8$ cm e $b = 6$ cm.

29. Aproximadamente 2,33 m.

30. Alternativa **d**.

31. a. Exemplo de resposta: 6, 8, 10 e 5, 12, 13.

b. Triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.

c. Sim; por exemplo, 1, 1 e $\sqrt{2}$ formam um triângulo retângulo, mas não um triângulo pitagórico, já que $\sqrt{2}$ não é um número natural.

32. a. $PI = 8$ cm **c.** $m \simeq 3{,}8$ cm e $n \simeq 13{,}2$ cm.

b. $h \simeq 7{,}1$ cm

33. Resposta pessoal.

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.

Q2. Alternativa **a**.

Q3. Alternativa **c**.

Q4. Alternativa **c**.

Q5. Alternativa **d**.

Q6. Alternativa **a**.

Q7. Alternativa **d**.

Q8. Alternativa **d**.

CAPÍTULO 7 Trigonometria no triângulo retângulo

1. É verdadeira, pois, como são razões entre medidas de comprimento dos lados de um triângulo, devem ser maiores que zero; e, como no denominador dessas razões está a medida da hipotenusa, que é o maior lado de um triângulo retângulo, o valor sempre será um número menor que 1.

2. Temos as seguintes relações:

$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$;

$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$.

3. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$.

4. $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{2}{3}$; $\cos\hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

5. 36 cm

6. Aproximadamente 1.905 m.

7. a. Tarefa do estudante.

b. Aproximadamente 38,3 km.

8. Resposta pessoal.

9. $\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta = \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{225}{289} + \frac{64}{289} = 1$

10. Tarefa do estudante.

11. a. Tarefa do estudante.

$x = 7$; $\cos\alpha = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$.

b. $\cos\alpha = \frac{7}{25}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$

12. Como o triângulo ADC é isósceles, temos $AD = DC = 2$.

$\operatorname{sen} 60° = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 1$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

13. a. $x = 5$ cm; $y = 5\sqrt{3}$ cm.

b. $x = 4\sqrt{3}$ cm; $y = 30°$.

14. a. Medida da altura da coluna: $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m; medida da distância da tábua: $\frac{1}{2}$ m.

b. O tipo da madeira, o valor do serviço e o preço das tábuas.

15. a. $c = 10$ m **b.** $h \simeq 8{,}7$ m

16. 1,5 m

17. Aproximadamente 20,8 cm.

18. Aproximadamente 85 m.

19. Aproximadamente 15,6 cm.

20. Alternativa **c**.

21. a. 0,707 **c.** 0,577

b. 0,866

22. Resposta pessoal.

23. Para que sen x = cos y, devemos ter $x + y = 90°$, isto é, x e y devem ser medidas de abertura de ângulos complementares.

24. Tarefa do estudante.

25. Na tabela trigonométrica, não há o ângulo de medida 20,5°. No entanto, podemos observar os valores:

- tg 20° = 0,3640
- tg 21° = 0,3839

Assim, concluímos que a tg 20,5° está entre esses valores, ou seja, é aproximadamente 0,37.

26. Procurando o valor mais próximo de 0,4533 na coluna dos senos da tabela trigonométrica, descobrimos que a medida de abertura do ângulo deve medir, aproximadamente 27°.

27. a. Calcular o valor do cosseno de um ângulo utilizando uma calculadora.

b. Exemplo de resposta:

Passo 1. Ative a função "grau" da calculadora.

Passo 2. Digite a medida da abertura do ângulo em grau.

Passo 3. Pressione a tecla da função cosseno "cos".

Passo 4. Pressione a tecla "igual".

28. Aproximadamente 1,026 km.

29. a. Aproximadamente 128.000.000 km.

b. Aproximadamente 333.

30. a. Aproximadamente 5°.

b. Aproximadamente 34,5 m.

c. Resposta pessoal.

31. a. Tarefa do estudante.

b. 12,60

Trabalho e juventudes – Inclusão no mercado de trabalho: lei de cotas para pessoas com deficiência completa 29 anos

1. e **2.** Respostas pessoais.

3. a. Exemplo de resposta: Rampas muito íngremes são um obstáculo principalmente para as pessoas em cadeira de rodas e, por isso, é importante ter uma norma que delimita a medida de abertura máxima do ângulo de inclinação de rampas.

b. Tangente. Considerando uma rampa vista de perfil, h é a medida do cateto oposto ao ângulo de inclinação e c é a medida do cateto adjacente.

c. Não, porque a inclinação da rampa é de 12,5% e, para um desnível de 0,5 m, a inclinação máxima da rampa deveria ser de 8,33%.

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.

Q2. Alternativa **b**.

Q3. Alternativa **a**.

Q4. Aproximadamente 546 m.

Q5. Aproximadamente 50 m.

Q6. Alternativa **a**.

Q7. Alternativa **d**.

CAPÍTULO 8 Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer

1. A razão é constante e aproximadamente igual a 3,14.

2. Aproximadamente 30,5 cm.

3. Tarefa do estudante.

a. Sim, as medidas angulares dos arcos são iguais a α.

b. Não, as medidas de comprimento dos arcos são diferentes, pois dependem da medida de comprimento do raio da circunferência que contém cada um deles.

4. a. 225° **c.** 90°

b. 210°

5. a. $\frac{\pi}{6}$ rad **d.** $\frac{5\pi}{6}$ rad

b. $\frac{\pi}{3}$ rad **e.** $\frac{7\pi}{6}$ rad

c. $\frac{2\pi}{3}$ rad **f.** $\frac{4\pi}{3}$ rad

6. 144°; $\frac{4\pi}{5}$ rad.

7. a. 120°; $\frac{2\pi}{3}$ rad.

b. Aproximadamente 14,65 cm.

8. e **9.** Tarefas do estudante.

10. a. $a = 160°$, $b = 200°$, $c = 340°$.

b. $a = \frac{\pi}{5}$, $b = \frac{4\pi}{5}$, $c = \frac{6\pi}{5}$.

11. a. 70°

b. $\frac{\pi}{6}$ rad

12. a. sen $\alpha > 0$; cos $\alpha > 0$.

b. sen $\alpha > 0$; cos $\alpha < 0$.

c. sen $\alpha < 0$; cos $\alpha < 0$.

13. a. Positiva. **b.** Negativa.

14. $\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$

15. a. Aproximadamente 0,8.

b. Aproximadamente –0,8.

c. Aproximadamente –0,8.

16. a. Aproximadamente –0,9.

b. Aproximadamente –0,9.

c. Aproximadamente 0,9.

17. sen $\alpha \simeq -0{,}45$; sen $\beta \simeq -0{,}77$; sen $\theta \simeq 0{,}98$.

18. cos $\alpha \simeq -0{,}67$; cos $\beta \simeq 0{,}34$; cos $\theta \simeq 0{,}17$.

19. $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

20. a. 0 **c.** 0

b. 2 **d.** $\frac{1}{2}$

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

21. **a.** 0,342 **b.** 0,643 **c.** 0,866

22. **a.** Falsa. **b.** Falsa.

23. 1º quadrante: $\alpha = \frac{\pi}{4}$; 3º quadrante: $\alpha = \frac{5\pi}{4}$.

24. **a.** $x = 30°$ ou $x = 150°$.
b. $x = 135°$ ou $x = 225°$.

25. Positiva: 1º e 3º quadrantes; negativa: 2º e 4º quadrantes.

26. **a.** Negativa.
b. Positiva.

27. $\text{tg}\ \alpha \simeq 0{,}90$; $\text{tg}\ \beta \simeq -0{,}36$; $\text{tg}\ \theta \simeq 5{,}67$.

28. **a.** Aproximadamente –0,7.
b. Aproximadamente 0,7.
c. Aproximadamente –0,7.

29. Não. Tarefa do estudante.

30. **a.** Menor que 1.
b. Aproximadamente 0,65.
c. 1º quadrante.
d. Negativa; positiva; negativa.
e. Aproximadamente –0,65; aproximadamente 0,65; aproximadamente –0,65.

31. $\frac{12}{13}$

32. **a.** –0,6
b. –0,75

33. **a.** –0,8
b. –0,6

34. Não, pois $0{,}8^2 + 0{,}4^2 \neq 1$.

35. **a.** $x \simeq 6{,}3$ cm; $y \simeq 3{,}2$ cm.
b. $x \simeq 40°$; $y \simeq 4{,}5$ m.

36. **a.** Aproximadamente 17,6 m.
b. Caminho 1.

37. Aproximadamente 3,95 cm.

38. Aproximadamente 36,2 km.

39. Aproximadamente 76,36 m.

40. **a.** $y \simeq 5{,}1$ cm
b. $x \simeq 4{,}8$ cm

41. Aproximadamente 17,6 cm.

42. **a.** $\cos \alpha = -\frac{5}{8}$; obtusângulo.
b. Tarefa do estudante.

43. Aproximadamente 96 cm e 74,7 cm.

44. 7 cm

45. 60°

46. Aproximadamente 192,5 km.

Autoavaliação

Q1. Alternativa **d**.

Q2. Alternativa **c**.

Q3. Alternativa **b**.

Q4. Alternativa **b**.

Q5. Alternativa **c**.

Q6. Alternativa **a**.

Q7. Alternativa **d**.

Q8. Alternativa **a**.

Q9. Alternativa **d**.

Q10. Alternativa **c**.

CAPÍTULO 9 Funções trigonométricas

1. **a.** $p = 4$
b. $p = 2$
c. $p = 3$

2. **a.** Mínimo: 0; máximo: 2.
b. Mínimo: –1; não tem máximo.
c. Mínimo: 8; máximo: 12.

3. **a.** 1; para $x = 0$ e $x = 2\pi$.
b. –1; para $x = \pi$.

4. e **5.** Tarefas do estudante.

6. **a.** $60° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$
b. $\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$
c. $25° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$
d. $\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

7. **a.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
b. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
c. -1
d. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
e. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
f. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
g. 1
h. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. $\text{sen}\ (-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$ ou $\text{sen}\ \alpha = -\text{sen}\ (-\alpha)$

9. **a.** 1.250 zebras. **b.** 2006

10. $1 \leqslant k \leqslant 2$

11. Tarefa do estudante.

12. **a.** Porque no gráfico I os números irracionais foram aproximados para números racionais com duas casas decimais. Assim, 2π foi representado por 6,28 ($2\pi \simeq 6{,}28$).
b. 1
c. $D(f) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [0, 2]$
d. O gráfico de f é o gráfico de g deslocado uma unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

13. 3.715 pessoas.

14. **a.** 5 m; 1 m.
b. Tarefa do estudante.
c. Maré alta: às 15 h e às 3 h; maré baixa: às 21 h e às 9 h.
d. De 12 em 12 horas.

15. Tarefas do estudante.

16. 0

17. Tarefa do estudante.

18. **a.** 2π
b. 1
c. $D(g) = \mathbb{R}$; $\text{Im}(g) = [0, 2]$.
d. O gráfico de g é o gráfico de f deslocado uma unidade para cima. Assim, o conjunto imagem das duas funções não é o mesmo. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

19. A função cosseno é par, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$; a função seno é ímpar, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.

20. Tarefa do estudante.

21. **a.** 12.280 casos; em janeiro.

b. Resposta pessoal. Adotando medidas educativas, como campanhas de conscientização, e envolvendo as pessoas em mutirões de limpeza, por exemplo.

22. **a.** π

b. $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

c. $D(h) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$; $\operatorname{Im}(h) =]-\infty, +\infty[$.

23. As funções $g(x) = \operatorname{tg} x$ e $j(x) = -\operatorname{tg} x$ são simétricas em relação ao eixo x.

24. Tarefa do estudante.

25. A função tangente é uma função ímpar, pois, para todo x pertencente a seu domínio, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$.

26. **a.** $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$.

b. $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.

c. $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$.

d. $\frac{\pi}{2}$

e. 0 ou π ou 2π.

27. **a.** 0, π, 2π e $\frac{3\pi}{2}$.

b. $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

c. 0 e 2π.

28. 16 h ou 20 h.

29. $\frac{3\pi}{2}$

30. **a.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

31. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

32. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

33. Exemplo de resposta: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

34. **a.** Vermelho

b. Azul

35. Tarefa do estudante.

36. $a = 2$; $b = 2$.

37. e **38.** Tarefas do estudante.

39. **a.** Representar como se faz a translação vertical do gráfico de uma função trigonométrica $y = \operatorname{tg} x$ para obter o gráfico da função $y = c + \operatorname{tg} x$.

b. Tarefa do estudante.

40. Exemplo de resposta:

Passo 1. Construa o gráfico de $y = \operatorname{tg} x$.

Passo 2. Verificar o valor de b. Se $b > 0$, vá para o passo 3. Se não, vá para o passo 4.

Passo 3. Como $b > 0$, então o gráfico é transladado de b unidades para a esquerda. Termina-se o algoritmo.

Passo 4. Verificar o valor de b. Se $b = 0$, o gráfico não muda e termina-se o algoritmo. Se não, vá para o passo 5.

Passo 5. Como $b < 0$, então o gráfico é transladado de b unidades para a direita e termina-se o algoritmo.

41. e **42.** Tarefas do estudante.

Trabalho e juventudes – Eletricista

1. Respostas pessoais.

2. Exemplos de resposta: quedas e choque elétrico; os riscos podem ser minimizados com o uso de Equipamentos de Proteção Individual (EPIs) e o cumprimento das normas de segurança.

3. **a.** 179,6 V

b. 0,0167 s

c. 60 vezes.

Autoavaliação

Q1. Alternativa **c**.

Q2. Alternativa **c**.

Q3. Alternativa **d**.

Q4. Alternativa **b**.

Q5. Alternativa **d**.

Q6. Alternativa **b**.

Q7. Alternativa **a**.

Q8. Alternativa **d**.

Q9. Alternativa **b**.

Q10. Alternativa **c**.

Educação midiática – Inteligência Artificial na Educação

1. **a.** Exemplo de resposta: É um campo de pesquisa que engloba diversas áreas do conhecimento e procura construir mecanismos e/ou dispositivos que simulem a capacidade do ser humano de pensar e de resolver problemas. É também um conjunto de novas tecnologias que permitem aos dispositivos inteligentes desempenhar múltiplas tarefas complexas de maneira quase autônoma.

b. Respostas pessoais.

c. Tarefa do estudante.

2. A definição apresentada desconsidera que o círculo tem região interna e, portanto, seus pontos não estão igualmente distantes do centro.

3. Tarefa do estudante.

Pesquisa e ação – Maquete

Tarefa do estudante.

Prepare-se para o Enem e vestibulares

1. Alternativa **b**.

2. Alternativa **d**.

3. Alternativa **b**.

4. Alternativa **e**.

5. Alternativa **b**.

6. Alternativa **c**.

7. Alternativa **b**.

8. Alternativa **a**.

9. Alternativa **c**.

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

LISTA DE SIGLAS

ABGLT – Associação Brasileira de Lésbicas, Gays, Bissexuais, Travestis, Transexuais e Intersexos
ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas
Abrelpe – Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais
ABVE – Associação Brasileira de Veículo Elétrico
AFA – Academia da Força Aérea
AMB – Associação Médica Brasileira
ANTRA – Associação Nacional de Travestis e Transexuais
CIA – Agência Central de Inteligência
CLT – Consolidação das Leis do Trabalho
COB – Comitê Olímpico Brasileiro
CVE – Centro de Vigilância Epidemiológica
ECA – Estatuto da Criança e do Adolescente
Enem – Exame Nacional do Ensino Médio
EPCAr – Escola Preparatória de Cadetes do Ar
ESCS – Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural
Famerp – Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto
Fapesp – Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
FMUSP – Faculdade de Medicina da Universidade de São Paulo
GSNI – Índice de Normas Sociais de Gênero
IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IBP – Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás
Inpe – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
INSS – Instituto Nacional de Seguridade Social
Ipam – Instituto de Pesquisa Ambiental da Amazônia
ISB – Instituto Sprinkler Brasil
LGBTQIA+ – Lésbicas, Gays, Bissexuais, Transgêneros e travestis, *Queer*, Intersexo, Assexuais e mais (corresponde a outras orientações sexuais, identidades e expressões de gênero que são abraçadas pela sigla)
LGBTQIAP+ – Lésbicas, Gays, Bissexuais, Transgêneros e travestis, *Queer*, Intersexo, Assexuais, Pansexuais e mais (corresponde a outras orientações sexuais, identidades e expressões de gênero que são abraçadas pela sigla)
MEI – Microempreendedor Individual
Mercosul – Mercado Comum do Sul
OCDE – Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico
OMS – Organização Mundial da Saúde
ONU – Organização da Nações Unidas
PIB – Produto Interno Bruto
Pisa – Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNAD Contínua – Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua
Rais – Relação Anual de Informações Sociais
SIDRA – Sistema IBGE de Recuperação Automática
UEA – Universidade do Estado do Amazonas
Uece – Universidade Estadual do Ceará
UERR – Universidade Estadual de Roraima
Ufam – Universidade Federal do Amazonas
UFGD – Universidade Federal da Grande Dourados
UFVJM – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri
Ufla – Universidade Federal de Lavras
UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFS – Universidade Federal de Sergipe
Unesp – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Unicamp – Universidade Estadual de Campinas
Unirio – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
UPE – Universidade de Pernambuco
Urca – Universidade Regional do Cariri

Reprodução proibida. Art.184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

BLIKSTEIN, Paulo. **O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação**. 22 dez. 2008. Disponível em: http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html. Acesso em: 11 set. 2024.
Esse texto trata do pensamento computacional e discute a importância da tecnologia não apenas para recombinar conhecimentos existentes, mas também para criar conhecimentos novos.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1991.
Livro conceituado e referência em história da Matemática.

BRASIL. Centro de Inovação para a Educação Brasileira. **Currículo de referência em tecnologia e computação**: da Educação Infantil ao Ensino Fundamental. São Paulo: Cieb, 2018. Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf. Acesso em: 11 set. 2024.
Esse documento propõe um currículo para o Ensino Infantil e o Ensino Fundamental, complementando a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com foco em tecnologia e computação. A proposta é baseada em três eixos: cultura digital, pensamento computacional e tecnologia digital.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/. Acesso em: 11 set. 2024.
O portal do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz diversos dados e informações do Brasil e de outros países. Possui vídeos, resultados de pesquisas, índices econômicos, mapas, entre outros recursos.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 11 set. 2024.
Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1.000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a BNCC, conhecido como Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC: SEB, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 22 out. 2024.
Documento oficial do MEC que regulamenta as diretrizes curriculares para os ensinos Infantil, Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/acesso-a-informacao/media/seb/pdf/d_c_n_educacao_basica_nova.pdf. Acesso em: 22 out. 2024.
As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a criação da BNCC. Elas são estabelecidas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019.
Material que visa contextualizar historicamente os temas contemporâneos transversais e apresentar pressupostos pedagógicos para a abordagem desses temas.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: propostas de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC: SEB, 2019.
Materiais elaborados como complementação ao que estabelece a BNCC sobre os temas contemporâneos transversais como ferramenta de formação integral do ser humano.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995. (Coleção Repertórios).
Livro conceituado em história da Matemática.

FAINGUELERNT, Estela K.; NUNES, Katia Regina A. **Matemática**: práticas pedagógicas para o Ensino Médio. Porto Alegre: Penso, 2012.
Com mais de 25 anos de experiência, as autoras incentivam professores de Matemática do Ensino Médio a buscar novas ideias para a sala de aula.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 18. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).
Essa obra propõe reflexões sobre a construção de um conhecimento mais integrado e livre, destacando a conexão entre diferentes áreas no ensino e aprendizagem.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos (tomo 1)**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1.
Livro sobre história da Matemática com foco na invenção dos algarismos.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos (tomo 2)**: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. 2. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000. v. 2.
Em dois volumes, essa obra busca responder, de forma simples, a diversas questões sobre a história dos algarismos e do cálculo, desde a Pré-história até a era dos computadores.

LIMA, Elon Lages *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 11. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).
Voltado para professores de Matemática de Ensino Médio, esse livro apresenta tópicos como teoria dos conjuntos e funções (afins, quadráticas, polinomiais, logarítmicas e trigonométricas).

MACEDO, Horácio. **Dicionário de Física ilustrado**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1976.
Esse dicionário é voltado para quem busca informações gerais e sucintas sobre conceitos de Física, incluindo definições, comentários e referências a verbetes relacionados.

MESTRE, P. A. A. **O uso do pensamento computacional como estratégia para resolução de problemas matemáticos**. 2017. 91 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Campina Grande, Paraíba, 2017.
Essa dissertação propõe estratégias para resolver problemas matemáticos, mapeando as capacidades fundamentais da Matemática, no nível de letramento do Pisa, aos conceitos do pensamento computacional.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

Esta coleção tem como objetivo proporcionar aos estudantes uma sólida formação matemática, alinhada com as mais recentes diretrizes educacionais e políticas públicas. Desenvolvida em conformidade com o **Decreto nº 12.021, de 16 de maio de 2024**, que altera o **Decreto nº 9.099, de 18 de julho de 2017**, a coleção reforça o compromisso do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) em fornecer recursos educacionais de alta qualidade para a educação básica.

Com uma linguagem acessível ao estudante, a coleção favorece a compreensão e possibilita a atribuição de significado aos conceitos matemáticos. Em cada volume é dado destaque para quatro temas – Desenvolvimento sustentável, Trabalho e juventudes, Educação midiática e Estratégias de estudo –, que procuram engajar os estudantes, facilitar o aprendizado e prepará-los para os desafios do mundo contemporâneo.

Com base nesses critérios, foi elaborado este *Suplemento para o professor*, que se apresenta dividido em duas partes: Parte Geral e Parte Específica.

Na Parte Geral, são feitas considerações e reflexões sobre temas diversos relacionados à educação, aos jovens e à diversidade cultural e étnica do Brasil. Há também uma descrição da estrutura do Livro do Estudante, bem como recomendações de materiais suplementares e sugestões de cronograma bimestral, trimestral e semestral.

A Parte Específica de cada volume traz comentários e orientações que objetivam enriquecer, tanto no aspecto teórico como no metodológico, os temas abordados nos capítulos, além de fornecer resoluções de todas as atividades. Ainda nesta parte, são explicitadas todas as conexões com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), facilitando o planejamento pedagógico.

Com esta coleção, esperamos contribuir para o seu trabalho em sala de aula e oferecer a você uma ferramenta auxiliar para o aprendizado do estudante.

Os editores

SUMÁRIO

PARTE GERAL MP004

Pressupostos teóricos e metodológicos MP004

A Base Nacional Comum Curricular MP004

Competências gerais da Educação Básica MP005

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades MP006

As mudanças no Ensino Médio MP009

Os jovens e as juventudes MP009

Princípios éticos para a construção da cidadania MP012

Identidades MP012

A Etnomatemática MP013

A gestão de sala de aula MP014

Um olhar inclusivo MP015

As metodologias ativas MP016

Como aplicar as metodologias ativas com o livro didático MP016

A língua materna e a Matemática MP017

Capacidade leitora e de expressão MP018

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática MP018

O pensamento computacional MP019

Como trabalhar o pensamento computacional na escola MP019

Os Temas Contemporâneos Transversais e a interdisciplinaridade MP020

Temas em destaque na coleção MP021

Desenvolvimento sustentável MP021

Trabalho e juventudes MP022

Educação midiática MP022

Estratégias de estudo MP022

Mapa conceitual MP023

Avaliação MP023

Outras estratégias de estudo MP023

Organização e estrutura da obra MP024

Sugestões de cronograma MP025

Sugestões de cronograma para o volume 1 ..... MP025

Sugestões de cronograma para o volume 2 ..... MP026

Sugestões de cronograma para o volume 3 ..... MP026

Sugestões/referências suplementares MP026

Livros e artigos MP026

Ensino de Matemática MP026

Tecnologias da Informação e Comunicação MP027

História da Matemática MP027

Sites e artigos da internet MP027
Revistas e periódicos MP028

Referências bibliográficas comentadas MP028

PARTE ESPECÍFICA MP037

A BNCC NESTE VOLUME MP037

OS TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS NESTE VOLUME MP038

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1 ..... MP039

CAPÍTULO 1 Organização e apresentação de dados MP040

CAPÍTULO 2 Análise de dados MP043

CAPÍTULO 3 Medidas estatísticas MP048

CAPÍTULO 4 Análise combinatória MP053

CAPÍTULO 5 Probabilidade MP056

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar MP058

PESQUISA E AÇÃO – Pesquisa estatística MP059

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2 ..... MP061

CAPÍTULO 6 A semelhança e os triângulos MP062

CAPÍTULO 7 Trigonometria no triângulo retângulo MP065

CAPÍTULO 8 Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer MP068

CAPÍTULO 9 Funções trigonométricas MP072

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – Inteligência Artificial na Educação MP076

PESQUISA E AÇÃO – Maquete MP077

PREPARE-SE PARA O ENEM E VESTIBULARES MP079

RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES MP080

Avaliação diagnóstica 1 ..... MP080
Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados MP080
Capítulo 2 – Análise de dados MP085
Capítulo 3 – Medidas estatísticas MP089
Capítulo 4 – Análise combinatória MP097
Capítulo 5 – Probabilidade MP101
Avaliação diagnóstica 2 ..... MP107
Capítulo 6 – A semelhança e os triângulos MP107
Capítulo 7 – Trigonometria no triângulo retângulo MP111
Capítulo 8 – Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer MP114
Capítulo 9 – Funções trigonométricas MP120
Prepare-se para o Enem e vestibulares MP127

PARTE GERAL

Pressupostos teóricos e metodológicos

As **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica**, definidas pelo Parecer CNE/CEB nº 7, de 7 de abril de 2010, e pela Resolução CNE/CEB nº 4, de 13 de julho de 2010, têm como finalidade orientar e assegurar a coerência e a qualidade da Educação Básica no Brasil. Elas estabelecem princípios, fundamentos e procedimentos que devem ser seguidos pelas instituições de ensino em todo o território nacional, garantindo um currículo que promova a formação integral dos estudantes. As diretrizes visam, ainda, assegurar a inclusão, a equidade e o respeito à diversidade, contribuindo para o desenvolvimento das competências e das habilidades necessárias para a vida em sociedade, para o exercício da cidadania e para a continuidade dos estudos em níveis mais avançados.

No que se refere mais especificamente ao Ensino Médio, o documento propõe uma revisão do currículo e uma nova dinâmica ao processo educativo, a fim de se adequar aos tempos de aprendizagem dos estudantes. Segundo as **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (2013, p. 149), é preciso "permitir diferentes formas de oferta e de organização, mantida uma unidade nacional, sempre tendo em vista a qualidade de ensino".

Esta coleção foi elaborada tendo como referência as **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** e a **Base Nacional Comum Curricular**, com o objetivo de atender às necessidades e aos interesses do jovem estudante que ingressa nessa etapa da Educação Básica.

A Base Nacional Comum Curricular

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento-referência obrigatório que norteia a construção dos currículos de todos os sistemas e redes de ensino da Educação Básica em todo o país. É importante destacar, porém, que o conjunto de aprendizagens essenciais e progressivas nela contido constitui o conteúdo mínimo que deve ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas, dos professores e as particularidades regionais.

A BNCC, orientada pelos princípios delineados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, estabelece os conhecimentos, as competências e as habilidades que todos os estudantes devem desenvolver ao longo dos anos de escolaridade. Segundo a BNCC (2018, p. 8):

> [...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.

Visando a uma formação humana integral que contribua para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, a BNCC, dessa forma, estabelece dez competências gerais para a Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Essas competências gerais devem ser desenvolvidas nas quatro áreas de conhecimento consideradas no Ensino Médio pela BNCC: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Conhecimento

Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Pensamento científico, crítico e criativo

Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3. Repertório cultural

Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4. Comunicação

Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Cultura digital

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6. Trabalho e projeto de vida

Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7. Argumentação

Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Autoconhecimento e autocuidado

Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9. Empatia e cooperação

Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10. Responsabilidade e cidadania

Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

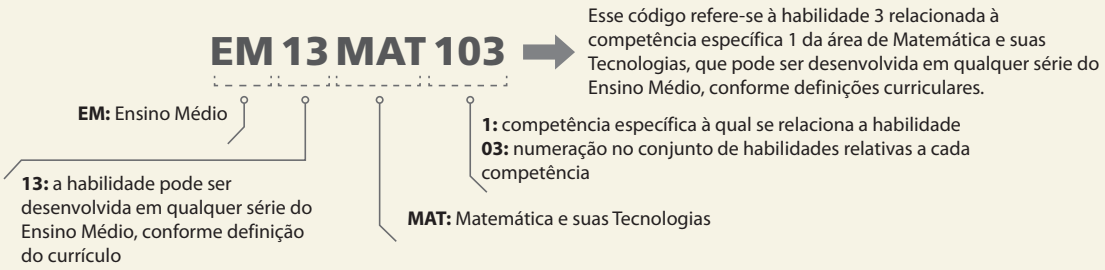
Fontes: BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9, 10; INSTITUTO Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). **Competências gerais da nova BNCC**. Brasília, DF: MEC. Disponível em: http://inep80anos.inep.gov.br/inep80anos/futuro/novas-competencias-da-base-nacional-comum-curricular-bncc/79. Acesso em: 12 set. 2024.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área de conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa.

Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico cuja composição é a seguinte:



É importante ressaltar que a numeração para identificar as habilidades relacionadas a uma competência não representa uma sequência esperada das aprendizagens. A adequação dessa progressão deve ser realizada pelos sistemas e pelas escolas, levando em consideração os contextos locais.

A seguir, transcrevemos o texto oficial da BNCC, referente à etapa do Ensino Médio, que aponta as cinco competências específicas para a área de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades associadas a elas. Vale destacar que, embora uma habilidade possa estar associada a mais de uma competência, optou-se por classificá-la naquela com a qual tem maior afinidade.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

Competências específicas[1]	Habilidades
Competência específica 1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT102)** Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. **(EM13MAT103)** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

CONTINUA

1 Para saber mais sobre a finalidade de cada competência específica, consulte: BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 532, 534, 535, 536, 538, 540.

CONTINUAÇÃO

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 2 Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	**(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. **(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. **(EM13MAT203)** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
Competência específica 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT303)** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT310)** Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 3	**(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. **(EM13MAT313)** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. **(EM13MAT316)** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
Competência específica 4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	**(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. **(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. **(EM13MAT407)** Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.
Competência específica 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

CONTINUAÇÃO

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 5	**(EM13MAT506)** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT509)** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: elaborado com base em BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 532-541.

As mudanças no Ensino Médio

A **Constituição Federal de 1988**, a **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB** (Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996) e o **Plano Nacional de Educação – PNE** (Lei nº 13.005, de 25 de junho de 2014) garantem a obrigatoriedade do Ensino Médio como dever do Estado e direito de todos, com progressiva universalização e gratuidade. O objetivo é preparar os estudantes para o exercício da cidadania, qualificá-los para o trabalho e desenvolver sua capacidade de continuar aprendendo e adaptando-se com flexibilidade às demandas da sociedade contemporânea, como as rápidas transformações resultantes do desenvolvimento tecnológico.

Nesse contexto, o Ensino Médio, por meio da Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017, passou por um amplo processo de reformulação na tentativa de garantir a permanência do jovem na escola e proporcionar uma aprendizagem real e significativa que atenda às atuais necessidades desse segmento. Propõe-se, então, a substituição do modelo único de currículo por um modelo composto pela formação geral básica, que abrange as competências e as habilidades das áreas de conhecimento previstas na BNCC. Além disso, sugere-se a introdução dos Itinerários Formativos, organizados por meio de diferentes arranjos curriculares, conforme a relevância para o contexto local e a possibilidade dos sistemas de ensino. Esse modelo adota a flexibilidade como princípio de organização e busca atender à multiplicidade de interesses dos estudantes.

Pode-se afirmar que as novas diretrizes para o Ensino Médio propõem uma ruptura da solidez representada pelo conteudismo, do papel passivo do docente que apenas transmite informações, e do estudante que recebe o conteúdo de modo mecânico e descontextualizado.

Dessa maneira, torna-se premente organizar uma nova escola que acolha as diferenças e assegure aos estudantes uma formação que dialogue com a história de cada um, possibilitando definir projetos de vida tanto no âmbito dos estudos como na esfera do trabalho.

A transmissão de informações e o professor como figura central já não cabem mais na perspectiva da educação do século XXI. O cenário que se desenha é outro. Nele, o protagonismo dos estudantes e a construção do conhecimento de forma colaborativa ganham destaque.

Os jovens e as juventudes

Diante da fluidez das mudanças que se desenham na sociedade contemporânea e que refletem no Ensino Médio, faz-se necessário compreender os jovens: suas identidades culturais, seus gostos, seus estilos, seus valores, suas vivências bem como a ideia do que representa ser jovem hoje.

Nessa óptica, a juventude é entendida de forma mais ampla e não como uma etapa da vida. O indivíduo vai se descobrindo, construindo-se de acordo com o contexto histórico, social e cultural próprios, o que, por sua vez, implica diferentes modos de vivenciar a juventude; daí dizermos juventudes no plural, enfatizando essa grande diversidade dos modos de ser jovem. Para Carrano e Dayrell (2013, p. 15):

> [...] a juventude é uma categoria dinâmica. Ela é transformada no contexto das mutações sociais que vêm ocorrendo ao longo da história. Na realidade, não há tanto uma juventude, e, sim, jovens enquanto sujeitos que a experimentam e a sentem segundo determinado contexto sociocultural onde se inserem e, assim, elaboram determinados modos de ser jovem.

E as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2013, p. 155) consideram

> [...] a juventude como condição sócio-histórico-cultural de uma categoria de sujeitos que necessita ser considerada em suas múltiplas dimensões, com especificidades próprias que não estão restritas às dimensões biológica e etária, mas que se encontram articuladas com uma multiplicidade de atravessamentos sociais e culturais, produzindo múltiplas culturas juvenis ou muitas juventudes.

Assim, inserir-se no universo dos jovens e aprender a ouvi-los é um primeiro passo para estabelecer relacionamentos expressivos que possibilitem ressignificar o processo de ensino e aprendizagem.

O ambiente escolar deve, então, ser um local em que as diversas culturas juvenis se relacionem e se expressem. Conforme orienta a BNCC (2018, p. 463):

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida [...].

Desse modo, além de compreender a pluralidade das juventudes, deve-se pensar no jovem em sua singularidade e possibilitar a ele condições para desenvolver-se como sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem, como sujeito crítico, participativo, sendo reconhecido no exercício pleno da cidadania e agente de transformação da sociedade. Segundo o **Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA** (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990):

> Art. 53. A criança e o adolescente têm direito à educação, visando ao pleno desenvolvimento de sua pessoa, preparo para o exercício da cidadania e qualificação para o trabalho, assegurando-se lhes:
>
> I – igualdade de condições para o acesso e permanência na escola;
>
> II – direito de ser respeitado por seus educadores;
>
> III – direito de contestar critérios avaliativos, podendo recorrer às instâncias escolares superiores;
>
> IV – direito de organização e participação em entidades estudantis [...]

A experiência participativa na escola e na própria sociedade permite exercitar não somente a vivência da cidadania como também as escolhas para o seu projeto de vida e para o mundo do trabalho, no qual muitos jovens já estão inseridos enquanto estudam. Tratando-se de escolhas e projeto de vida, vale destacar o jovem do campo. Para acolher esses jovens, é preciso proporcionar um ambiente de aprendizagem que respeite suas origens e experiências. Ao garantir a esses estudantes condições para que se sintam bem-vindos e apoiados, a escola pode combater a evasão escolar e incentivar a continuidade dos estudos, contribuindo para o desenvolvimento sustentável das comunidades rurais. A inclusão desses jovens na educação formal permite ainda que tragam suas perspectivas únicas, enriquecendo o ambiente escolar e promovendo uma educação mais diversa e representativa.

As **Diretrizes Operacionais para a Educação Básica nas Escolas do Campo** (Parecer CNE/CEB nº 36, de 4 de dezembro de 2001, Resolução CNE/CEB nº 1, de 3 de abril de 2002, Parecer CNE/CEB nº 3, de 18 fevereiro de 2008, e Resolução CNE/CEB nº 2, de 28 de abril de 2008) orientam a organização e a implementação de uma educação que atenda às especificidades e necessidades das populações rurais. Essas diretrizes visam assegurar que a educação oferecida nas escolas do campo seja de qualidade, contextualizada e relevante para o cotidiano dos estudantes, promovendo a valorização das culturas locais e o desenvolvimento sustentável das comunidades. Além disso, buscam garantir o direito à educação a todos os jovens do campo, combatendo a desigualdade educacional e fortalecendo a inclusão social por meio de práticas pedagógicas que respeitem as identidades e os saberes do meio rural.

Outro aspecto das juventudes a ser destacado é a sociabilidade. O mundo cultural no qual o jovem está inserido possibilita o reforço da construção de sua identidade. Por meio das diferentes linguagens culturais, o jovem forma grupos nos quais expressa comportamentos e atitudes, posicionando-se diante de si e da sociedade. Dayrell (2016, p. 28) pontua que "o mundo da cultura aparece como um espaço privilegiado de práticas, representações, símbolos e rituais onde os jovens buscam demarcar uma identidade juvenil".

Estar atento aos grupos com os quais eles se identificam ou dos quais fazem parte pode colaborar para o entendimento de seus modos de agir e de seu processo de formação, como salienta Dayrell (2016, p. 276):

> Promover espaços de sociabilidade que primam por garantir um direito básico de todo ser humano, que é se conhecer, enriquece o processo de construção de identidade que, por sua vez, tende a ampliar a relação com o diferente. Além disso, o processo de reconhecimento de si no mundo e na relação com o outro contribui para dar sentido ao processo formativo.

Um espaço de sociabilidade que se tornou muito comum para a juventude contemporânea são as redes sociais digitais. Fichtner (2015, p. 44) aponta que, ao participar ativamente dessa "sociedade de mídia", os jovens "aprendem uma técnica de cultura que é necessária para lidar com muitas situações na vida cotidiana e na profissão hoje".

No entanto, é importante estar atento, nesses espaços físicos ou virtuais (ciberespaços), a casos de violências: agressões verbais, físicas e psicológicas, *bullying* e *cyberbullying*. Segundo o relatório *Violência escolar e bullying* (Unesco, 2019), o *bullying* é considerado um comportamento intencional e agressivo; as formas mais comuns são insultos, xingamentos e apelidos, ameaças, difamação, exclusão social e isolamento; e o *cyberbullying* é definido como ameaças realizadas por meio de postagens em redes sociais na internet, que podem incluir difamação, mensagens ofensivas, comentários, fotografias e vídeos constrangedores.

As vítimas dessas ameaças sentem-se constrangidas e humilhadas e podem desenvolver depressão, ansiedade, baixa autoestima e até mesmo pensamentos suicidas, visto que o grupo exerce forte influência no processo de identificação e de autoafirmação dos jovens.

Nesse contexto, vale destacar as dificuldades enfrentadas pelos jovens que se identificam como LGBTQIAP+, por exemplo: *bullying*, agressões físicas, exclusão social e a falta de representação e de apoio adequado no currículo e nas políticas escolares.

O quadro a seguir explica o significado da sigla LGBTQIAP+, que designa diversas minorias sexuais e de gênero em resposta ao tamanho do espectro e das demandas da comunidade.

Entenda a sigla LGBTQIAP+

L	**Lésbicas:** designa as mulheres, cis ou trans, que sentem atração por outras mulheres, cis ou trans, de forma romântica ou sexual.
G	**Gays**: corresponde aos homens, cis ou trans, que se sentem atraídos por outros homens, cis ou trans, de forma romântica ou sexual.
B	**Bissexuais:** diz respeito às pessoas que se relacionam romântica ou sexualmente com indivíduos de ambos os sexos/gêneros (feminino e masculino).
T	**Transgêneros e travestis:** a transexualidade se refere aos indivíduos que se identificam com o gênero que se distingue ao sexo designado ao nascer, abarcando homens e mulheres que buscam adequar-se à sua identidade de gênero. Já travestis são pessoas que buscam a construção de uma identidade feminina permanente oposta ao seu sexo biológico.
Q	***Queer*:** trata-se de uma designação tida como "guarda-chuva", funcionando como um termo que abrange todos da comunidade que não desejam ou não se veem dentro das demais designações, ou seja, sujeitos que não se identificam nem se nomeiam com nenhum gênero em específico.
I	**Intersexo:** abarca as pessoas que têm desígnios sexuais biológicos (órgãos, hormônios e cromossomos masculinos e femininos) de ambos os gêneros.
A	**Assexuais:** nomeiam indivíduos que não sentem atração sexual pelas demais pessoas, sejam sujeitos do mesmo gênero/sexo, sejam indivíduos opostos.
P	**Pansexuais:** orientação sexual que designa as pessoas que desenvolvem atração romântica e sexual pelos demais indivíduos, independentemente da identidade de gênero destes. É importante ressaltar que a pansexualidade se difere da bissexualidade como nível de importância da identidade de gênero para que o indivíduo se relacione ou não com a pessoa.
+	**+ (mais):** corresponde a outras orientações sexuais, identidades e expressões de gênero que são abraçadas pela sigla, além de representar a abertura de uma futura inserção de novas orientações e identidades, demonstrando uma infinitude plural e diversa diante do espectro romântico, sexual e de gênero da humanidade.

Fonte: elaborado com base em UNICEF BRASIL. **LGBTQIAP+ e saúde mental**: acolhendo e lutando contra estigmas e preconceito. [*S. l.*], 23 jun. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/lgbtqiap-mais-e-saude-mental. Acesso em: 13 set. 2024.

Promover um ambiente inclusivo e seguro contribui para que todos se sintam aceitos e respeitados. Cabe à equipe escolar investir na formação dos profissionais para que compreendam melhor a sexualidade e acolham todos os estudantes. É necessário discutir a sexualidade abertamente e estabelecer regras baseadas no respeito. É essencial realizar rodas de conversa com aqueles que não cumprem as regras ou estão envolvidos em conflitos. Uma escola que acolhe a diversidade ensina valores importantes e prepara os estudantes para viver em uma sociedade plural e melhorar o desempenho acadêmico e a autoestima dos jovens LGBTQIAP+.

Em relação aos jovens em situação de itinerância, como povos ciganos, circenses, migrantes, imigrantes, ou em trânsito, é preciso flexibilizar o currículo, permitindo ajustes no conteúdo e no cronograma das atividades escolares para acomodar as particularidades de suas trajetórias nômades. O suporte adicional, que pode incluir aulas de reforço, também é fundamental para garantir que esses estudantes acompanhem o ritmo escolar e se sintam acolhidos no ambiente educativo.

Diante dessa realidade, e dadas as diferenças entre as juventudes e entre elas e os professores, é importante educar para a convivência e o diálogo. Em um ambiente escolar inclusivo, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é possível construir redes de cooperação em que as interações sociais sejam construídas com respeito, companheirismo, solidariedade e compartilhamento de experiências e saberes. O professor desempenha papel relevante na organização dessa rede, como mediador do processo de construção de conhecimento, de identidade, autonomia e projetos de vida.

Princípios éticos para a construção da cidadania

Vivemos em uma sociedade em que as relações entre indivíduos devem ser pautadas na ética, fortalecendo a dignidade humana, o direito de expressar opiniões e ideias e o respeito sem discriminação. Para Lodi e Araujo (2007, p. 70) essas relações precisam ser construídas "a partir do diálogo, na interação estabelecida entre pessoas imbuídas de razão e emoções em um mundo constituído de pessoas, objetos e relações multiformes, díspares e conflitantes".

Por isso, é necessário aprender a ser cidadão, respeitando e sendo solidário, responsável, justo e não violento, além de dialogar em diversas situações. É importante ser cidadão do lugar onde está inserido, preocupado com as questões locais e ampliando esse conceito, ser cidadão do mundo – a ideia de cidadania global postulada pela Unesco – consciente e preocupado com questões globais, como a pobreza, as desigualdades, as mudanças climáticas e os direitos humanos.

Uma das maneiras de promover essa aprendizagem está no estímulo às reflexões e vivências sobre questões reais na prática, criando no convívio escolar espaços democráticos para tais discussões e busca de soluções que promovam o diálogo, o respeito e a dignidade.

Trazemos algumas questões que podem permear tais discussões. Uma delas é a questão ambiental, preocupação da **Política Nacional de Educação Ambiental – PNEA** (Lei nº 9.795, de 27 de abril de 1999) e das **Diretrizes Curriculares para a Educação Ambiental** (Resolução CNE/CEB nº 2, de 15 de junho de 2012). A PNEA estabelece um marco para a integração da educação ambiental em todos os níveis de ensino, buscando garantir que os estudantes desenvolvam uma compreensão crítica dos problemas ambientais e estejam capacitados para atuar de forma responsável e ética em relação ao meio ambiente. As Diretrizes Curriculares para a Educação Ambiental, por sua vez, orientam a implementação desses princípios no currículo escolar, propondo metodologias e conteúdos que fomentem o pensamento crítico e a ação prática em questões ambientais. Juntas, essas políticas visam promover uma educação que não apenas informe sobre questões ambientais, mas que também engaje os indivíduos em práticas sustentáveis e na construção de um futuro mais equilibrado e sustentável.

Outra questão a ser discutida na escola é aquela relativa ao envelhecimento da população, buscando conscientização e soluções para esse desafio, visto que muitas pessoas idosas são discriminadas, violentadas em seus direitos e, principalmente, abandonadas afetivamente. De acordo com o Censo Demográfico 2022 do IBGE, o Brasil tinha 15,8% da população com 60 anos ou mais de idade, o que indicava um crescimento de aproximadamente 46% em relação ao Censo Demográfico 2010, quando representava 10,8% da população. O **Estatuto da Pessoa Idosa** (Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003), que assegura à pessoa idosa autonomia, integração e participação efetiva na sociedade, estabelece medidas de proteção contra abusos, negligência e discriminação, assegurando acesso a serviços de saúde, assistência social, educação, cultura e lazer.

Explorar com os estudantes dados estatísticos e situações reais mostradas nos noticiários promove uma compreensão mais profunda das condições e dos desafios enfrentados pelas pessoas idosas. Essa análise permite identificar tendências, problemas e oportunidades de melhoria na qualidade de vida dos idosos, além de sensibilizar os jovens sobre questões de saúde, segurança e direitos. Ao engajar-se com esses dados e relatos, os estudantes desenvolvem habilidades críticas e empáticas, tornando-se cidadãos mais conscientes e preparados para contribuir positivamente para uma sociedade que valoriza e respeita as pessoas idosas.

A questão da violência contra a mulher também precisa estar presente na escola se quisermos uma sociedade mais justa e igualitária. Tratar desse tema ajuda a desconstruir estereótipos de gênero, promovendo o respeito e a igualdade. Para isso, sensibilize os estudantes sobre os impactos da violência e a importância de denunciar e combater tais comportamentos. Para enriquecer debates e reflexões, pode-se trazer para a sala de aula a **Lei Maria da Penha** (Lei nº 11.340, de 7 de agosto de 2006), que criou medidas protetivas, delegacias especializadas, centro de reabilitação e educação para os agressores e diversas ferramentas públicas para o atendimento à mulher. Ao integrar essa temática no ambiente escolar, cria-se um espaço seguro para discutir questões de direitos humanos e empoderamento, preparando os jovens para reconhecer e enfrentar a violência de forma consciente e proativa, contribuindo assim para a redução da violência de gênero a longo prazo.

Outro ponto que contribui para a construção da cidadania é a discussão, na escola, de como nos relacionamos no trânsito. O **Código de Trânsito Brasileiro** (Lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997), em seu artigo 76, propõe a educação para o trânsito em todas as etapas da educação, o que está diretamente ligado a um processo de construção de conceitos para o exercício da cidadania. Ensinar as regras e a importância da segurança no trânsito ajuda a prevenir acidentes e a salvar vidas. Além disso, desenvolve nos estudantes uma compreensão das responsabilidades individuais e coletivas, incentivando atitudes de respeito e cooperação no espaço público. Ao internalizar esses valores, os estudantes se tornam cidadãos mais preparados para contribuir com um trânsito mais seguro e harmonioso, refletindo uma sociedade mais organizada e atenta ao bem-estar de todos.

Nesta coleção, princípios éticos como os da dignidade, do respeito, da liberdade, da responsabilidade e da justiça são trabalhados por meio da abordagem de questões ambientais, do Estatuto da Pessoa Idosa, da Lei Maria da Penha, do Código de Trânsito Brasileiro etc. Tais abordagens podem estar presentes em aberturas de capítulos, seções, contextos de introdução de conteúdos, atividades e objetos educacionais digitais.

Identidades

A diversidade cultural e pluriétnica do Brasil é uma de suas características mais marcantes, resultante de sua rica história de encontros e misturas entre povos indígenas, africanos, europeus e asiáticos. Essa diversidade se reflete em diversos aspectos da vida brasileira, incluindo a música, a culinária, as festas populares, as tradições religiosas e as expressões artísticas. A convivência e a integração de diferentes etnias e culturas contribuem para a formação de uma identidade nacional única e plural, valorizando a multiplicidade de perspectivas e enriquecendo a sociedade. Reconhecer e celebrar essa diversidade é essencial para promover o respeito, a inclusão e a igualdade, fortalecendo a coesão social e a democracia no Brasil.

Por outro lado, toda essa diversidade traz com ela desigualdades sociais, econômicas e raciais. Discriminação, preconceito e exclusão são problemas persistentes que afetam grupos marginalizados, incluindo povos indígenas, afro-brasileiros e imigrantes. A falta de reconhecimento e valorização de todas as culturas pode levar à invisibilidade e à perda de patrimônios culturais importantes. Além disso, políticas públicas inadequadas e a insuficiente implementação de ações agravam essas desigualdades, dificultando a construção de uma sociedade verdadeiramente justa e inclusiva.

Esse panorama também se reflete na escola. Por isso, a fim de contribuir com uma sociedade mais justa e igualitária e promover uma educação antirracista, convém explorar com os estudantes a **História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena** (Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, e Lei nº 11.645, de 10 de março de 2008). Essa exploração pode ser realizada por meio de rodas de conversa e trabalhos em grupo, além da sugestão de elaboração de um produto final, como cartaz, *podcast*, curta-metragem ou outras produções multimídia, ao longo do ano letivo. A formação de uma roda de conversa permitirá que os estudantes compartilhem e debatam suas experiências e perspectivas sobre o racismo e a diversidade em um ambiente seguro e empático. Como conclusão, os estudantes poderão trabalhar em grupo, utilizando ferramentas digitais para a elaboração de projetos que sintetizem as discussões. Para que as ideias e os aprendizados sejam divulgados de modo mais amplo, considere a possibilidade de compartilhar os trabalhos finalizados com a comunidade escolar. Essa abordagem visa não apenas aprofundar a compreensão dos temas antirracistas, mas também engajar os estudantes de maneira significativa e prática, demonstrando que é possível, sim, construir uma educação antirracista. As **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana** (Parecer CNE/CP nº 3, de 10 de março de 2004, e Resolução CNE/CP nº 1, de 17 de junho de 2004), respaldadas pela Lei nº 12.288, de 20 de julho de 2010, que institui o Estatuto da Igualdade Racial e estabelece em sua Seção II, art. 11, a obrigatoriedade do estudo da história geral da África e da população negra no Brasil, observado o disposto na Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, especificam os conteúdos e as metodologias a serem adotados, garantindo que a educação das relações étnico-raciais seja integrada de forma transversal em todos os componentes curriculares, contribuindo para uma formação cidadã que valorize a contribuição desses grupos para a constituição da sociedade brasileira e que se sintam encorajados a combater o racismo estrutural e a discriminação, enfatizando, nesse sentido, uma educação antirracista, que ainda se mostra incipiente no Brasil.

Já as **Diretrizes Nacionais para a Educação Escolar Quilombola** (Resolução CNE/CEB nº 8, de 20 de novembro de 2012), por sua vez, visam garantir que o currículo escolar valorize e preserve a herança cultural quilombola, assegurando que as escolas quilombolas e as que atendem estudantes provenientes de territórios quilombolas levem em consideração as especificidades e práticas socioculturais de tais comunidades. Além disso, essas diretrizes contribuem para a educação antirracista ao promover o respeito e a compreensão das diversidades culturais, combatendo estereótipos e preconceitos desde o início da vida escolar.

As **Diretrizes Nacionais para a Educação em Direitos Humanos** (Resolução CNE/CP nº 1, de 30 de maio de 2012), por sua vez, têm como foco a promoção de uma cultura de respeito, valorização e defesa dos direitos humanos em todas as etapas e modalidades da educação no Brasil e estão alinhadas com as demais diretrizes aqui mencionadas. Incluir essas histórias e culturas no currículo escolar fortalece a identidade e o respeito pelos povos indígenas, afro-brasileiros e quilombolas, incentivando a construção de uma sociedade mais equitativa e democrática, na qual a diversidade é vista como uma riqueza a ser celebrada e protegida.

Esta coleção busca abranger a diversidade cultural e étnica do Brasil por meio de aberturas de capítulos e contextos presentes no estudo de conteúdos e nas atividades. A intenção é enriquecer a experiência de aprendizado para todos os estudantes e promover um ambiente de respeito, valorização e equidade.

A Etnomatemática

Ao longo do tempo, muitas maneiras de trabalhar a Matemática foram criadas em virtude das diferentes necessidades socioculturais de épocas distintas. Atualmente, conforme a BNCC propõe, o foco é uma Matemática integrada e aplicada à realidade em diferentes contextos, levando em consideração as variadas vivências apresentadas pelos estudantes.

É nesse contexto que se enquadra a **Etnomatemática** – campo de estudo que explora as práticas matemáticas em diferentes contextos culturais. A ideia central é entender como diferentes grupos culturais desenvolvem e utilizam conceitos e técnicas matemáticas para resolver problemas no dia a dia. Isso pode incluir, por exemplo, a forma como comunidades indígenas medem terras, constroem suas habitações ou fazem cálculos para atividades agrícolas.

O professor brasileiro Ubiratan D'Ambrosio (2005, p. 99), um dos pioneiros no tema, explica que a Etnomatemática

> tem o seu comportamento alimentado pela aquisição de conhecimento, de fazer(es) e de saber(es) que lhes permitam sobreviver e transcender, através de maneiras, de modos, de técnicas, de artes (*techné* ou "ticas") de explicar, de conhecer, de entender, de lidar com, de conviver com (*mátema*) a realidade natural e sociocultural (*etno*) na qual está inserido.

Esses saberes e fazeres matemáticos estão relacionados com o contexto sociocultural do estudante e precisam ser abordados em sala de aula, estabelecendo uma ligação entre esses conhecimentos e o saber matemático da academia e da escola. É importante compreendê-los e compará-los com o que se aprende na escola, demonstrando, por exemplo, que há diferentes maneiras de resolver uma situação. A sala de aula, portanto, deve ser um espaço de encontros, conexões e explorações de diferentes saberes.

Jonei Barbosa (2019), professor da Faculdade de Educação da Universidade Federal da Bahia, desenvolve projetos de pesquisa na área de Educação Matemática, em artigo sobre o tema, traz um uso da Etnomatemática quando cita uma pesquisa realizada com estudantes do 2º ano do Ensino Médio em que eles tiveram de pesquisar, em grupos, a matemática na construção civil:

> [...] Eles tiveram que visitar canteiros de obra e entrevistar os profissionais [engenheiro, mestre de obra, pedreiro]. Depois disso, os grupos apresentaram os saberes e fazeres, como a técnica de construção das "tesouras" na sustentação do telhado, a determinação do desnível entre dois pontos de um terreno e o esquadro do chão com uma parede de um cômodo. Na apresentação, teve-se a oportunidade de discutir as diferenças entre as formas de abordar os problemas no mundo da construção civil e na escola (por exemplo, usando trigonometria).

Com base nessa perspectiva e diante da diversidade cultural que forma a identidade do povo brasileiro e está presente na sala de aula, trazer a matemática presente na cultura indígena e africana é uma possibilidade de compreender os saberes e fazeres desses povos, valorizando a contribuição cultural, além de diminuir a fronteira entre o currículo e a matemática prática que está fora da sala de aula.

Um modo de atingir esse objetivo é explorar, por exemplo, os grafismos da arte indígena presentes na pintura corporal, na cestaria ou na cerâmica para estudar as transformações geométricas.

Da cultura africana, podemos utilizar não só a arte das estampas e das máscaras, mas também os jogos. Um dos mais conhecidos é o mancala[2], comparável, em alguns aspectos, com o xadrez. O objetivo é distribuir as sementes uma a uma em um tabuleiro com duas cavidades maiores (os oásis) e doze cavas menores. O vencedor será aquele que terminar com o maior número de sementes no oásis. O trabalho com esse jogo permite estimular o raciocínio lógico e estratégico, já que o jogador precisa elaborar estratégias para vencer, e estabelecer relações com a cultura africana, desconstruindo preconceitos, valorizando a contribuição cultural africana.

Portanto, utilizar a perspectiva da Etnomatemática na sala de aula é uma forma de promover mudanças no ensino, permitindo aos estudantes descobrirem a Matemática do dia a dia. É uma oportunidade de despertar o interesse e a significação, oferecendo a eles novos olhares para a Matemática com base na valorização cultural dos diferentes grupos que compõem nossa sociedade e estão presentes na sala de aula.

A gestão de sala de aula

Uma boa gestão de sala de aula incentiva a responsabilidade pessoal e a autodisciplina, tornando o processo de ensino e aprendizagem instigante tanto para o professor como para os estudantes, principalmente se a opção for o trabalho com as metodologias ativas, e requer planejamento e discussão envolvendo todos os professores e os estudantes. Esse planejamento começa com o *layout* da sala de aula. Os estudantes podem ajudar nessa organização, levantando o que é mais necessário e cuidando de sua conservação. Incluí-los ajuda a criar arranjos mais sensíveis e contribui para promover o papel de cidadãos ativos e envolvidos com as questões de funcionalidade ambiental.

Se for possível organizar salas ambientes, ficará mais fácil para os professores de cada área do conhecimento personalizar a sala de aula com os materiais e outros suportes específicos. No entanto, o que importa é criar um ambiente esteticamente agradável e prático, que atenda a todos os estudantes, incluindo aqueles com necessidades especiais.

Outro ponto a ser pensado é a organização do espaço, visando ao que se quer alcançar com a proposta da aula, ou seja, a disponibilização do espaço deverá ocorrer de acordo com o grau de interação e de participação que se espera. Carol Weinstein e Ingrid Novodvorsky (2015, p. 27) explicam que:

> [...] arranjos diferentes facilitam intensidades diferentes de contato. Grupos de carteiras promovem contato social uma vez que os indivíduos estão próximos e podem ter contato visual direto com aqueles à sua frente. Em grupos, os estudantes podem trabalhar juntos em atividades, compartilhar materiais, promover discussões em pequenos grupos e ajudar uns aos outros nas tarefas. Essa disposição é mais apreciada se [...] se planeja enfatizar a colaboração e as atividades de aprendizado cooperativo.

Em contrapartida, as fileiras, embora facilitem a concentração quando se realiza uma atividade individual, reduzem drasticamente a interação entre os estudantes. Ao planejar a aula, é necessário também que o professor pense a respeito dos vários papéis que o ambiente desempenha e sobre a melhor forma de atingir seus objetivos nesse local, que deve favorecer a realização de uma aula inclusiva e participativa.

2 **Como jogar o mancala.**

Há pelo menos 200 variações do jogo. No Brasil, a mais difundida é a que segue:

Número de participantes: 2

Material: 36 sementes e um tabuleiro com 12 cavas pequenas e dois oásis (cavas maiores que servem de reservatórios).

Objetivo: colocar o maior número de sementes no próprio oásis. Entenda a dinâmica:

1. Os jogadores se sentam frente a frente e ficam com o oásis à sua direita. Em seguida, cada um distribui 18 sementes em suas seis cavas (três em cada). No início, o oásis fica vazio.
2. Quem começa escolhe uma das cavas do seu campo, pega todas as sementes dela e as distribui, uma a uma, nas cavas seguintes, em sentido anti-horário.
3. Se passar pelo próprio oásis, o jogador deixa uma semente nele e segue colocando as demais no campo adversário, mas nunca no oásis de lá. Se a última semente cair no próprio oásis, ele pode fazer outra jogada. Se ela cair em uma cava vazia, ele pode adicionar ao seu oásis todas as sementes da cava seguinte.

Quando as sementes se reduzirem a ponto de não ser mais possível semear o campo adversário, os jogadores recolhem suas sobras, juntam ao seu oásis e contam. Quem tiver mais é o vencedor (disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/9104/um-jogo-para-semear-colher-e-contar. Acesso em: 24 ago. 2024).

A organização do tempo também precisa ser avaliada: um bom planejamento prévio do que e de como será trabalhado, com estratégias diferenciadas a fim de atender às especificidades de cada turma, permite envolver os estudantes em atividades que favoreçam a real aprendizagem.

Um olhar inclusivo

Cada turma é única, caracterizada por diferenças de classe, etnia, gênero, origem cultural e linguística, religião, orientação sexual, deficiências (visual, auditiva, física, de fala e intelectual, entre outras), transtornos de aprendizagem, de comportamento ou de conduta – déficit de atenção/hiperatividade, transtorno do espectro autista (TEA)[3] e transtorno opositivo desafiador (TOD)[4], entre outros. É necessário um olhar inclusivo de toda a comunidade escolar em respeito a essas diferenças que podem impedir a participação na sociedade desses indivíduos.

Para tanto, é necessário mudar paradigmas e rever como se dá a inclusão na escola, respaldada desde 1990 no **Estatuto da Criança e do Adolescente – ECA** (Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990), no **Estatuto da Juventude** (Lei nº 12.852, de 5 de agosto de 2013) e no **Estatuto da Pessoa com Deficiência** (Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015), que asseguram a todas as crianças e a todos os adolescentes, independentemente de suas condições físicas, sensoriais ou intelectuais, o acesso à educação de qualidade. Nesse contexto, o **Atendimento Educacional Especializado – AEE** (Decreto nº 7.611, de 17 de novembro de 2011) desempenha papel fundamental ao complementar e suplementar o ensino regular, oferecendo recursos e serviços de apoio especializado que promovem a plena participação e aprendizagem dos estudantes com deficiência, transtornos globais do desenvolvimento e altas habilidades (superdotação). O AEE deve ser organizado a fim de atender às necessidades específicas de cada estudante, com a formação de professores capacitados e a adaptação de materiais e espaços escolares, reforçando o compromisso com uma educação inclusiva e equitativa, conforme os princípios do ECA e do Estatuto da Juventude.

Entretanto, apesar do respaldo legal, a garantia do direito de concluir seus estudos e de estar inserido no mercado de trabalho não ocorre na prática. A solução para reverter esse quadro é o acolhimento de estudantes que apresentam deficiências e transtornos de aprendizagem, de comportamento e conduta, com base no entendimento de suas necessidades, e a criação de um ambiente de aceitação na sala de aula por meio de ações, como atividades em grupos que incentivem a interação entre todos.

Para a adequação das propostas, a consulta a uma equipe multidisciplinar e a pesquisa pontual de acordo com a necessidade são caminhos viáveis. No início, pode parecer difícil; porém, a persistência e a insistência farão com que se tornem uma prática cotidiana.

Nesse contexto de inclusão, é fundamental combater a LGBTQIAP+fobia (junção da sigla LGBTQIAP+ com o sufixo *-fobia*), que, segundo o guia LGBTQIAP+: um guia educativo, significa "medo exagerado ou intolerância/aversão às pessoas que se identificam nessa sigla" (Santos e Jesus, p. 19).

Embora a LGBTQIAP+fobia seja crime, isso não é suficiente para que uma sociedade mude seu padrão de comportamento sociocultural. Para combatê-la, seja no ambiente escolar, seja fora dele, é importante dialogar e criar espaços acolhedores para todos aqueles que se identificam como LGBTQIAP+. Nesse âmbito, é importante combater o preconceito e as diferenças cristalizadas entre meninos e meninas, respeitando o direito de cada indivíduo ser quem é, além de incentivar e apoiar todos a denunciarem atos de discriminação em qualquer campo.

Outro preconceito presente na sociedade e que se reflete na escola é a gordofobia: preconceito contra pessoas gordas manifestado em atitudes, falas, representações negativas e barreiras para a inclusão dos corpos considerados acima do peso "ideal". Torna-se uma violência que precisa ser debatida na escola, ouvindo os estudantes gordos e aqueles que praticam tal violência na busca de tornar a escola um ambiente inclusivo e acolhedor. Para discutir e combater a gordofobia no ambiente escolar, pode-se incentivar os estudantes a relatarem, caso se sintam confortáveis, em uma roda de conversa acolhedora e respeitosa, casos de preconceito e/ou *bullying* de que foram vítimas, por não apresentarem o padrão de beleza imposto pelo mundo da moda e da mídia, ou situações de gordofobia que presenciaram. Como proposta de atividade interdisciplinar com o componente curricular Arte, proponha à turma um estudo sobre os padrões de beleza em diferentes épocas da história e em distintas sociedades, para que possam desconstruir padrões estéticos impostos pela sociedade.

Concomitante a essa discussão – independentemente de ser gordo ou magro, evitando-se estereótipos –, é preciso estabelecer uma conexão com o **Guia alimentar da população brasileira** (2014), elaborado pelo Ministério da Saúde. Esse guia oferece orientações abrangentes sobre alimentação saudável para a população e enfatiza a importância de uma dieta elaborada com alimentos *in natura* ou minimamente processados, promovendo práticas alimentares que valorizam a cultura e a diversidade alimentar brasileira. Além de fornecer diretrizes nutricionais, o guia

3 De acordo com o *site* **InformaSUS/UFSCar**, o transtorno do espectro autista (TEA) é uma alteração no neurodesenvolvimento que dificulta a organização de pensamentos, sentimentos e emoções, gerando prejuízos nas interações sociais, na comunicação e no aprendizado. As características desse transtorno variam de caso a caso, daí o nome espectro. As pessoas com TEA podem apresentar déficits persistentes na comunicação e na interação social verbal e não verbal; abordagem social anormal; dificuldade para estabelecer conversa; compartilhamento reduzido de interesses, emoções ou afeto; dificuldade para iniciar ou responder a interação; déficit na compreensão e no aprendizado de gestos e expressões faciais; fragmentação do contato visual e dificuldade de manter relacionamentos. Saiba mais em: https://informasus.ufscar.br/transtorno-do-espectro-autista-tea-o-que-precisamos-aprender/ e https://institutoolgakos.org.br/assets/pdf/publicacao/Cartilha-TEA%20(1).pdf. Acessos em: 24 ago. 2024.

4 O transtorno opositivo desafiador (TOD) é um distúrbio que afeta crianças e adolescentes ou, em algumas situações, é resultado do enfrentamento de situações estressantes (conflitos familiares ou dificuldades escolares) vivenciadas pelo indivíduo, transtornos de ansiedade, transtorno de déficit de atenção e hiperatividade ou transtorno de conduta. Caracteriza-se por um padrão de comportamento desafiador persistente (desafio às regras e à figura da autoridade), frequente e duradoura em relação a esse tipo de comportamento observado na maioria das outras crianças da mesma idade. Dificuldade em lidar com frustrações, teimosia, crises explosivas de raiva após ser contrariado e desejo exacerbado de vingança são características desse transtorno.

aborda aspectos sociais, culturais e ambientais da alimentação, incentivando escolhas conscientes que contribuem para a saúde individual e coletiva. É essencial que esse documento seja utilizado nas escolas de maneira que promova uma compreensão holística da saúde, valorizando a diversidade corporal e combatendo a gordofobia, incentivando práticas alimentares saudáveis sem estigmatizar ou discriminar qualquer grupo de estudantes.

A escola precisa ser um espaço democrático no qual todos possam se expressar, ouvindo e sendo ouvidos em suas diferenças e necessidades. Os educadores precisam estar atentos, como já mencionado, para não reproduzir estereótipos, mas, sim, tornar a escola um espaço de reflexão e transformação da sociedade.

A partir do momento em que o professor compreende tais diferenças e apura o seu olhar para as necessidades de cada um, desprovido de prejulgamentos, abre-se espaço para a discussão com a equipe escolar como um todo. Dessa forma, será possível enxergar possibilidades de aprendizagem para todos, criando, assim, uma cultura de aprendizagem; ou seja, conhecendo as necessidades, podem-se planejar boas situações para que todos, conforme sua capacidade, consigam se desenvolver. Essas propostas, certamente, necessitam de união e disponibilidade do grupo para buscar novas alternativas, fugindo da "solidez" do tradicional, a fim de obter bons resultados para todos os envolvidos.

As metodologias ativas

Para a escola acompanhar as muitas e rápidas mudanças que ocorrem na sociedade, é necessário superar a educação bancária tradicional e focar no protagonismo do estudante exercido no processo de ensino e aprendizagem por meio de uma educação centrada na resolução de problemas, desafios e jogos. Um modo desse protagonismo acontecer é investir nas metodologias ativas. Segundo Jose Moran (2019, p. 7), as metodologias ativas são:

> [...] alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital).

Desse modo, elas representam mudanças de paradigmas, contribuindo para redesenhar as formas de ensinar e aprender, avaliar, pensar o currículo e mesmo organizar os espaços escolares. Nesse novo cenário, o estudante não se limita a ser um espectador passivo. Ele deve ser incentivado a aprender de forma autônoma e participativa, utilizando problemas e situações reais, e a ser o protagonista de seu processo de aprendizagem, corresponsável pela construção de conhecimento.

O professor, por sua vez, é o mediador, que provoca, desafia e orienta cada estudante na intenção de que ele avance mais em sua aprendizagem. Segundo Moran (2019, p. 17), os professores:

> [...] conseguem ajudar os aprendizes a ampliarem a visão de mundo que conseguiram nos percursos individuais e grupais, levando-os a novos questionamentos, investigações, práticas e sínteses. [...] Ajudam a desenhar roteiros interessantes, problematizam, orientam, ampliam os cenários, as questões e os caminhos a serem percorridos.

É nessa relação professor-estudante-grupo, em um processo colaborativo, que o conhecimento é construído. Esse processo é, ao mesmo tempo, ativo e reflexivo, pois, por meio das atividades propostas pelo professor, os estudantes podem pensar nos conteúdos desenvolvidos e no que fazem (prática) e desenvolver a capacidade crítica (reflexão).

O professor, com seu conhecimento, sua experiência e a observação atenta, planeja e faz ajustes e intervenções para impulsionar os estudantes no desenvolvimento de competências e habilidades. Desse modo, ele assume também uma postura investigativa de sua própria prática, refletindo sobre ela e buscando soluções para os problemas que encontra.

Embora seja um grande desafio para o professor, para os próprios estudantes e para a gestão escolar, as metodologias ativas representam a oportunidade de redesenhar as relações, o espaço e o tempo na escola, além de ser a principal ferramenta para acompanhar a fluidez e as mudanças constantes da atualidade.

Como aplicar as metodologias ativas com o livro didático

O uso do livro didático varia conforme a visão pedagógica do professor. Em uma abordagem que valoriza o protagonismo do estudante e a ideia de juventude plural, o livro didático torna-se um recurso a mais para enriquecer a prática docente.

Nesse sentido, esta coleção didática apresenta variadas situações em que é possível engajar os estudantes em metodologias ativas. A **aprendizagem baseada em projetos**, por exemplo, mobiliza o interesse dos jovens, pois eles se envolvem na resolução de um problema ou desafio (que pode ser proposto por eles mesmos ou pelo professor) que geralmente se relaciona com a realidade deles fora da sala de aula.

Na aprendizagem com projetos, os estudantes realizam um trabalho em equipe, tomam decisões coletivas, refletem, analisam e chegam juntos a um resultado, por meio da cooperação e de princípios éticos e democráticos. O professor atua como mediador, intervindo quando necessário, principalmente em relação a possíveis desentendimentos, promovendo a cultura da paz, em um ambiente adequado às trocas e ao diálogo, a fim de estimular o respeito às ideias do outro, o acolhimento e a valorização da diversidade.

Para o professor, trabalhar com projetos implica planejamento prévio meticuloso. É necessário pensar o que será proposto, a organização do tempo, a quantidade de aulas necessárias, as estratégias, o encadeamento das atividades. Quando se trata de um projeto interdisciplinar, é importante planejar em conjunto com os outros profissionais envolvidos para estabelecer conexões entre os temas e elaborar questionamentos que direcionem a pesquisa a ser realizada pelos

estudantes. É imprescindível também apresentar o que se espera deles a cada aula, para que possam participar ativamente da gestão da aula: o que vão aprender, quais atividades vão realizar, e, ao final, avaliar se atingiram os objetivos propostos, o que aprenderam, o que é necessário melhorar.

Nesta coleção, pode-se colocar em prática essa estratégia com as atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Outra metodologia ativa a ser colocada em prática é a da **sala de aula invertida**. Nela, como o nome diz, inverte-se o processo, ou seja, as informações necessárias para resolver um problema ou aprofundar um tema são antecipadas aos estudantes.

Nessa estratégia, para orientar o estudo, o professor pode utilizar recursos tecnológicos digitais (os estudantes procuram informações na internet em fontes confiáveis e diversificadas, assistem a vídeos e animações, fazem uso de aplicativos) ou sugerir aos estudantes que leiam textos impressos de revistas, jornais ou do próprio livro didático, individualmente ou em grupos.

Depois, orientados pelo professor, eles discutem o que pesquisaram e expõem as dúvidas suscitadas pelo estudo. O professor levantará algumas questões para diagnosticar o que foi aprendido e o que ainda é necessário ser revisitado. Desse modo, poderá orientar aqueles que necessitam de ajuda e, ao mesmo tempo, propor desafios maiores para os que já dominam o que foi pedido.

Moran (2019, p. 29) explica que, na sala de aula invertida:

> [...] Os estudantes acessam materiais, fazem pesquisas no seu próprio ritmo e como preparação para a realização de atividades de aprofundamento, debate e aplicação [...]. A combinação de aprendizagem por desafios, problemas reais e jogos com a aprendizagem invertida é muito importante para que os estudantes aprendam fazendo, aprendam juntos e aprendam também no seu próprio ritmo.

Nesta coleção, o professor poderá propor aos estudantes que analisem antes as aberturas de capítulos, para que tragam dúvidas e comentem o que entenderam. É possível pedir, ainda, que realizem previamente as atividades propostas, levantando os principais problemas encontrados. Há também outras possibilidades a serem elaboradas com base nas sugestões dos boxes ou nos textos ao longo do livro, conforme o conteúdo a ser trabalhado.

Outro exemplo de metodologia ativa é a **aprendizagem baseada em times**, na qual o professor propõe aos estudantes uma preparação prévia de um conteúdo específico. Há uma avaliação individual e, em seguida, eles se reúnem em equipes para discutir as mesmas questões e cada um explica como as resolveu, argumentando e defendendo as razões de sua escolha até chegarem a um consenso. O professor percorre os grupos fazendo intervenções e, ao final, complementa algum ponto que mereça mais atenção. Esse tipo de trabalho desenvolve habilidades de comunicação e argumentação, aspectos importantes para enfrentar demandas da sociedade atual. Nesta coleção, essa metodologia pode ser aplicada nas atividades da seção *Pesquisa e ação*.

Existem, de acordo com Moran (2019), outras formas de trabalho em grupo que podem e devem ser utilizadas: debates sobre temas da atualidade, geração de ideias (*brainstorming*) para buscar a solução de um problema, rotinas simples para exercitar o pensamento (tornar o pensamento visível com base em perguntas problematizadoras), produção de mapas conceituais para explicar e aprofundar conceitos e ideias; criação de portfólios digitais para registro e acompanhamento da aprendizagem pessoal e grupal; avaliação entre grupos.

É importante organizar os grupos de modo que as trocas de conhecimento ocorram; por exemplo, testando grupos que reúnam estudantes em diferentes estágios de aprendizagem, ou seja, grupos heterogêneos, e propor mudanças de acordo com o andamento dos trabalhos. Ensiná-los a dividir as tarefas e a ouvir o outro, levando em consideração as ideias e as diferenças, são aspectos a serem sempre aprimorados. Uma dica é construir com os estudantes as regras para o convívio e o melhor aproveitamento durante a realização dos trabalhos em grupo dentro ou fora da sala de aula, como um contrato para que todos conheçam as regras. Afixá-las em um local visível e retomá-las sempre que necessário deve fazer parte da rotina.

Durante a atividade em grupo, o papel do professor é o de mediador, fazendo questionamentos conforme as discussões vão acontecendo. Nesse momento, podem-se registrar as observações da turma e fazer intervenções. Ao perceber que nem todos participam, é fundamental abordar os integrantes do grupo, a fim de retomar os procedimentos de trabalho e revisar as regras. Se a falta de participação persistir, sugere-se a realização de assembleias de classe, nas quais o assunto pode ser levado à discussão, possibilitando aos estudantes aprender a encontrar a melhor solução para o problema com base em princípios éticos e democráticos.

A língua materna e a Matemática

Um dos papéis da escola é promover a participação social, as trocas e o exercício da cidadania. Uma das maneiras de alcançar isso é suprir os estudantes com ferramentas que lhes permitam uma comunicação efetiva.

Em nosso campo de estudo, a eficiência na comunicação se dá quando, pelo uso da língua materna (ou linguagem corrente), a Matemática é interpretada e ganha sentido. Estudos teóricos mostram que é importante estabelecer uma relação entre a língua materna e o ensino da Matemática, o qual apresenta ora uma linguagem formal, ora um sistema de representação.

Tanto a língua materna como a linguagem matemática apresentam um sistema de representação simbólico, com letras e números, utilizado para interpretar a realidade, e ambas necessitam de um grau de abstração para que sejam compreendidos os seus códigos. No entanto, para entender a língua materna, o grau de abstração é menor quando comparado com a linguagem matemática, já que as palavras fazem parte do cotidiano e se referem a objetos e situações mais próximas de todos. A abstração para compreender a linguagem matemática requer maior esforço, pois muitos dos códigos são específicos da Matemática e estão distantes da realidade dos estudantes. É por esse motivo que aparecem os entraves logo no início do percurso escolar e se estendem ao longo da jornada estudantil.

A teoria do filósofo francês Raymond Duval (2011) contribui para que o professor encontre caminhos para a

resolução de tal entrave. Na teoria dos registros de representações semióticas em Matemática, Duval explica que, para aprender matemática, é importante que o estudante compreenda ao menos dois tipos de registro de um mesmo objeto matemático (uma representação linguística, uma simbólica ou uma gráfica).

A professora Claudia Flores (2006), em seu artigo "Representações semióticas em Matemática", explica que, para Duval, o pensamento está ligado às operações semióticas e a sua compreensão só é possível com o recurso das representações semióticas, uma vez que:

> [...] as representações no domínio da matemática são consideráveis, já que os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, só podem sê-lo por sua representação, lembrando que um mesmo objeto matemático poderá ter representações diferentes, dependendo da necessidade e do uso. Para o caso do objeto matemático, a função, por exemplo, pode-se ter um registro de representação linguística (função linear), um registro de representação simbólica ($y = x$ ou $f(x) = x$), ou ainda, um registro de representação gráfica (o desenho do gráfico da função).

Daí a importância de incentivar a conversão entre esses registros de representação.

É fundamental, portanto, que a língua materna e a Matemática sejam tratadas de modo conjunto, a fim de que o estudante adquira habilidades de leitura e consiga resolver as situações de maneira mais eficaz.

Capacidade leitora e de expressão

Nas aulas de Matemática, muitas vezes, o uso da língua se restringe à leitura de enunciados, mas deveria existir um trabalho pontual com a linguagem matemática e suas especificidades, estabelecendo um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática. Um modo de fazer isso é solicitar aos estudantes que, além de explicarem oralmente uma resolução, escrevam como pensaram. Depois, peça a eles que, em duplas, leiam o texto do colega e deem contribuições para melhorar o texto.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, levantamento de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura[5] e verbalizar com a turma todo esse percurso.

A fim de favorecer as habilidades de análise e interpretação, pode-se recorrer às linguagens visuais e digitais – gráficos, tabelas, infográficos, planilhas eletrônicas –, bem como ao uso de *softwares*. É preciso que os educadores incluam em sua rotina meios de explorar a competência leitora nas aulas de Matemática, propondo atividades em que os estudantes explicitem o raciocínio, aplicando o uso de diferentes gêneros textuais, promovendo discussões/debates e registros variados (orais, pictóricos e corporais).

Ao investir nas diferentes linguagens e nas práticas de leitura e escrita, o professor promove maior conexão entre o estudante e a linguagem matemática, reforçando o desenvolvimento da **competência geral 4** da BNCC. Por outro lado, é necessário que haja interação entre os estudantes na busca de um entendimento mútuo. O professor pode também promover momentos de debate e troca de informações nos quais eles se sintam à vontade para expor suas opiniões, ideias e experiências, livres de interferências.

Para ajudar os estudantes a desenvolver a capacidade argumentativa e de inferência em textos orais e escritos, é essencial incentivar a leitura crítica e diversificada, proporcionando acesso a diferentes gêneros textuais. Promover discussões e debates sobre os textos lidos ajuda a identificar argumentos, pontos de vista e evidências, aprimorando a habilidade de inferência. No que diz respeito à expressão escrita, deve-se incentivar a redação de textos argumentativos, concentrando-se na estrutura lógica e no uso de dados e exemplos concretos. Oferecer *feedback* detalhado e construtivo é fundamental para o desenvolvimento dessas habilidades. Atividades orais, como debates e apresentações, também fortalecem a argumentação e a capacidade de inferência, estimulando a articulação clara e persuasiva das ideias.

Nesta coleção, há um repertório de sugestões, atividades e seções que possibilitam o trabalho com a competência leitora, por exemplo, as seções *Educação midiática* e *Trabalho e juventudes*, além de diferentes tipos de texto (imagéticos e escritos) com temas da atualidade na abertura de todos os capítulos.

As tecnologias digitais, a computação e a Matemática

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão praticamente em todos os lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e influenciando nossa vida. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente, e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação.

Nesse contexto de mudanças rápidas, os objetos educacionais digitais (OEDs) – *podcasts*, vídeos, carrosséis de imagens, infográficos clicáveis e mapas clicáveis – emergem como ferramentas essenciais para complementar e enriquecer os temas estudados. Esses recursos não apenas aproveitam o potencial das TDIC, mas também estão alinhados com as diretrizes da **Portaria nº 451**, de 16 de maio de 2018, que define critérios e procedimentos para a produção, recepção, avaliação e distribuição de recursos educacionais abertos ou gratuitos voltados para a Educação Básica em programas e plataformas oficiais do Ministério da Educação. Ao atender esses critérios, os OEDs garantem que os materiais oferecidos sejam de qualidade, acessíveis e estejam em conformidade com as políticas educacionais nacionais, tornando-se, assim, fundamentais para a educação no mundo digitalizado de hoje.

A preocupação com essas transformações e sua repercussão na formação das novas gerações faz-se presente na **Política Nacional de Educação Digital – Pned** (Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023), que objetiva aprimorar o acesso de toda a população brasileira aos recursos e às ferramentas

5 Estratégias de leitura, de acordo com Isabel Solé (1998), são as ferramentas necessárias para o desenvolvimento da leitura proficiente. Sua utilização permite compreender e interpretar de forma autônoma os textos lidos.

digitais, bem como a garantia da inserção da educação digital no ambiente escolar.

Tais preocupações também estão presentes na BNCC (2018, p. 473):

> [...] A dinamicidade e a fluidez das relações sociais – seja em nível interpessoal, seja em nível planetário – têm impactos na formação das novas gerações. É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos. Certamente, grande parte das futuras profissões envolverá, direta ou indiretamente, computação e tecnologias digitais.

Nesse contexto, a BNCC incluiu na Educação Básica conhecimentos, habilidades, atitudes e valores referentes ao pensamento computacional, ao mundo digital e à cultura digital. E define (2018, p. 474) que:

- pensamento computacional: envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos;
- mundo digital: envolve as aprendizagens relativas às formas de processar, transmitir e distribuir a informação de maneira segura e confiável em diferentes artefatos digitais – tanto físicos (computadores, celulares, *tablets* etc.) como virtuais (internet, redes sociais e nuvens de dados, entre outros) –, compreendendo a importância contemporânea de codificar, armazenar e proteger a informação;
- cultura digital: envolve aprendizagens voltadas a uma participação mais consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que supõe a compreensão dos impactos da revolução digital e dos avanços do mundo digital na sociedade contemporânea, a construção de uma atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais, aos usos possíveis das diferentes tecnologias e aos conteúdos por elas veiculados, e, também, à fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e critica.

Portanto, o uso do computador no que se refere à educação escolar não deve se limitar apenas à função dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma extensão das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas também à elaboração de soluções, seja para problemas cotidianos, seja para problemas complexos de qualquer natureza.

Como complemento à BNCC, foram instituídas as **Normas sobre Computação na Educação Básica** (Resolução CNE/CE nº 1, de 4 de outubro de 2022), cuja finalidade é integrar o ensino de computação e pensamento computacional de forma transversal no currículo escolar. Essa integração procura desenvolver nos estudantes competências essenciais para o século XXI, como a resolução de problemas, a lógica, a criatividade e a capacidade de inovação. Essas normas visam ainda promover a inclusão digital e a equidade, assegurando a estudantes de diferentes contextos sociais e econômicos oportunidades iguais para aprender e se beneficiar das tecnologias da informação e comunicação.

O pensamento computacional

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo "*Computational thinking*", da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, para que possa ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares, conforme mostra o esquema a seguir.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Processos cognitivos relacionados ao pensamento computacional.

Fonte: Os editores.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para desenvolver o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador. O trabalho de Brackmann (2017), "Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica", apresenta atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

Como trabalhar o pensamento computacional na escola

Uma das maneiras de trabalhar o pensamento computacional proposta pela BNCC é por meio da Álgebra. Ao interpretar e elaborar algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, os estudantes têm a chance de desenvolvê-lo, sendo "capazes de traduzir uma

situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos" (BNCC, p. 271).

No sentido de trabalhar o pensamento computacional em sala de aula, a professora Débora Garofalo (2018), assessora especial de tecnologias da Secretaria de Educação de São Paulo, entende que as "atividades desplugadas", realizadas sem o uso do computador, são importantes para incentivar a convivência e a criatividade e para antecipar fatos que auxiliarão no trabalho posterior com *softwares* específicos. Ela entende também que a programação é "uma grande aliada para o processo de aprendizagem". E sugere, por exemplo:

- *Code.org:* apresenta uma série de atividades baseadas nos currículos mais utilizados no mundo para o ensino de ciência da computação na Educação Básica. Há orientações para professores e atividades para os estudantes, com possibilidade de extensão das atividades da escola para casa.
- *Scratch*: ferramenta destinada ao ensino de programação para iniciantes. Ao aprender a pensar computacionalmente, o estudante descobre uma maneira de organizar um problema e de expressar sua solução. *Softwares* como o *Scratch* trazem blocos de comandos que se encaixam, aproximando-se de termos da linguagem corrente que facilitam a compreensão do encadeamento dos passos e comandos para a resolução. Além disso, permite a criação de animações e jogos de maneira lúdica.

Assim, quando os estudantes são encorajados a praticar o pensamento computacional, seja por meio de ferramentas tecnológicas, seja por meio de atividades "desplugadas", eles são munidos de ferramentas que os tornam aptos a enfrentar problemas do mundo real em variadas áreas do conhecimento.

Nesta coleção, o Capítulo 10 do volume 1 é inteiro dedicado ao pensamento computacional. Esse capítulo tem como objetivos orientar os estudantes a compreender o conceito de algoritmo, interpretar e construir fluxogramas, entender o que é linguagem de programação e suas estruturas e propõe problemas para que eles resolvam com o auxílio do *Scratch*. Além disso, ao longo da coleção, há diversas atividades pensadas intencionalmente para desenvolver o pensamento computacional.

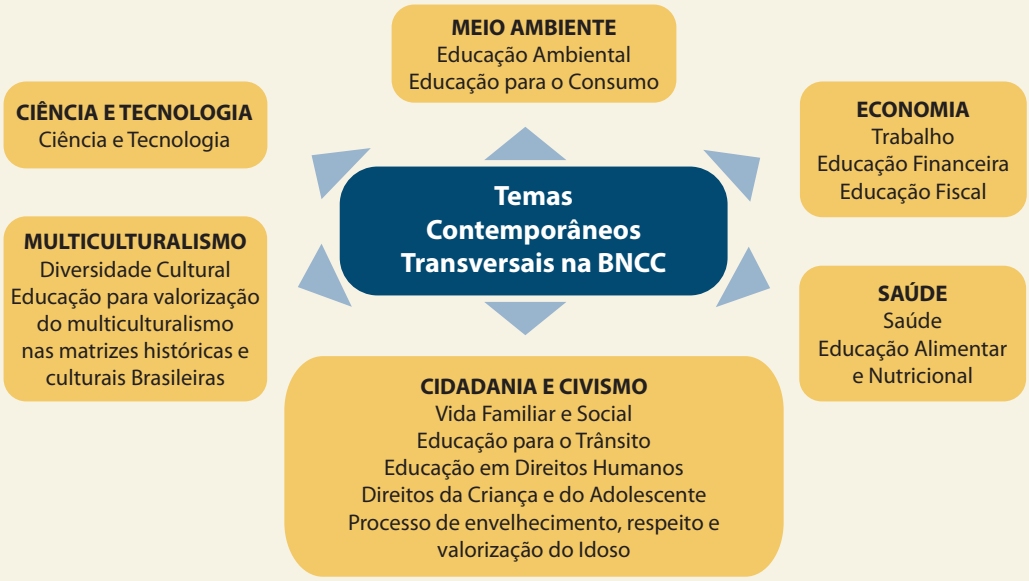
Os Temas Contemporâneos Transversais e a interdisciplinaridade

Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) têm como finalidade integrar diferentes áreas do conhecimento e abordar questões relevantes e atuais na formação educacional dos estudantes. Eles promovem uma educação crítica e reflexiva, preparando os estudantes para desafios complexos da sociedade contemporânea. Ao abordar temas como sustentabilidade, ética, cidadania, diversidade cultural e inclusão, os TCTs incentivam o trabalho integrado com diferentes áreas, desenvolvem competências socioemocionais e fomentam uma consciência cidadã e global. Desse modo, contribuem para a formação integral do indivíduo, capacitando-o para agir de maneira responsável e participativa na construção de um futuro mais justo e sustentável.

A BNCC (2018, p. 19) salienta a importância dos TCTs quando afirma que:

> cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.

O esquema a seguir mostra como os quinze TCTs estão organizados em seis macroáreas.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: BRASIL. Ministério da Educação. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC:** contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019a.

Ao longo desta coleção, os TCTs são trabalhados por meio de aberturas de capítulos, seções, contextos presentes na teoria e em algumas atividades. Na Parte Específica do Manual do Professor, há comentários que auxiliam o professor na identificação desses momentos e inspiram diálogos em sala de aula.

Os TCTs também podem ser explorados por meio da interdisciplinaridade, o que, por sua vez, vai ao encontro da forma como o currículo do Ensino Médio deve ser elaborado – por área de conhecimento – e planejado de maneira interdisciplinar e transdisciplinar.

O trabalho com a interdisciplinaridade visa proporcionar uma educação mais integrada, preparando os estudantes para compreender e enfrentar a complexidade do mundo contemporâneo. Ao conectar diferentes áreas do conhecimento, a interdisciplinaridade promove o desenvolvimento de habilidades críticas e criativas, facilitando a aplicação prática do aprendizado em situações reais. Além disso, essa abordagem estimula a colaboração entre professores de diferentes disciplinas, enriquecendo o processo educativo e tornando-o mais dinâmico e relevante para os estudantes. Em última análise, a interdisciplinaridade contribui para a formação de indivíduos mais preparados para a vida acadêmica, profissional e pessoal, capazes de pensar de maneira sistêmica e solucionar problemas de forma inovadora e eficaz.

Na coleção, estimula-se o trabalho interdisciplinar por meio dos contextos, seções (*Pesquisa e ação*, *Trabalho e juventudes* e *Educação midiática*), atividades e orientações para o professor.

Temas em destaque na coleção

Na coleção destacam-se quatro temáticas: **desenvolvimento sustentável**, **trabalho e juventudes**, **educação midiática** e **estratégias de estudo**. Essas temáticas são essenciais para proporcionar uma formação integral aos estudantes, conectando o aprendizado matemático às realidades contemporâneas e às demandas do século XXI. O desenvolvimento sustentável é abordado para fomentar, entre outras coisas, a consciência ambiental e a responsabilidade social. O tema trabalho e juventudes visa preparar os estudantes para os desafios do mercado de trabalho e para a construção de um futuro promissor. A educação midiática é integrada para capacitar os estudantes a navegarem e criticar a vasta quantidade de informações digitais. Por fim, as estratégias de estudo são apresentadas para que os estudantes desenvolvam técnicas eficazes de aprendizagem, promovendo a autonomia e a autoeficácia em suas jornadas educacionais.

Desenvolvimento sustentável

Em 2015, os 193 Estados-membros da Organização das Nações Unidas (ONU), incluindo o Brasil, comprometeram-se a adotar a chamada Agenda 2030 para o desenvolvimento sustentável, considerada uma das mais ambiciosas da história da diplomacia internacional. Essa agenda tem como finalidade orientar os esforços globais para alcançar um desenvolvimento sustentável e inclusivo até o ano de 2030. Ela estabelece 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) e 169 metas que visam erradicar a pobreza, proteger o planeta e garantir a todas as pessoas que desfrutem de paz e prosperidade.

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)

ODS	Meta	ODS	Meta	ODS	Meta
1 ERRADICAÇÃO DA POBREZA	Acabar com a pobreza em todas as suas formas, em todos os lugares.	7 ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL	Assegurar o acesso confiável, sustentável, moderno e a preço acessível à energia para todas e todos.	13 AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA	Tomar medidas urgentes para combater a mudança climática e seus impactos.
2 FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL	Acabar com a fome, alcançar a segurança alimentar e melhoria da nutrição e promover a agricultura sustentável.	8 TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO	Promover o crescimento econômico sustentado, inclusivo e sustentável, emprego pleno e produtivo e trabalho decente para todas e todos.	14 VIDA NA ÁGUA	Conservar e usar de maneira sustentável dos oceanos, dos mares e dos recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.
3 SAÚDE E BEM-ESTAR	Assegurar uma vida saudável e promover o bem-estar para todas e todos, em todas as idades.	9 INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA	Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.	15 VIDA TERRESTRE	Proteger, recuperar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerir de forma sustentável as florestas, combater a desertificação, deter e reverter a degradação da terra e deter a perda de biodiversidade.
4 EDUCAÇÃO DE QUALIDADE	Assegurar a educação inclusiva e equitativa e de qualidade, e promover oportunidades de aprendizagem ao longo da vida para todas e todos.	10 REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES	Reduzir a desigualdade dentro dos países e entre eles.	16 PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES	Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, proporcionar o acesso à justiça para todos e construir instituições eficazes, responsáveis e inclusivas em todos os níveis.
5 IGUALDADE DE GÊNERO	Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.	11 CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS	Tornar as cidades e os assentamentos humanos inclusivos, seguros, resilientes e sustentáveis.	17 PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO	Fortalecer os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.
6 ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO	Assegurar a disponibilidade e gestão sustentável da água e saneamento para todas e todos.	12 CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS	Assegurar padrões de produção e de consumo sustentáveis.		

Fonte: elaborado com base em NAÇÕES UNIDAS BRASIL. Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil. **Nações Unidas Brasil**, Brasília, DF, [202-]. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 30 ago. 2024.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

No Livro do Estudante, esses objetivos são trabalhados em aberturas de capítulos, seções e contextos da teoria. Esses momentos estão sinalizados por meio de releituras dos ícones anteriores. Na Parte Específica do Manual do Professor, há comentários a respeito da relação desses objetivos com os temas abordados no Livro do Estudante e de como fomentar discussões em sala de aula.

Trabalho e juventudes

Os jovens enfrentam diversos desafios no mundo do trabalho atualmente, resultantes das rápidas transformações econômicas, tecnológicas e sociais. A automação e a digitalização estão redefinindo o mercado de trabalho, exigindo novas habilidades e competências que muitos jovens ainda não possuem. Além disso, a precarização do trabalho e o crescimento do emprego informal dificultam o acesso a empregos estáveis e bem-remunerados. A competição acirrada e a falta de experiência prática também são obstáculos significativos, frequentemente resultando em altas taxas de desemprego juvenil. A desigualdade de oportunidades, baseada em fatores como gênero, raça e origem socioeconômica, agrava ainda mais a situação. Esses desafios exigem políticas públicas eficazes, educação e formação profissional adaptadas às novas demandas do mercado.

Nesta coleção, temas relacionados ao mundo do trabalho são desenvolvidos principalmente na seção *Trabalho e juventudes*. Nessa seção, são abordados vários temas, como profissões, tributos, igualdade de condições, inclusão no ambiente de trabalho, segurança no trabalho etc., favorecendo uma compreensão abrangente das dinâmicas do mercado de trabalho. Ao explorar diversas profissões e os requisitos associados a cada uma, os estudantes identificam suas próprias vocações e interesses. Assim, ao enfatizar a igualdade de condições e a inclusão, a seção promove a conscientização a respeito da importância de um ambiente de trabalho justo e acessível a todos.

As propostas dessa seção podem ser enriquecidas sugerindo aos estudantes que visitem os locais de trabalho de diversos profissionais. Com a devida autorização dos responsáveis, o professor pode organizar visitas guiadas, proporcionando uma experiência prática e concreta das diferentes carreiras. Isso permite que os estudantes observem de perto as rotinas e ambientes de trabalho, ampliando sua compreensão sobre as possibilidades profissionais.

Educação midiática

Compreender e analisar criticamente informações provenientes de diferentes mídias, como jornais, revistas, televisão, rádio, *sites*, redes sociais etc., é essencial para o exercício pleno da cidadania em um mundo cada vez mais conectado e carregado de informações.

A capacidade de discernir entre fontes confiáveis e questionáveis permite ao cidadão elaborar opiniões informadas, tomar decisões conscientes e participar de maneira ativa e responsável na sociedade. Esse discernimento é fundamental para combater a desinformação, as *fake news* e a manipulação midiática, que podem distorcer a realidade e influenciar negativamente o debate público. Além disso, a análise crítica das informações promove o desenvolvimento do pensamento crítico, a valorização da diversidade de perspectivas e a capacidade de argumentar. Desse modo, um cidadão bem-informado e crítico contribui para a construção de uma sociedade mais democrática, justa e resiliente, capaz de enfrentar desafios complexos e promover o bem comum.

Além de todo esse cenário, há que se citar a inteligência artificial, que vem ganhando cada vez mais espaço. É um campo da ciência da computação que desenvolve algoritmos capazes de realizar tarefas que normalmente requerem inteligência humana, como a capacidade de aprender, reconhecer padrões, tomar decisões e processar textos em linguagem natural. Usada em diversas áreas, como saúde, finanças, transporte, educação e entretenimento, a IA oferece soluções inovadoras e eficientes para problemas complexos, transformando significativamente o modo como vivemos e trabalhamos, trazendo benefícios substanciais, mas também levantando questões éticas e sociais que precisam ser abordadas, como privacidade, segurança e impacto no mundo do trabalho.

Na coleção, esse tema está contemplado na seção *Educação midiática*, que abrange temas essenciais para a formação crítica dos estudantes no mundo digital. Entre os tópicos destacados estão as *fakes news*, em que se explora a identificação e o combate de notícias falsas que circulam nas redes sociais e em outras mídias. Incentiva-se também a análise criteriosa de dados e informações, com o intuito de compreender a verdadeira intenção por trás deles. A seção trabalha ainda com gráficos que induzem a erro, fornecendo subsídios para que os estudantes reconheçam representações visuais enganosas. Além disso, desmistifica a "lenda do terraplanismo", mostrando evidências científicas que refutam essa crença. O uso da inteligência artificial (IA) é outro ponto abordado, destacando suas potencialidades e limitações no fornecimento de informações. Por fim, a manipulação de imagens é discutida, mostrando técnicas e conceitos matemáticos usados para alterar fotografias, e como essas manipulações podem influenciar a percepção pública.

Estratégias de estudo

Trabalhar com o protagonismo juvenil proposto pela BNCC implica investir no desenvolvimento da autonomia do estudante, seja na escola, seja fora dela. Um dos pontos que dialoga com essa premissa é o ensinar a aprender, a estudar, a buscar informações, a pesquisar, a registrar.

De acordo com a pesquisa "Estratégias de estudo e aprendizagem utilizadas pelos estudantes do Ensino Médio", desenvolvida por Maciel, Souza e Dantas (2015), o uso eficaz de estratégias de estudo e aprendizagem está associado a fatores motivacionais e autorregulatórios.

Há dois tipos de estratégias: as cognitivas e as metacognitivas. As estratégias cognitivas são aquelas que propiciam o armazenamento da informação como repetir, grifar ou resumir as ideias de um texto; memorizar as informações por meio de questionamentos, anotações e paráfrases; mapear as ideias centrais e fazer relações entre elas.

As estratégias metacognitivas são os meios que cada um usa para planejar, monitorar e regular seu próprio pensamento, avaliando se está obtendo os resultados desejados; ou seja, o estudante planeja o que e como irá estudar ao longo de determinado período, estabelecendo quais ações irá desenvolver para atingir o seu objetivo. Replaneja o que não está dando certo com base na reflexão, buscando outras ações para que, ao final, avalie o resultado, verificando se atingiu aquilo a que se propôs. É um processo que precisa ser ensinado pelo professor.

De acordo com a pesquisa citada anteriormente:

> [...] o uso de estratégias possibilitará ao estudante desenvolver maior autonomia sobre sua aprendizagem e reconhecer-se como sujeito na construção do próprio conhecimento. Outro ponto é que, ao se tornar mais

> consciente do próprio processo de aprendizagem, o estudante pode sentir-se em melhores condições de controlar a própria motivação, tornando-se mais engajado em aprender (Maciel; Souza; Dantas, 2015).

Assim, indicar estratégias de estudo variadas para os estudantes é fundamental para promover um aprendizado mais eficaz e significativo. Ferramentas como mapas conceituais, por exemplo, auxiliam na organização e visualização das relações entre diferentes conceitos, facilitando a compreensão dos conteúdos. Já as avaliações permitem que os estudantes monitorem seu progresso e identifiquem áreas que necessitam de mais atenção. Ao utilizar essas estratégias, os estudantes desenvolvem habilidades metacognitivas, tornando-se mais autônomos e proativos no processo de aprendizagem.

Na coleção, as seções *Avaliação diagnóstica* (1 e 2), *Para finalizar o capítulo* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares* atendem essa temática.

Mapa conceitual

Mapa conceitual ou mapa de conceitos é uma estratégia de ensino que tem como finalidade permitir aos estudantes organizarem e integrarem o que estudaram de maneira visual e estruturada.

Na coleção, os mapas conceituais são explorados na subseção *Conexões entre conceitos* da seção *Para finalizar o capítulo*. Nessa subseção, é solicitado aos estudantes que identifiquem palavras/termos que completam corretamente um mapa conceitual parcialmente construído. Propostas como essa não apenas auxiliam na organização do conhecimento, mas também desenvolvem habilidades de pensamento crítico e analítico, à medida que o estudante avalia a relevância e a interdependência dos diferentes conceitos. Além disso, completar mapas conceituais promove a revisão e a consolidação do aprendizado, ajudando os estudantes a internalizar o conteúdo e a se preparar para aplicá-los nas atividades ou situações cotidianas.

Avaliação

Avaliar é uma tarefa difícil. Portanto, refletir sobre o papel que desempenha na prática do professor é fundamental. Quando entendida como engrenagem natural do contrato didático, a avaliação ultrapassa o trabalho de simples acompanhamento do progresso dos estudantes ou de meio informativo de sua situação aos pais e à administração escolar, para justificar a consecução e a revisão dos objetivos de trabalho propostos e do próprio processo didático-pedagógico.

Nesse contexto, convém, em primeiro lugar, obter informações sobre habilidades, conhecimentos e necessidades individuais dos estudantes no início de um ciclo de ensino, o que pode ser feito por meio de **avaliações diagnósticas**. Para os estudantes, essas avaliações permitem identificar conhecimentos que dominam e dificuldades, favorecendo o recebimento de apoio direcionado e personalizado que pode ajudá-los a progredir de maneira efetiva na aprendizagem. Para os professores, as avaliações diagnósticas subsidiam o planejamento das aulas e a escolha de estratégias pedagógicas. Elas ajudam a adaptar as aulas às necessidades específicas da turma, promovendo um ambiente de aprendizagem mais inclusivo e eficiente. Ao compreender o ponto de partida dos estudantes, os professores podem estabelecer metas realistas e desafiadoras. Na coleção, em cada volume, são propostas duas avaliações diagnósticas, uma no início do ano letivo e outra no meio. Essas avaliações são compostas de questões de múltipla escolha que permitem identificar lacunas no aprendizado e detectar os conhecimentos previamente adquiridos.

As **avaliações formativas** complementam as avaliações diagnósticas, uma vez que possibilitam aos estudantes acompanhar seu progresso, detectando e identificando suas dificuldades e facilidades. Para os professores é a oportunidade de ajustar estratégias de ensino. A subseção *Autoavaliação* da seção *Para finalizar o capítulo* cumpre essa função.

As avaliações formativas servem de instrumento para que se coloquem em prática dois modelos avaliativos: modelo comparativo e ipsativo. O **modelo comparativo** tem como objetivo comparar o desempenho dos estudantes com um padrão ou critério externo ou com outros grupos de estudantes. Esse tipo de modelo pode motivá-los a buscar melhorias contínuas, pois visualizam seu desempenho em um contexto mais amplo. Já o **modelo ipsativo** tem como finalidade comparar o desempenho de um estudante com ele mesmo ao longo do tempo, possibilitando a ele a análise de seu próprio desenvolvimento e identificando pontos positivos e desafios que tem pela frente. O foco está no progresso individual e pessoal do estudante, valorizando a sua evolução em relação as suas próprias metas e objetivos de aprendizagem.

Ainda considerando a tarefa de avaliar, temos as **avaliações somativas** ou de **resultados**. Essas avaliações ocorrem ao final de um período, com o intuito de verificar se os objetivos educacionais foram alcançados. Além disso, elas oferecem dados importantes para os professores ajustarem suas práticas pedagógicas e melhorarem o currículo, garantindo que os estudantes estejam bem-preparados para os desafios acadêmicos futuros. São exemplos de avaliação somativa as provas, os testes e os projetos finais.

Ao final de cada volume da coleção, é proposta a seção *Prepare-se para o Enem e vestibulares*. Essa seção tem caráter de avaliação somativa e visa ajudar os estudantes a se prepararem para os exames de larga escala.

Um ponto a ser mencionado é a questão do acompanhamento das aprendizagens. Uma forma produtiva de acompanhamento é a organização de portfólios que reúnam atividades feitas em períodos maiores, atestando as competências e as habilidades por meio da construção de um produto. Além dos portfólios, pode-se fazer uso de relatórios, dossiês e memoriais, meios que, mobilizando as diversas aquisições da formação geral, permitem ao professor uma ideia sintetizada das competências construídas pelos estudantes. Na resolução de um problema, por exemplo, é importante analisar se o estudante se limita a utilizar mecanicamente os procedimentos aprendidos ou se compreende a situação com maior profundidade e manifesta capacidade de comunicação e de argumentação. Se o trabalho for de natureza investigativa, convém avaliar a capacidade do estudante de formular hipóteses, testar, analisar criticamente e fazer generalizações.

Outras estratégias de estudo

No mundo de constantes transformações em que vivemos atualmente, o conhecimento evolui rapidamente. Por isso, é primordial estar sempre aprendendo; daí a necessidade de investir no aprender a aprender.

Listamos, a seguir, algumas estratégias de estudo que devem ser trabalhadas com os estudantes em sala de aula para que possam ser utilizadas por eles dentro de sua rotina.

- **Resumos dos conteúdos:** ao resumir os conteúdos, os estudantes identificam os pontos principais e estruturam o conhecimento de forma concisa, o que facilita a revisão e o entendimento aprofundado dos temas. Para que esse método seja eficiente, o estudante precisa ler a teoria, fazer as atividades e depois escrever a explicação do que foi lido e compreendido, com suas próprias palavras. Podem-se também acrescentar desenhos e figuras ao texto.
- **Consulta a materiais complementares:** consultar materiais complementares como livros, *sites*, jogos, *softwares* e videoaulas é uma estratégia de estudo essencial para aprofundar o conhecimento e diversificar as fontes de aprendizado. Esses recursos adicionais oferecem diferentes perspectivas e abordagens sobre o mesmo assunto, permitindo uma compreensão mais ampla e completa. Além disso, o uso de múltiplos formatos de mídia pode tornar o aprendizado mais dinâmico e engajador, facilitando a compreensão e a aplicação prática do conhecimento adquirido. Na coleção, são sugeridos materiais complementares para os estudantes na subseção *Sugestões de ampliação* da seção *Para finalizar o capítulo*.
- ***Flashcards*:** essa estratégia consiste na utilização de cartões pequenos, nos quais são escritos uma pergunta, termo ou conceito de um lado, e a resposta, definição ou explicação do outro. Esses cartões podem ser de papel (*post-it,* por exemplo) ou digitais (obtidos por meio de *softwares* específicos). O objetivo é melhorar a retenção e a recuperação de informações. São ideais para ser usados no estudo de fórmulas matemáticas, definições, propriedades, entre outros.

É importante lembrar que cada um tem suas características e seu ritmo próprio de estudar e aprender. Os estudantes devem estar à vontade para utilizar a estratégia que julgarem conveniente.

Organização e estrutura da obra

A seleção dos conteúdos e temas, nesta obra, foi feita com base nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e nas competências gerais, específicas e habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular. Essa seleção apoia a aprendizagem da qual faz parte a percepção de um sentido cultural integrado entre as diferentes partes do saber, diferentemente da justaposição dos saberes.

O encaminhamento dos conteúdos e as diversas atividades contribuem para que os estudantes apliquem os conhecimentos matemáticos e se apropriem de diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático: indução, dedução e raciocínio por analogia. Além disso, nas aberturas, contextos e seções são abordados temas que envolvem meio ambiente, saúde, pluralidade cultural, cidadania, educação financeira e tecnologia, entre outros, o que favorece a conexão entre o conteúdo e a realidade dos estudantes. Isso não apenas torna o ensino mais relevante e interessante, como também prepara os jovens para serem cidadãos informados e engajados, capazes de entender e enfrentar os desafios do mundo moderno. Essa abordagem promove a interdisciplinaridade, uma vez que facilita interconexões entre diferentes áreas do conhecimento.

A obra está organizada em três volumes, cada qual composto de seções, capítulos e boxes. As páginas iniciais de cada volume apresentam a *Organização da obra*, um texto sobre os *Objetivos de Desenvolvimento Sustentável* e o *Sumário*. No início e no meio de cada volume, são propostas *Avaliações diagnósticas*, que objetivam identificar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes a respeito dos conceitos e procedimentos estudados nos Anos Finais do Ensino Fundamental e que serão mobilizados no decorrer do semestre.

Após o trabalho com as avaliações diagnósticas, inicia-se o estudo dos assuntos previstos nos capítulos.

A abertura de cada capítulo traz um tema no qual está presente o conteúdo a ser estudado, o que possibilita realizar um diagnóstico dos conhecimentos prévios que os estudantes já têm sobre o conteúdo a ser desenvolvido.

Cuidou-se para que os conteúdos de cada capítulo fossem distribuídos de forma equilibrada e organizada. A apresentação de tópicos de relevância é complementada por exemplos e pelo boxe *Atividade(s) resolvida(s)*, que trabalha uma aplicação específica de um conceito ou procedimento.

No boxe *Atividades propostas*, o estudante encontrará uma série de atividades apresentadas em ordem crescente de dificuldade. Algumas delas recebem *tags* especiais, conforme mostra o quadro a seguir.

Significado das *tags* presentes em algumas atividades propostas

Tags	Característica da atividade
EM DUPLA	Para os estudantes realizarem em duplas. Promovem o diálogo e o aprendizado colaborativo.
EM GRUPO	Envolvem a participação de três ou mais estudantes. Também promovem o diálogo e o aprendizado colaborativo.
ARGUMENTAÇÃO	Têm como finalidade desenvolver a capacidade de pensar criticamente e defender pontos de vista, articulando ideias de forma clara e convincente.
SOFTWARE	Envolvem planilhas eletrônicas, *Scratch* ou *softwares* de construção de gráfico/geometria dinâmica.
PENSAMENTO COMPUTACIONAL	Trabalham um ou mais pilares do pensamento computacional, por meio de algoritmos representados por fluxogramas, na língua materna ou no *Scratch*.
ELABORAÇÃO DE PROBLEMAS	Para os estudantes criarem questões ou enunciados de problemas.
HISTÓRIA DA MATEMÁTICA	Exploram fatos históricos ligados à Matemática.

Ao realizar atividades práticas que envolvem o uso de materiais como compasso ou tesoura, é importante ficar atento aos riscos envolvidos, assegurando sempre a integridade física de todos. É crucial que, antes de iniciar qualquer atividade, o professor identifique potenciais perigos e implemente medidas de segurança apropriadas. É importante sempre fornecer instruções claras e detalhadas aos estudantes sobre os procedimentos corretos e as precauções necessárias ao manusear esses instrumentos. Dessa forma, é possível criar um ambiente seguro e propício ao aprendizado, minimizando o risco de acidentes.

Em alguns capítulos, temos a seção *Trabalho e juventudes*, que aborda temas como profissões, tributos, igualdade de condições, inclusão no ambiente de trabalho, segurança no trabalho etc., favorecendo uma compreensão abrangente das dinâmicas do mercado de trabalho.

Ao término do capítulo, é proposta a seção *Para finalizar*, que se subdivide nas subseções *Conexões entre conceitos*, *Sugestões de ampliação* e *Autoavaliação*. Na subseção *Conexões entre conceitos*, é solicitado aos estudantes que identifiquem palavras/termos que completam corretamente um mapa conceitual parcialmente construído. Na subseção *Sugestões de ampliação*, são sugeridos recursos complementares, como livros, *sites*, jogos, *softwares* e videoaulas, para o enriquecimento e a ampliação do conhecimento e para diversificar as fontes de aprendizado. A subseção *Autoavaliação* apresenta questões que abrangem os principais conteúdos trabalhados, o que possibilita aos estudantes acompanhar seu progresso, detectando e identificando suas dificuldades e facilidades. O quadro presente ao final dessa subseção relaciona as questões com os objetivos do capítulo e serve de guia para os estudantes retomarem o que foi estudado. Essa subseção permite trabalhar a **competência geral 10**, pois, ao analisar quais objetivos precisam ainda ser alcançados e revistos, os estudantes agem com autonomia, responsabilidade e flexibilidade.

Ao final do volume, são propostas as seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*.

A seção *Educação midiática* explora temas essenciais para a formação crítica dos estudantes no mundo digital. Os tópicos explorados são: *fakes news*, análise crítica de informações, gráficos que induzem a erro, "lenda do terraplanismo", Inteligência Artificial (IA) e a manipulação de imagens.

Na seção *Pesquisa e ação*, são propostas atividades em grupo que envolvem pesquisa, elaboração e apresentação de um produto em diferentes meios e usando diferentes linguagens, como vídeos, jornais e outros recursos, o que favorece a **competência geral 4**. A seção permite colocar em ação as metodologias ativas, mais especificamente a aprendizagem por projetos, pois os estudantes realizam um trabalho em grupo em que exercitarão a curiosidade intelectual, a análise crítica, a interpretação de dados, a imaginação e a criatividade, desenvolvendo a **competência geral 2**. Essa seção favorece também a **competência geral 7**, já que, em algumas atividades, os estudantes discutirão temas, como meio ambiente, educação para o trânsito, saúde do adolescente, acessibilidade etc., e defenderão seus pontos de vista pela argumentação até chegarem a um consenso. Dessa maneira, é possível reforçar também a **competência geral 9**, pois terão de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, respeitando-se mutuamente.

A seção *Prepare-se para o Enem e vestibulares*, por sua vez, propõe questões do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e de vestibulares de diferentes regiões do país, com o intuito de ajudar os estudantes a se preparar para exames de larga escala.

Também, ao final do volume, são encontradas as *Respostas* de todas as atividades e as *Referências bibliográficas comentadas*.

Sugestões de cronograma

As diferenças de rendimento entre as turmas podem levar o professor a dedicar um número maior de aulas sobre determinado assunto a uma turma e um número menor a outra. Transitar por essas particularidades é parte da rotina de cada professor. O tempo dedicado a cada um dos conteúdos a serem ensinados é uma variável a ser continuamente administrada pelo professor. Tudo depende das circunstâncias dos estudantes, da escola e do professor.

Pensando em auxiliar o professor em sala de aula, apresentamos a seguir sugestões de cronograma bimestrais, trimestrais e semestrais para cada um dos três volumes desta coleção. Enfatizamos que há outras possibilidades e que o professor deverá fazer a adequação necessária para atender à realidade de sua turma e à do sistema de ensino do qual fazem parte.

Sugestões de cronograma para o volume 1

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2 e 3
2º bimestre	Capítulos 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
3º bimestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6, 7 e 8
4º bimestre	Capítulos 9 e 10 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3 e 4
2º trimestre	Capítulo 5 *Educação midiática, Pesquisa e ação* e *Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6 e 7
3º trimestre	Capítulos 8, 9 e 10 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3, 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
2º semestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6, 7, 8, 9 e 10 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestões de cronograma para o volume 2

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1 e 2
2º bimestre	Capítulos 3, 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
3º bimestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6 e 7
4º bimestre	Capítulos 8 e 9 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2 e 3
2º trimestre	Capítulos 4 e 5 *Educação midiática, Pesquisa e ação* e *Avaliação diagnóstica 2* Capítulo 6
3º trimestre	Capítulos 7, 8 e 9 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3, 4 e 5 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
2º semestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 6, 7, 8 e 9 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestões de cronograma para o volume 3

Sugestão de cronograma bimestral

1º bimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1 e 2
2º bimestre	Capítulos 3 e 4 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
3º bimestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 5 e 6
4º bimestre	Capítulos 7 e 8 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma trimestral

1º trimestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2 e 3
2º trimestre	Capítulo 4 *Educação midiática, Pesquisa e ação* e *Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 5 e 6
3º trimestre	Capítulos 7 e 8 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestão de cronograma semestral

1º semestre	*Avaliação diagnóstica 1* Capítulos 1, 2, 3 e 4 *Educação midiática* e *Pesquisa e ação*
2º semestre	*Avaliação diagnóstica 2* Capítulos 5, 6, 7 e 8 Seções *Educação midiática*, *Pesquisa e ação* e *Prepare-se para o Enem e vestibulares*

Sugestões/referências suplementares

Livros e artigos

Ensino de Matemática

BICUDO, M. A. V. Educação matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. *In*: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (org.). **Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica**: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas: Mercado de Letras, 2013. p. 17-40.

Artigo que apresenta modos de ver a Matemática, a educação e a educação matemática.

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro aponta os motivos que tornam a Matemática vilã para muitos e mostra como professores, gestores e família podem ajudar a modificar esse cenário. Traz exemplos e atividades práticas que podem tornar a aprendizagem da matemática acessível para todos.

CAMARGO, F.; DAROS, T. **A sala de aula inovadora**: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro mostra como é possível renovar e inovar a sala de aula trazendo mais de 40 estratégias destinadas à educação básica e ao ensino superior para implementar mudanças que levem a um aprendizado ativo.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

O autor aborda aspectos da cognição e temas ligados à sala de aula e à prática docente, propondo reflexões sobre a Matemática.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. 8. ed. Campinas: Papirus, 2011.

O autor apresenta o conceito dos diferentes registros de representação semiótica para um mesmo objeto matemático, ressaltando a importância dessa diversidade, e indica divergências entre o grau de dificuldade de cada um segundo a leitura dos próprios estudantes.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 4. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

A obra aborda a história de conteúdos matemáticos, discorrendo sobre o surgimento de determinados conteúdos e sua significância cultural.

HUFF, D. **Como mentir com Estatística**. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2016.

Livro que usa linguagem simples e ilustrações para explicar de que maneira o mau uso da Estatística pode maquiar dados e formar opiniões.

PONTE, J. P. *et al*. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e dificuldades de trabalhar nessa perspectiva.

PRANE, B. Z. D.; LEITE, H. C. A.; PALMEIRA, C. A. Matemática para deficientes visuais no Ensino Médio regular: desafios, possibilidades e perspectivas. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Apresentações** [...]. Recife: Comitê Interamericano de Educação Matemática, 2011.

O artigo apresenta práticas desenvolvidas em sala de aula com estudantes com deficiência visual no Ensino Médio para garantir-lhes o direito à aprendizagem em Matemática, inclusive expondo algumas dificuldades e soluções encontradas durante essa experiência.

Tecnologias da Informação e Comunicação

BACICH. L.; NETO. T. A.; TREVISANI, F. M. **Ensino híbrido:** personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Discute o que é o ensino híbrido e traz propostas e experiências para que esse modelo possa ser implementando nas escolas brasileiras.

História da Matemática

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

A obra mostra o desenvolvimento da Matemática desde suas origens e a história da relação da humanidade com números, formas e padrões. Apresenta ainda o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

Sites e artigos da internet

Sites acessados em: 24 ago. 2024.

- http://www.periodicos.capes.gov.br/

Site da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Disponibiliza consulta a periódicos de diversos assuntos.

- https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

Site da **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Traz artigos de todas as edições publicadas.

- http://www.edumatec.mat.ufrgs.br

Site do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- https://www.ime.usp.br/lem/

Site do Laboratório de Ensino de Matemática da Universidade de São Paulo (USP). Objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/

Site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de Educação matemática.

Revistas e periódicos

BOLETIM GEPEM. Rio de Janeiro: Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da UFRRJ. Disponível em: https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/index. Acesso em: 25 ago. 2024.

Publicação do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Divulga trabalhos de pesquisa em Educação matemática.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Brasília, DF: Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/index. Acesso em: 25 ago. 2024.

Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (Sbem). Traz artigos que abordam pesquisas na área de Educação matemática.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA (RPM). Rio de Janeiro: SBM. Disponível em: https://rpm.org.br/. Acesso em: 25 ago. 2024.

Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Destina-se àqueles que ensinam Matemática, sobretudo nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Publica artigos de nível elementar ou avançado acessíveis a professores e a estudantes de cursos de Licenciatura em Matemática.

Referências bibliográficas comentadas

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE LÉSBICAS, *GAYS*, BISSEXUAIS, TRAVESTIS E TRANSEXUAIS. Secretaria de Educação. **Pesquisa nacional sobre o ambiente educacional no Brasil 2015**: as experiências de adolescentes e jovens lésbicas, *gays*, bissexuais, travestis e transexuais em nossos ambientes educacionais. Curitiba: ABGLT, 2016. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/materiais/pesquisa-nacional-sobre-o-ambiente-educacional-no-brasil-2016/. Acesso em: 25 ago. 2024.

O relatório apresenta as análises e os resultados da primeira pesquisa nacional virtual realizada no Brasil e em outros cinco países latino-americanos com adolescentes e jovens lésbicas, *gays*, bissexuais, travestis e transexuais sobre suas experiências nas instituições de ensino.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro apresenta práticas pedagógicas que valorizam o protagonismo dos estudantes e traz textos de vários autores brasileiros que analisam o uso de metodologias ativas na educação.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. **Ensino híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

A obra apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, a fim de alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BARBOSA, J. C. Existem outras matemáticas? **Nova Escola**, 3 maio 2019. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas. Acesso em: 13 set. 2024.

Partindo da ideia de que a Matemática está presente em diversos contextos culturais, esse artigo se propõe a explicar a Etnomatemática, cujo objeto de estudo é compreender saberes e fazeres reconhecidos como matemáticos.

BAUMAN, Z. **Modernidade líquida**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.

Zygmunt Bauman, em suas obras, usa o termo "modernidade líquida" para descrever a fluidez e volatilidade das relações no mundo contemporâneo, em contraste com a "modernidade sólida". Suas obras são referência sobre o tema.

BENDER, W. N. **Aprendizagem baseada em projetos**: educação diferenciada para o século XXI. Porto Alegre: Penso, 2014.

A aprendizagem baseada em projetos (ABP) é considerada uma das práticas de ensino mais eficazes do século XXI. Nela, os estudantes trabalham com questões e problemas reais, colaboram na criação de soluções e apresentam os resultados. Assim, tornam-se mais interessados no conteúdo de cada disciplina, melhorando seu desempenho. O livro explora a ABP como abordagem de ensino diferenciado, com base em aplicações na sala de aula.

BENEVIDES, B. G. **O que fazer em caso de violência lgbtifóbica**: cartilha de orientações à população LGBTI no combate à LGBTIfobia. Rio de Janeiro: ANTRA e ABGLT, 2020. Disponível em: https://antrabrasil.org/wp-content/uploads/2020/03/cartilha-lgbtifobia.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A cartilha traz informações e orientações para o enfrentamento das violências e violações dos direitos da população LGBTQIAP+.

BLIKSTEIN, P. **O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação**. Palestra proferida durante o V Congresso Brasileiro de Informática na Educação. Rio de Janeiro, 24-27 out. 2016. Disponível em: http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html. Acesso em: 25 ago. 2024.

O autor aborda a importância do pensamento computacional como estratégia na resolução de problemas. A primeira etapa é identificar tarefas cognitivas que podem ser feitas mais rapidamente por um computador, e a segunda é programá-lo para executar essas tarefas, transferindo o que não é essencialmente humano.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. (Tese de doutorado) Programa de Pós-graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, UFRGS, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/172208/001054290.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 25 ago. 2024.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. Casa Civil. **Decreto nº 7.611, de 17 de novembro de 2011**. Dispõe sobre a educação especial, o atendimento educacional especializado e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 18 nov. 2011. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2011-2014/2011/decreto/d7611.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento dispõe sobre a educação especial e o atendimento de educação especializada nas instituições de ensino no país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 8.069, de 13 de julho de 1990**. Dispõe sobre o Estatuto da Criança e do Adolescente e dá outras providências. Brasília: DF: Casa Civil, 1990. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8069.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento garante os direitos e deveres das crianças e dos adolescentes em todo o país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996**. Estabelece as diretrizes e as bases da educação nacional. Brasília, DF: Casa Civil, 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento disciplina a educação escolar vinculando-a ao mundo do trabalho e à prática social, além de abranger todos os processos formativos nos diferentes segmentos sociais.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 9.503, de 23 de setembro de 1997**. Institui o Código de Trânsito Brasileiro. Brasília: DF: Casa Civil, 1997. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9503.htm. Acesso em: 12 jul. 2024.

O documento institui o Código de Trânsito Brasileiro nas vias terrestres do território nacional.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 9.795, de 27 de abril de 1999**. Dispõe sobre a educação ambiental, institui a Política Nacional de Educação Ambiental e dá outras providências. Brasília: DF: Casa Civil, 1999. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9795.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui a política nacional de educação ambiental, objetivando preservar, melhorar e recuperar a qualidade ambiental assegurando, no país, as condições necessárias para um desenvolvimento socioeconômico sustentável.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira" e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 2003. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.639.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento inclui no currículo oficial das redes de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira".

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 10.741, de 1º de outubro de 2003**. Dispõe sobre o Estatuto do Idoso e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 2003. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/L10.741compilado.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui o Estatuto do Idoso, regulando os direitos assegurados às pessoas com idade igual ou superior a 60 anos.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 11.340, de 7 de agosto de 2006**. Cria mecanismos para coibir a violência doméstica e familiar contra a mulher, nos termos do § 8º do art. 226 da Constituição Federal, da Convenção sobre a Eliminação de Todas as Formas de Discriminação contra as Mulheres e da Convenção Interamericana para Prevenir, Punir e Erradicar a Violência contra a Mulher; dispõe sobre a criação dos Juizados de Violência Doméstica e Familiar contra a Mulher; altera o Código de Processo Penal, o Código Penal e a Lei de Execução Penal e dá outras providências. Brasília, DF: Casa Civil, 2006. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2006/lei/l11340.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui a Lei Maria da Penha a fim de combater e coibir a violência contra a mulher no país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 11.645, de 10 de março de 2008**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, modificada pela Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da rede de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena". Brasília, DF: Casa Civil, 2008. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11645.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento acrescenta à Lei nº 10.639 a obrigatoriedade de se estudar a história e a cultura indígena e afro-brasileira nos estabelecimentos de ensino fundamental e médio.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 12.288, de 20 de julho de 2010**. Institui o Estatuto da Igualdade Racial. Brasília, DF: Casa Civil, 2010. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2010/lei/l12288.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento estabelece a obrigatoriedade do estudo da história geral da África e da população negra no Brasil, observado o disposto na Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 12.852, de 5 de agosto de 2013**. Dispõe sobre o Estatuto da Juventude e dá outras providências. Brasília, DF: Presidência da República, 2013. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/CCIVIL_03/_Ato2011-2014/2013/Lei/L12852.htm. Acesso em: 14 abr. 2024.

O estatuto define os direitos dos jovens entre 15 e 29 anos e determina as diretrizes para as políticas públicas voltadas para esse grupo, com o objetivo de garantir o desenvolvimento integral dos jovens e sua participação ativa na sociedade.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 13.146, de 6 de julho de 2015**. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília, DF: Casa Civil, 2015. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui o Estatuto da Pessoa com Deficiência, objetivando assegurar e promover, em condições de igualdade, o exercício dos direitos e das liberdades fundamentais por pessoa com deficiência, visando à sua inclusão social e à sua cidadania.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e as bases da educação nacional, e a Lei nº 11.494, de 20 de junho 2007, que regulamenta o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação, a Consolidação das Leis do Trabalho – CLT, aprovada pelo Decreto-Lei nº 5.452, de 1º de maio de 1943, e o Decreto-Lei nº 236, de 28 de fevereiro de 1967; revoga a Lei nº 11.161, de 5 de agosto de 2005; e institui a Política de Fomento à Implementação de Escolas de Ensino Médio em Tempo Integral. Brasília, DF: Casa Civil, 2017. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

Documento que reorganiza o Ensino Médio substituindo a legislação vigente até então em todo o país.

BRASIL. Casa Civil. **Lei nº 14.533 de 11 de janeiro de 2023**. Institui a Política Nacional de Educação Digital e altera a Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), a Lei nº 9.448, de 14 de março de 1997, a Lei nº 10.260, de 12 de julho de 2001, e a Lei nº 10.753, de 30 de outubro de 2003. Brasília, DF: Casa Civil, 2023. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2023-2026/2023/Lei/L14533.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento institui a política nacional de educação digital visando incrementar os resultados das políticas públicas relacionadas ao acesso da população brasileira a recursos, ferramentas e práticas digitais, com prioridade para as populações mais vulneráveis.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. **Parecer CNE/CP nº 3, de 10 de março de 2004**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana. Brasília, DF: CNE, 10 mar. 2004. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/cnecp_003.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento analisa e regulamenta a Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, sobre as diretrizes e bases da educação nacional para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira".

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Parecer CNE/CEB nº 3, de 18 de fevereiro de 2008**. Reexame do Parecer CNE/CEB nº 23, de 12 de setembro de 2007. Brasília, DF: CNE/CEB, 18 fev. 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/2008/pceb003_08.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento reexamina o parecer nº 23/2007 referente às orientações para o atendimento da educação no campo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Parecer CNE/CEB nº 7, de 7 de abril de 2010**. Estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica. Brasília, DF: Ministério da Educação, 7 abr. 2010. Disponível em: https://prograd.ufu.br/sites/prograd.ufu.br/files/media/documento/parecer_cneceb_no_72010_aprovado_em_7_de_abril_de_2010.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento analisa as diretrizes curriculares nacionais gerais para a Educação Básica em todo o país.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Parecer CNE/CEB nº 36, de 4 de dezembro de 2001**. Dispõe sobre as diretrizes operacionais para a Educação Básica nas escolas do campo. Brasília, DF: CNE/CEB, 4 dez. 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/EducCampo01.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento analisa as diretrizes operacionais para a Educação Básica para as escolas do campo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB nº 1, de 4 de outubro de 2022**. Estabelece as normas sobre computação na Educação Básica – complemento à BNCC. Brasília, DF: CNE/CEB, 4 out. 2022.

O documento é um complemento à BNCC e fundamenta as normas e os usos da tecnologia e da inclusão digital aos estudantes da Educação Infantil ao Ensino Médio.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB nº 2, de 28 de abril de 2008**. Estabelece diretrizes complementares, normas e princípios para o desenvolvimento de políticas públicas de atendimento da Educação Básica do campo. Brasília, DF: CNE/CEB, 28 abr. 2008. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/resolucao_2.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento estabelece as diretrizes complementares, as normas e os princípios para o desenvolvimento de políticas públicas de atendimento da Educação Básica do campo.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução nº 2, de 15 de junho de 2012**. Estabelece as Diretrizes Curriculares para a Educação Ambiental. Brasília, DF: CNE/CEB, 15 jun. 2012. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rcp002_12.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento estabelece as diretrizes curriculares nacionais para a Educação Ambiental em vigor no país.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução nº 8, de 20 de novembro de 2012**. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Escolar Quilombola na Educação Básica. Brasília, DF: CNE/CEB, 20 nov. 2012. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/media/etnico_racial/pdf/resolucao_8_201112.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento define as diretrizes curriculares nacionais para a Educação Escolar Quilombola na educação básica do país.

BRASIL. **Constituição da República Federativa do Brasil de 1988**. Brasília, DF: Presidência da República, [2016]. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento é a lei fundamental e suprema do país, regendo e validando todas as normativas de ordem jurídica, política e social.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/escola-em-tempo-integral/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

Esse documento oficial do MEC apresenta as novas diretrizes curriculares para os ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – Computação**: complemento à BNCC. Brasília, DF: MEC, 2022.

O documento é um complemento à BNCC e contém as normas que orientam a implementação do uso da tecnologia em sala de aula, da Educação Infantil ao Ensino Médio, garantindo o direito de aprendizagem relacionado ao uso crítico das ferramentas digitais.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução CNE/CEB nº 1, de 3 de abril de 2002**. Inclui as diretrizes operacionais para a Educação Básica no campo. Brasília, DF: MEC, 3 abr. 2002.

O documento institui as diretrizes operacionais para a Educação Básica no campo.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução nº 1, de 17 de junho de 2004**. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana. Brasília, DF: CNE/CEB, 2004. Disponível em: https://prograd.ufu.br/legislacoes/resolucao-cnecp-no-1-de-17-de-junho-de-2004#:~:text=Resumo%3A,Cultura%20Afro%2DBrasileira%20e%20Africana. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento fundamenta a Lei nº 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que institui as diretrizes curriculares nacionais para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino de História e Cultura Afro-brasileira e Africana nas escolas do país.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho de Educação Básica. **Resolução nº 4, de 13 de julho de 2010**. Estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais para a Educação Básica. Brasília, DF: MEC, 13 jul. 2010. Disponível em: https://prograd.ufu.br/sites/prograd.ufu.br/files/media/documento/resolucao_cneceb_no_4_de_13_de_julho_de_2010.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento define as diretrizes curriculares nacionais gerais para a Educação Básica para o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC: SEB: Dicei, 2013. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/mod/folder/view.php?id=3934461. Acesso em: 25 ago. 2024.

Esse documento do Ministério da Educação define as normas obrigatórias para a implementação do currículo da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino de História e Cultura Afro-brasileira e Africana**. Brasília, DF: MEC, 2004. Disponível em: https://media.ceert.org.br/portal-4/pdf/diretrizes.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento traz informações, marcos legais das diretrizes curriculares para a educação das relações étnico-raciais e para o ensino da História e da Cultura Afro-brasileira e Africana, ampliando o debate sobre o tema no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019.

Guia prático, elaborado pelo MEC, com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BRASIL. Ministério das Relações Exteriores. **Transformando nosso mundo**: a agenda 2030 para o desenvolvimento sustentável. Brasília, DF: Governo Federal: ONU Brasil, 2016. Disponível em: https://www.mds.gov.br/webarquivos/publicacao/Brasil_Amigo_Pesso_Idosa/Agenda2030.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A publicação traz informações sobre a Agenda 2030, a Declaração dos Objetivos Sustentáveis pela ONU, os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável, os meios de implementação bem como seu acompanhamento.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: Ministério da Saúde/Secretaria de Atenção à Saúde/Departamento de Atenção Básica, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento apresenta as primeiras diretrizes alimentares oficiais para a população brasileira com o objetivo de promover a saúde e a boa alimentação, combatendo a desnutrição, prevenindo a obesidade, o diabetes, o AVC, o infarto e o câncer.

BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. **Aprendizagem baseada em projetos**: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

A obra descreve um conjunto de princípios que ajudam os professores a planejar projetos efetivos, apresenta exemplos de projetos com ferramentas e recursos de auxílio a sua implementação.

CANDIDO JUNIOR, E. **Gestão de EAD no ensino híbrido**: uma pesquisa sobre a organização e utilização da sala de aula invertida. Presidente Prudente: Centro Universitário Toledo Prudente, 2017. Disponível em: https://www.abed.org.br/congresso2017/trabalhos/pdf/221.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O autor aborda o ensino híbrido e analisa suas diversas modalidades, incluindo a sala de aula invertida.

CARRANO, P.; DAYRELL, J. (org.). **Formação de professores do Ensino Médio**: o jovem como sujeito do Ensino Médio. Etapa I – caderno II. Curitiba: UFPR: Setor de Educação, 2013. Disponível em: https://observatorioensinomedio.wordpress.com/wp-content/uploads/2014/03/web-caderno-2.pdf. Acesso em: 13 set. 2024.

A coleção tem como objetivo fornecer algumas chaves analíticas que pretendem facilitar para o professor o processo de aproximação e conhecimento dos estudantes que chegam à escola como jovens sujeitos de experiências, saberes e desejos.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. **Planejando o trabalho em grupo**: estratégias para salas de aula heterogêneas. Porto Alegre: Penso, 2017.

Com base em pesquisa e experiência docente, o livro traz informações importantes sobre a aplicação com sucesso da aprendizagem cooperativa, a fim de construir salas de aula equitativas. O livro inclui pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, mostrando a contribuição do trabalho em equipe para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes e a organização das salas de aula pelos professores para que todos participem ativamente.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 189-204, 2018.

O Programa Etnomatemática focaliza as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum e da sociedade invisível.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

Nesse artigo são examinadas as bases socioculturais da Matemática e de seu ensino, bem como as consequências da globalização e seus reflexos na educação multicultural. Discutem-se o conceito de cultura e as questões ligadas à dinâmica cultural, propondo uma teoria de conhecimento transdisciplinar e transcultural. Para isso, apresenta o Programa Etnomatematica.

DAYRELL J. (org.). **Por uma pedagogia das juventudes**: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária dedicado a construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de processos educativos efetivamente dialógicos, baseados em encontros inter e entre gerações.

DIESEL, A.; BALDEZ, A. L. S.; MARTINS, S. N. Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. **Revista Thelma**, Pelotas, v. 14, n. 1, p. 268-288, 2017.

O artigo tem como objetivo buscar pontos de convergência entre as metodologias ativas de ensino e outras abordagens já consagradas no âmbito da (re)significação da prática docente. As autoras realizam um estudo bibliográfico das principais teorias de aprendizagem, como a interação social de Vygotsky, a experiência de Dewey e a aprendizagem significativa de Ausubel.

EDUCAÇÃO para a cidadania global: preparando estudantes para os desafios do século XXI. Brasília, DF: Unesco, 2015. Disponível em: https://www.mprj.mp.br/documents/20184/1330165/Educacao_para_a_cidadania_global_-_Unesco.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A publicação traz os pressupostos teóricos e práticos para a aplicação da educação para a cidadania global (ECG): abordagens curriculares, uso de tecnologias da informação e comunicação, abordagens baseadas nos esportes e na arte, na comunidade e na formação de professores, e iniciativas lideradas por jovens.

FERRARI, A. C.; MACHADO, D; OCHS, M. **Guia da educação midiática**. São Paulo: Instituto Palavra Aberta, 2020. Disponível em: https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2021/03/Guia-da-Educac%CC%A7a%CC%83o-Midia%CC%81tica-Single.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O livro traz dicas e exemplos que ajudam o professor a incorporar a educação midiática em sua prática diária.

FICHTNER, B. Tecnologias da informação e comunicação (TIC) como prática cultural de adolescentes e jovens: uma perspectiva filosófica e epistemológica. *In*: SOUSA, C. A. de M. *et al*. (org.). **Juventudes e tecnologias**: sociabilidades e aprendizagens. Brasília, DF: Liber Livro, 2015.

Na sociedade atual, os meios digitais tornaram-se indispensáveis em nosso cotidiano. Adolescentes e jovens usam em seu tempo livre computadores, jogos *on-line*, buscam informações na internet, criam redes e comunicam-se via celular com seus amigos. O artigo apresenta estudos sobre o uso prático das novas tecnologias de informação e comunicação por adolescentes e jovens.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema**, v. 19, n. 26, p. 77-102, 2006. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1853. Acesso em: 25 ago. 2024.

O artigo aborda o papel dos registros de representações semióticas para a aprendizagem matemática com base nos estudos de Raymond Duval.

GAROFALO, D. Como levar a programação para a sala de aula. **Nova Escola**, 14 ago. 2018. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/12303/como-levar-a-programacao-para-a-sala-de-aula. Acesso em: 30 set. 2024.

Ao reconhecer que os professores têm receio de ensinar aos estudantes programação na escola, a autora busca dar subsídios a esse trabalho, apresentando argumentos, ferramentas úteis e ideias que mostram a importância desse ensino.

GRANVILLE, M. A. (org.). **Projetos pedagógicos no contexto escolar**: práticas de ensino e aprendizagem. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro analisa a realidade escolar e seus projetos, propondo caminhos para planejar e desenvolver processos de ensino. Discute práticas, sugere formas de implementá-las e incentiva sua realização nas escolas.

HORN, M. B.; STAKER, H. **Blended**: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Os autores apresentam um guia para implementar o ensino híbrido, combinando ensino presencial e virtual, centrado no estudante. O ensino híbrido é uma tendência global na educação, oferecendo um aprendizado mais interessante, eficiente e personalizado.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Panorama do Censo 2022**. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/?utm_source=ibge&utm_medium=home&utm_campaign=portal. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento disponibiliza indicadores e mapas referentes aos resultados do Censo de 2022 nas diferentes áreas.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). **Pesquisa nacional por amostra de domicílios contínua**. Rio de Janeiro: IBGE, 2015. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9127-pesquisa-nacional-por-amostra-de-domicilios.html. Acesso em: 25 ago. 2024.

No *link* é possível encontrar tabelas e gráficos que apresentam características do mercado de trabalho relativas às pessoas de 15 anos ou mais de idade.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA (IBGE). Pessoas com deficiência têm menor acesso à educação, ao trabalho e à renda. **Agência IBGE Notícias**, Rio de Janeiro, 7 jul. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37317-pessoas-com-deficiencia-tem-menor-acesso-a-educacao-ao-trabalho-e-a-renda. Acesso em: 25 ago. 2024.

No *link* é possível encontrar dados, tabulações, gráficos e análises relativos às pessoas com deficiência.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS ANISIO TEIXEIRA (INEP). **Censo de Educação Básica 2023**. Brasília, DF: Inep, 22 fev. 2024. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/censo-escolar/mec-e-inep-divulgam-resultados-do-censo-escolar-2023. Acesso em: 25 ago. 2024.

O *link* disponibiliza os resultados e comentários do Censo Escolar de 2023.

INSTITUTO PALAVRA ABERTA. **Educação midiática em rede**: guia prático para gestores. Disponível em: https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2022/01/guia-do-gestor-digital.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O guia traz sugestões e ideias para a formação do professor com base em quatro passos: sensibilizar, engajar, formar e sustentar, dando sentido ao uso da tecnologia e à fluência digital e midiática dos estudantes.

INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL COMO FERRAMENTA PARA A EDUCAÇÃO. **Somos Conexão**, São Paulo, n. 10, p. 18-30, 2024.

A matéria discute os desafios e as oportunidades que a inteligência artificial oferece tanto no desenvolvimento de estratégias personalizadas de ensino como na otimização do tempo para o trabalho do professor.

KRAUSE, M.; ANNUNCIATO, P. Um jogo para semear, colher e contar. **Nova Escola**, São Paulo, 23 nov. 2017. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/9104/um-jogo-para-semear-colher-e-contar. Acesso em: 25 ago. 2024.

O artigo traz explicações sobre o jogo africano mancala e suas possibilidades de uso na sala de aula com foco na Matemática.

LGBTQIAP+. *In*: **Dicionário LGBTQIAP+**: descomplicando a diversidade. Disponível em: https://www.ongarco.org/post/dicion%C3%A1rio-lgbtqiap-descomplicando-a-diversidade. Acesso em 25 ago. 2024.

O dicionário traz a diferença entre identidade de gênero e orientação sexual bem como o significado de cada letra da sigla LGBTQIAP+.

LIBÂNEO, J. C. Cultura jovem, mídias e escola: o que muda no trabalho dos professores? **Revista Educativa**, Goiânia, v. 9, n. 1, p. 25-46, jan./jun. 2006.

O autor propõe um olhar pedagógico sobre certas características da juventude brasileira em sua relação com a aprendizagem escolar. Destaca ainda a relação dos jovens com as mídias e seu impacto na interação entre professores e estudantes e nos modos de aprender.

LODI, L. H.; ARAÚJO, U. F. Escola, democracia e cidadania. *In*: **Ética e cidadania**: construindo valores na escola e na sociedade. Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2007. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/Etica/liv_etic_cidad.pdf. Acesso em: 30 set. 2024.

O texto de Lucia Helena Lodi e de Ulisses Araújo contribui para a construção de uma escola baseada em participação democrática e desenvolvimento de uma cidadania consciente e crítica. Os autores propõem o programa Ética e Cidadania e o Fórum Escolar de Ética e da Cidadania.

LUCHESI, B.M.; LARA, E.M.O.; SANTOS, M.A. **Guia prático de introdução às metodologias ativas**. Campo Grande: Ed. da UFMS, 2022.

O *e-book* traz informações básicas e essenciais das metodologias ativas de aprendizagem.

LUVISON, C. C. Leitura e escrita de diferentes gêneros textuais: inter-relação possível nas aulas de Matemática. *In*: NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). **Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação Matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

Esse texto discute as questões de leitura e escrita nas aulas de Matemática, partindo da perspectiva dos gêneros textuais e das relações entre linguagem matemática e língua materna a fim de investigar a influência dessas relações na aprendizagem de conteúdos matemáticos no Ensino Fundamental.

MACHADO, D.; TOBIAS, E. **5 contribuições da educação midiática à educação antirracista**. São Paulo: Instituto Palavra Aberta, 2022. Disponível em: https://educamidia.org.br/api/wp-content/uploads/2023/07/BIBLIOTECA_EM-e-educac%CC%A7a%CC%83o-antirracista_ISBN.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O guia aponta as cinco contribuições para a educação antirracista com base na educação midiática: reconhecimento de preconceitos e estereótipos, reflexão sobre o discurso de ódio e suas consequências, reconhecimento de preconceito algorítmico, engajamento e participação, e ocupação de espaços. Apresenta também cinco propostas de atividades para serem aplicadas pelo professor em sala de aula.

MACHADO, N. J. Matemática e língua materna: uma aproximação necessária. **Revista da Faculdade de Educação**, São Paulo, v. 15, n. 2, p. 161-166, jul./dez. 1989.

O artigo analisa a relação entre as duas disciplinas, fundamentando a proposição de ações que ajudem na superação das dificuldades encontradas no ensino da Matemática.

MACIEL, A. C. de M.; SOUZA, L. F. N. I. de; DANTAS, M. A. Estratégias de estudo e aprendizagem utilizadas pelos estudantes do Ensino Médio. **Psicol. Ensino & Form**., Brasília, DF, v. 6, n. 1, p. 14-32, 2015.

O artigo apresenta o estudo realizado com 534 estudantes do Ensino Médio do estado de São Paulo com o objetivo de identificar e analisar as estratégias de estudos e aprendizagem utilizadas por eles.

MANZINI, E. J. (org.). **Inclusão do estudante com deficiência na escola**: os desafios continuam. Marília: ABPEE/Fapesp, 2007.

As pesquisas apresentadas nesse livro demonstram que a inclusão do estudante com deficiência na escola é um tema polêmico e alerta para os desafios cotidianos. As pesquisas relatadas indicam que a escola carece de prática pedagógica para efetivar a inclusão. A obra pode orientar professores e demais integrantes da comunidade escolar a acolher estudantes com deficiência e a encaminhá-los para um bom processo de aprendizagem e socialização.

MORAN, J. **Metodologias ativas de bolso**: como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado, por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

MOREIRA, M. A. **Mapas conceituais e aprendizagem significativa**. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/mapasport.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

O artigo traz o conceito e a fundamentação teórica dos mapas conceituais, além de fornecer exemplos na área de Ciências.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). **Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na Educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reúnem subsídios teóricos e práticos relativos as interfaces entre a educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a educação básica e o ensino superior.

O FUTURO do mundo do trabalho para as juventudes brasileiras. **Fundação Itaú**, São Paulo, 27 set. 2023. Disponível em: https://www.fundacaoitau.org.br/observatorio/o-futuro-do-mundo-do-trabalho-para-juventudes-brasileiras. Acesso em: 25 ago. 2024.

O estudo traça um perfil dos jovens de 14 a 29 anos – cerca de 24% da população brasileira – e apresenta os principais desafios e caminhos para a inserção produtiva dessa faixa etária.

ORTEGA, R.; DEL REY, R. **Estratégias educativas para a prevenção da violência**. Tradução: Joaquim Ozorio. Brasília, DF: Unesco: UCB, 2002.

O livro permite abordar a questão da violência escolar de forma inovadora. Consiste em um guia para lidar com os conflitos por meio de um conjunto de estratégias educativas e de prevenção, com o objetivo de modificar o padrão de relacionamento entre os atores da comunidade escolar, visando a melhoria da convivência.

PADIAL, K. Igualdade de gênero. **Nova Escola**, São Paulo, 10 dez. 2015. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/7889/igualdade-de-genero. Acesso em: 25 ago. 2024.

A reportagem busca refletir sobre as relações de gênero na escola com os diferentes segmentos nela existentes.

REDE INTERMUNICIPAL DE COOPERAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO – RICD. **Agenda 2030**. Disponível em: https://rumoa2030.pt/a-agenda-2030/. Acesso em: 25 ago. 2024.

O *site* traz informações sobre o cumprimento da Agenda 2030 e seus desdobramentos.

RUOTTI, C.; ALVES, R., CUBAS, V. O. **Violência na escola**: um guia para pais e professores. São Paulo: Andhep/Imprensa Oficial do Estado de São Paulo, 2006.

O livro apresenta os resultados de pesquisa realizada pelo Núcleo de Estudos da Violência da Universidade de São Paulo em escolas das zonas Leste e Sul da capital paulista. Aborda diferentes formas de violência praticadas no cotidiano dessas escolas, mas também experiências que se revelaram proveitosas para prevenir e reduzir essas ocorrências.

SALAS, P. Questões de gênero: caminhos para abordar o assunto em sala de aula. **Nova Escola**, São Paulo, 7 abr. 2022. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/21183/questoes-de-genero-caminhos-para-abordar-o-assunto-em-sala-de-aula. Acesso em: 25 ago. 2024.

A reportagem aborda as questões de gênero debatidas na escola e como elas podem ser trabalhadas a fim de construir uma sociedade mais equânime.

SANTOS, M. M. dos; JESUS, J. I. S. F. LGBTQIAP+fobia. *In*: FARIA FILHO, F. de M.; OLIVEIRA, R. A.; Rodrigues, E. L. de P. (org.). **LGBTQIAP+**: um guia educativo. Ceres, GO: IF Goiano, 2022. p. 19.

Esse guia educativo aborda de maneira acessível e informativa as questões relacionadas à diversidade de gênero e sexualidade.

SANTOS, T. **Metodologias ativas de ensino-aprendizagem**. (Mestrado profissional em Educação Profissional e Tecnológica) – Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Pernambuco, Olinda, 2019. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/565843. Acesso em: 25 ago. 2024.

A cartilha traz informações sobre as características das metodologias ativas e descreve algumas delas trazendo o passo a passo para a sua implementação prática.

SILVA, G. M. da (coord.). **Educação quilombola em números**. Projeto Quilombos e Educação, [*s. l.*], 2020. Disponível em: https://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/comissoes/comissoes-permanentes/ce/apresentacoes-em-eventos/apresentacoes-audiencias-2021/arquivos-2021/GivaniaSilva.pdf. Acesso em: 25 ago. 2024.

A apresentação traz os resultados do Projeto Quilombos e Educação com os números referentes à educação quilombola no país.

SOLÉ, I. **Estratégias de leitura**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

O objetivo da obra é ajudar educadores e profissionais a promoverem a utilização de estratégias de leitura que permitam interpretar e compreender os textos escritos.

STARIOLO, M. Levantamento quantitativo pioneiro na América Latina mapeia comunidade LGBT no Brasil. **Jornal da Unesp**, [*s. l.*], 24 out. 2022. Disponível em: https://jornal.unesp.br/2022/10/24/levantamento-quantitativo-pioneiro-na-america-latina-mapeia-comunidade-algbt-no-brasil/#:~:text=O%20percentual%20de%20brasileiros%20adultos,os%20dados%20populacionais%20do%20IBGE. Acesso em: 25 ago. 2024.

O documento traz dados sobre orientação sexual no Brasil, fazendo um mapeamento da comunidade *LGBT* e os diferentes tipos de violência sofrida por essa minoria.

UNESCO. **Violência escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial**. Brasília, DF: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres *Ewha*, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados disponíveis à época sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como valorizar as iniciativas que abordam o problema.

UNICEF BRASIL. LGBTQIAP+ e saúde mental: acolhendo e lutando contra estigmas e preconceito. **Unicef Brasil**, Brasília, DF, 23 jun. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/lgbtqiap-mais-e-saude-mental. Acesso em: 27 set. 2024.

Esse artigo destaca a importância de apoiar a saúde mental da população LGBTQIAP+, afetada por estigmas e preconceitos. A organização defende ambientes inclusivos e políticas que combatam a discriminação, promovendo o acesso a cuidados de qualidade e a redução da marginalização.

WEINSTEIN, C. S.; NOVODVORSKY, I. **Gestão da sala de aula**: lições da pesquisa e da prática para trabalhar com adolescentes. Porto Alegre: AMGH, 2015.

O livro é um guia para criar um ambiente de aprendizagem organizado e produtivo, com exemplos de professores de várias disciplinas. Oferece recomendações práticas e ajuda a construir boas relações com os estudantes.

WING, J. Pensamento computacional. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711. Acesso em: 25 ago. 2024.

Nesse artigo, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental que todas as pessoas devem dominar para atuar na sociedade moderna.

PARTE ESPECÍFICA

A BNCC neste volume

O quadro a seguir mostra as competências gerais, específicas e as habilidades da BNCC contempladas neste volume.

Competências e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias contempladas neste volume

Capítulos/ seções	Competências gerais	Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e habilidades
Avaliação diagnóstica 1	-	EM13MAT102 EM13MAT310 EM13MAT311 EM13MAT312 EM13MAT316 EM13MAT406 EM13MAT407
Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados	4, 5, 9	EM13MAT102 Competência específica 3 Competência específica 4: EM13MAT406, EM13MAT407
Capítulo 2 – Análise de dados	4, 5, 7, 9	Competência específica 1: EM13MAT102 Competência específica 3 Competência específica 4: EM13MAT406, EM13MAT407
Capítulo 3 – Medidas estatísticas	7	Competência específica 1 Competência específica 2 Competência específica 3: EM13MAT316 Competência específica 4: EM13MAT407 Competência específica 5: EM13MAT510
Capítulo 4 – Análise combinatória	1, 2, 3, 4	Competência específica 3: EM13MAT310, EM13MAT315 Competência específica 4 Competência específica 5

CONTINUA

CONTINUAÇÃO

Capítulos/ seções	Competências gerais	Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e habilidades
Capítulo 5 – Probabilidade	1, 2	Competência específica 1: EM13MAT106 Competência específica 3: EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT315 Competência específica 4 Competência específica 5: EM13MAT511
Educação midiática – Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar	-	EM13MAT102 Competência específica 3
Pesquisa e ação – Pesquisa estatística	4, 5, 7, 8, 9, 10	Competência específica 1 Competência específica 2: EM13MAT202
Avaliação diagnóstica 2	-	EM13MAT308
Capítulo 6 – A semelhança e os triângulos	1, 2, 3, 4, 5	EM13MAT308 Competência específica 4 Competência específica 5
Capítulo 7 – Trigonometria no triângulo retângulo	1, 2, 5	Competência específica 3: EM13MAT308 Competência específica 5
Capítulo 8 – Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer	1, 2, 5	EM13MAT308 Competência específica 5

CONTINUA

CONTINUAÇÃO

Capítulos/ seções	Competências gerais	Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e habilidades
Capítulo 9 – Funções trigonométricas	2, 7	Competência específica 1: EM13MAT306 EM13MAT315 EM13MAT404 Competência específica 5
Educação midiática – Inteligência Artificial na Educação	5, 9	Competência específica 3 Competência específica 5
Pesquisa e ação – Maquete	2, 4, 6, 7, 8, 9, 10	Competência específica 1: EM13MAT103 Competência específica 2: EM13MAT201 Competência específica 3: EM13MAT308
Prepare-se para o Enem e vestibulares	-	Competência específica 1: EM13MAT102 Competência específica 3: EM13MAT308, EM13MAT311, EM13MAT316

Os Temas Contemporâneos Transversais neste volume

Este volume aborda diferentes Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) ao explorar temas atuais e relevantes para a formação dos estudantes. Esses temas também contribuem para a integração entre diferentes áreas do conhecimento.

O quadro a seguir elenca os TCTs contemplados em cada capítulo e seção deste volume.

Temas Contemporâneos Transversais contemplados neste volume

Capítulos/seções	Temas Contemporâneos Transversais
Capítulo 1 – Organização e apresentação de dados	Educação Ambiental; Educação em Direitos Humanos; Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso; Saúde; Trabalho; Vida Familiar e Social

CONTINUA

CONTINUAÇÃO

Capítulos/seções	Temas Contemporâneos Transversais
Capítulo 2 – Análise de dados	Educação Ambiental, Educação em Direitos Humanos, Educação para o Consumo, Saúde, Trabalho, Vida Familiar e Social
Capítulo 3 – Medidas estatísticas	Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso; Saúde
Capítulo 4 – Análise combinatória	Ciência e Tecnologia, Educação Alimentar e Nutricional, Educação para o Trânsito
Capítulo 5 – Probabilidade	Saúde
Educação midiática – Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar	Vida Familiar e Social
Pesquisa e ação – Pesquisa estatística	Direitos da Criança e do Adolescente, Educação Alimentar e Nutricional, Saúde
Capítulo 6 – A semelhança e os triângulos	Diversidade Cultural; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras
Capítulo 7 – Trigonometria no triângulo retângulo	Ciência e Tecnologia; Diversidade Cultural; Educação em Direitos Humanos; Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras; Trabalho
Capítulo 8 – Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer	Ciência e Tecnologia, Trabalho
Capítulo 9 – Funções trigonométricas	Educação Ambiental, Saúde
Educação midiática – Inteligência Artificial na Educação	Ciência e Tecnologia
Pesquisa e ação – Maquete	Educação em Direitos Humanos

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 1

Objetivos

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes.
- Preparar os estudantes para os conteúdos que serão estudados no 1º semestre.

Orientações didáticas

A proposta desta avaliação é que os estudantes realizem as atividades com base nos conhecimentos prévios.

O quadro a seguir relaciona as atividades às habilidades da BNCC voltadas para o Ensino Fundamental – Anos finais que os estudantes mobilizam durante a resolução das atividades e às habilidades do Ensino Médio que serão desenvolvidas ao longo do semestre.

Relação entre as habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais desenvolvidas nas atividades e as habilidades do Ensino Médio

Atividades	Assuntos	Habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais	Habilidades do Ensino Médio
1	Tabela	**(EF06MA32)** Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.	EM13MAT102 e EM13MAT406
2 e 3	Gráfico	**(EF09MA22)** Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.	EM13MAT407
4	Medidas de tendência central	**(EF08MA25)** Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.	EM13MAT316
5	Problema de contagem	**(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.	EM13MAT310
6	Probabilidade	**(EF08MA22)** Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.	EM13MAT311
7	Probabilidade	**(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.	EM13MAT312

Analisando as respostas do estudante às atividades, é possível avaliar seus conhecimentos prévios e identificar defasagens ou enganos cometidos. Isso pode ajudar a planejar o trabalho durante o semestre.

Na **atividade 1**, se o estudante identificar a **alternativa a** como correta, provavelmente não considerou que a tabela deve apresentar todos os dados coletados, ou seja, do 1º ano B também. Se escolher as **alternativas b** ou **c**, é possível que tenha se equivocado ao analisar a tabela e não tenha percebido a inversão dos dados entre as linhas e colunas. Se identificar a **alternativa d**, ele provavelmente não considerou que o título e a fonte são essenciais em uma tabela.

Na **atividade 2**, se o estudante identificar as **alternativas a**, **b** ou **e** como corretas, é possível que tenha considerado a necessidade de comparar os dados, mas não percebeu que deveria identificar o melhor tipo de gráfico para fazer uma comparação ao longo do tempo ou não sabe que o gráfico de linhas é o mais adequado para essa finalidade. Se escolher a **alternativa c**, pode não ter notado que os dados a serem inseridos no gráfico não são partes de um todo e que, por isso, não devem ser representados em um gráfico de setores.

Na **atividade 3**, se o estudante não identificar a **alternativa c** como correta, provavelmente não considerou que, para dados representados em porcentagem e que são partes de um todo, a representação mais adequada seria um gráfico de setores.

Na **atividade 4**, se o estudante considerar a **alternativa a** como correta, provavelmente não compreendeu que a existência de um valor atípico (100 kg) vai elevar o valor da média, que não representará adequadamente esse conjunto de dados. Se identificar as **alternativas c** ou **d** como corretas, pode não ter domínio dos conceitos de moda e média aritmética ponderada, pois todos os valores ocorrem apenas uma vez, de modo que o conjunto de dados é amodal e não há pesos para considerar a média aritmética como ponderada. Se considerar a **alternativa e**, não deve saber que a amplitude não é uma medida de tendência central, mas uma medida de dispersão.

Na **atividade 5**, se o estudante identificar a **alternativa b** como correta, provavelmente não domina o princípio fundamental da contagem e, por isso, calculou a adição dos dois números apresentados no enunciado. Se escolher as **alternativas c** ou **d**, é possível que tenha considerado apenas um dos itens a ser combinado, esquecendo que ambos os itens dever ser usados. Se considerar a **alternativa e**, pode ter confundido o princípio fundamental da contagem e calculado 3^4, quando deveria calcular $3 \cdot 4$.

Na **atividade 6**, se o estudante considerar como correta a **alternativa b**, é possível que ainda não domine o conceito de espaço amostral e julgue que a quantidade de moedas é o total de resultados possíveis. Caso escolha a **alternativa c**, pode ter se confundido e determinado o evento complementar ao que foi pedido. Caso tenha indicado a **alternativa d**, pode ter considerado a quantidade de elementos do espaço amostral como resposta. Se indicar a **alternativa e**, provavelmente analisou o espaço amostral e considerou apenas a quantidade de resultados favoráveis, sem calcular a probabilidade de o evento ocorrer.

Na **atividade 7**, se indicar a **alternativa a** como correta, é possível que tenha relacionado de modo equivocado a quantidade de bolas a serem retiradas da urna por vez e a quantidade total de bolas na urna. Se escolher a **alternativa b**, o estudante provavelmente calculou a probabilidade da primeira bola verde ser retirada da urna, equivocando-se ao interpretar o enunciado. Se escolher a **alternativa d**, provavelmente calculou a probabilidade da próxima bola sorteada ser azul. Caso indique a **alternativa e**, é possível que tenha relacionado a quantidade de bolas azuis e a quantidade total de bolas.

CAPÍTULO 1 Organização e apresentação de dados

Objetivos

- Reconhecer população, amostra e variáveis.
- Organizar e interpretar dados em tabelas e gráficos.

Justificativa dos objetivos

Com o advento da tecnologia, dispomos de uma facilidade crescente para a obtenção de dados sobre assuntos diversos. Porém, para que isso seja proveitoso, é necessário saber lidar com essa enorme quantidade de dados, organizando-os de maneira adequada para que se transformem em informações significativas.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 4**, **5** e **9**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1: **EM13MAT102**.

  Competência específica 3.

  Competência específica 4: **EM13MAT406** e **EM13MAT407**.

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Educação em Direitos Humanos
- Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso
- Saúde
- Trabalho
- Vida Familiar e Social

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Orientações didáticas

A abertura do capítulo traz uma temática necessária: a violência contra pessoas LGBTQIAP+. Comente com os estudantes que essa violência representa uma grave violação dos direitos humanos, prejudica os indivíduos no âmbito pessoal e perpetua a exclusão e a marginalização sistemática, impedindo o pleno desenvolvimento e a participação equitativa na sociedade. É importante conscientizá-los da importância de combater a violência para reduzir as desigualdades e garantir que todos tenham acesso igualitário a oportunidades e direitos fundamentais, o que favorece o desenvolvimento do **ODS 10: Redução das desigualdades**.

Pessoas LGBTQIAP+ enfrentam rejeição, discriminação e até violência dentro de suas comunidades, incluindo a própria família, o que pode levar ao isolamento, a problemas de saúde mental e à falta de apoio social. Além disso, na esfera social, a violência e a discriminação sistemáticas limitam o acesso dessas pessoas a oportunidades de emprego, educação e serviços de saúde, exacerbando sua marginalização. A aceitação e a inclusão são fundamentais para a construção de ambientes familiares e sociais saudáveis e acolhedores, em que todos possam viver com dignidade.

respeito e igualdade de direitos. Promover essa reflexão auxilia no desenvolvimento dos **TCTs Vida Familiar e Social** e **Educação em Direitos Humanos**.

É apresentada a imagem da bandeira do orgulho LGBTQIA+, e o texto trata da violência, em 2021, contra a população LGBTI+ no Brasil. Comente com a turma que a sigla LGBTQIAP+ engloba essas outras siglas e é o resultado de uma evolução ao longo do tempo que objetivou incluir uma diversidade maior de identidades de gênero e orientações sexuais. Originalmente, a sigla era apenas LGBT, representando pessoas lésbicas, *gays*, bissexuais e transgêneros. Com o tempo, ela foi expandida para incluir "Q" de *queers*, "I" de intersexuais, "A" de assexuais e "P" de pansexuais. O "+" sinaliza a inclusão de outras identidades que não estão explicitamente mencionadas, reconhecendo a complexidade e a diversidade da comunidade.

Após a leitura do texto, proponha a questão: "Em relação aos dados de 2021, qual tipo de gráfico melhor os representaria?". Espera-se que os estudantes sugiram um gráfico de barras ou de setores.

A **competência específica 3** é ressaltada em vários momentos deste capítulo, uma vez que eles deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

Sugestão de atividade para combater o *bullying*

Distribua cartões coloridos e peça aos estudantes que escrevam, anonimamente, situações em que se sentiram excluídos ou foram testemunhas de alguém sendo maltratado. Em seguida, colete os cartões e leia alguns em voz alta, incentivando a turma a buscar respostas empáticas e de apoio. Depois, aborde como o *bullying* pode afetar pessoas da comunidade LGBTQIAP+. Finalize a atividade pedindo aos estudantes que, em grupos, criem mensagens de apoio e respeito à diversidade para compartilhar com a comunidade escolar.

Coleta de dados

Este tópico inicia o estudo sobre pesquisa estatística, contextualizando a coleta de dados por meio de um controle de qualidade e do censo demográfico. Os conceitos de amostra, população e os tipos de variáveis são formalizados. Nesse momento, peça aos estudantes que citem outros exemplos de pesquisa, como a eleitoral, feita com uma amostra aleatória da população.

O imenso volume de dados gerados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), por meio de mecanismos como a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua), oferece um retrato multidimensional da sociedade brasileira, utilizando a amostragem estatística. É possível conhecer algumas condições socioeconômicas da população em temas como o acesso ao emprego, condições de rendimento, moradia, educação, acesso a bens e serviços ou condições em função de sexo e cor ou raça, por exemplo, dados essenciais para medir o progresso do **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura**, auxiliando na formulação, na implementação e no monitoramento de políticas e programas voltados para o desenvolvimento socioeconômico inclusivo e a sustentabilidade ambiental. A **atividade 8** explora a análise de dados da PNAD Contínua, propiciando a reflexão sobre a relação entre a pesquisa e a melhoria da qualidade de vida dos brasileiros.

As **atividades 1** e **2** exploram os conceitos básicos estudados no início deste capítulo.

A **atividade 3** favorece o desenvolvimento da **competência geral 9**, uma vez que incentiva o acolhimento, a valorização da diversidade e a empatia ao solicitar ao estudante que reflita sobre formas de criar ambientes seguros e inclusivos para as pessoas LGBTQIA+. Oriente os estudantes a buscarem os dados em fontes confiáveis.

A **atividade 4** propõe a elaboração de questões para compor uma pesquisa. Deixe que os estudantes criem as questões livremente antes de validá-las com a turma. Ao comparar as questões e verificar semelhanças entre elas, incentive-os a redigir uma nova versão que seja clara o suficiente para que a resposta a ser alcançada (dado que será coletado) esteja de acordo com o propósito da pesquisa.

As **atividades 5** a **7** exploram de maneira reflexiva alguns aspectos da coleta de dados. Questionamentos envolvendo assuntos como os da **atividade 6**, que fazem parte do universo dos jovens, são importantes para que os estudantes se identifiquem e se interessem pelo conteúdo.

A **atividade 9** propõe a reflexão sobre a realização de uma pesquisa envolvendo um contexto que pode ser próximo à realidade dos estudantes, abordando o **TCT Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso**. Além disso, a atividade favorece o desenvolvimento da **abstração**, um dos pilares do pensamento computacional, uma vez que os estudantes devem selecionar as informações relevantes para modelar e solucionar o problema. Para ampliar a atividade, sugira que listem todas as características que podem ser objeto de estudo da pesquisa. Assim, espera-se que eles percebam que os dados a serem coletados devem ser condizentes à pesquisa em questão para obter o resultado esperado.

Peça aos estudantes que leiam com atenção o texto proposto na **atividade 10**. Pergunte qual percepção eles têm, com base nos dados apresentados no texto, em relação à promoção dos **ODS 4: Educação de qualidade** e **ODS 8: Trabalho decente e crescimento econômico**.

Organização e apresentação de dados

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102**, **EM13MAT406** e **EM13MAT407**, além da **competência geral 4**, pois trabalha com a construção e a análise de tabelas e gráficos com dados obtidos em pesquisas estatísticas, além da avaliação sobre a melhor forma de representar diferentes tipos de dados.

O tema que introduz o tópico favorece o desenvolvimento da **competência específica 4**, já que os estudantes aprenderão como representar de diferentes formas um mesmo conjunto de dados, como realizar a transposição desses registros e, ainda, avaliar qual é o mais adequado em cada caso.

Durante o estudo sobre a organização e a apresentação de dados em tabelas, os estudantes aprenderão a analisar a distribuição de frequências e o uso de planilha eletrônica

Se possível, organize uma aula no laboratório de informática da escola ou peça que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

É importante ressaltar que, algumas vezes, o resultado obtido sem a planilha pode ser diferente do apresentado na planilha eletrônica em razão do modo de arredondar e apresentar os dados de cada planilha. Na planilha eletrônica, é possível ajustar a quantidade de casas decimais de cada resultado, de acordo com a precisão escolhida, assim como o modo de apresentação desse resultado (em forma de número, porcentagem, moeda etc.).

Se julgar oportuno, comente que algumas planilhas têm opções para fazer os cálculos diretamente, sem precisar digitar a fórmula. Em certas planilhas, por exemplo, ao selecionar as células e clicar em "Soma", na linha seguinte da coluna já aparece a soma dos valores das células selecionadas.

As **atividades 11** e **12** exploram o cálculo das frequências absolutas, relativas e percentuais. A **atividade 13** propõe a pesquisa de tabelas em jornais e revistas. Se julgar oportuno, peça aos estudantes que apresentem os resultados obtidos e leiam os títulos das notícias que acompanham as tabelas, incentivando-os a avaliar se a tabela contém todos os dados relacionados ao assunto em questão.

A **atividade 14** promove a reflexão sobre as diversas apresentações dos dados no exemplo abordado no início do tópico e a adequação de cada uma delas de acordo com o que se deseja comunicar para a tomada de decisão ou resolução de um problema.

Na **atividade 15**, incentive os estudantes a coletar e anotar os dados e, em seguida, organizá-los em uma tabela de dupla entrada. Como a atividade traz um assunto de interesse dos jovens, reserve um tempo para que eles conversem entre si. É importante que exercitem a empatia e respeitem a diversidade de opiniões, preferências e culturas. Ao reforçar a importância desse respeito, favorece-se o desenvolvimento da **competência geral 9**.

Para resolver a **atividade 16**, os estudantes deverão pesquisar a medida da área territorial da Índia para calcular a densidade demográfica desse país em 2022. Caso julgue oportuno, amplie a atividade e oriente-os a calcular a densidade demográfica do município e da região onde moram e do Brasil.

Os gráficos ilustrados no subtópico *Organizando e apresentando dados em gráficos* trazem temas ricos para serem explorados com os estudantes. Por exemplo, o primeiro gráfico aborda a divulgação da distribuição de incêndios por tipo de ocupação. O **TCT Trabalho** se relaciona com o gráfico "Juventude e trabalho", na medida em que o estudante é levado a refletir sobre a relação percentual de jovens ocupados e desempregados, durante o período de 2012 a 2019. O último gráfico, "Menos doutores na pandemia", exibe um panorama do impacto da pandemia na titulação de doutores no Brasil, publicado na *Pesquisa Fapesp*, um tema diretamente relacionado ao **ODS 4: Educação de qualidade**.

O gráfico apresentado em *Gráfico de linha* ilustra o monitoramento do desmatamento na Amazônia Legal entre 2011 e 2023. A análise dessas informações e o combate ao desmatamento fortalecem o alcance das metas do **ODS 15: Vida terrestre**, que tem como um de seus objetivos promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres. A perda de florestas ameaça a biodiversidade, contribui para as mudanças climáticas e afeta os serviços ecossistêmicos que são vitais para o bem-estar dos seres vivos.

O subtópico *Gráfico múltiplo* traz uma representação gráfica que permite analisar a população brasileira ocupada por sexo segundo os grupos de atividade, o que contribui para o **ODS 5: Igualdade de gênero**, que visa alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas. Isso inclui garantir a igualdade de participação e de oportunidades das mulheres em todos os níveis de tomada de decisão na vida política, econômica e pública. As informações contidas no gráfico produzido com base em uma publicação do IBGE permitem identificar desigualdades de gênero no mercado de trabalho, o que contribui para o desenvolvimento do **TCT Trabalho**. A **atividade 21** retoma a análise dessa representação gráfica e propõe a escrita de conclusões baseadas nas informações apresentadas no gráfico.

Para ampliar a **atividade 18**, pode-se pedir aos estudantes que observem a conta de energia elétrica de suas residências para comparar com os valores da atividade. Algumas trazem a informação de consumo dos últimos doze meses em um gráfico de barras horizontais.

As **atividades 20** e **22** promovem a reflexão sobre dados representados em pictogramas, uma vez que é preciso avaliar a melhor relação entre o símbolo usado e a frequência que ele representa. Já a **atividade 23** propõe a construção e a análise de gráficos de linhas para representar a quantidade de acidentes e óbitos causados por escorpiões no estado de São Paulo. Essas estatísticas podem levar a discussões sobre educação em saúde, conscientização sobre os riscos associados aos escorpiões e medidas preventivas que as pessoas podem tomar para evitar picadas. Também podem ser exploradas as políticas de saúde pública relacionadas ao controle de pragas e ao manejo ambiental para reduzir a população de escorpiões em áreas urbanas e rurais, o que contribui para o desenvolvimento do **TCT Saúde**.

Explore a **decomposição**, um dos pilares do pensamento computacional, no desenvolvimento da **atividade 24**. Após a leitura e compreensão da situação, oriente os estudantes a estabelecer e ordenar tarefas menores para solucionar a atividade proposta. Por exemplo, organizar os dados em uma tabela de frequências, calcular as porcentagens, calcular a medida da abertura do ângulo central de cada setor e, por fim, elaborar o gráfico de setores.

Se possível, leve os estudantes à sala de informática ou peça a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos apresentados em *Planilhas eletrônicas na construção de gráficos*, para desenvolver a **competência geral 5**, compreendendo e utilizando ferramentas digitais para transmitir e organizar informações e produzir conhecimento. Planilhas eletrônicas são ferramentas úteis, mas é importante saber construir os gráficos com lápis e papel. Ressalte, ainda, que é importante saber escolher o tipo de gráfico que melhor representa um conjunto de dados, bem como saber ler e analisar criticamente as informações apresentadas.

É sugerido o uso de uma planilha eletrônica na realização das **atividades 25** a **27**. Na **atividade 25**, verifique se os estudantes percebem que, em um gráfico de linha, os pontos representam os dados e as linhas são apenas auxilia-

res; portanto, nada pode ser afirmado a respeito do período entre cada ano representado no gráfico. As **atividades 26** e **27** levam os estudantes a refletir sobre a melhor maneira de comunicar uma situação apresentada: por meio de tabela ou de gráfico. Na representação gráfica, a opção por diferentes tipos de gráfico depende do objetivo da análise da situação. Por exemplo, quando se quer comparar um dado com o conjunto de dados, isto é, com o todo, convém o uso do gráfico de setores. No caso de comparar um dado com outro dado, o gráfico de barras pode ser mais adequado.

Trabalho e juventudes – Pais não podem tirar licença-paternidade em 67 nações

Objetivos

- Refletir sobre a importância e a duração da licença-paternidade.
- Ler e interpretar dados organizados em gráficos.

Orientações didáticas

Nesta seção, os estudantes vão refletir sobre a importância da licença-paternidade e da participação do pai no início da vida da criança. A pauta tratada nesta seção está relacionada ao **ODS 5: Igualdade de gênero**, ao **ODS 8: Trabalho decente e crescimento econômico** e ao **ODS 10: Redução das desigualdades**, porque promove a igualdade de responsabilidades entre homens e mulheres no cuidado dos filhos, corroborando a redução nas disparidades de gênero no trabalho e em casa.

Leia o texto com os estudantes e, em seguida, incentive-os a verbalizar o que consideraram mais relevante. Proponha a eles que façam as **atividades 1** e **2** durante a dinâmica. Na **atividade 1**, é possível levantar fatores como desigualdade de gênero, capacidade das mulheres de amamentar, entre outros. Antes de responderem à **atividade 2**, apresente dados sobre a demissão de mulheres após o período de licença-maternidade ou peça aos estudantes que façam uma pesquisa. É possível que a pesquisa feita por eles revele que, quando as mulheres têm filhos, elas encontram mais dificuldades para ser contratadas ou conseguir salários equiparados ao dos homens no desempenho da mesma função. Nessa perspectiva, a ampliação da licença-paternidade poderia diminuir a influência do gênero como fator de diferenciação em contratações e salários.

A **atividade 3** trabalha com a leitura e a interpretação de gráficos. Analise cada afirmação com os estudantes e pergunte por que as afirmações são verdadeiras ou falsas. Você pode ampliar a proposta dessa atividade e pedir a eles que elaborem questões com base nos gráficos para que um colega as responda.

A **atividade 4** demanda uma pesquisa dos estudantes sobre trabalho plataformizado, um modelo mais flexível e informal de trabalho, que não garante direitos trabalhistas pelo fato de os trabalhadores serem autônomos mediados por uma plataforma, e cuja instabilidade não dá segurança ao trabalhador que pretende se afastar temporariamente para cuidar dos filhos.

Para finalizar o capítulo 1

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 2 Análise de dados

Objetivos

- Organizar dados e construir tabelas de frequências.
- Interpretar e construir histogramas e diagramas de ramo e folhas.
- Interpretar dados apresentados por meio de gráficos diversos.

Justificativa dos objetivos

Ao organizar dados em tabelas ou graficamente, muitas vezes é necessário usar intervalos para que as informações sejam mais bem transmitidas, e é importante saber identificar a melhor forma de representação, além de analisar as representações de maneira crítica, percebendo eventuais artifícios usados para manipular a informação.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 4**, **5**, **7** e **9**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

Competência específica 1: **EM13MAT102**.

Competência específica 3.

Competência específica 4: **EM13MAT406** e **EM13MAT407**.

- **Competência específica e habilidade da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**

Competência específica 3[1]: **EM13CNT302**[2].

- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas:**

Competência específica 1[3]: **EM13CHS103**[4] e **EM13CHS104**[5].

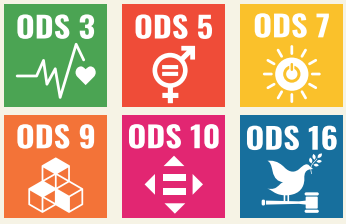
Competência específica 5[6]: **EM13CHS502**[7].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Educação Ambiental
- Educação em Direitos Humanos
- Educação para o Consumo
- Saúde
- Trabalho
- Vida Familiar e Social

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável



Orientações didáticas

A **competência específica 3** é ressaltada em vários momentos deste capítulo, uma vez que os estudantes deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos.

A abertura trata do uso de internet em áreas urbana e rurais por regiões em 2022 e o uso em diferentes faixas etárias em 2021 e 2022 no Brasil. Retome com os estudantes a relevância da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNAD Contínua), assunto abordado no capítulo anterior, e explore os dados apresentados, evidenciando o aumento do uso da internet no Brasil e as disparidades regionais. Faça perguntas, como: "Por que a zona rural da região Norte registra porcentagem menor do que as demais regiões?"; "O que pode estar contribuindo para o aumento do uso da internet na faixa etária de 60 anos ou mais?".

Discuta os benefícios da ampliação do uso da internet (maior autonomia, eficácia na comunicação e oportunidades educacionais e culturais) e as questões éticas relacionadas à inclusão digital, enfatizando a importância de garantir acesso e capacitação a todas as faixas etárias.

A expansão da internet e das tecnologias digitais contribui para realizar uma abordagem do **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura**, ao promover a inovação e o desenvolvimento de infraestruturas resilientes. A acessibilidade digital permite que novas indústrias floresçam e que setores tradicionais se modernizem, impulsionando o crescimento econômico sustentável. Simultaneamente, essa expansão também contribui para o desenvolvimento do **ODS 10: Redução das desigualdades**, ao facilitar o acesso a informações, serviços e oportunidades para populações marginalizadas e em áreas remotas.

Distribuição e frequências

Neste tópico, serão trabalhados os conceitos de frequência absoluta, frequência relativa e frequências acumuladas e será mostrado como são feitas tabelas de frequências para dados agrupados em intervalos.

1 **(Competência específica 3)** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

2 **(EM13CNT302)** Comunicar, para públicos variados, em diversos contextos, resultados de análises, pesquisas e/ou experimentos, elaborando e/ou interpretando textos, gráficos, tabelas, símbolos, códigos, sistemas de classificação e equações, por meio de diferentes linguagens, mídias, tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC), de modo a participar e/ou promover debates em torno de temas científicos e/ou tecnológicos de relevância sociocultural e ambiental.

3 **(Competência específica 1)** Analisar processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais nos âmbitos local, regional, nacional e mundial em diferentes tempos, a partir da pluralidade de procedimentos epistemológicos, científicos e tecnológicos, de modo a compreender e posicionar-se criticamente em relação a eles, considerando diferentes pontos de vista e tomando decisões baseadas em argumentos e fontes de natureza científica.

4 **(EM13CHS103)** Elaborar hipóteses, selecionar evidências e compor argumentos relativos a processos políticos, econômicos, sociais, ambientais, culturais e epistemológicos, com base na sistematização de dados e informações de diversas naturezas (expressões artísticas, textos filosóficos e sociológicos, documentos históricos e geográficos, gráficos, mapas, tabelas, tradições orais, entre outros).

5 **(EM13CHS104)** Analisar objetos e vestígios da cultura material e imaterial de modo a identificar conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam a identidade e a diversidade cultural de diferentes sociedades inseridas no tempo e no espaço.

6 **(Competência específica 5)** Identificar e combater as diversas formas de injustiça, preconceito e violência, adotando princípios éticos, democráticos, inclusivos e solidários, e respeitando os Direitos Humanos.

7 **(EM13CHS502)** Analisar situações da vida cotidiana, estilos de vida, valores, condutas etc., desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificar ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT406** por apresentar e solicitar a construção de tabelas de frequências utilizando dados obtidos de amostras estatísticas, fazendo uso, em algumas situações, de planilha eletrônica, e envolvendo a **competência geral 5**, no emprego de tecnologia digital para comunicar e disseminar informações. O desenvolvimento da habilidade **EM13MAT406** vai ao encontro das **competências específicas 1** e **4**, já que adota procedimentos matemáticos na interpretação de diversas situações e possibilita uma eficiente comunicação de resultados por meio das tabelas de frequências.

Explore os dados sobre preços de um modelo de *tablet* com os estudantes e mostre como construir uma tabela com as frequências absolutas. Em seguida, complemente essa tabela com as frequências relativas. Para finalizar, complemente essa mesma tabela com as frequências absolutas acumuladas e as frequências relativas acumuladas. Depois, com o auxílio de uma planilha eletrônica, faça a **atividade resolvida R1**.

Nas **atividades 1** e **2**, os estudantes fazem reflexões, respectivamente, sobre um dos gráficos apresentados na abertura do capítulo e sobre o conceito de frequência relativa. Na **atividade 3**, são incentivados a construir uma tabela de frequências e a responder a alguns questionamentos sobre o conjunto de dados apresentados. Essa atividade é semelhante à **atividade resolvida R1**, que pode ser retomada, se necessário. Se considerar interessante, proponha aos estudantes que façam uma atividade similar a essa aproveitando a nota da turma. Pode-se, ainda, empregar o mesmo padrão de atividade adotando outras variáveis, como idade e medida da altura dos estudantes da sala.

Na **atividade 4**, os estudantes fazem a distribuição de frequências para dados agrupados em intervalos. Essa atividade, por meio de uma situação particular e contextualizada, conduz o estudante a antecipar uma noção do que será estudado no próximo subtópico.

O contexto do subtópico *Tabela de frequências para dados agrupados em intervalos* contribui para o desenvolvimento do **TCT Saúde** e do **ODS 3: Saúde e Bem-Estar**. A poluição sonora é um problema ambiental que traz impactos diretos e significativos na saúde. A exposição contínua a altas medidas de ruído pode levar a uma série de problemas de saúde física e mental, incluindo perda auditiva, distúrbios do sono e aumento do estresse, da ansiedade e da irritabilidade. Políticas públicas que visam controlar e reduzir as medidas de ruído e campanhas de educação sobre os efeitos nocivos da poluição sonora são atitudes importantes para garantir mais qualidade de vida e bem-estar geral da sociedade.

Explore os dados sobre os registros de medida de ruído. Mostre que, como há muitos dados distintos, a análise de uma tabela de frequências não poderia ser profunda nem diversificada, já que, provavelmente, cada dado aparece apenas uma vez. Assim, o agrupamento desses dados em intervalos permite uma melhor análise. Explique como a amplitude de cada intervalo é obtida e monte uma tabela com as frequências absoluta, absoluta acumulada, relativa e relativa acumulada.

Depois, faça a **atividade resolvida R2**, cujo contexto permite a discussão sobre a importância do uso racional da água e da redução da medida de tempo gasto nos banhos, abordando os **TCTs Educação Ambiental** e **Educação para o Consumo**.

Nas **atividades 5** a **7**, os estudantes fazem reflexões sobre o exemplo apresentado no início do subtópico e sobre conceitos do tema. A **atividade 7** permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT302** e **da competência específica 3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, ao comunicar resultados da pesquisa por meio de gráficos e tabelas. Essa competência se articula com a **competência geral 4** no que diz respeito à utilização de diferentes linguagens para partilhar informações.

Sugestão de atividade para a promoção da saúde mental dos estudantes

Após explorar o exemplo que trata de medidas de ruído, conscientize os estudantes sobre os impactos da poluição sonora na saúde mental e proponha um projeto relacionado ao tema, que pode contemplar o mapeamento de ruídos na escola e propostas de soluções para redução desses ruídos.

Na **atividade 8**, os estudantes analisam uma tabela de frequências com dados agrupados em intervalos. Essa atividade é semelhante ao exemplo apresentado na **atividade resolvida R2**. Se necessário, oriente-os a rever esse exemplo.

Na **atividade 9**, os estudantes devem completar a tabela com os dados faltantes. Chame a atenção deles para o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do pensamento computacional. Note que a amplitude dos intervalos dos dados permite preencher os demais intervalos da tabela. A frequência acumulada no intervalo [6, 8[é igual a 8 e no intervalo [4, 6[é 4, e isso permite calcular a frequência absoluta do primeiro intervalo, no caso 4, e deduzir que a frequência relativa nos dois primeiros intervalos é a mesma, ou seja, 8%.

Nas **atividades 10** e **11**, os estudantes devem organizar os dados apresentados em uma tabela de frequências com dados agrupados em intervalos. No **item a** da **atividade 10**, indica-se o primeiro intervalo. Oriente-os a utilizar a mesma amplitude para os demais intervalos. Na **atividade 11**, auxilie os estudantes a definir a quantidade de intervalos e a verificar o mais apropriado. Se os intervalos forem muito pequenos, haverá uma quantidade muito grande deles, e isso poderá significar que os dados não foram resumidos; se forem muito grandes, poderão indicar que houve excessiva perda de informações. Peça a alguns estudantes que utilizem 4 intervalos, outros, 5 e outros 6 intervalos. Ao final, peça-lhes que construam na lousa as tabelas obtidas e as analisem para identificar qual seria o intervalo mais adequado.

Na **atividade 12**, caso os estudantes tenham dificuldade em escolher a variável a investigar, dê algumas opções, como quantidade de pessoas que moram em sua casa, quantidade de irmãos, quantidade de livros lidos no último ano, número do calçado, medida do tempo de deslocamento de casa até a escola, entre outros.

Verifique se os estudantes percebem quando é coerente ou não organizar os dados em intervalos. Se necessário, após construírem as tabelas, escolha alguns casos para compartilhar com a turma e avaliar essa questão. Mostre que, quando

não há grande variedade de dados diferentes, a organização deles em intervalos não é conveniente (por exemplo, caso a variável observada seja a quantidade de irmãos, e na turma as quantidades variem entre 0, 1, 2, 3 e 4, não seria coerente organizar esses dados em intervalos).

Histograma e diagrama de ramo e folhas

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT406** e **EM13MAT407** ao explorar a construção, a interpretação e a análise de tabelas de frequências, histogramas e diagramas de ramo e folhas, e ao verificar quais representações são mais adequadas para cada situação.

Inicie comentando que um histograma é construído com base em uma tabela de frequências com dados agrupados em intervalos. Trabalhe com os dados apresentados no livro e comente que a tabela de frequências com dados agrupados em intervalos foi construída com essas informações. Utilize-as para construir o histograma. Comente que as colunas devem ser sempre dispostas lado a lado e com a mesma medida de largura. Em seguida, aproveitando esses mesmos dados, construa o diagrama de ramo e folhas correspondente. É importante sempre usar exemplos práticos e próximos da realidade dos estudantes para facilitar a compreensão desse tipo de gráfico. Ressalte para a turma que a interpretação de um diagrama de ramo e folhas auxilia a entender a distribuição de dados numéricos de maneira simples e visual.

Na **atividade 13**, os estudantes devem construir a tabela de frequências com base no histograma fornecido.

As **atividades 14** e **15** são atividades de reflexão e podem ser feitas em duplas.

Na **atividade 16**, os estudantes devem construir um histograma com base na tabela de frequências.

Na **atividade 17**, ressalte como o diagrama é construído, destacando a separação entre o "ramo", primeiros dígitos, e as "folhas", últimos dígitos. Motive-os a construir um diagrama com um conjunto de dados simples, como idade ou medida da altura dos colegas da turma.

A **atividade 18** trabalha diferentes representações de um mesmo conjunto de dados e instiga os estudantes a analisar qual é a mais conveniente para o caso. Incentive os estudantes a analisar as vantagens e desvantagens de cada uma.

Outras representações gráficas

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT102** e **EM13MAT407**, já que propõe situações que permitem a análise de diversos tipos de gráfico divulgados por diferentes meios de comunicação.

Muitas das situações apresentadas têm contextos econômicos e sociais que permitem trabalhar o posicionamento crítico dos estudantes, bem como a análise dos dados fornecidos, a elaboração de hipóteses e argumentação sobre as questões apresentadas. É possível também trabalhar em parceria com um professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, já que as situações favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS103**.

Analise com os estudantes os gráficos apresentados nos exemplos. No exemplo sobre adultos que não conseguem ter filhos, comente que esse tipo de gráfico também é conhecido como gráfico de bolha e que os valores são proporcionais às suas medidas de áreas. Esse tipo de gráfico tem a desvantagem de não representar o zero e os dados negativos, além de não ser o mais acertado para situações muito complexas em que os círculos ficam sobrepostos.

No exemplo sobre quantidade de filhos por mulher é utilizado um gráfico de linhas com a região abaixo delas pintada. Por isso, também são conhecidos como gráfico de áreas e são ideais para visualizar tendências ao longo do tempo e comparar dados. Em contrapartida, esse tipo de gráfico pode dificultar a leitura de informações e muitas linhas no mesmo gráfico podem prejudicar a análise.

No exemplo que trata de vitimização de mulheres no Brasil são trabalhados gráficos de setores e de barras, os quais permitem a comparação rápida das informações. No entanto, se houver muitos dados com valores próximos, a comparação fica prejudicada.

Aproveite esse exemplo e converse sobre a violência contra a mulher. Comente sobre a Lei Maria da Penha e outros instrumentos de proteção à mulher. Incentive os estudantes a explorar as informações do *site* https://www.institutomariadapenha.org.br (acesso em: 19 fev. 2024). A vitimização de mulheres no Brasil está intrinsecamente relacionada ao **ODS 5: Igualdade de gênero** e ao **ODS 16: Paz, justiça e instituições eficazes**. A violência contra as mulheres representa uma violação dos direitos humanos e uma barreira significativa para alcançar a igualdade de gênero. Além disso, a vitimização das mulheres frequentemente está associada a desigualdades estruturais, injustiças sociais e impunidade. Combater a vitimização das mulheres requer não apenas medidas para prevenir e punir a violência de gênero, mas também uma abordagem ampla que promova a educação, a conscientização e a mudança cultural para construir sociedades mais justas e igualitárias a todos.

Esse assunto também contribui para desenvolver os **TCTs Vida Familiar e Social** e **Educação em Direitos Humanos**. No âmbito da vida familiar e social, a violência de gênero frequentemente se manifesta em ambientes domésticos, impactando negativamente não só as vítimas, mas também a dinâmica familiar e a saúde emocional de todos os envolvidos. A educação em direitos humanos é fundamental para abordar essa problemática, pois promove a conscientização sobre os direitos fundamentais e a dignidade humana, além de incentivar atitudes de respeito e igualdade de gênero. Integrá-la nas escolas e comunidades auxilia na desconstrução de preconceitos e no empoderamento de mulheres e meninas, fomentando uma cultura de paz e respeito.

A situação apresentada nesse exemplo articula-se também com as **competências gerais 7** e **9** no que diz respeito à possibilidade de defesa de ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, além de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos.

Na página 50, é apresentado um gráfico de barras agrupadas que ajuda na observação de tendências. A venda de veículos elétricos é o tema desse exemplo. O avanço e a adoção generalizada desses veículos são essenciais para

mitigar as mudanças climáticas e melhorar a qualidade do ar, alinhando-se diretamente com o **TCT Educação Ambiental** e as metas do **ODS 7: Energia limpa e acessível**.

No exemplo que aborda um jogo de futebol para *videogame* é apresentado um gráfico de radar, que permite representar diversas variáveis. Entretanto, se a variação dos valores for muito grande ou se os valores das variáveis forem muito próximos, as comparações ficam prejudicadas.

Trabalhando com as culturas juvenis

O **exemplo e** explora o conhecimento matemático em um contexto cujo tema é da cultura juvenil, os jogos de *videogame*. Pergunte aos estudantes se gostam de *videogame*. Em caso afirmativo, questione-os sobre os jogos de que eles gostam, se conhecem jogos que usam gráficos e qual seria a função desses gráficos nos jogos.

A **atividade resolvida R3** pede que se construa um pictograma a partir dos dados apresentados em uma tabela. Comente com os estudantes que os dados desse tipo de gráfico são de fácil comparação, mas que, para valores grandes, é necessário considerar aproximações em vez dos valores exatos.

Na **atividade resolvida R4**, os estudantes são motivados a construir um gráfico de linhas duplas e de barras duplas com os dados apresentados. Se possível, leve-os à sala de informática ou peça a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica.

Na **atividade 21**, comente que o símbolo escolhido poderia representar outros valores. Entretanto, é necessário que essa escolha seja adequada para não induzir a falsas interpretações e para que o gráfico fique compreensível. Por exemplo, não é conveniente que cada símbolo represente 100.000 habitantes, pois, nesse caso, teríamos de fazer um gráfico com muitos símbolos e ele não seria fácil de compreender. Já um gráfico em que cada símbolo representasse 10.000.000 de habitantes poderia induzir a falsas interpretações.

Na **atividade 23**, os estudantes devem construir um pictograma com os dados apresentados. Em geral, o IBGE publica anualmente estimativas populacionais para todos os municípios do Brasil. Caso os estudantes não encontrem a população atualizada do município, oriente-os a fazer a busca no *site* do IBGE.

Na **atividade 24**, oriente-os a construir dois gráficos diferentes usando planilhas eletrônicas para representar os dados apresentados, desenvolvendo a **competência geral 5**.

Na **atividade 25**, os estudantes analisam os tipos de fonte de energia usados no Brasil. Os dados apresentados na atividade favorecem uma abordagem dos **TCTs Educação Ambiental** e **Educação para o Consumo**.

A **atividade 26** permite trabalhar com os **TCTs Vida Familiar e Social** e **Educação em Direitos Humanos**. É possível, também, fazer uma articulação com a **competência geral 9**, em relação ao acolhimento e à valorização da diversidade de indivíduos e grupos sociais. A atividade dá, ainda, condições de trabalhar, de forma interdisciplinar, com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS502**, ao trazer para análise situações da vida cotidiana, desnaturalizando e problematizando formas de desigualdade, preconceito, intolerância e discriminação, e identificando ações que promovam os Direitos Humanos, a solidariedade e o respeito às diferenças e às liberdades individuais.

Nas **atividades 27** a **29**, os estudantes são motivados a analisar dados apresentados por escrito e em gráficos ou em três gráficos simultaneamente. Assim, se necessário, organize a turma em duplas para a realização dessas atividades.

Na **atividade 28**, incentive a conversa sobre a Educação Indígena, ressaltando a importância de preservar as línguas e culturas indígenas. Aproveite para conversar sobre o multiculturalismo no Brasil com a presença de diferentes culturas e etnias no território do país. A Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco) proclamou o decênio 2022-2032 como a Década Internacional das Línguas Indígenas. Nos *links* a seguir, há textos que podem auxiliá-lo na conversa sobre essa temática: https://www.scielo.br/j/delta/a/zQLRgMwXjWRKjs7QHfJskpq/ e https://www.unesco.org/pt/articles/lancamento-oficial-da-decada-internacional-das-linguas-indigenas-no-brasil (acessos em: 24 fev. 2024). O contexto abordado nessa atividade permite levar os estudantes a refletir e discutir sobre a importância da decolonialidade, uma vez que é uma proposta que busca romper com as estruturas de poder impostas pelo colonialismo. Ao longo da história, os povos indígenas foram submetidos à violência física e cultural por parte dos colonizadores, que tentaram apagar suas identidades, impondo seus valores e modo de vida. A decolonialidade propõe que sejam valorizadas e resgatadas culturas que foram historicamente marginalizadas. As tradições indígenas envolvem um grande conjunto de conhecimentos, como a relação com a natureza, a visão comunitária de organização social e a espiritualidade no dia a dia. Esses saberes foram considerados primitivos ou inferiores durante o processo de colonização, mas a decolonialidade reconhece que são formas valiosas de compreender o mundo. Ela valoriza as tradições e os costumes dos povos indígenas. Entre tantos aspectos da cultura indígena, o estilo de vida oferece alternativas aos modos de vida modernos, que se baseiam na exploração dos recursos naturais, no consumismo e na individualidade.

A conversa sobre esse tema favorece o desenvolvimento da **competência geral 9**, além de possibilitar uma abordagem interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, facilitando o desenvolvimento da habilidade **EM13CHS104**, já que a linguagem indígena pode ser vista como objeto da cultura imaterial e, por meio dela, podem ser identificados conhecimentos, valores, crenças e práticas que caracterizam sua identidade e a diversidade cultural desses povos.

Na **atividade 30**, os estudantes devem criar um problema usando gráficos pesquisados na mídia. Para ampliar a atividade, oriente-os a pesquisar dados apresentados em tabelas e, por meio de uma planilha eletrônica, construir dois tipos de gráficos com esses dados.

Trabalho e juventudes – Analista de dados

Objetivo

Compreender o que faz um analista de dados.

Orientações didáticas

A seção tem como tema a profissão de analista de dados e, ao apresentá-la, contribui para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e do **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura**. O Brasil sofre uma carência de profissionais relacionados à tecnologia, como analistas de dados e programadores.

Inicie comentando que as empresas têm cada vez mais dados à disposição e que, por isso, é importante saber lidar com eles e extrair informações que permitam tomadas de decisão adequadas. Explique que o analista de dados é o profissional que opera diferentes ferramentas tecnológicas para obter dados e processá-los e para entregar informações que sejam relevantes para um negócio.

Na **atividade 1**, os estudantes poderão opinar livremente a respeito das habilidades que acreditam ser colocadas em prática por um analista de dados no dia a dia. Promova uma conversa entre eles e peça que justifiquem suas respostas. Respostas possíveis são o pensamento crítico, uma vez que o profissional lida com análise de dados; capacidade de solucionar problemas, já que os dados são analisados com o intuito de ajudar a empresa a tomar decisões importantes para os negócios; capacidade de argumentar e de se expressar, visto que o analista de dados precisa comunicar de maneira evidente as conclusões a que chegou; resiliência, pois o analista de dados pode ter de superar eventuais pressões por resultados. A atividade favorece o debate e o desenvolvimento de argumentações a fim de defender suas ideias.

O objetivo da **atividade 2** é proporcionar aos estudantes a experiência de vivenciar o trabalho de um analista de dados. Inicialmente peça a eles que analisem os dados da planilha eletrônica e relatem o que mais lhes chamou a atenção. Depois, peça que respondam ao **item a**. Enfatize que faz parte do trabalho do analista de dados filtrar os dados mais importantes. Em seguida, proponha que respondam ao **item b**. Você pode ampliar a proposta desse item e questionar qual seria o estado em que a rede deveria ter mais oficinas. Espera-se que respondam que deveria ser o estado de São Paulo, pois tinha a maior frota de automóveis em dezembro de 2023.

Muitas vezes, a empresa precisa definir o foco para novos investimentos, e as informações fornecidas pelo analista de dados podem ser de grande valia. O **item c** da **atividade 2** simula uma dessas situações. O **item d** propõe aos estudantes uma reflexão sobre outros dados que poderiam ser importantes para a rede de oficinas. Despesas, lucro, grau de satisfação dos clientes e problemas mais frequentes apresentados pelos automóveis que chegaram às oficinas da rede são algumas das respostas possíveis. Saber, por exemplo, quais foram as despesas e o lucro é importante para o planejamento financeiro. Entender o grau de satisfação dos clientes contribui para o aperfeiçoamento dos serviços prestados. Já com o levantamento dos problemas mais frequentes apresentados pelos automóveis, a rede poderia investir recursos em peças específicas ou capacitar os funcionários para detectar e solucionar um problema.

A **atividade 3** solicita aos estudantes que pesquisem *softwares* ou linguagens de programação usados pelos analistas de dados. Eles podem pesquisar planilhas eletrônicas ou *softwares* de análise de dados, como Tableau e Power BI. As linguagens de programação que podem aparecer como resultado da pesquisa são Python, R ou SQL.

Para finalizar o capítulo 2

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 3 Medidas estatísticas

Objetivos

- Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam média, moda e mediana de uma distribuição.
- Calcular, interpretar e resolver situações-problema que envolvam amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão de um conjunto de valores observados.
- Construir e interpretar *box-plots*.
- Construir e interpretar diagramas de dispersão.

Justificativa dos objetivos

Na realização de pesquisas estatísticas, pode ser necessário escolher uma medida que resuma e represente os dados levantados ou ainda empregar uma medida para indicar quanto os dados estão dispersos. Para isso, é importante conhecer as medidas estatísticas e determinar quando é conveniente usar cada uma delas e outras representações gráficas.

BNCC

- **Competência geral da BNCC: 7**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1.

  Competência específica 2.

  Competência específica 3: **EM13MAT316**.

  Competência específica 4: **EM13MAT407**.

  Competência específica 5: **EM13MAT510**.

Os textos na íntegra da competência geral, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso
- Saúde

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Orientações didáticas

A **competência específica 3** é trabalhada em vários momentos deste capítulo, uma vez que os estudantes deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

Ao trabalhar a abertura do capítulo, ressalte que, nos últimos anos, o envelhecimento populacional tem se tornado cada vez mais acentuado. Avanços na medicina, melhora da qualidade de vida e desenvolvimento tecnológico têm elevado a expectativa de vida progressivamente, resultando em uma maior quantidade de pessoas idosas em relação à população total.

Contextualize os estudantes a respeito de motivos que colaboram para o processo do envelhecimento populacional, como a redução das taxas de natalidade, os avanços na medicina e as modificações nos padrões sociais e econômicos. Converse sobre as consequências disso, tanto em relação à necessidade de serviços de saúde e previdência, quanto no que diz respeito às inserções social e econômica da pessoa idosa. Assim, desenvolve-se um trabalho com os **TCTs Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso** e **Saúde**.

O tema sobre envelhecimento da população permite a discussão sobre cobertura universal de saúde, o acesso a serviços de saúde essenciais de qualidade e a medicamentos e vacinas essenciais seguros, eficazes, de qualidade e a preços acessíveis. Aborda-se, assim, o **ODS 3: Saúde e Bem-Estar**.

O estudo desse cenário por meio de conceitos matemáticos permite uma abordagem das **competências específicas 1** e **2**, pois possibilita ao estudante uma investigação do mundo e uma análise de situações sociais medidas pela Matemática.

Medidas de tendência central

Neste tópico, serão trabalhadas as medidas de tendência central, como média, mediana e moda, e as medidas de tendência central para dados agrupados. Os estudantes vão resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316**. Comente que a determinação dessas medidas e das medidas de dispersão que serão estudadas mais adiante ajuda a compreender um conjunto de dados. Fale da média aritmética e resolva o exemplo apresentado na lousa. Mostre outras situações, como o cálculo da média das notas bimestrais. Simule uma situação fictícia das notas de três bimestres de um estudante e peça que calculem mentalmente a nota mínima necessária no 4º bimestre para que a média das notas fique acima de 7. Reforce que a média não é necessariamente igual a um dos valores da variável.

Depois, comente sobre a média aritmética ponderada e resolva os exemplos apresentados no livro. O primeiro traz uma situação em que há valores repetidos. Assim, uma adição de vários termos iguais é substituída por multiplicações. No segundo exemplo, tem-se uma situação em que o peso representa a importância de cada valor. Nessa situação, a nota da prova de conhecimentos gerais (CG) tem uma importância maior que a nota da parte objetiva da prova do Enem, o que abre uma discussão sobre o acesso de todos à educação superior de qualidade no Brasil, abordando o **ODS 4: Educação de qualidade**. Você pode propor outra situação fictícia para o cálculo da média das notas bimestrais em que a nota do 1º bimestre tem peso 1, a do 2º bimestre tem peso 2, a do 3º bimestre, peso 3 e a do 4º bimestre, peso 4. Pergunte a eles qual nota tem "maior importância" na média final. Nesse caso, a do 4º bimestre.

Em seguida, trabalhe o conceito de moda. No segundo exemplo, reforce o fato de a moda poder ser empregada em variáveis qualitativas. Proponha outras situações, como os pedidos a serem feitos por uma loja de sapatos a uma fábrica. Pergunte aos estudantes se faria sentido o dono da loja calcular a média dos tamanhos mais vendidos e com esse valor realizar o pedido para a fábrica. Leve-os a concluir que não, pois se a loja vende mais sapatos do tamanho 40, que representaria a moda dos tamanhos, esse será o tamanho pedido. Comente também que um conjunto de valores pode ser amodal, bimodal ou multimodal. Nessas situações, é preciso ter outros parâmetros para compreender melhor um conjunto de dados. Mostre que, para um conjunto de valores multimodal, poucas conclusões podem ser feitas a respeito dos dados.

Depois, trabalhe com o cálculo da mediana, que é mais um parâmetro para a análise de dados. Dê destaque às diferenças de cálculo para situações com quantidades pares e ímpares de dados e resolva o exemplo apresentado. Explore o fato de a mediana representar melhor um conjunto de dados em situações em que há extremos de valores no conjunto de dados.

Oriente os estudantes a acompanhar a **atividade resolvida R1**. Essa atividade faz uma aplicação direta dos conceitos de média, mediana e moda. Em seguida, tire as eventuais dúvidas. Na **atividade resolvida R2**, verifique se os estudantes entenderam

o uso de uma média entre dois elementos para calcular a média entre todos os dados apresentados. Na **atividade resolvida R3**, destaque a importância de calcular as frequências absolutas acumuladas para determinar a mediana desses dados. Após o trabalho com as atividades resolvidas, oriente-os a resolver as atividades propostas.

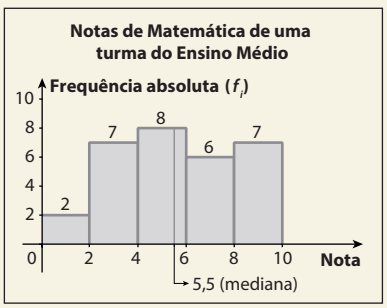
Se preferir, organize a turma em duplas para resolver as **atividades 1** a **6**. A troca de experiências e conhecimentos pode ajudar na resolução. A **atividade 2** aborda a análise de um algoritmo e as **atividades 3** a **6** são aplicações dos conceitos trabalhados. Na **atividade 3**, avalie a conveniência de pedir aos estudantes que estimem os resultados mentalmente com aproximações, depois façam os cálculos no caderno e, por fim, comparem os resultados com as estimativas.

Na **atividade 10**, os estudantes devem concluir que o total de gols marcados em 80 jogos é o produto da média de gols pela quantidade de jogos. Nas **atividades 11** e **12**, os estudantes são levados a elaborar problemas relacionados ao cálculo de média, mediana e moda. Oriente-os a determinar a moda no conjunto de dados apresentado pelo colega na **atividade 12**. Comente que, eventualmente, o conjunto de dados pode ser amodal ou ter mais de uma moda. Ao elaborar o enunciado de um problema relacionado a moda, média e mediana, os estudantes são motivados a compreender de uma maneira mais profunda os conceitos estatísticos e sua aplicação em situações do dia a dia. Além disso, são instigados a exercitar o pensamento crítico, desenvolver habilidades de formulação de perguntas e reforçar o entendimento sobre a importância de cada medida na análise de dados.

No subtópico *Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos*, resolva os exemplos apresentados e, ao definir o ponto médio de uma classe, apresente outros intervalos e calcule os respectivos pontos médios. Por exemplo, peça aos estudantes que determinem o ponto médio da classe [10, 12[(espera-se que eles concluam que seja 11).

No segundo exemplo, oriente-os a copiar no caderno a tabela de frequências das notas de Matemática adicionando os parâmetros PM_i e $f_i \cdot PM_i$ e preenchendo cada célula dessa tabela. Outra dinâmica viável é organizar a turma em duplas para que preencham a tabela. Depois, resolva na lousa e explique eventuais diferenças obtidas pelos estudantes.

Caso julgue pertinente, oriente os estudantes a copiarem o histograma "Notas de Matemática de uma turma do Ensino Médio" no caderno e, nele, localizarem a mediana das notas da turma. Se tiverem dificuldade, faça os cálculos com eles e localize a mediana no histograma, conforme indicado na imagem a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Depois, faça a **atividade resolvida R4**, que é semelhante aos exemplos apresentados. Se necessário, associe os cálculos a serem realizados com os dos exemplos. Em seguida, oriente os estudantes a resolverem as **atividades 13** a **15**, que são semelhantes à **atividade resolvida R4**.

Na **atividade 16**, pode-se propor aos estudantes que façam uma pesquisa com os colegas da turma utilizando uma variável quantitativa. Por exemplo, pode ser escolhida a variável medida de tempo que levam no banho. Após calcular as medidas de tendência central dessa pesquisa, eles deverão observar se há desperdício de água (considerando que o ideal é um banho de cerca de 5 minutos). Esse tipo de trabalho favorece o desenvolvimento da **competência geral 7**.

Medidas de dispersão

Neste tópico, os estudantes vão resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem medidas de dispersão, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT316**.

Metodologias ativas

Antes da aula em que serão apresentadas as medidas de dispersão, adote, se julgar pertinente, a proposta da **sala de aula invertida**, em que os estudantes devem estudar previamente o assunto a ser trabalhado. Nesse caso, o objetivo é que entendam o significado dessas medidas. Assim, organize a turma em trios e peça para que calculem a média e as medidas de dispersão dos seguintes dados: 1, 2, 2, 2, 5 e 6. Eles devemconcluir que:

- a média é igual a 3;
- a amplitude é igual a 5;
- o desvio médio é aproximadamente igual a 1,67;
- a variância é aproximadamente igual a 3,33;
- o desvio padrão é aproximadamente igual a 1,83.

Depois, proponha os seguintes questionamentos: "Os dados estão próximos ou distantes da média? As medidas de dispersão estão representando bem a variabilidade dos dados?".

Você pode ampliar a proposta e solicitar que façam os mesmos cálculos e análises, agora considerando um conjunto de dados que tenha um valor discrepante.

Se julgar conveniente, mostre aos estudantes que, nas planilhas eletrônicas, há fórmulas estatísticas prontas para calcular algumas medidas de tendência central e de dispersão para conjuntos de dados numéricos. Mencione que esse recurso pode ser útil quando o número de elementos de uma amostra for muito grande e os dados não estiverem agrupados. Nesse caso, ordenar os dados e calcular cada uma das medidas pode ser bem trabalhoso e acarretar erros que poderiam atrapalhar a interpretação dos resultados.

Para usar essas funções estatísticas, basta digitar os dados na planilha (cada dado em uma célula), escolher a medida que se deseja calcular e selecionar o conjunto de dados.

Em algumas planilhas, temos:

- MÉDIA para calcular a média aritmética;
- MODO.ÚNICO para determinar a moda, caso ela seja única;
- MED para encontrar a mediana;
- DESV.MÉDIO para calcular o desvio médio;
- VAR.P para calcular a variância;
- DESVPAD.P para calcular o desvio padrão.

Não há uma função pronta para o cálculo da amplitude, mas ela pode ser obtida pela diferença entre duas funções: MÁXIMO (que retorna o maior valor de um conjunto de dados) e MÍNIMO (que retorna o menor valor de um conjunto de dados).

Proponha aos estudantes que, reunidos em dois grupos, escolham uma variável quantitativa (medida da altura, por exemplo). Eles devem coletar os dados e inseri-los em uma planilha eletrônica, calcular as medidas de tendência central e de dispersão para cada um dos grupos e comparar os resultados obtidos.

Depois, faça as **atividades resolvidas R5** e **R6**. Se preferir, você pode construir um quadro na **atividade resolvida R5** semelhante ao da **atividade resolvida R6**, que contém os cálculos de $x_i - \bar{x}$, $|x_i - \bar{x}|$, $(x_i - \bar{x})^2$. Isso ajudará os estudantes a estabelecerem uma organização dos dados que precisam ser calculados e desenvolver o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do pensamento computacional. Depois, oriente-os a resolver as atividades propostas, as quais podem ser feitas em duplas. As **atividades 17** e **18** propõem reflexões; já as **atividades 19** a **24** são aplicações dos conceitos estudados. Como são muitas fórmulas e conceitos envolvidos, o trabalho em equipe pode ajudar na troca de experiências e conhecimentos.

Após a correção da **atividade 19**, comente que as **alternativas a** e **c** apresentam informações que deveriam estar relacionadas. Oriente-os a observar que, como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, se a variância for maior do que 1, o desvio padrão também será maior do que 1; se a variância for menor que 1, o desvio padrão também será menor do que 1. Isso evitaria cálculos desnecessários durante o vestibular, como o cálculo da média, mediana e moda, que são mais fáceis de serem obtidos.

Na **atividade 22**, retome o **reconhecimento de padrões**, pilar do pensamento computacional, para analisar o desvio padrão dos dois conjuntos de dados.

Na **atividade 24**, se houver necessidade, retome com os estudantes como se obtêm os dados por meio de um diagrama de ramo e folhas.

No subtópico *Medidas de dispersão para dados agrupados em intervalos*, relembre os estudantes que, para determinar as medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos, é necessário determinar o ponto médio da classe. Isso também deve ser feito no trabalho com as medidas de dispersão para dados agrupados em intervalos. Por exemplo, o ponto médio para a classe [10, 14[será 12.

Resolva o exemplo apresentado no livro. Você pode calcular os valores de $(PM_i - \bar{x})$, $f_i \cdot |PM_i - \bar{x}|$, $(PM_i - \bar{x})^2$ e $f_i \cdot (PM_i - \bar{x})^2$ da primeira linha e orientar os estudantes a calcular os valores das demais linhas. Para isso, se possível, disponibilize calculadoras para eles. Depois, oriente-os a resolver as atividades propostas.

A **atividade 26** é semelhante ao exemplo trabalhado. Na **atividade 27**, mostre que a diferença para a **atividade 26** é que as informações são apresentadas no gráfico. Assim, oriente-os a concluir que esses dados poderiam ser assim representados:

Comparação entre automóveis de mesma marca e modelo

km/L	Quantidade de automóveis
[6, 8[	3
[8, 10[	8
[10, 12[	5
[12, 14[	2
[14, 16]	2
Total	20

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Box-plot

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT407** e da **competência específica 4**, pois, além de aprender a interpretar *box-plots*, os estudantes vão comparar e avaliar a conveniência do uso de diferentes representações.

Apresente o exemplo do livro e mostre como se definem os quartis. Se necessário, relembre como se determina a mediana de um conjunto de valores, seja este formado por uma quantidade par ou ímpar. Comente que, quando a quantidade de dados é ímpar, para determinar o 2º quartil (mediana), destacamos o elemento central do conjunto de dados ordenado e, para encontrar o 1º e o 3º quartil, encontramos a mediana dos valores menores que a mediana e dos valores maiores que a mediana, respectivamente.

Depois, mostre como se constroem os *box-plots* utilizando os dados das medidas de massa das laranjas. Se possível, leve os estudantes à sala de informática ou peça a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica. Algumas planilhas podem não oferecer a opção de inserir o *box-plot* diretamente; portanto, é importante verificar como funciona esse recurso na planilha que você costuma usar antes de propor aos estudantes essa construção.

Caso não seja possível construir os *box-plots* por meio de uma planilha eletrônica, oriente-os a construí-los no caderno com base nos dados ordenados, lembrando de calcular a mediana, os valores do 1º e do 3º quartil e os limites superior e inferior. Nesse caso, é importante que os dados estejam adequadamente espaçados, como em um eixo numérico, e que os estudantes percebam que, nesse conjunto, o máximo e o mínimo, respectivamente, são os limites superior e inferior do *box-plot*, não havendo valores extremos acima ou abaixo do gráfico. Essa construção ajudará no entendimento dessa representação gráfica e na resolução das atividades propostas.

Leia os exemplos apresentados referentes às medidas da altura dos times do 2º ano comentando as conclusões apresentadas principalmente com relação à amplitude, à mediana e à distribuição dos dados.

Em seguida, oriente a turma a resolver as **atividades 28** a **33**, que podem ser feitas em duplas ou em trios. Como muitos estudantes têm dificuldade em entender esse tipo de representação gráfica, o trabalho em equipe pode ajudar na troca de conhecimentos.

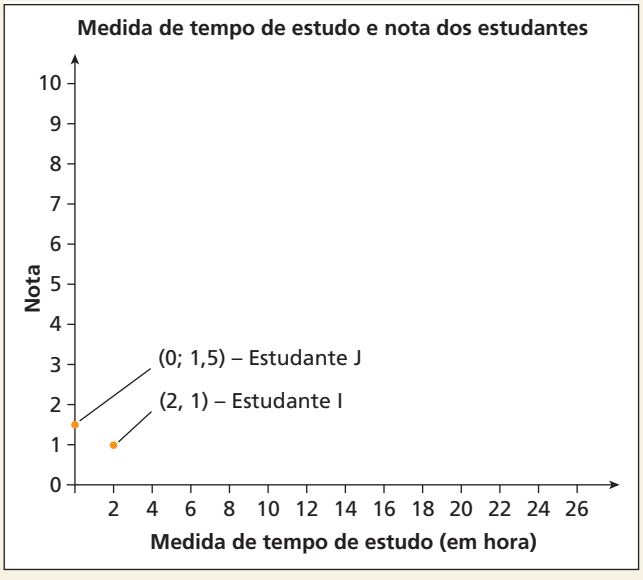
De modo geral, temas como o abordado na **atividade 30** geram interesse nos jovens. Se preferir, a mediação do **item i** pode ser feita antes da atividade, para que os estudantes se sintam engajados antes de analisar as representações gráficas. Caso algum estudante saiba resolver um cubo mágico ou tenha um em casa, pode-se sugerir a ele que o traga para a sala de aula, para que os colegas experimentem e tentem resolvê-lo.

Se necessário, na **atividade 30**, relembre como é feita a leitura de um gráfico de ramo e folhas e conclua que há 44 dados nesse conjunto de informações. O objetivo dessa atividade é comparar as três representações gráficas e verificar qual é o melhor uso para cada uma delas. As conclusões obtidas nessa atividade serão utilizadas para elaborar problemas nas **atividades 31** e **33** e resolver a **atividade 32**.

Diagrama de dispersão

Este tópico favorece o desenvolvimento da **competência específica 5** e da habilidade **EM13MAT510**, pois os estudantes investigarão conjuntos de dados relacionados ao comportamento de duas variáveis quantitativas usando planilhas eletrônicas e aprenderão a utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Comente que esse tipo de diagrama é muito importante para verificar se existe relação entre duas variáveis quantitativas. Oriente-os a observar que a medida de tempo de estudo e a nota de cada estudante formam um par ordenado de um ponto que pode ser representado graficamente. Represente alguns desses pontos na lousa.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Se possível, leve os estudantes à sala de informática da escola ou peça a eles que, em casa, reproduzam os procedimentos em uma planilha eletrônica. Em algumas planilhas, o procedimento para essas construções pode ser diferente do indicado; portanto, verifique como funcionam esses recursos na planilha que você costuma usar antes de propor aos estudantes essas construções.

Depois, mostre que existe um parâmetro que procura medir quão bem a relação entre as variáveis pode ser expressa por uma reta, chamado de correlação linear, representado por r_{xy}. Esse valor estará sempre entre –1 e 1 e, quanto mais próximo desses valores, mais forte será a relação entre as variáveis; quanto mais próximo de zero, mais fraca será essa relação. Os gráficos apresentados no livro ilustram essas situações.

Na **atividade 37**, caso não seja possível utilizar uma planilha eletrônica, mostre na lousa como ficaria a representação dos pontos apresentados e da reta que apresenta a relação entre as variáveis.

Em seguida, proponha perguntas, como: "A correlação é positiva ou negativa?" (Positiva.); "A correlação está mais próxima de 1 ou de zero?" (Mais próxima de 1, pois é aproximadamente igual a 0,84.); "Existe uma forte ou uma fraca relação entre as variáveis?" (Existe uma forte relação entre as variáveis, pois a correlação está mais próxima de 1.).

Para finalizar o capítulo 3

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 4 Análise combinatória

Objetivos

- Compreender e aplicar o princípio multiplicativo.
- Aplicar as noções de fatorial.
- Identificar a natureza dos problemas de contagem.
- Compreender e aplicar os conceitos e as fórmulas de permutação, arranjo e combinação na resolução de problemas.

Justificativa dos objetivos

Os métodos para fazer a contagem, de forma eficiente, dos elementos de conjuntos, com e sem o uso de fórmulas, é o objeto de estudo deste capítulo. Esse estudo é uma ferramenta para o cálculo de probabilidades, assunto que será estudado no capítulo 5.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 1**, **2**, **3** e **4**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 3: **EM13MAT310** e **EM13MAT315**.

  Competência específica 4.

  Competência específica 5.
- **Competência específica e habilidade da área de Linguagens e suas Tecnologias:**

  Competência específica 6[1]: **EM13LGG601**[2].
- **Competência específica e habilidade da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas:**

  Competência específica 6[3]: **EM13CHS604**[4].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Educação Alimentar e Nutricional
- Educação para o Trânsito

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

Orientações didáticas

O tema de abertura deste capítulo aborda a necessidade de criar senhas cada vez mais seguras, visto que no mundo atual lidamos com o armazenamento de diversos dados pessoais e sigilosos na rede.

Esse assunto propicia o desenvolvimento do **TCT Ciência e Tecnologia**, além de ser de interesse do universo juvenil. Converse com a turma sobre o desenvolvimento da tecnologia, consequentemente, o aumento do rigor da segurança das senhas pessoais. Ressalte que existem programas que geram senhas automáticas de alta precisão de segurança, mas que também é possível compor senhas seguras seguindo algumas dicas. Pergunte aos estudantes como eles fazem para formar senhas e se lembrar delas posteriormente. Leve-os a refletir se os critérios adotados por eles para a formação de senhas são considerados seguros ou se precisam trocá-las por senhas mais fortes.

Após apresentar o esquema dado na abertura para avaliar a segurança de senhas, aproveite para apresentar as dicas a seguir para a turma.

- Dê preferência a *sites* e serviços virtuais que tenham sistema de segurança complexo. Para acessá-los, além de uma senha, é preciso passar por uma etapa extra, como digitar um código autenticador ou reconhecer caracteres na tela.
- Alguns navegadores gravam as senhas para não precisar digitá-las novamente. No entanto, mesmo dentro de casa, a privacidade pode estar em perigo.
- Uma senha segura tem pelo menos 8 caracteres. Mas é bom fugir do óbvio. Imagine frases aleatórias, como "ratos albinos sorridentes trituram macarrão"; isole as duas primeiras letras de cada palavra (ra + al + so + tr + ma); substitua algumas letras por números (a por 4, por exemplo); e inclua outros caracteres na combinação, de preferência no meio da palavra (r44l!so%tr*m4).
- Uma senha simples é facilmente descoberta por um *hacker*. Uma complexa, anotada em papel escondido, é bem menos acessível a estranhos.
- Computadores são mais eficientes que humanos para criar senhas complexas e aleatórias.
- Um *software* espião pode descobrir uma senha em segundos, analisando combinações possíveis de palavras, números e caracteres especiais. Os primeiros alvos de um ataque desse tipo são palavras do dicionário.

Durante o trabalho com esta abertura, é favorecido o desenvolvimento das **competências gerais 1** e **2** e das **competências específicas 3** e **4**, bem como da habilidade **EM13MAT315**, pois, ao analisar o esquema na resolução do problema (saber se as senhas são seguras), os estudantes poderão retomar conhecimentos construídos sobre os mundos físico e digital, além de exercitar a curiosidade intelectual, refletir, analisar e investigar causas para resolver problemas e criar soluções, com base em conhecimentos da área tecnológica.

1 **(Competência específica 6)** Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.

2 **(EM13LGG601)** Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.

3 **(Competência específica 6)** Part esse exemplo icipar do debate público de forma crítica, respeitando diferentes posições e fazendo escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

4 **(EM13CHS604)** Discutir o papel dos organismos internacionais no contexto mundial, com vistas à elaboração de uma visão crítica sobre seus limites e suas formas de atuação nos países, considerando os aspectos positivos e negativos dessa atuação para as populações locais.

Ao abordar aspectos relacionados ao uso da tecnologia e à necessidade de senhas cada vez mais seguras, é possível estabelecer relação com o **ODS 17: Parcerias e meios de implementação**, do qual uma das metas é aumentar o uso de tecnologias de capacitação, em particular das tecnologias de informação e comunicação, com segurança e qualidade.

Contagem

Neste tópico, mostra-se que a Análise combinatória está presente em diversas situações cotidianas, como na análise de possibilidades para formar senhas. Esse assunto será desenvolvido e aprofundado, ao trabalhar com situações que envolvem problemas de contagem, empregando e desenvolvendo técnicas.

Verifique o conhecimento prévio dos estudantes dando exemplos que exigem contagem em níveis progressivos de dificuldade e verifique quais estratégias eles adotam para realizar essas contagens. Proponha também que formem senhas e registre-as na lousa. Peça que formem uma senha com 4 dígitos usando apenas letras. Aos poucos, aumente as permissões, por exemplo, deixando usar números também. Assim eles devem perceber que as possibilidades de senhas aumentam. Ao final, pergunte como fariam para determinar a quantidade de senhas possíveis de formar e comente que a Análise combinatória apresenta métodos para fazer essa contagem de maneira eficiente.

Durante o trabalho com este tópico e ao longo deste capítulo, os estudantes serão levados a resolver e elaborar problemas de contagem por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT310**. Além disso, a **competência específica 3** também é ressaltada em vários momentos, uma vez que os estudantes constantemente deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

No subtópico *Situações envolvendo problemas de contagem*, ao trabalhar com a árvore de possibilidades (ou diagrama de árvore, ou diagrama sequencial), verifique se os estudantes percebem que esse método permite uma representação de todas as possibilidades em um conjunto de elementos limitados e não muito extenso, auxiliando na compreensão da ideia intuitiva de combinatória. Comente que, para uma quantidade grande de elementos, a árvore de possibilidades não é viável, pois torna-se muito trabalhosa e, para conjuntos com quantidades infinitas de elementos, é impraticável.

O contexto da **atividade resolvida R1** envolve 2 estudantes que devem escolher lugares em um auditório entre 7 cadeiras. Peça à turma que cite outros exemplos parecidos com essa situação. Faça a **atividade resolvida R2** com a participação da turma. Verifique se os estudantes perceberam por que, na **atividade resolvida R3**, não é possível considerar o algarismo zero para o algarismo do milhar. Antes de abordar as explicações do livro, solicite a eles que tentem resolver sozinhos a **atividade resolvida R4** e que compartilhem suas estratégias com a turma.

Aproveite a **atividade resolvida R5** e peça aos estudantes que calculem o aumento da quantidade de placas diferentes após a substituição de um algarismo por uma letra no novo modelo em relação ao antigo. No modelo anterior era possível obter 175.760.000 placas distintas. Com o novo sistema, a quantidade de placas diferentes passou para 456.976.000, ou seja, um aumento de 281.216.000 de possibilidades. Essa atividade permite o trabalho com o **TCT Educação para o Trânsito**. Converse com a turma sobre a importância das placas dos veículos. Elas funcionam como a identidade dos carros, assim como o RG para as pessoas. Por serem fáceis de visualizar e memorizar, as placas permitem que os veículos sejam rapidamente identificados. Também são de grande importância para as autoridades, que dessa maneira são capazes de validar o estado legal do veículo, consultando o Imposto sobre a Propriedade de Veículos Automotores (IPVA), a mudança de proprietário e as restrições de leilões, entre outros.

Se achar conveniente, converse com algum professor da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e promova um trabalho interdisciplinar com base no contexto da **atividade resolvida R5**. Explique aos estudantes o que é o Mercosul e discuta quais seriam os objetivos de criar um sistema comum de emplacamento de veículos, explorando a habilidade **EM13CHS604**. Para obter informações sobre o Mercosul, é possível consultar o *site* https://www.gov.br/mre/pt-br/assuntos/mercosul (acesso em: 23 set. 2024). Segundo a Secretaria Nacional de Trânsito (Senatran), a criação de um sistema comum de emplacamento permite um controle mais rigoroso do transporte de cargas e de passageiros, bem como de veículos particulares entre os países que compõem o bloco.

Proponha a **atividade 1**. Para realizá-la, é importante que os estudantes tenham compreendido o desenvolvimento da árvore de possibilidades. As **atividades 1** a **4** favorecem o desenvolvimento da **competência geral 2** e da **competência específica 5**, pois ao resolvê-las os estudantes recorrerão à abordagem própria das ciências para investigar, elaborar hipóteses e estabelecer conjecturas, por meio da observação de padrões, sobre o princípio multiplicativo. A situação abordada na **atividade 2**, na qual 7 estudantes devem ocupar 2 lugares, é análoga à **atividade resolvida R1** quanto ao número de possibilidades. Logo, a quantidade será a mesma, ou seja, 42 maneiras distintas.

Ao propor aos estudantes que resolvam as **atividades 5** a **15**, eles serão motivados a aplicar o princípio multiplicativo, recorrendo à investigação e à elaboração de hipóteses e desenvolvendo o estabelecimento de conjecturas. Sugira que as resolvam em duplas, para trocar ideias entre si. Na **atividade 8**, espera-se que concluam que existem 9.000 números de 4 algarismos, pois $9.999 - 999 = 9.000$. Ao resolver a **atividade 10**, os estudantes devem perceber que a escolha de uma senha depende da quantidade de caracteres alfanuméricos usados. Se possível, leve-os a perceber que a quantidade de caracteres de uma senha pode dificultar as chances de ela ser descoberta. Na **atividade 11**, é importante que percebam que o zero não pode ser usado no primeiro algarismo, pois o número ficaria com apenas dois dígitos, e que, pela grande quantidade de possibilidades, não convém fazer a árvore de possibilidades, e sim aplicar o princípio multiplicativo.

Após a resolução da **atividade 16**, solicite aos estudantes que compartilhem suas ideias e estratégias com os colegas.

Aproveite o contexto da **atividade 17** e promova uma aula interdisciplinar com o professor da área de Linguagens e suas Tecnologias para explorar esse assunto. Pergunte aos estudantes o que sabem sobre sonetos e, depois, incentive-os a pesquisar ou produzir um soneto a ser apresentado para a turma. Além de favorecer o desenvolvimento da **competência geral 3**, pois motiva a valorização de diversas manifestações artísticas e culturais, a atividade permite o desenvolvi-

mento da habilidade **EM13LGG601**, pois os estudantes terão de analisar os sonetos e compreender sua diversidade.

Na **atividade 18**, verifique se os estudantes perceberam que, ao fixar os algarismos 9 e 6 nos primeiros dígitos das novas linhas telefônicas, sobrarão 8 possibilidades para o terceiro dígito, 7 para o quarto, 6 para o quinto, e assim por diante. Portanto, $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40.320$, ou seja, 40.320 possibilidades de novas linhas com todos os algarismos diferentes.

Aproveite a **atividade 19** e comente que o código Morse é um sistema de codificação usado para longas distâncias. Esse sistema usa sequências de sinais que podem ser impulsos elétricos transmitidos por cabos, sons ou luzes visíveis.

É interessante reforçar a estratégia usada na resolução da **atividade 20**, ou seja, para encontrar a quantidade de números que contêm o algarismo 3, basta subtrair do total a quantidade de números que não contêm nenhum 3.

Caso os estudantes apresentem dificuldades durante a resolução da **atividade 21**, pondere a conveniência de dar uma dica a eles: se essa escola tivesse 367 estudantes, então, necessariamente, pelo menos dois estudantes fariam aniversário na mesma data.

Para o trabalho das **atividades 22** e **23**, organize os estudantes em duplas. Durante a elaboração do problema da **atividade 23**, verifique se apresentam alguma dificuldade, como dúvidas para iniciar o problema ou para escolher o contexto, entre outras. Ao final, abra uma roda de conversa para o compartilhamento de problemas e resoluções.

Fatorial de um número natural

Neste tópico, o assunto abordado é muito importante para a Análise combinatória, pois apresenta uma notação concisa para realizar cálculos extensos que são usuais para resolver problemas de contagem.

Após as explicações teóricas, aproveite as **atividades resolvidas R6** e **R7** para verificar a habilidade dos estudantes de desenvolver e aplicar o cálculo envolvendo fatorial de um número natural. Faça, passo a passo, as atividades resolvidas e verifique se eles apresentam dificuldades. Se necessário, apresente outros exemplos.

As **atividades 24** a **32** têm como objetivo levar os estudantes a perceberem e se apropriarem de certas propriedades que facilitam as operações envolvendo fatoriais. Na **atividade 24**, explique à turma que o passo 2, no fluxograma, deve ser representado com o símbolo de decisão, pois é preciso verificar se $n < 2$. Sempre que usamos um símbolo de decisão podemos seguir dois caminhos. Nesse exemplo, caso n seja menor do que 2, o passo a ser executado será o 3, seguindo o fluxo indicado pelo "sim"; caso n seja maior ou igual a 2, o passo a ser executado será o 4, de acordo com o fluxo indicado pelo "não". Se julgar conveniente, reforce que a representação desse algoritmo está em um alto nível de abstração. Explique-lhes que o passo 4 é uma síntese do processo. O cálculo do referido produto demanda mais passos e uma maneira específica de escrevê-lo para que a máquina compreenda.

Na **atividade 24**, é favorecido o desenvolvimento da **competência específica 4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os estudantes vão ler e interpretar um algoritmo em linguagem corrente e em um fluxograma. A **atividade 28** apresenta os números 1, 2, 3 e 4 usando alguns símbolos matemáticos e propõe que eles expressem os números de 5 a 10 por meio desses símbolos. Essa proposta pode ser trabalhada em duplas. Na **atividade 29**, verifique se eles perceberam que devem calcular 6!. Na **atividade 30**, observe se notam a falta de uma cor de tinta para que o cálculo seja viável. Depois, pergunte: "Se houvesse a 5ª cor, de quantas maneiras diferentes esses portões poderiam ser pintados?". Espera-se que concluam que existiriam 120 maneiras diferentes.

Permutações

Neste tópico, é desenvolvida a ideia de ordenação dos elementos de um conjunto finito, no qual seus elementos não se repetem e são diferentes, levando os estudantes a compreender que a permutação simples é usada para determinar a quantidade de ordenações.

Após as explicações teóricas, trabalhe com as **atividades resolvidas R8** e **R9**. Verifique se os estudantes perceberam que podem utilizar permutação simples na resolução, mas não podem ser resolvidas apenas por isso. Na **atividade resolvida R8**, verifique se eles compreenderam o motivo de o cálculo usado não ser 5!.

Solicite aos estudantes que examinem sozinhos a **atividade resolvida R10** para verificar como lidam com os cálculos de permutação com elementos repetidos.

Na **atividade resolvida R11**, destaque o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do pensamento computacional, chamando a atenção dos estudantes para o fato de que deve ser calculada uma permutação de 6 elementos, tendo um elemento com 3 repetições e outro elemento com 2 repetições.

Acompanhe e analise as estratégias utilizadas pelos estudantes durante a resolução das **atividades 33** a **45**. Caso apresentem dificuldades, proponha questionamentos que auxiliem no desenvolvimento do raciocínio. Essas atividades podem ser feitas em duplas ou em trios para incentivar a discussão de ideias e estratégias. A **atividade 34** tem o objetivo de levar os estudantes a desenvolver o raciocínio combinatório por meio da árvore de possibilidades. Verifique se compreenderam que devem dividir o total de permutações simples por $(3! \cdot 2!)$ na **atividade 37**.

Ao solicitar aos estudantes que elaborem um problema envolvendo o cálculo do número de anagramas, a **atividade 45** motiva o desenvolvimento das capacidades de escrita e argumentação, contribuindo para que eles se expressem e compartilhem informações por meio da linguagem verbal, abordando, assim, a **competência geral 4**.

Arranjo simples

Por meio do trabalho com este tópico, é possível levar os estudantes a perceber que se admite aplicar o arranjo simples em situações cotidianas, como na criação de senhas ou em problemas envolvendo maneiras possíveis de pessoas se sentarem em cadeiras enfileiradas.

Na **atividade resolvida R12**, verifique se eles compreenderam os dois modos de resolução: usando a expressão de arranjo simples e aplicando o princípio multiplicativo. Na **atividade resolvida R13**, é importante que compreendam que se trata de um arranjo de 10 elementos tomados 2 a 2, pois é preciso calcular quantas maneiras diferentes 2 pessoas podem sentar-se em 10 cadeiras enfileiradas. Porém, ao final, é necessário subtrair as possibilidades em que essas pessoas sentariam juntas, pela restrição feita no enunciado.

Proponha aos estudantes que resolvam as **atividades 46** a **49** usando os dois métodos abordados no livro: princípio multiplicativo e arranjo simples.

Para as **atividades 50** a **56**, caso eles tenham dificuldades, retome os principais conceitos sobre arranjo simples. Depois, elabore um problema com a participação da turma, a fim de sanar possíveis dúvidas. Uma variação da **atividade 54** pode ser feita considerando que o disco do cofre tem, no lugar dos algarismos, as 26 letras do alfabeto. Espera-se que os estudantes concluam que seriam necessárias 43 horas e 20 minutos. Na **atividade 56**, eles são levados a elaborar um problema envolvendo arranjo simples. Desse modo, eles têm oportunidade de organizar suas ideias, desenvolver a criatividade e a habilidade de escrita.

Combinação simples

Este tópico mostra, por meio de exemplos do dia a dia, que, além do arranjo simples, existe outro tipo de agrupamento na Análise combinatória, que é a combinação simples. A diferença entre eles é que, no arranjo simples, a ordem dos elementos leva a novos agrupamentos; já na combinação simples, a ordem dos elementos não é importante.

Ao trabalhar com as **atividades 57** a **72**, verifique se os estudantes perceberam que a ideia de combinação simples difere dos conceitos de permutação simples e arranjo simples por não importar a ordem dos elementos. É importante que eles saibam diferenciar cada uma das técnicas de resolução de problemas de contagem estudadas neste capítulo. Durante o trabalho com a **atividade 58**, aproveite para conversar sobre o que pode ser considerada uma alimentação saudável e estabeleça uma relação com o **TCT Educação Alimentar e Nutricional**, enfatizando a importância do consumo de frutas, legumes, e verduras. Comente que o consumo desses alimentos é revertido em benefícios ao ser humano por serem ricos em fibras, vitaminas e nutrientes. Leve a turma a perceber que uma alimentação saudável envolve alimentos naturais no lugar de industrializados. A **atividade 61** permite um trabalho com Geometria plana. Ao abordar a **atividade 71**, pode-se propor uma pesquisa sobre diferentes tipos de jogos envolvendo o acerto de uma quantidade de números. A **atividade 72** contempla aspectos da habilidade **EM13MAT310**, pois os estudantes são instigados a elaborar e resolver um problema relacionado à combinação simples. Atividades de elaboração e resolução de problemas desenvolvem nos estudantes a capacidade matemática para lidar com esse tipo de situação, além de contribuir para o desenvolvimento da elaboração de argumentos e hipóteses, o que é abarcado pela **competência específica 3**.

Para finalizar o capítulo 4

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se o fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 5 Probabilidade

Objetivos

- Determinar o espaço amostral, os eventos desse espaço e calcular o número de elementos desses conjuntos.
- Calcular a probabilidade de ocorrência de um evento.
- Resolver problemas envolvendo probabilidades.

Justificativa dos objetivos

O cálculo da probabilidade de ocorrência de determinado evento constitui um poderoso instrumento de antecipação de resultados. Esse estudo tem aplicações em diversas áreas e aspectos da vida social e da pesquisa científica.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 1** e **2**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  Competência específica 1: **EM13MAT106**.
  Competência específica 3: **EM13MAT311**, **EM13MAT312** e **EM13MAT315**.
  Competência específica 4.
  Competência específica 5: **EM13MAT511**.
- **Competência específica e habilidade da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  Competência específica 2[1]: **EM13CNT205**[2].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

1 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

2 **(EM13CNT205)** Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências.

Tema Contemporâneo Transversal

Saúde

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

Orientações didáticas

O assunto tratado na abertura do capítulo está relacionado ao **TCT Saúde**, que permite o trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, auxiliando no desenvolvimento da habilidade **EM13CNT205** e da **competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, bem como da habilidade **EM13MAT106**. A abordagem da genética permite também o desenvolvimento da **competência geral 1**, pois fornece uma explicação a eventos da realidade, com base em conhecimentos construídos historicamente.

O tema também favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**, uma vez que os estudantes exercitam a curiosidade intelectual e recorrem à abordagem própria das Ciências; e da **competência específica 1**, ao utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos.

O estudo dessa doença hereditária propicia a incorporação do **ODS 3: Saúde e Bem-Estar** na escola, em função das metas de redução da mortalidade materna e infantil.

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Ao iniciar este tópico, discuta com os estudantes o significado dos termos "acaso", "casual", "aleatório", e "possibilidade". As propostas iniciais para identificar e descrever o espaço amostral de experimentos aleatórios e para realizar a contagem das possibilidades que compõem os eventos para resolver problemas favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT311**. O desenvolvimento da habilidade **EM13MAT511** é favorecido quando os espaços amostrais discretos e contínuos são definidos e exemplificados, porque os estudantes reconhecerão a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não.

A **competência específica 3** é favorecida em vários momentos deste capítulo, como nas **atividades 1** e **5**, uma vez que os estudantes deverão utilizar estratégias, conceitos, definições ou procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos ou resolver problemas em diversos contextos.

O objetivo das **atividades 2** e **3** é explorar de maneira adequada expressões como "muito provável" e "pouco provável", que fazem parte da linguagem do dia a dia.

Para resolver a **atividade 4**, oriente os estudantes a escrever todos os elementos do espaço amostral.

A **atividade 6** propõe a elaboração de um problema envolvendo o cálculo do número de elementos do espaço amostral de um experimento. Oriente-os na construção do enunciado e depois analise coletivamente os enunciados de alguns estudantes. Essa é uma oportunidade para que todos analisem criticamente o que fizeram.

Probabilidade

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT311** e **EM13MAT511** ao reconhecer a existência de diferentes tipos de evento, equiprováveis ou não, além de investigar implicações no cálculo de probabilidades.

A situação exposta no primeiro parágrafo do texto incentiva os estudantes a tomar decisões, levando em conta os riscos probabilísticos, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106**.

Se considerar o momento oportuno para a turma, amplie a **atividade 7** encaminhando os estudantes a concluir a generalização: a soma das probabilidades de todos os eventos simples de um experimento aleatório é sempre igual a 1.

A situação proposta na **atividade 8** propicia o entendimento de que um dado viciado, em que a medida da chance de ocorrer determinada face é maior que a de ocorrer as outras faces, ilustra um exemplo de espaço amostral não equiprovável.

As **atividades 9** a **15** propõem o cálculo de probabilidades. Nos **itens c** e **d** da **atividade 10**, explique o significado dos conectivos "ou" (relacionado à união de conjuntos) e "e" (relacionado à intersecção de conjuntos).

Aproveite a **atividade 11** e fale da importância da Análise combinatória no estudo de Probabilidade, sendo necessário empregá-la em várias atividades, como nesta e nas **atividades 15** e **18**.

A **atividade 16** busca favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT511**, pois solicita identificar se um espaço amostral é equiprovável ou não.

Na **atividade 17**, como as probabilidades de ocorrência de meninos e meninas são iguais, é interessante questionar os estudantes sobre que alterações teríamos nas respostas caso substituíssemos, em cada item do enunciado da questão, um pelo outro. Espera-se que eles percebam que as respostas seriam as mesmas.

As **atividades resolvidas R7** e **R8** e as **atividades 19** a **32** exploram os conceitos tratados nos subtópicos *Eventos complementares, Probabilidade da intersecção de dois eventos* e *Probabilidade da união de dois eventos*.

O emprego de diagramas na resolução das **atividades 22** e **23**, assim como em outras atividades de probabilidade, é um recurso muito útil.

A **atividade 25** favorece o desenvolvimento da **competência específica 4** e da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que os estudantes devem escrever um **algoritmo** (um dos pilares do pensamento computacional) para Marcos decidir se deve ou não jogar. Oriente-os a analisar o algoritmo elaborado, seja em linguagem corrente, seja em um fluxograma. Peça a eles que validem as probabilidades já calculadas para os eventos da **atividade 24**, seguindo o fluxo do algoritmo. Pergunte, por exemplo: "O evento 'sair um número par' tem probabilidade maior que 0,5?". (Não, pois a probabilidade desse evento é igual a 0,5; logo, o fluxo segue para "Não brincar nesta rodada".)

Na **atividade 32**, incentive os estudantes a criarem situações diferentes das abordadas nas atividades para a elaboração do problema.

Probabilidade condicional

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312**, já que propõe a resolução e a elaboração de diversos problemas que envolvem o cálculo de probabilidade em experimentos aleatórios sucessivos.

Aproveite a situação proposta no início do tópico e inicie uma discussão sobre jogos que usam dados. Nos jogos de RPG (*role-playing games*), cujo mote principal é a interpretação de personagens, são utilizados dados de formatos cúbicos, dodecaédricos, icosaédricos etc. Os jogos fazem parte do universo juvenil e, por isso, podem auxiliar na aproximação e interação com os temas abordados.

Para exemplificar eventos independentes, é apresentado o lançamento simultâneo de um dado e de uma moeda. É importante que os estudantes sejam capazes de identificar e diferenciar eventos independentes (que podem ocorrer simultaneamente sem afetar uns aos outros) de eventos mutuamente exclusivos (que não ocorrem simultaneamente).

Para resolver as **atividades 33** a **39**, oriente os estudantes a lerem e interpretarem cuidadosamente os enunciados antes de realizar cálculos. Desse modo, espera-se que eles percebam que o enunciado da **atividade 39** está incompleto, pois não traz a informação se há reposição da bola após a primeira retirada, o que interfere na resolução do problema.

Na **atividade 40**, eles devem elaborar uma situação em que seja necessário calcular a probabilidade de um evento em um experimento aleatório com etapas sucessivas, atentando para a escrita clara e coesa do enunciado.

Frequência relativa e probabilidade

Este tópico favorece o desenvolvimento das **competências específicas 3** e **5**, pois espera-se que os estudantes concluam que a frequência relativa terá melhor eficiência no cálculo de probabilidades quando existir uma quantidade grande de experimentos. Isso pode ser discutido durante a exploração da **atividade resolvida R12**.

Na **atividade 41**, informe aos estudantes que, quanto maior o número de lançamentos do dado (honesto), mais próximas do número $\frac{1}{6}$ estariam as frequências relativas de obter cada face.

As **atividades 42** a **44** exploram o cálculo de probabilidades com base em tabelas de frequências. Na **atividade 44**, discuta a importância desse tipo de pesquisa (modelo de carros × quantidade de carros roubados). Pergunte se consideram que probabilidades como essas influenciam o valor do seguro dos automóveis dos modelos A, B e C. Espera-se que concluam que, quanto maior a probabilidade de um carro de determinado modelo ser roubado, maior o valor do seguro desse carro.

Para finalizar o capítulo 5

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se o fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar

Objetivos

Analisar e identificar inadequações gráficas que podem induzir a erros de interpretação.

BNCC

- **Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1: **EM13MAT102**.

  Competência específica 3.

  Os textos na íntegra das competências específicas e da habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Tema Contemporâneo Transversal

Vida Familiar e Social

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

Orientações didáticas

A manipulação ou apresentação enganosa de dados estatísticos compromete a transparência e a responsabilidade das instituições, minando a confiança pública e dificultando a tomada de decisões informadas. Quando as

informações são distorcidas, a capacidade dos cidadãos de compreender a realidade social e econômica é prejudicada, o que pode perpetuar injustiças e desigualdades. Portanto, garantir a precisão e a honestidade na apresentação de dados estatísticos é essencial para fortalecer as instituições e promover a paz e a justiça, alinhando-se aos princípios fundamentais do **ODS 16: Paz, justiça e instituições eficazes**.

Os exemplos estudados nesta seção permitem aos estudantes aprender a identificar diversas inadequações gráficas que podem induzir a erros de interpretação, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT102**.

A linguagem do texto apresentado é diferente da utilizada na coleção. É fundamental que os estudantes tenham contato com esse tipo de texto, pois isso amplia suas habilidades de leitura e interpretação. Além disso, pode ajudá-los a enfrentar com mais segurança as múltiplas formas de comunicação que encontrarão no cotidiano. Durante a leitura, ajude-os a identificar as diferenças durante a leitura.

Na vida cotidiana, famílias e comunidades dependem de informações precisas para tomar decisões em áreas como saúde, educação e finanças. Quando gráficos estatísticos são apresentados de maneira enganosa, eles podem distorcer a percepção pública sobre questões críticas. Por exemplo, gráficos imprecisos sobre taxas de vacinação ou desemprego podem influenciar atitudes e comportamentos, criando desconfiança nas instituições e gerando divisões sociais. Assim, promover a integridade e a clareza na apresentação de dados estatísticos é fundamental para assegurar que as pessoas tenham acesso a informações verdadeiras. Conscientizar os estudantes sobre essas questões contribui para o desenvolvimento do **TCT Vida Familiar e Social** e da **competência específica 3**.

Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes respondam que a intenção do texto é mostrar que alguns gráficos podem ser construídos de modo que levem a uma interpretação errada. Logo, a **alternativa c** é a correta.

Na **atividade 2**, se julgar oportuno, proponha uma curadoria, organizando os estudantes em grupos, que deverão buscar e analisar os gráficos apresentados em jornais impressos ou digitais.

Para resolver a **atividade 3**, é preciso primeiro determinar a razão da medida da altura da coluna B pela medida da altura da coluna A de cada gráfico:

- gráfico 1: $\frac{30}{70} = \frac{3}{7}$
- gráfico 2: $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

Então, a diferença entre as razões da medida da altura da coluna B pela medida da altura da coluna A nos gráficos 1 e 2 é:

$$\frac{3}{7} - \frac{1}{5} = \frac{15-7}{35} = \frac{8}{35}$$

Portanto, a resposta é a **alternativa e**.

Aproveite o contexto da **atividade 4** para discutir o papel atual da mulher na sociedade. Espera-se que os estudantes observem que a pesquisa não foi realizada em 2018 e que apenas as duas primeiras e as duas últimas barras apresentam os valores das porcentagens, o que pode contribuir para uma análise equivocada da evolução da ocupação das mulheres em cargos de liderança nos últimos 12 anos.

PESQUISA E AÇÃO – Pesquisa estatística

Objetivos

- Realizar pesquisa estatística sobre a saúde dos adolescentes.
- Elaborar relatório com os resultados da pesquisa estatística realizada.
- Divulgar a pesquisa para a comunidade escolar.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 4**, **5**, **7**, **8**, **9** e **10**.
- **Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  Competência específica 1.
  Competência específica 2: **EM13MAT202**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  Competência específica 2[1]: **EM13CNT207**[2].
  Competência específica 3[3]: **EM13CNT301**[4].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Direitos da Criança e do Adolescente
- Educação Alimentar e Nutricional
- Saúde

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

1 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

2 **(EM13CNT207)** Identificar, analisar e discutir vulnerabilidades vinculadas às vivências e aos desafios contemporâneos aos quais as juventudes estão expostas, considerando os aspectos físico, psicoemocional e social, a fim de desenvolver e divulgar ações de prevenção e de promoção da saúde e do bem-estar.

3 **(Competência específica 3)** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

4 **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

Orientações didáticas

Com a finalidade de organizar o trabalho, a pesquisa estatística proposta nesta seção está organizada em etapas, que poderão ser realizadas no decorrer do semestre. Mesmo que algumas delas, como a coleta de dados e a elaboração do relatório, sejam realizadas fora da sala de aula, é importante orientar os estudantes com relação ao planejamento, ao prazo, ao tipo de questões que deverão ser propostas etc., reservando algumas aulas para isso. A organização e cooperação necessária para a realização desse projeto é um exercício das **competências gerais 9** e **10**, pois os estudantes terão de tomar decisões baseados nas possibilidades de todos do grupo.

Nesta seção, os estudantes serão incentivados a planejar e realizar uma pesquisa estatística, organizar os dados obtidos, elaborar um relatório com análise e conclusões da pesquisa e, posteriormente, divulgar a pesquisa para a comunidade escolar, com o objetivo de conscientizar, principalmente os adolescentes, sobre a importância de desenvolver e manter hábitos de vida saudáveis.

A atividade de pesquisa estatística favorece o desenvolvimento das **competências específicas 1** e **2**, propiciando etapas de investigação, interpretação e análise de dados e permitindo aos estudantes que tomem decisões com base nas informações coletadas. Essas competências estão relacionadas com as **competências gerais 4** e **7**.

Como eles terão a oportunidade de planejar e executar uma pesquisa amostral sobre um tema relevante e comunicar os resultados por meio de relatórios com a interpretação de medidas de tendência central e de medidas de dispersão, com ou sem recursos tecnológicos, esta seção desenvolve a habilidade **EM13MAT202**.

No que se refere ao escopo da pesquisa, há possibilidade fazer um trabalho de interdisciplinaridade com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, favorecendo o desenvolvimento das habilidades **EM13CNT207** e **EM13CNT301** e das **competências específicas 2** e **3 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Essas competências se relacionam com a **competência geral 8** e com o **ODS 3: Saúde e Bem-Estar** no que diz respeito ao autocuidado com a saúde física e emocional, já que ao final da pesquisa os estudantes devem refletir sobre o tema pesquisado. A atividade em si envolve os **TCTs Saúde** e **Educação Alimentar e Nutricional**. Incentive os estudantes a buscar informações em fontes confiáveis para sustentar toda a pesquisa, como o *Guia Alimentar para a População Brasileira*, referência nacional e internacional, produzido pelo Núcleo de Pesquisas Epidemiológicas em Nutrição e Saúde (Nupens) da Faculdade de Saúde Pública (FSP) da Universidade de São Paulo (USP) para o Ministério da Saúde e a Organização Pan-Americana de Saúde (OPAS), em 2014. A página do Ministério da Saúde traz as publicações dos guias alimentares, disponíveis em: https://www.gov.br/saude/pt-br/composicao/saps/promocao-da-saude/guias-alimentares/publicacoes (acesso em: 24 set. 2024).

ETAPA 1

Se achar necessário, retome o conceito de população.

Na **atividade 1**, oriente os estudantes na definição dos objetivos da pesquisa, incentivando-os a problematizar cada proposta, pensar sobre como elas podem ser abordadas e levantar hipóteses acerca delas. A problematização é uma etapa imprescindível da pesquisa. Com base nela são definidas perguntas a serem respondidas sobre o tema. Pode-se problematizar, por exemplo, os hábitos de sono dos adolescentes: "Os adolescentes dormem uma quantidade suficiente de horas diariamente?". Nesse caso, podem ser feitas perguntas como: "Quantas horas você costuma dormir durante a noite?"; "Você sente necessidade de dormir mais horas?".

Na **atividade 2**, explique à turma que, na pesquisa amostral, a definição da amostra é crucial para a qualidade da pesquisa. Caso desejem observar, por exemplo, os hábitos de sono de adolescentes, pode-se definir como população adolescentes que estudem na mesma escola que eles e adolescentes de outras escolas, examinando pessoas de distintos contextos, com diferentes fatores que podem influenciar os hábitos de sono, por exemplo: se moram longe da escola, em qual período do dia estudam, entre outros. O Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA) está relacionado ao **TCT Direitos da Criança e do Adolescente**, pois convergem na defesa dos direitos e do desenvolvimento de crianças e adolescentes, seja na promoção da cidadania, seja na proteção integral das pessoas dessa faixa etária.

ETAPA 2

Na **atividade 3**, oriente os estudantes a realizar uma leitura de todas as etapas desta seção. Esclareça possíveis dúvidas.

Na **atividade 4**, peça a eles que citem exemplos de variáveis quantitativas e qualitativas que podem ser aplicadas na pesquisa. Estimule-os a refletir sobre quais dados são importantes e quais seriam os mais adequados, considerando o tema e a medida de tempo disponível.

Se achar conveniente, alerte os estudantes de que a escolha de muitas perguntas abertas pode tornar a organização dos dados mais complexa, mas é importante que façam pelo menos uma questão desse tipo para que compreendam como é trabalhar com elas.

ETAPA 3

Na **atividade 5**, oriente os estudantes a respeito da execução da pesquisa amostral, desde o entendimento de todas as perguntas até a postura e a imparcialidade durante as entrevistas.

ETAPA 4

Ressalte a importância de dois pilares do pensamento computacional, a **abstração** e o **reconhecimento de padrões**, na realização desta etapa. Espera-se que os estudantes percebam tal relevância ao organizar e tabular os dados coletados e ao analisá-los para a obtenção de conclusões.

Na **atividade 6**, explique à turma que a categorização das respostas é necessária para que possam ser organizadas e analisadas. Por exemplo, caso tenham perguntado sobre a quantidade de horas de sono dos entrevistados, podem agrupar esses dados da seguinte forma: pessoas que dormem de 1 a 2 horas, de 2 a 4 horas, e assim por diante.

Na **atividade 7**, os grupos deverão organizar os dados e realizar cálculos. Auxilie-os no que for necessário. Se for preciso, retome os conceitos de média aritmética, mediana, moda, amplitude e desvio padrão. É importante que essa etapa seja realizada de forma organizada e colaborativa para evitar cálculos incorretos que possam prejudicar as conclusões da pesquisa. O uso de fórmulas em uma planilha eletrônica pode facilitar essa tarefa. Explique à turma que a análise dos resultados permite encaminhar soluções para o problema detectado e verificar se as hipóteses levantadas foram confirmadas, entre outras ações. Auxilie-os na análise dos resultados, orientando-os a não fazer generalizações e não tirar conclusões equivocadas.

ETAPA 5

A elaboração do relatório pode ser bastante trabalhosa. A tarefa deve ser dividida entre os componentes do grupo para que todos participem de todas as etapas, não esquecendo que o texto final deve ser uniforme e coeso.

ETAPA 6

Oriente os estudantes a apresentarem os resultados obtidos na pesquisa e as ações envolvidas durante o trabalho, desde a delimitação dos objetivos até o preparo da apresentação. Nesta etapa, apresentando gráficos construídos com base em planilhas eletrônicas, os estudantes têm a oportunidade de exercitar a **competência geral 5**, disseminando informações coletadas e analisadas com o auxílio de ferramentas digitais.

ETAPA 7

Na **atividade 14**, oriente os estudantes na realização da autoavaliação. Eles devem se basear nas perguntas propostas e nas experiências que tiveram no decorrer da realização da pesquisa, da produção do relatório e das discussões da **atividade 13**. A proposta é que avaliem se alcançaram os objetivos propostos, se sentiram dificuldades durante as etapas e, em caso afirmativo, como lidaram com elas, e como a atividade contribuiu para sua formação.

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2

Objetivos

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes.
- Preparar os estudantes para os conteúdos que serão estudados no 2º semestre.

Orientações didáticas

A proposta desta avaliação é que os estudantes realizem as atividades com base nos conhecimentos prévios.

O quadro a seguir relaciona as atividades às habilidades da BNCC voltadas para o Ensino Fundamental – Anos finais que os estudantes mobilizam durante a resolução das atividades e às habilidades do Ensino Médio que serão desenvolvidas ao longo do semestre.

Relação entre as habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais desenvolvidas nas atividades e as habilidades do Ensino Médio

Atividades	Assuntos	Habilidades do Ensino Fundamental – Anos finais	Habilidades do Ensino Médio
1	Razão e proporção	**(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.	EM13MAT308
2	Ampliação e redução de figuras em malha quadriculada	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.	EM13MAT308
3	Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal	**(EF07MA23)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica.	–
4	Elementos de uma circunferência	**(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.	EM13MAT308

Analisando as respostas do estudante às atividades, é possível avaliar seus conhecimentos prévios e identificar defasagens ou enganos cometidos. Isso pode ajudar a planejar o trabalho durante o semestre.

Na **atividade 1**, se o estudante julgar correta a **alternativa a**, provavelmente identificou que a quantidade de partes vermelhas e roxas é igual (4), mas não entendeu que a ordem das quantidades influencia no valor da razão, ou seja, incorretamente considerou que a razão entre as quantidades de partes vermelhas e laranja é igual à razão entre as quantidades de partes laranja e vermelhas. Se responder **alternativa b** ou **c**, considerou equivocadamente que, ao colocar todas as quantidades de partes em ordem decrescente ou crescente, respectivamente, existe proporção das razões entre quantidades consecutivas. Se identificar a **alternativa e** como certa, considerou que, como o extremo da primeira razão é igual ao meio da segunda razão, existe proporção entre elas, o que está incorreto. Em todas as situações, retome os conceitos e auxilie os estudantes na compreensão da ideia de razão e de proporção, além de identificar os erros cometidos ao considerar como resposta uma alternativa incorreta.

Na **atividade 2**, se o estudante identificar qualquer alternativa como correta que não seja a **alternativa c**, provavelmente não verificou a razão entre as medidas de comprimento de todos os lados correspondentes dos trapézios, considerando suficiente verificar a razão das medidas de comprimento de apenas dois lados correspondentes. Nesse caso, retome as condições para que duas ou mais figuras sejam congruentes, além de revisar que, em uma ampliação ou redução, todas as medidas de comprimento dos lados correspondentes devem ser proporcionais a um número real k e que sua forma não é alterada.

Na **atividade 3**, se o estudante julgar correta a **alternativa a**, provavelmente não é capaz de distinguir ângulos alternos internos de ângulos colaterais, já que percebeu corretamente que esses ângulos são suplementares. Se escolheu as **alternativas b** ou **e**, pode ter confundido o conceito de ângulos suplementares com o de ângulos correspondentes; além disso, provavelmente compreende o que são ângulos colaterais, mas não notou que o ângulo de medida de abertura x é interno. Se indicar a **alternativa d**, provavelmente não é capaz de diferenciar ângulos congruentes e ângulos suplementares, uma vez que verificou corretamente que os ângulos são colaterais externos. Nesses casos, apresente na lousa um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, exemplificando as nomenclaturas atribuídas a todas as combinações de pares de ângulos e analisando a relação entre esses ângulos.

Na **atividade 4**, se o estudante julgar corretas as **alternativas a** ou **b**, provavelmente está confundindo as definições de ângulo central e ângulo inscrito. Se escolher a **alternativa c**, considerou que os ângulos marcados são correspondentes. Se escolher a **alternativa d**, pode ter classificado o triângulo AOV como isósceles, concluindo que $A\hat{O}V \cong A\hat{V}O$. Em todos os casos, sugerimos a retomada da classificação de triângulos em relação à medida de comprimento dos lados e dos elementos de uma circunferência, como ângulo central e ângulo inscrito.

CAPÍTULO 6 A semelhança e os triângulos

Objetivos

- Resolver situações-problema que envolvam a proporção entre segmentos.
- Resolver situações-problema que envolvam a semelhança de figuras planas.
- Resolver situações-problema que envolvam o teorema de Pitágoras e as demais relações métricas no triângulo retângulo.

Justificativa dos objetivos

O conceito de semelhança e as relações métricas advindas dele estão presentes nas mais diferentes áreas. Um exemplo típico é a construção de maquetes na área da Engenharia e Arquitetura que podem auxiliar na visão espacial dos ambientes que serão construídos, já que os espaços preservam a proporcionalidade.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 1**, **2**, **3**, **4** e **5**.
- **Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  Competência específica 3: **EM13MAT308**.
  Competência específica 4.
  Competência específica 5.
- **Competência específica e habilidades da área de Linguagens e suas Tecnologias:**
  Competência específica 6[1]: **EM13LGG601**[2] e **EM13LGG602**[3].

Os textos na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Diversidade Cultural
- Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras

Orientações didáticas

Oriente os estudantes a apreciar as imagens da abertura. Em seguida, organize uma roda de conversa para que possam falar sobre suas impressões. Espera-se que eles mencionem palavras como "miniatura", "parecido" e "semelhante", ao relacionar as imagens. Nesse momento, não é necessário se aprofundar; pode-se fazer isso mais adiante, antes de iniciar o tema semelhança propriamente dito. Comente sobre a utilização das maquetes, por exemplo, na área da construção civil. Questione-os sobre os museus e as exposições que eles já visitaram, as lembranças que têm, a localização etc.

1 **(Competência específica 6)** Apreciar esteticamente as mais diversas produções artísticas e culturais, considerando suas características locais, regionais e globais, e mobilizar seus conhecimentos sobre as linguagens artísticas para dar significado e (re)construir produções autorais individuais e coletivas, exercendo protagonismo de maneira crítica e criativa, com respeito à diversidade de saberes, identidades e culturas.

2 **(EM13LGG601)** Apropriar-se do patrimônio artístico de diferentes tempos e lugares, compreendendo a sua diversidade, bem como os processos de legitimação das manifestações artísticas na sociedade, desenvolvendo visão crítica e histórica.

3 **(EM13LGG602)** Fruir e apreciar esteticamente diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, assim como delas participar, de modo a aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade.

Pergunte aos estudantes se conhecem o museu retratado nesta abertura. Em caso afirmativo, permita que compartilhem a experiência. O edifício do museu, construído entre 1885 e 1890, foi projetado para ser um monumento em comemoração à Proclamação da Independência, ocorrida em 1822. Em 1895, o recém-criado Museu do Estado (Museu Paulista) foi transferido para o monumento e, desde então, ficou conhecido como Museu do Ipiranga, especializado em história e cultura material. A dedicação desse museu à história do Brasil e às histórias de seus povos também pode ser apreciada de modo *on-line*, por meio de uma visita virtual ao edifício-monumento e seu jardim e às salas expositivas, modelados digitalmente (disponível em: https://museudoipirangavirtual.com.br/; acesso em: 30 jun. 2024).

Ao longo do capítulo, será favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**, uma vez que os estudantes deverão resolver problemas envolvendo semelhança de figuras planas e relações métricas no triângulo retângulo.

Proporcionalidade entre segmentos

O tópico inicia com a retomada de conceitos estudados no Ensino Fundamental, como feixe de retas paralelas e retas transversais, de modo que os estudantes se apropriem das noções de proporcionalidade entre segmentos.

Em seguida, é apresentado como realizar a construção de um feixe de retas paralelas cortado por uma transversal utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Essa atividade favorece o desenvolvimento das **competências gerais 2**, **4** e **5**, assim como as **competências específicas 4** e **5**, quando propõe a utilização de uma ferramenta computacional de maneira investigativa, possibilitando testar hipóteses ao alterar a configuração inicial da construção geométrica. Antes dessa atividade, verifique se os estudantes conhecem ou já utilizaram algum *software* de Geometria dinâmica. Explique à turma que se trata de uma ferramenta interativa para construir e explorar figuras geométricas. Há diversos *softwares* disponíveis *on-line*, como o Geogebra, Cabri Géomètre e IGeom. Vale ressaltar que, dependendo do *software* escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula. As demonstrações apresentadas nos subtópicos *Teorema fundamental da proporcionalidade* e *Teorema de Tales* favorecem o desenvolvimento da **competência específica 5**.

Após explorar com a turma a construção de um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal, comente que cada *software* calcula e apresenta as razões das medidas de comprimento dos segmentos de modo diferente, seja por meio de seleção dos elementos, seja por meio de um editor de texto matemático. Em geral, o cálculo é expresso na tela e, a qualquer movimentação em elementos da construção, os valores são alterados automaticamente. Em caso de dúvidas na utilização de algum *software*, pesquise na internet. Há muitos tutoriais disponíveis.

Na **atividade 2**, ao movimentar um dos pontos da figura construída usando um *software* de Geometria dinâmica, espera-se que os estudantes percebam que as razões são mantidas, mesmo que as medidas de comprimento dos segmentos correspondentes se alterem.

Semelhança

Aproveite as imagens iniciais deste tópico para verificar o que os estudantes sabem a respeito das comunidades quilombolas, que são territórios formados por pessoas escravizadas que resistiram ao regime escravocrata no Brasil e, após esse regime, tornaram-se locais ocupados por grupos étnicos raciais com presença de ancestralidade negra. Reconhecer os quilombolas como representação de resistência, cultura e identidade é essencial para uma educação inclusiva e para a compreensão da história do Brasil. As Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Escolar Quilombola garantem pedagogia própria, respeito à especificidade étnico-racial e formação específica para professores. A valorização da cultura quilombola, suas tradições e suas lutas atuais contribuem para o desenvolvimento dos **TCTs Diversidade Cultural** e **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**. Certifique-se de que os estudantes tenham compreendido a importância da perspectiva decolonial que dá protagonismo a todos os grupos historicamente silenciados.

Explore os exemplos apresentados no subtópico *Semelhança de polígonos* e certifique-se de que os estudantes tenham clareza sobre o emprego dos termos "congruentes" e "semelhantes".

A reprodução da obra de arte de Antonio Peticov, apresentada no boxe *Observações*, tem como base retângulos áureos. Se julgar conveniente, proponha aos estudantes que pesquisem informações sobre a razão áurea. Além disso, pode-se trabalhar o tema da obra com a área de Linguagens e suas Tecnologias, explorando as habilidades **EM13LGG601** e **EM13LGG602** e a **competência específica 6 da área de Linguagens e suas Tecnologias**, pois a apreciação e o entendimento sobre a contextualização de uma obra de arte podem auxiliar os estudantes no desenvolvimento da visão crítica e histórica, a fim de aguçar continuamente a sensibilidade, a imaginação e a criatividade. O desenvolvimento da **competência geral 3** também é favorecido nessa proposta.

Uma extensão da **atividade 8** pode ser proposta aos estudantes: refletir a respeito da semelhança entre outros tipos de polígonos regulares, como pentágonos e hexágonos. Seria interessante que eles elaborassem um texto para registrar e justificar suas conclusões; para isso, podem se basear no desenvolvimento da **atividade resolvida R2**. Espera-se que os estudantes concluam que polígonos regulares com a mesma quantidade de lados serão sempre semelhantes. Por exemplo, hexágonos regulares são sempre semelhantes, já que os ângulos internos correspondentes são sempre congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. Durante as reflexões, discuta o conceito de polígono regular, lembrando que esse tipo de figura apresenta todos os ângulos internos congruentes e todos os lados congruentes.

Para identificar se dois ou mais polígonos são semelhantes, o estudante deve buscar por padrões entre os polígonos. Dessa maneira, coloca em prática o **reconhecimento de padrões**, um dos pilares do pensamento computacional.

Na **atividade 10**, caso os estudantes tenham dificuldades, peça que analisem novamente os quadriláteros congruentes do exemplo **b**. A **atividade 11** explora consequências da semelhança entre quadrados. Estimule-os a analisar alguns casos particulares. As conclusões desta atividade podem ajudar os estudantes a realizarem as **atividades 12** e **13**.

A **atividade 15** propõe uma construção, passo a passo, utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Após a experimentação, peça aos estudantes que movimentem os pontos móveis da construção e analisem o que aconteceu com a razão obtida. Espera-se que percebam que a razão não se altera mesmo com a mudança da configuração inicial da

construção geométrica. A postura investigativa nesta atividade favorece o desenvolvimento das **competências gerais 2**, **4** e **5** e das **competências específicas 4** e **5**.

Explore os casos de semelhança de triângulos com a turma e apresente outros exemplos.

As **atividades 16** a **21** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**, que propõe a resolução de problemas utilizando noções de semelhança de triângulos.

Após a realização das atividades deste tópico, espera-se que os estudantes concluam que, se for conhecido o valor da razão de semelhança entre duas figuras, ela pode ser utilizada para comparar as medidas de comprimento de quaisquer elementos lineares dessas duas figuras.

Relações métricas no triângulo retângulo

A abordagem selecionada para introduzir as relações métricas no triângulo retângulo favorece o desenvolvimento da **competência geral 1**, em função dos conhecimentos historicamente construídos.

Ao explorar o teorema de Pitágoras, espera-se que os estudantes percebam que, para construir um triângulo retângulo, é preciso traçar uma reta perpendicular a um segmento de reta, que posteriormente será um dos catetos.

É importante esclarecer que a verificação apresentada no subtópico *Explorando o teorema de Pitágoras*, realizada com o apoio de um *software* de Geometria dinâmica, não é uma demonstração; porém, utilizar esse tipo de *software* para verificar a validade de uma proposição em diferentes configurações pode favorecer o entendimento e o desenvolvimento das **competências gerais 2**, **4** e **5** e das **competências específicas 4** e **5**. Alguns *softwares* de Geometria dinâmica não possuem uma ferramenta dedicada à construção de polígonos regulares; nesse caso, oriente os estudantes a construí-los usando retas perpendiculares e retas paralelas. Para garantir que todos os lados tenham a mesma medida de comprimento, pode-se usar a ferramenta de construção de uma circunferência para transportar medidas.

Pergunte aos estudantes: "Você já ouviu falar de Pitágoras? Em caso afirmativo, comente com os colegas o que você sabe sobre ele". Esse questionamento pode deixar alguns estudantes curiosos. De fato, há poucas informações sobre a vida de Pitágoras, e o que sabemos é fruto do trabalho de historiadores e filósofos da Antiguidade. Pitágoras não deixou escritos de sua autoria; o conhecimento disponível sobre ele vem de relatos contemporâneos, datados cerca de 150 anos após sua morte.

A demonstração do teorema de Pitágoras, com base na medida de área de figuras planas, favorece o desenvolvimento da **competência específica 5**. Para auxiliar os estudantes no entendimento dessa demonstração, peça a eles que construam em papel-cartão o quadrado cujo comprimento do lado mede a e quatro triângulos retângulos cujos comprimentos dos catetos medem b e c. Em seguida, oriente-os a utilizar essas peças para obter as figuras 1 e 2, produzindo o quadrado cujo comprimento do lado mede $(b + c)$.

A recíproca do teorema de Pitágoras pode ser deduzida com a lei dos cossenos, que será estudada no capítulo 8.

Ao explorar o exemplo **a** com os estudantes, explique-lhes que a diagonal de um polígono é um segmento de reta que tem extremidades em dois vértices não consecutivos desse polígono. Apresente alguns exemplos e depois pergunte a eles se existe polígono sem diagonal e, em caso afirmativo, que polígono seria esse. Espera-se que eles respondam que sim, e que o polígono sem diagonal é o triângulo.

As **atividades 22** a **33** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**, que propõe a resolução de problemas envolvendo triângulos por meio de relações métricas.

Na **atividade 22**, os estudantes devem reconhecer que o algoritmo calcula a medida do comprimento da hipotenusa com base nas medidas de comprimento dos catetos. Auxilie-os em cada passo. Se possível, construa com os estudantes esse algoritmo e permita que façam testes.

O objetivo principal da **atividade 27** é que os estudantes apliquem o teorema de Pitágoras para verificar algumas relações entre as medidas de comprimento da aresta de um cubo, da diagonal da face de um cubo e da diagonal do cubo. Essas relações podem ser trabalhadas para o caso de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem a, b e c. Para isso, os estudantes terão de refletir sobre alguns aspectos desse tipo de sólido geométrico, por exemplo:

a. como são as faces de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem a, b e c;

b. como se relacionam as medidas de comprimento das diagonais das faces desse paralelepípedo com as medidas de comprimento a, b e c de suas arestas;

c. como se relacionam as medidas de comprimento das arestas com a medida de comprimento da diagonal desse paralelepípedo.

Espera-se que os estudantes percebam que, considerando o paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões medem a, b e c, são verificadas as seguintes relações entre as medidas de comprimento das diagonais das faces e as medidas de comprimento das arestas:

- $d_{\text{face 1}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $d_{\text{face 2}} = \sqrt{a^2 + c^2}$
- $d_{\text{face 3}} = \sqrt{b^2 + c^2}$

Os estudantes também devem perceber que, para o mesmo paralelepípedo, a medida de comprimento da diagonal do paralelepípedo e as medidas de comprimento das arestas relacionam-se da seguinte forma:

$$d_{\text{paralelepípedo}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Avalie a conveniência de explorar mais os triângulos pitagóricos, abordados na **atividade 31**, propondo a atividade: "Mostrar que o único triângulo pitagórico cujas medidas de comprimento dos lados são números naturais consecutivos é o triângulo de lados 3, 4 e 5".

Resolução: Seja o triângulo retângulo com lados de medidas de comprimento consecutivas $(a - 1)$, a e $(a + 1)$. Então:

$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + a^2$

$a^2 - 4a = 0$

$a = 0$ (não serve) ou $a = 4$

Logo, as únicas medidas de comprimento possíveis para os lados do triângulo são 3, 4 e 5.

Para resolver a **atividade 32** , caso os estudantes não se recordem das relações métricas, os **itens b** e **c** podem ser resolvidos apenas usando semelhança de triângulos.

A **atividade 33** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**, ao propor a elaboração de uma situação-problema utilizando as relações métricas do triângulo retângulo.

Para finalizar o capítulo 6

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 7 Trigonometria no triângulo retângulo

Objetivos

- Identificar e calcular razões trigonométricas no triângulo retângulo.
- Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas.
- Usar uma tabela trigonométrica ou uma calculadora para obter as razões trigonométricas.

Justificativa dos objetivos

O desenvolvimento da Trigonometria na história se deu pela necessidade de medições em locais inacessíveis. Seu uso continua sendo muito importante em diversas situações da atualidade, como para calcular a medida da inclinação máxima na construção de uma rampa de acesso.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 1**, **2** e **5**.
- **Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 3: **EM13MAT308**.

  Competência específica 5.
- **Competência específica e habilidade da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**

  Competência específica 3[1]: **EM13CNT301**[2].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e da habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Diversidade Cultural
- Educação em Direitos Humanos
- Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras
- Trabalho

Orientações didáticas

O tema da abertura aborda o cálculo de medidas de grandes distâncias, como entre a Terra e o Sol e entre a Terra e a Lua. Essas são distâncias inacessíveis e, por meio da Trigonometria no triângulo retângulo, é possível realizar esse tipo de cálculo. Converse com os estudantes sobre o assunto. Pergunte a eles como acreditam que os astrônomos conseguiram calcular a medida da distância entre a Terra e a Lua e entre a Terra e o Sol.

Em seguida, aproveite para estabelecer relação com o **TCT Ciência e Tecnologia**. Comente que, atualmente, para medir a distância entre o Sol e a Terra, os cientistas usam uma unidade de medida chamada unidade astronômica (UA), que é baseada na órbita da Terra ao redor do Sol. A distância varia ao longo do ano devido à forma elíptica da órbita da Terra, mas a medida da distância média é considerada uma UA, que é aproximadamente 150 milhões de quilômetros.

O trabalho com o tema desta abertura favorece o desenvolvimento da **competência específica 3** e da habilidade **EM13CNT301**, pois apresenta uma questão feita na Antiguidade, com elaboração de hipóteses, estimativas e um método para medir. Com isso, obtendo representação e interpretação de resultados experimentais para justificar conclusões no en-

1 **(Competência específica 3)** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

2 **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

frentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica, valorizam-se os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico e colabora-se para a compreensão da realidade, além de exercitar a curiosidade intelectual, favorecendo o desenvolvimento das **competências gerais 1** e **2**.

Ao longo do capítulo será favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**, pois os estudantes poderão compreender as razões trigonométricas, como uma aplicação das noções de semelhança para resolver e elaborar problemas que envolvam triângulos em vários contextos.

Razões trigonométricas

Este tópico realiza um trabalho que se baseia no conceito de semelhança de triângulos, considerando dois ou mais triângulos retângulos semelhantes, para desenvolver algumas razões trigonométricas no triângulo retângulo usando as medidas de comprimento de seus lados.

A abordagem do tópico favorece o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **5**, pois inclui investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade na elaboração e testes de hipóteses na resolução de problemas e criação de soluções. Os estudantes também compreendem e utilizam uma ferramenta digital de modo crítico, significativo e reflexivo para produzir conhecimentos e resolver problemas.

Se possível, faça com os estudantes a construção sugerida no subtópico *Explorando razões em triângulos retângulos usando o computador*, na qual se usa um *software* de Geometria dinâmica, no laboratório de informática, ou apresente a construção em um projetor em sala de aula.

No passo 2, comente que, nessa construção, para que os pontos *D* e *F* possam ser movimentados, é preciso marcá-los sobre o segmento $\overline{BC}$.

No passo 3, oriente os estudantes a utilizar o recurso que permite esconder as construções auxiliares. A construção sem o excesso de traçados proporciona uma análise mais eficiente.

No passo 4, saliente que esse procedimento pode variar entre os *softwares*. Pode haver pequenas diferenças na aproximação das medidas de comprimento obtidas ou do cálculo de cada razão. Verifique as funcionalidades do *software* escolhido e oriente os estudantes. Se julgar conveniente, peça a eles que gravem essa construção para explorá-la em outros momentos.

Para a **atividade resolvida R1**, caso julgue necessário, retome com os estudantes o teorema de Pitágoras. As **atividades resolvidas R2** e **R3** utilizam as razões trigonométricas para determinar medidas de comprimento dos lados de um triângulo retângulo. Comente com a turma que, para facilitar os cálculos, os valores das razões, na **atividade resolvida R2**, foram aproximados. O contexto abordado na **atividade resolvida R3** possibilita uma conexão com os **TCTs Diversidade Cultural** e **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais Brasileiras**, pois destaca a dança folclórica de trança-fitas, valorizando a riqueza da cultura brasileira.

As **atividades 1** a **8** favorecem o desenvolvimento da **competência específica 3**, pois os estudantes serão instigados a utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

Na **atividade 1**, peça aos estudantes que compartilhem a resposta e verifique se compreenderam por que o seno e o cosseno de um ângulo agudo são sempre um número maior do que zero e menor do que 1. O objetivo da **atividade 2** é instigar os estudantes a observar algumas relações entre as razões trigonométricas de ângulos complementares (α e β são as medidas de abertura de ângulos complementares). Verifique, na **atividade 5**, se os estudantes perceberam que deverão usar a relação cos α. Na **atividade 6**, ao selecionar as informações relevantes em uma situação cotidiana para resolver um problema, os estudantes praticam a **abstração**, um dos pilares do pensamento computacional.

Na **atividade 7**, foram dados os valores de sen α, cos α e tg α. É importante que eles percebam que é possível descartar duas das razões e trabalhar apenas com uma delas. Talvez algum estudante use outra razão, diferente da usual, para resolver o problema. Caso isso aconteça, converse com a turma acerca de outros modos de resolução.

O uso de demonstrações em *Relação fundamental da Trigonometria* pode auxiliar no entendimento e na validação das proposições, contribuindo na resolução da **atividade 9** e também desenvolvendo a **competência específica 5**.

Na **atividade 10**, observe se os estudantes usam as relações entre seno, cosseno e tangente corretamente. Caso apresentem dificuldades, retome esses conceitos.

Na **atividade 11**, use o **item a** para mostrar aos estudantes que, dada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo, é possível obter as outras razões sem recorrer à relação fundamental da Trigonometria. Aproveite o **item b** e explique à turma que, como α é um ângulo agudo e cos α é a razão entre as medidas de comprimento de dois lados de um triângulo, o valor de cos deve ser positivo.

Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis

Este tópico apresenta o desenvolvimento de relações entre as medidas de comprimento dos lados de triângulos, inclusive um obtido ao dividir um quadrado por uma de suas diagonais, e, também, a obtenção dos valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos cujas aberturas medem 30°, 45° e 60°. Essas relações são de grande relevância para problemas que envolvem Trigonometria.

O trabalho com este tópico levará os estudantes a se deparar com problemas contendo diversas informações. Desses problemas, deverão extrair as informações relevantes para resolvê-los, fazendo a **abstração**, um dos pilares do pensamento computacional. Nesse momento, propõe-se o exercício da criatividade e do caminho inverso, determinando uma situação cuja abstração dada pode representar.

A **atividade resolvida R4** instiga os estudantes a praticar a abstração, pois eles deverão observar uma situação e extrair os dados relevantes para resolver um problema relacionado a ela. O esquema dessa atividade poderia ser a abstração de alguma situação diferente da descrita. Instigue a criatividade dos estudantes e solicite que elaborem um problema no qual esse esquema represente a nova situação abordada.

As **atividades 12** a **20** favorecem o desenvolvimento da **competência específica 3**, pois os estudantes poderão utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, de modo a construir argumentação consistente.

Após a resolução da **atividade 13** é um bom momento para enfatizar que sempre convém examinar se há mais de uma maneira de resolver uma atividade dada.

Para responder ao **item a** da **atividade 14**, os estudantes recorrerão ao **reconhecimento de padrões**, pilar do pensamento computacional. Espera-se que eles percebam que o enunciado é muito parecido com o da **atividade resolvida R4**, mudando apenas a posição da tábua ou viga que forma um ângulo cuja abertura mede 60° em relação ao solo. Caso tenham dificuldade para perceber isso, oriente-os a fazer um esboço da situação para compará-lo com o esquema da **atividade resolvida R4**. O **item b** incentiva-os a perceber que, para responder às questões do item anterior, alguns dados fornecidos são irrelevantes. Nesse sentido, é mobilizada a **abstração**, outro pilar do pensamento computacional.

Aproveite as **atividades 15** e **16** para verificar a habilidade dos estudantes de identificar a relação trigonométrica que devem usar para determinar as medidas solicitadas.

Caso julgue necessário, na **atividade 17**, lembre os estudantes de que um triângulo equilátero possui todos os lados com medidas de comprimento iguais.

A **atividade 20** propõe o cálculo da medida de área do triângulo *MER*. Essa proposta pode ser trabalhada em duplas, a fim de que os estudantes troquem ideias acerca dos conceitos envolvidos.

Uso da calculadora e da tabela trigonométrica

Este tópico apresenta a tabela trigonométrica e a calculadora para obter as razões trigonométricas de ângulos agudos. Se possível, ressalte que as tabelas trigonométricas têm seu valor histórico na construção do conhecimento. Essa prática favorece o desenvolvimento da **competência geral 1**.

Para o trabalho com as **atividades resolvidas R5** e **R6**, os estudantes deverão usar uma calculadora. Após trabalhar com a **atividade resolvida R5**, peça a eles que, usando a tabela trigonométrica ou uma calculadora, verifiquem que tg x é o inverso de tg y, quando $x + y = 90°$.

As **atividades 21** a **31** favorecem o desenvolvimento da **competência específica 3**, pois os estudantes poderão utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos na resolução de problemas em diversos contextos, a fim de construir argumentação consistente. Com a **atividade 21**, espera-se que se familiarizem com o cálculo de aproximações das razões trigonométricas dos ângulos notáveis, as quais serão bastante usadas nas atividades.

O pilar **algoritmo** do pensamento computacional é mobilizado pelos estudantes durante a realização da **atividade 27**. Solicite a eles que reproduzam os passos do algoritmo em uma calculadora e determinem o valor do cosseno de alguns ângulos. Caso julgue conveniente, é possível ampliar a proposta da atividade e pedir a eles que representem, em um fluxograma e na linguagem corrente, o algoritmo para calcular o valor do seno e da tangente de um ângulo utilizando uma calculadora.

Na **atividade 30**, trabalhe a ideia da tangente como medida da inclinação. Incentive os estudantes a perceber, no **item a**, que o valor da tangente do ângulo formado entre a rampa e o solo, em porcentagem, é a medida da inclinação da rampa. Aproveite essa atividade para conversar sobre esse tema com os estudantes, questionando, por exemplo, se a escola onde estudam preenche os requisitos de acessibilidade, se eles conhecem lugares públicos que não têm rampas de acesso em conjunto com as escadas ou se as rampas de acesso que conhecem permitem a circulação do público-alvo de maneira satisfatória. Essa abordagem também permite falar com a turma sobre a importância da acessibilidade para as pessoas com deficiência. Caso julgue necessário, informe que a sigla PCD significa "pessoa com deficiência". Essa sigla identifica as pessoas que têm algum tipo de deficiência ou limitações – física, intelectual, visual ou auditiva. Esse trabalho favorece o desenvolvimento do **TCT Educação em Direitos Humanos**.

Sugestão de atividade para combater o *bullying*

O *bullying* contra estudantes com deficiência é uma questão preocupante que revela a falta de empatia e respeito na convivência escolar. Esses estudantes frequentemente enfrentam desafios devido a suas deficiências, e a agressão verbal ou física e a exclusão social agravam ainda mais sua vulnerabilidade. É essencial que escolas, famílias e a sociedade em geral adotem medidas efetivas para promover a inclusão e o respeito, criando um ambiente acolhedor e seguro para todos.

Por meio de atividades, muito diálogo, dinâmicas e palestras, é possível levar os estudantes a reconhecer os sinais do *bullying* e a perceber a relevância de falar sobre isso com os colegas, professores e familiares.

O *bullying* muitas vezes acontece por falta de conhecimento dos estudantes. Portanto, uma boa proposta para combatê-lo é convidar um estudante com deficiência para conversar com a turma e explicar como é seu cotidiano, quais são suas limitações e como ele lida com as situações do dia a dia. Converse com a turma, antecipadamente, preparando-a para esse dia. Os estudantes podem elaborar perguntas, e o professor, cuidadosamente, deve conduzi-las, para que não haja nenhum tipo de constrangimento por parte do entrevistado. Nesse trabalho, é importante que o professor ressalte a necessidade de combater o de capacitismo. Sugira uma pesquisa sobre esse tema antes da elaboração das perguntas. Não tratar a pessoa com deficiência como um exemplo de superação é fundamental para evitar o capacitismo, e os elogios direcionados à pessoa devem ser voltados às suas capacidades, nunca relacionando-os com sua deficiência ou limitação.

Trabalho e juventudes – Inclusão no mercado de trabalho: lei de cotas para pessoas com deficiência completa 29 anos

Objetivos

- Conhecer a Lei de Cotas para Pessoas com Deficiência.
- Refletir sobre a inclusão das pessoas com deficiência no mundo do trabalho.
- Calcular a medida da inclinação de rampas de acesso.

Orientações didáticas

A seção aborda a inclusão de pessoas com deficiência no mercado de trabalho. O texto, publicado pelo Ministério dos Direitos Humanos e da Cidadania (MDHC), traz à tona a importância da Lei de Cotas para Pessoas com Deficiência. Inicie o trabalho propondo aos estudantes que façam a leitura desse texto. Depois, reserve um momento para que possam compartilhar o que compreenderam e o que mais chamou a atenção deles. Aproveite a oportunidade e peça que respondam às questões da **atividade 1**. Reserve um momento para que possam conversar sobre suas experiências.

Na **atividade 2**, os estudantes são convidados a refletir sobre a lei de cotas. Espera-se que as experiências compartilhadas por alguns estudantes na **atividade 1** bastem para que percebam a insuficiência dessa lei. Incentive-os a listar o que eles consideram importante para que as pessoas com deficiência se sintam incluídas no mercado de trabalho. Eles podem levantar os seguintes fatores:

- melhores oportunidades (melhores salários, cargos, plano de carreira etc.);
- dar às pessoas com deficiência as mesmas condições das pessoas sem deficiência;
- permitir a participação social da pessoa com deficiência em igualdade de condições das demais pessoas;
- adaptação dos ambientes para que sejam acessíveis;
- meios de transporte acessíveis.

A **atividade 3** aborda a norma NBR 9050 da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) para rampas de acesso. Caso queira fornecer mais detalhes sobre essa norma aos estudantes, acesse http://acessibilidade.unb.br/images/PDF/NORMA_NBR-9050.pdf (acesso em: 24 out. 2024). Nesse momento, solicite que respondam ao **item a**.

Em seguida, peça aos estudantes que respondam aos **itens b** e **c**. No **item b**, caso não reconheçam que o cálculo da medida da inclinação está associado com a tangente, faça, na lousa, um esboço do triângulo que precisam considerar, destacando que h é a medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo de inclinação, c é a medida do comprimento do cateto adjacente e, portanto, $\frac{h}{c}$ corresponde à tangente do ângulo de inclinação.

No **item c**, espera-se que os estudantes façam os seguintes cálculos:

$$i = \frac{0{,}5\text{ m} \cdot 100}{4\text{ m}} = \frac{50}{4} = 12{,}5$$

Portanto, a inclinação da rampa é de 12,5%.

Como o desnível é de 0,5 m, a rampa deveria ter no máximo 8,33% de inclinação. Logo, ela está fora dos padrões estabelecidos pela NBR 9050.

A abordagem desta seção desenvolve os **TCTs Trabalho** e **Educação em Direitos Humanos**, pois trata da inclusão de pessoas com deficiência no mercado de trabalho, levando os estudantes a refletir sobre a importância de elas se sentirem incluídas na sociedade, o que requer a garantia de alguns direitos, como melhores oportunidades, condições iguais às de pessoas sem deficiência e ambientes adaptados para serem acessíveis, entre outros.

Para finalizar o capítulo 7

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que fizerem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

CAPÍTULO 8 Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer

Objetivos

- Calcular a medida de comprimento e a medida angular de um arco, em grau e em radiano.
- Conhecer o ciclo trigonométrico e identificar arcos simétricos.
- Ampliar as razões trigonométricas para ângulos com medidas de abertura maiores que 90°.
- Estender a relação fundamental da Trigonometria para o ciclo trigonométrico.
- Aplicar a lei dos senos e a lei dos cossenos.

Justificativa dos objetivos

O aprofundamento no estudo da Trigonometria amplia o trabalho iniciado no capítulo anterior e é justificado pela sua aplicabilidade em diversas áreas, como Engenharia e Astronomia.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 1**, **2** e **5**.
- **Competências específicas e habilidade da área de Matemática e suas Tecnologias:**

Competência específica 3: **EM13MAT308**.

Competência específica 5.

- **Competência específica e habilidade da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**

Competência específica 2[1]: **EM13CNT202**[2].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e da habilidade da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Ciência e Tecnologia
- Trabalho

Orientações didáticas

A abertura deste capítulo favorece o desenvolvimento da **competência geral 1**, apresentando conhecimentos historicamente construídos. Comente com os estudantes sobre o achado dos cientistas em 2013 e sugira que pesquisem mais sobre o assunto. Será que a função das "engrenagens" encontradas no inseto tem similaridade com a que utilizamos em uma máquina? É interessante abordar essa temática como uma curiosidade, mas também buscar favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT202** e da **competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, considerando os diferentes níveis de organização de diversas formas de manifestação da vida.

Ainda na área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, explique à turma que, por meio da combinação de engrenagens de diferentes características, é possível realizar movimentos e ampliar ou reduzir forças, facilitando a realização de muitas atividades no dia a dia, principalmente as relacionadas à redução de esforço físico, além de permitir a construção de muitos aparatos industriais. Aborda-se, assim, o **TCT Ciência e Tecnologia**.

Ao longo de todo o capítulo, será favorecido o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308**, uma vez que os estudantes deverão resolver problemas aplicando a lei dos senos e a lei dos cossenos.

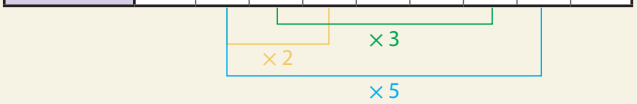
Arcos de uma circunferência

Neste tópico, serão trabalhadas as relações entre a medida do comprimento do raio de uma circunferência e as medidas de comprimento e angular de um arco correspondente, além de estabelecer a relação entre grau e radiano.

Inicialmente, diferencie a medida de comprimento e a medida angular de um arco. Isso pode ser feito por meio de exemplos. Relembre a fórmula de cálculo da medida do comprimento da circunferência. Comente que as medidas de comprimento e angular de um arco são proporcionais e que, por isso, eles poderão utilizar regras de três para solucionar algumas atividades. Explore a **atividade resolvida R1** e destaque o uso da regra de três. Depois, apresente os significados das unidades de medida angular grau e radiano e a relação entre eles. Se possível, complemente o quadro apresentado no subtópico *Relação entre grau e radiano* com as medidas angulares de outros arcos, evidenciando que, se uma medida angular em grau é multiplicada por um número natural k, a respectiva medida em radiano também é multiplicada pelo mesmo número natural k; por exemplo, como 60° é o dobro de 30°, logo a medida angular correspondente a 60° em radiano também será o dobro da medida angular em radiano correspondente a 30°.

Relação entre algumas medidas angulares em grau e em radiano

grau	0	30	45	60	90	120	135	150	180
radiano	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π



Levar informações para os estudantes sobre o contexto histórico do surgimento do grau como unidade de medida pode favorecer o desenvolvimento da **competência geral 1**.

As **atividades 1** e **3** envolvem o uso de um *software* de Geometria dinâmica. É importante que os estudantes se familiarizem com o *software* escolhido, antes de usá-lo na realização das atividades. As ferramentas disponíveis nos programas podem ser diferentes e talvez seja preciso modificar o passo a passo da construção.

No passo 2 da **atividade 1**, oriente os estudantes a esconder alguns elementos da construção (a maioria dos *softwares* possui essa função), a fim de que ela não fique muito poluída visualmente. Em relação ao passo 3, dependendo do *software*, o modo de realizar as medições pode ser diferente; em alguns, por exemplo, para medir o comprimento da circunferência é necessário separá-la em arcos e medir o comprimento desses arcos. Antes de realizarem o passo 4, incentive-os a refletir sobre o valor que deverão encontrar para $\frac{C}{d}$. Com essa sequência de passos apresentada, os estudantes podem investigar a situação geométrica proposta e fazer conjecturas, já que o *software* de Geometria dinâmica permite movimentar a construção realizada, preservando suas propriedades. Portanto, essa atividade favorece o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **5** e da **competência específica 5**.

Ciclo trigonométrico

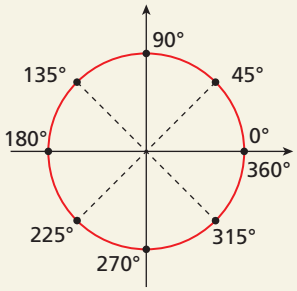
Neste tópico, serão estudados o ciclo trigonométrico e os tipos de simetria presentes nele. Inicie apresentando o ciclo trigonométrico e as convenções adotadas. Os arcos com medida angular negativa ou maior que 2π serão estudados no capítulo 9, mas, ao abordar os sentidos de uma circunferência, comente a respeito dos arcos com medidas angulares negativas; ao relembrar que uma volta completa corresponde a 2π radianos, informe que, no estudo do ciclo trigonométrico, os arcos maiores do que 2π radianos também serão estudados. Assim, os estudantes já começam a se habituar com esses conceitos.

1 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

2 **(EM13CNT202)** Analisar as diversas formas de manifestação da vida em seus diferentes níveis de organização, bem como as condições ambientais favoráveis e os fatores limitantes a elas, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

Ao analisar entre quais medidas angulares um arco do 1º ou do 2º quadrante estão, repita a pergunta para arcos do 3º e do 4º quadrante. Depois, apresente os três tipos de simetria no ciclo trigonométrico e resolva o exemplo proposto, que trabalha com as medidas angulares dos arcos simétricos em grau. Em seguida, faça a **atividade resolvida R3**, que trabalha com as medidas angulares dos arcos simétricos em radiano. Então, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

Na **atividade 8**, se necessário, oriente-os a representar o ciclo trigonométrico dividindo-o em 8 partes iguais, como na figura a seguir, para identificar as extremidades dos arcos de 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315° e 360°. Isso pode ajudar a identificar a posição das extremidades de outros arcos.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Na **atividade 9**, os estudantes devem obter as medidas angulares dos arcos da **atividade 8** em radiano. Se necessário, relembre a medida angular de um arco de 30° em radiano.

Na **atividade 11**, os estudantes devem determinar os simétricos dos arcos dados, com medida angular em grau ou em radiano, no 1º quadrante. Uma maneira de resolvê-la se dá por meio do **reconhecimento de padrões** (um dos pilares do pensamento computacional) relacionado aos arcos simétricos. Peça aos estudantes que expliquem com as próprias palavras alguns padrões, por exemplo: qualquer simétrico de um arco do 1º quadrante em relação à origem pode ser obtido adicionando-se 180° ou π à medida angular do arco.

Seno, cosseno e tangente

Neste tópico, serão trabalhados o seno, o cosseno e a tangente de arcos do ciclo trigonométrico e a relação fundamental da Trigonometria.

Inicie mostrando como o seno e o cosseno de um arco são representados geometricamente no 1º quadrante, retomando o conceito de razão trigonométrica nos triângulos retângulos. Depois, amplie essa análise para os demais quadrantes e oriente os estudantes a verificar os sinais dessas relações em cada um deles. Assim, eles podem resolver as **atividades 12** e **23**.

Se necessário, trabalhe com alguns valores numéricos e conclua com eles a igualdade de senos e cossenos de alguns arcos simétricos. Por exemplo, $\text{sen } 30° = \text{sen } 150° = \frac{1}{2}$ e $\cos 135° = \cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Em seguida, faça a **atividade resolvida R4**. Reforce a importância de localizar adequadamente cada arco no ciclo trigonométrico. Se possível, amplie essa atividade e oriente os estudantes a excluir o arco de $\frac{\pi}{2}$ e escrever os cossenos desses arcos em ordem crescente. Ficaria assim: $\cos \pi$, $\cos \frac{10\pi}{9}$, $\cos \frac{2\pi}{3}$, $\cos \frac{3\pi}{2}$, $\cos \frac{7\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{12}$.

Depois, solucione as **atividades resolvidas R5** e **R6**. Se necessário, retome como se determinam os arcos simétricos no ciclo trigonométrico antes de fazer a **atividade resolvida R6**. Em seguida, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

Se necessário, comente com os estudantes que, na **atividade 13**, a proposta não é calcular o valor dos senos e cossenos, e sim fazer uma análise dos sinais das expressões.

Nas **atividades 14** a **16**, oriente os estudantes a representar um ciclo trigonométrico e posicionar adequadamente os arcos analisados. Na **atividade 19**, os estudantes devem determinar os simétricos do arco apresentado e, depois, calcular os respectivos senos.

Na **atividade 20**, instrua os estudantes a representar os arcos envolvidos em cada expressão em um ciclo trigonométrico e a associar aos simétricos do 1º quadrante para determinar os respectivos valores de seno e cosseno.

Para a **atividade 21**, é necessário disponibilizar calculadoras científicas para os estudantes. O modo de acessar as funções trigonométricas em calculadoras científicas, ou em aplicativos de celulares que simulam essas calculadoras, pode variar entre os dispositivos. Antes da aula, resolva o exemplo apresentado no enunciado para verificar o uso correto dessas funções no dispositivo a ser utilizado. Explique à turma que os valores obtidos são aproximações. A quantidade de casas decimais varia de acordo com o modelo do aparelho.

Na **atividade 22**, os estudantes são incentivados a concluir que o seno da soma de duas medidas angulares de arcos não é igual à soma dos senos dessas mesmas medidas. A **atividade 24** propõe a resolução de equações. Para ajudar na resolução, explique aos estudantes que é necessário determinar os valores de x para que o seno seja igual a $\frac{1}{2}$ e os valores de x para que o cosseno seja $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Oriente-os a verificar que, no intervalo trabalhado, é possível obter mais de uma solução para os senos e cossenos.

No subtópico *Tangente de um arco*, mostre como a tangente de um arco é representada geometricamente no 1º quadrante, retomando o conceito de razão trigonométrica nos triângulos retângulos. Reforce com os estudantes as restrições que existem para a tangente. Depois, amplie essa análise para os demais quadrantes e oriente-os a verificar os sinais da tangente em cada um deles. Assim, eles podem resolver a **atividade 25**.

Se necessário, trabalhe com alguns valores numéricos e conclua com os estudantes a igualdade das tangentes de alguns arcos simétricos. Por exemplo, $\text{tg } 30° = \text{tg } 210° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{tg } 135° = \text{tg } 315° = -1$.

Em seguida, faça a **atividade resolvida R7**. Comente que o objetivo dessa atividade não é determinar os valores das tangentes, e sim comparar esses valores. Reforce a importância de localizar adequadamente cada arco no ciclo trigonométrico. Se possível, oriente-os a utilizar régua, transferidor e compasso na representação das tangentes, destacando a necessidade de ter cuidado ao usar o compasso. Na **atividade resolvida R8**, reforce como se determinam os arcos simétricos. Em seguida, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

Na **atividade 26**, a proposta não é determinar o valor das tangentes, e sim fazer a análise dos sinais das expressões. Na **atividade 27**, chame a atenção para o fato de que os arcos de medidas angulares α, β e θ são simétricos dos arcos diametralmente opostos. Na **atividade 28**, eles devem determinar os simétricos do arco apresentado e as respectivas tangentes.

A **atividade 29** leva os estudantes a verificar, agora de modo mais abrangente, que não há proporcionalidade entre as medidas angulares de arcos e os respectivos valores da tangente. A **atividade 30** proporciona uma diversidade de aplicação dos conceitos estudados. Peça aos estudantes que façam uma estimativa; calculem e comparem o resultado com essa estimativa; localizem o quadrante de um arco conhecendo os valores de seno, cosseno e tangente; e apliquem as relações de simetria de arco para determinar os valores da tangente.

No subtópico *Relação fundamental da Trigonometria*, use o ciclo trigonométrico apresentado no livro para abordar essa relação. Depois, mostre que ela é válida para os quatro quadrantes. Em seguida, faça as **atividades resolvidas R9** e **R10**. Em ambas, reforce a importância de conhecer o quadrante ao qual o arco trabalhado pertence. Depois, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

A **atividade 31** é similar à **atividade resolvida R9**, a qual pode ser retomada, se necessário. Na **atividade 32**, os estudantes utilizam a relação fundamental para determinar os itens pedidos. Já a **atividade 33** é similar à **atividade resolvida R10**. Na **atividade 34**, os estudantes utilizam a relação fundamental da Trigonometria para verificar que é impossível ocorrer os valores dados de seno e cosseno de um mesmo arco. Para ampliar a atividade, peça a eles que considerem o valor do seno correto e determinem o respectivo valor do cosseno. Em seguida, considerem o valor do cosseno correto e determinem o respectivo valor do seno.

Trigonometria em um triângulo qualquer

Neste tópico, serão trabalhadas a lei dos senos e a lei dos cossenos. Este tópico visa favorecer o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT308** no que se refere à aplicação das leis do seno e do cosseno na resolução de problemas que envolvem triângulos.

O contexto utilizado para apresentar a lei dos senos é relacionada a trabalhos da área de topografia. A topografia é a ciência que estuda as características naturais ou artificiais da superfície de certo local. Assim, cabe ao topógrafo realizar o levantamento, medir, calcular e representar áreas da superfície terrestre. Os serviços de topografia são realizados por profissionais, como técnico em agrimensura, arquiteto, engenheiro civil ou engenheiro agrimensor. Esse contexto aborda o **TCT Trabalho**.

Se achar conveniente, realize um trabalho interdisciplinar com o professor da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, construindo um teodolito caseiro (há vários modelos disponíveis na internet), instrumento de medição que poderá ser utilizado na elaboração de hipóteses, ou avaliando e justificando situações-problema sob uma perspectiva científica, o que favorece o desenvolvimento da **competência específica 3**[1] **da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, da habilidade **EM13CNT301**[2] e do **TCT Ciência e Tecnologia**.

Demonstre a lei dos senos e, depois, faça a **atividade resolvida R11**, que aplica a lei dos senos na situação apresentada no início do tópico. Na **atividade resolvida R12**, comente com os estudantes que, em muitas situações, é necessário utilizar a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo quando conhecemos as medidas de abertura de dois ângulos e desejamos determinar a medida da abertura do terceiro ângulo. No **item b** dessa atividade, os estudantes devem utilizar o quadro fornecido para determinar as medidas de abertura aproximadas dos ângulos internos. Se possível, oriente-os a usar uma calculadora científica ou um aplicativo de celular que simule uma dessas calculadoras para determinar a medida de abertura do ângulo cujo valor do seno é 0,94 utilizando a tecla $\sin^{-1}$. O procedimento apresentado no livro pode variar dependendo do modelo da calculadora. Em algumas calculadoras, por exemplo, é necessário digitar primeiro a tecla $\sin^{-1}$ e, depois, o valor do seno do ângulo cuja medida de abertura queremos determinar.

Em seguida, peça aos estudantes que resolvam as atividades propostas. Como a **atividade 35** é similar à **atividade resolvida R12**, durante a resolução, eles podem utilizar as informações do quadro apresentado na atividade resolvida. No **item b** da **atividade 36**, eles precisam determinar as medidas de comprimento do pomar até a entrada e do jardim até a entrada. Para determinar a medida de comprimento do pomar até a entrada, eles podem aplicar a lei dos senos; já a medida de comprimento do jardim até a entrada pode ser dada pelo teorema de Pitágoras.

Nas **atividades 37** e **38**, oriente os estudantes a realizar um esboço das situações apresentadas. Na **atividade 37**, se necessário relembre que dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

Na **atividade 39**, destaque aos estudantes que a unidade de medida da velocidade dada está em metro por segundo e que a unidade de medida do tempo decorrido está em minuto. Além disso, se necessário, comente que o triângulo formado é isósceles.

No subtópico seguinte, demonstre a lei dos cossenos e, depois, faça as **atividades resolvidas R13** e **R14**. As demonstrações das leis do seno e do cosseno empregam recursos e estratégias que propiciam o entendimento dessas proposições, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 5**. Em seguida, oriente os estudantes a resolver as atividades propostas.

Na **atividade 40**, similar à **atividade resolvida R13**, há a proposta de fazer uma aplicação direta da lei dos cossenos.

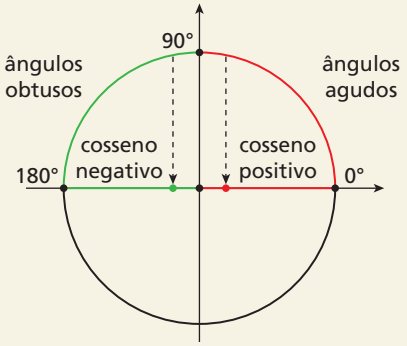
Nas **atividades 41** a **43** e **45**, oriente os estudantes a realizar o esboço de cada situação apresentada. Na **atividade 41**, eles realizam uma aplicação direta da lei dos cossenos. Na **atividade 42**, se necessário, relembre que, considerando que as medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo são maiores que 0° e menores que 180°, se o cosseno de um ângulo for negativo, o ângulo será obtuso; se for positivo, o ângulo será agudo. Represente um ciclo trigonométrico na lousa para ajudar no entendimento dos estudantes.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

1 **(Competência específica 3)** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

2 **(EM13CNT301)** Construir questões, elaborar hipóteses, previsões e estimativas, empregar instrumentos de medição e representar e interpretar modelos explicativos, dados e/ou resultados experimentais para construir, avaliar e justificar conclusões no enfrentamento de situações-problema sob uma perspectiva científica.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Na **atividade 43**, se necessário, relembre que, em um paralelogramo, dois ângulos internos consecutivos são suplementares e as diagonais dividem os ângulos internos associados às suas extremidades em duas partes de mesma medida de abertura.

A **atividade 44** é similar à **atividade resolvida R14**. Na **atividade 45**, após aplicar a lei dos cossenos, os estudantes precisam determinar a medida da abertura do ângulo cujo valor do cosseno é igual a $\frac{1}{2}$. Se necessário, reveja os valores dos cossenos dos arcos notáveis.

Para finalizar o capítulo 8

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou se fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

Capítulo 9 Funções trigonométricas

Objetivos

- Relacionar funções trigonométricas a fenômenos periódicos.
- Estender o conceito de ciclo trigonométrico a $\mathbb{R}$.
- Resolver equações trigonométricas.
- Construir e analisar gráficos de funções trigonométricas.

Justificativa dos objetivos

O estudo das funções periódicas, em particular das funções trigonométricas, viabiliza a modelagem de fenômenos naturais, físicos e sociais com comportamento cíclico ou periódico, a representação, de modo aproximado, de oscilações desses fenômenos no decorrer de um intervalo de medida de tempo e a elaboração de previsões em muitas situações.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 2** e **7**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1.

  Competência específica 3: **EM13MAT306** e **EM13MAT315**.

  Competência específica 4: **EM13MAT404**.

  Competência específica 5.
- **Competência específica e habilidades da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**

  Competência específica 2[1]: **EM13CNT203**[2], **EM13CNT204**[3] e **EM13CNT206**[4].

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Temas Contemporâneos Transversais

- Educação Ambiental
- Saúde

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

1 **(Competência específica 2)** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

2 **(EM13CNT203)** Avaliar e prever efeitos de intervenções nos ecossistemas, e seus impactos nos seres vivos e no corpo humano, com base nos mecanismos de manutenção da vida, nos ciclos da matéria e nas transformações e transferências de energia, utilizando representações e simulações sobre tais fatores, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

3 **(EM13CNT204)** Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros).

4 **(EM13CNT206)** Discutir a importância da preservação e conservação da biodiversidade, considerando parâmetros qualitativos e quantitativos, e avaliar os efeitos da ação humana e das políticas ambientais para a garantia da sustentabilidade do planeta.

Orientações didáticas

A abertura deste capítulo permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, pois pode-se propor aos estudantes uma pesquisa sobre as Unidades de Conservação do Brasil e discutir propostas de tomada de decisão pública, manejo e conservação da biodiversidade. Esse trabalho interdisciplinar, que detalharemos a seguir, favorece o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **7**, da **competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e das habilidades **EM13CNT203** e **EM13CNT206**, além do **TCT Educação Ambiental** e do **ODS 14: Vida na água**, que preveem a gestão ambiental com base no uso de abordagens ecossistêmicas.

Comente com os estudantes que a praia apresentada é um ambiente recifal que funciona como berçário da vida marinha e por isso é a base da cadeia alimentar, pois tem uma grande variedade de peixes, algas e corais. Ela apresenta complexas relações ecológicas importantes para diversos organismos marinhos. Preservar locais como esse é necessário para a manutenção da vida de muitas espécies. Em seguida, apresente, de forma resumida, o conceito de Unidade de Conservação (UC), os tipos existentes no Brasil e as diferentes funções que o Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio) e o Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (Ibama) desempenham.

Proponha uma pesquisa mais aprofundada em casa sobre os tipos de UC. Será necessário que os estudantes:

a. saibam a diferença entre área de proteção integral e de uso sustentável;

b. tragam exemplos de conhecidas UC e citem os tipos a que estão submetidas;

c. expliquem o conceito de plano de manejo, especialmente sobre as permissões de visitação turística, educacional e pesquisa;

d. aprofundem-se, especialmente, em três tipos: Reserva Biológica (ReBio), Reserva Particular de Patrimônio Natural (RPPN) e Reserva de Desenvolvimento Sustentável (RDS).

Após a pesquisa, sugerimos desenvolver a atividade partindo da divisão da turma em três diferentes grupos, que serão os três "Conselhos". Cada Conselho deverá ser composto de estudantes que serão defensores/especialistas de uma ReBio, de uma RPPN, de uma RDS, e estudantes que serão a "opinião pública/gestores públicos". Pode-se pedir a cada estudante, na pesquisa anterior, que se especialize em um dos três tipos, porém é importante que eles também conheçam as características dos outros dois tipos de UC. Cada grupo deverá defender a área de piscinas naturais que melhor se adequará ao seu modelo de conservação: RPPN, ReBio ou RDS. Combine algumas regras, como limite de medida de tempo para argumentação, apresentação de exemplos e argumentos viáveis. Os estudantes da opinião pública farão a mediação de cada Conselho e, posteriormente, a tomada de decisão. Incentive o debate.

Finalize a atividade com os Conselhos expondo a todos a decisão final de tipo de UC para a área. Conclua discutindo a necessidade de uma legislação que crie áreas de conservação permanentes, importantes do ponto de vista conservacionista, social, educacional, turístico e de pesquisa.

Funções periódicas

O contexto trazido pelo tópico aborda um fenômeno periódico natural gerado pela força gravitacional exercida pela Lua e pelo Sol na Terra: movimento de descida e de subida do nível das marés, modelado por uma função trigonométrica. O emprego de conceitos e de procedimentos matemáticos para interpretar situações das Ciências da Natureza favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306** e da **competência específica 1**. Nesse sentido, pode-se fazer um trabalho interdisciplinar, promovendo o desenvolvimento da habilidade **EM13CNT204** e da **competência específica 2 da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, por exemplo, em discussões sobre previsões e cálculos a respeito dos movimentos das marés, com base na análise das interações gravitacionais. Reforce a importância de preservar os recursos naturais, motivando os estudantes a se sentirem responsáveis pela preservação dos ambientes naturais.

Se julgar oportuno, comente com a turma que as marés podem ser utilizadas como fonte de geração de energia, a energia maremotriz ou energia das marés, que é renovável. O movimento das marés e as correntes formadas podem ser aproveitados para gerar energia elétrica, sob a condição de que haja um desnível entre maré alta e maré baixa de no mínimo 7 metros. A função periódica é parte importante do processo, uma vez que sabendo o intervalo entre as marés é possível calcular o potencial energético.

Ao explorar a representação gráfica da função que descreve o comportamento periódico da maré, ressalte que a função fornece uma aproximação. O período entre duas marés altas ou baixas não é exatamente 12 horas.

Ao determinar o período de uma função periódica, sabe-se como é o comportamento dela em toda a extensão de seu domínio. Essa identificação de regularidade permite decompor um estudo extenso em partes menores e mais simples, em que o resultado observado em uma parte pode ser extrapolado para o todo. A **decomposição** de um problema em partes menores para resolver o problema inicial é um dos pilares do pensamento computacional. Essa habilidade é aplicada na **atividade 1**, no cálculo do período de uma função periódica.

No **item b** da **atividade 2**, comente que o 1 não é um valor máximo, pois ele não pertence à função.

As **atividades 3** e **4** propõem a reflexão e a exploração, respectivamente. A **atividade 4** favorece o desenvolvimento do **TCT Educação Ambiental** ao propor aos estudantes que pesquisem sobre turismo sustentável e preservação ambiental. Há vários *sites* que tratam desse assunto, incluindo o do Ministério do Turismo. Se julgar conveniente, incentive os estudantes a elaborar uma cartilha com atitudes sustentáveis de turismo.

Ciclo trigonométrico

Neste tópico, os estudantes ampliarão o conhecimento sobre o ciclo trigonométrico, relacionando as medidas de arcos da primeira volta já estudadas com as medidas de arcos obtidas nas infinitas voltas e concluindo que um ponto da circunferência pode representar diversas medidas de arcos positivas ou negativas. Para isso, estudarão a função de Euler, os arcos côngruos e a expressão geral para representar todos os arcos côngruos.

Nas **atividades 5** e **6**, os estudantes deverão aplicar o que aprenderam neste tópico. Caso sintam dificuldade, oriente-os a revisar as **atividades resolvidas R2** e **R3**.

A função seno

Para iniciar os estudos sobre a função seno, se necessário, retome os conceitos básicos de Trigonometria, como seno, cosseno, tangente e ângulos notáveis. Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404**, já que os estudantes analisarão a função seno em suas representações algébrica e gráfica, construindo e estudando o gráfico da função com base no ciclo trigonométrico com e sem o auxílio de *softwares* de Geometria dinâmica.

Na internet, há diversos *softwares* de Geometria dinâmica, como o IGeom e o Geogebra. Se achar conveniente, escolha um deles para realizar a construção proposta neste tópico. Vale ressaltar que, dependendo do *software* escolhido, o passo a passo da construção pode ser diferente. Em geral, esses *softwares* possuem a funcionalidade de rastrear o caminho de um ponto. De qualquer maneira, mesmo que o escolhido não tenha essa funcionalidade, é possível acompanhar a movimentação do ponto, verificando, assim, sua trajetória. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula. A realização da construção apresentada no livro usando *software* propicia o desenvolvimento da **competência específica 5**, já que possibilita a investigação e o estabelecimento de conjecturas, por meio do uso de tecnologia, de um conceito matemático, construindo, verificando e analisando a curva da função seno com base no rastreamento do ponto que a determina. Essa competência se articula com a **competência geral 2** no que diz respeito à investigação, e à reflexão para testar hipóteses, inclusive por meio do uso de tecnologia.

Em seguida, explore as características da função seno observando sua representação gráfica: período de 2π, $\text{Im} = [-1, 1]$ e amplitude igual a 1.

Destaque o fato de que as funções periódicas são especialmente úteis para modelar situações que se comportam de acordo com algum padrão. Ao lidar com funções periódicas, os estudantes colocam em prática um dos pilares do pensamento computacional: o **reconhecimento de padrões**. Para ampliar a **atividade 9**, peça aos estudantes que avaliem e descubram, por meio de um *software* de desenho de gráficos de funções, quando a população de zebras foi máxima e qual é o período para que isso aconteça.

A **atividade 12** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404**, já que propõe, com base na análise gráfica, identificar o domínio e o conjunto imagem da função. Além disso, a atividade possibilita trabalhar a ideia de translação do gráfico, em função do parâmetro k, na função $f(x) = k + \text{sen } x$.

A situação apresentada na **atividade 14** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EM13MAT306**, uma vez que apresenta a utilização de uma função periódica modelando a variação da medida de altura da maré.

O **item e** da **atividade 15** propõe a investigação do parâmetro k na função dada por $i(x) = k \cdot \text{sen } x$. Os estudantes iniciam a investigação pela construção do gráfico em casos particulares, que pode ser feita usando um *software* de construção de gráficos. Se necessário, proponha outros casos antes de eles formularem uma hipótese.

A função cosseno

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404**, já que os estudantes analisarão a função cosseno em suas representações algébrica e gráfica, construindo e estudando o gráfico da função com base no ciclo trigonométrico com e sem o auxílio de *softwares* de Geometria dinâmica.

Assim como no tópico anterior, se julgar oportuno, realize a construção proposta utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Esse tipo de atividade propicia o desenvolvimento da **competência específica 5**, uma vez que os estudantes usarão a tecnologia para estabelecer conjecturas de um conceito matemático, analisando a construção e a curvatura da função cosseno com base no rastreamento do ponto que a determina. Essa competência se articula com a **competência geral 2** no que diz respeito à investigação e à reflexão para testar hipóteses, inclusive por meio do uso de tecnologia.

A **atividade 18** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404**, já que propõe, com base na análise gráfica, a identificação do domínio e do conjunto imagem da função. No **item d**, espera-se que os estudantes concluam que algumas características das duas funções são semelhantes, como o domínio e a amplitude, porém as duas funções diferem no conjunto imagem, uma vez que o gráfico de $g(x) = 1 + \cos x$ é o gráfico de $f(x)$ trasladado uma unidade para cima.

Na **atividade 20**, é esperado que os estudantes concluam que, assim como os gráficos das funções $g(x) = \cos x$ e $h(x) = -\cos x$, os gráficos das funções $m(x) = \text{sen } x$ e $n(x) = -\text{sen } x$ são simétricos em relação ao eixo x.

A **atividade 21** contribui para o desenvolvimento do **TCT Saúde**, uma vez que o **item b** incentiva os estudantes a propor medidas preventivas para combater a dengue, transmitida pelo mosquito *Aedes aegypti*. Amplie a atividade e peça a eles que pesquisem mais informações sobre a transmissão, os sintomas e o tratamento da doença.

A função tangente

Assim como os tópicos anteriores, o estudo da função tangente favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404**, já que os estudantes analisarão a função em suas representações algébrica e gráfica, com e sem o auxílio de *softwares* de Geometria dinâmica. Se julgar conveniente, retome o conceito de tangente. Em seguida, explore as características da função tangente por meio de sua representação gráfica: período de π e não limitada, já que seu conjunto imagem é $\text{Im} =]-\infty, +\infty[$ ou $\text{Im} = \mathbb{R}$.

A **atividade 22** favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404**, já que propõe que, com base na análise gráfica, sejam identificados o domínio e o conjunto imagem da função.

Na **atividade 23**, os estudantes deverão analisar os gráficos das funções $g(x) = \text{tg } x$ e $j(x) = -\text{tg } x$ e identificar que são funções simétricas em relação ao eixo x.

A **atividade 24** propicia o desenvolvimento da **competência específica 5**, já que possibilita a investigação e o estabelecimento de conjecturas, por meio do uso de tecnologia, de um conceito matemático, construindo, verificando e analisando a curva tangente a partir do rastreamento do ponto que a determina, articulando também com a **competência geral 2**.

Equações trigonométricas

Para iniciar o estudo deste tópico, explore as **atividades resolvidas R7** a **R10** de modo que os estudantes identifiquem e resolvam equações trigonométricas no intervalo $[0, 2\pi]$. Em seguida, proponha as **atividades 26**, **27** e **29**, em que eles deverão determinar os valores de x em diversas equações trigonométricas.

Amplie a **atividade 28**, perguntando aos estudantes que horas o relógio indicará se o ponteiro das horas continuar girando por mais uma volta, considerando o mesmo valor do seno (–0,5). Eles deverão perceber que o relógio marcará 4 h ou 8 h.

No subtópico *Resolução de equações trigonométricas no conjunto universo* $U = \mathbb{R}$, resolva os exemplos propostos com os estudantes e aproveite para sanar eventuais dúvidas.

As **atividades 30** a **32** exploram a resolução de equações trigonométricas considerando $U = \mathbb{R}$.

A **atividade 33** proporciona a reversibilidade do estudo, ou seja, a oportunidade de escrever uma equação com base em uma solução conhecida.

Construção de gráficos

O objetivo deste tópico é mostrar aos estudantes a construção de gráficos mais complexos sem o uso de tabelas. Para isso, é fundamental entender o papel que cada parâmetro desempenha na função trigonométrica em foco. Aprofunde o estudo de translação e amplitude explorando os exemplos apresentados no livro.

Nas **atividades resolvidas R11** e **R12**, espera-se que os estudantes saibam aplicar os conhecimentos adquiridos na análise dos parâmetros b, c e d para obter o domínio, o conjunto imagem e a amplitude das funções apresentadas. Se julgar oportuno, mostre mais exemplos usando um *software* de construção de gráficos, assim como proposto na **atividade resolvida R12**.

Comente com os estudantes que, com o uso de um *software* de construção de gráficos, poderíamos construir diretamente o gráfico de f sem ter de fazê-lo passo a passo com base no gráfico da função dada por $g(x) = \cos x$. A finalidade de construir o gráfico passo a passo é analisar as mudanças que cada parâmetro causa. *Softwares* para a construção de gráficos são ferramentas necessárias no processo de ensino-aprendizagem, pois ampliam as fronteiras do aprendizado, permitindo aos estudantes ir da construção de um gráfico específico para a construção de "famílias" de gráficos.

Ao propor as **atividades 34** a **38**, incentive os estudantes a resolvê-las seguindo o modelo das atividades resolvidas, em vez de construir quadros. Na **atividade 34**, eles devem atentar à lei de formação de cada uma das funções. Na **atividade 35**, deverão pôr em prática o que aprenderam sobre o domínio, o conjunto imagem, o período e a amplitude de funções trigonométricas.

Nas **atividades 39** e **40**, espera-se que e os estudantes percebam que o fluxograma terá duas estruturas de decisão encadeadas. Uma estrutura de decisão permite dois caminhos: um em caso afirmativo e outro em caso negativo. Amplie a atividade e proponha aos estudantes que elaborem um algoritmo para representar a translação vertical do gráfico de funções do tipo $y = k + \operatorname{sen} x$ e $y = t + \cos x$, incentivando a representação do algoritmo na linguagem corrente e por meio de um fluxograma. Essas atividades favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**, uma vez que o estudante emprega um fluxograma para registrar o algoritmo criado.

As **atividades 41** e **42** mobilizam os objetos de estudo contidos no subtópico *Alterando o período*.

Trabalho e juventudes – Eletricista

Objetivos

- Compreender o que faz um eletricista.
- Compreender as noções intuitivas de tensão e corrente elétrica.

Orientações didáticas

Antes de trabalhar o texto, pergunte aos estudantes se conhecem alguém que trabalha como eletricista e o que essa pessoa faz. Depois, proponha que leiam os dois primeiros parágrafos. Comente que o trabalho de eletricista demanda responsabilidade, uma vez que instalações e reparos malfeitos podem trazer graves consequências: sobrecarga do sistema, curtos, choques e até incêndios. Proponha a eles que respondam à **atividade 1**. A capacidade de identificar e resolver problemas e a aplicação de conhecimentos de diferentes áreas são algumas das habilidades que podem ser mencionadas.

Em seguida, proponha a **atividade 2**, que destaca os riscos associados ao trabalho do eletricista. O principal fator que põe a vida desse profissional em risco são os choques elétricos. Além disso, em muitas situações esses profissionais precisam usar escadas e cestos aéreos, e, por isso, há sempre o risco de sofrerem alguma queda. O uso de equipamentos de proteção individual (EPIs), como calçado de segurança, luvas isolantes, mangas isolantes, cinturão, capacete etc., além do cumprimento das normas de segurança, podem minimizar esses riscos. Se considerar conveniente, apresente à turma alguns pontos da Norma Regulamentadora 10 (NR 10), cujo objetivo é estabelecer as condições mínimas de segurança para os trabalhadores. Ela pode ser acessada em: https://www.gov.br/trabalho-e-emprego/pt-br/acesso-a-informacao/participacao-social/conselhos-e-orgaos-colegiados/comissao-tripartite-partitaria-permanente/arquivos/normas-regulamentadoras/nr-10.pdf (acesso em: 24 out. 2024).

Continue a aula com a leitura coletiva do terceiro e quarto parágrafos do texto. A finalidade é que os estudantes compreendam intuitivamente o que são tensão e corrente elétricas, como essas grandezas estão relacionadas e como as funções periódicas se inserem nesse contexto. Em seguida, verifique se reconhecem que a função $V(t) = 179{,}6 \cdot \operatorname{sen}(377t)$ é trigonométrica e que seu gráfico é uma senoide.

Depois, solicite que façam a **atividade 3**. Estimativas das respostas dos **itens a** e **b** podem ser obtidas por meio da análise do gráfico. Se necessário, retome os conceitos de amplitude e período. No **item c**, os estudantes vão lidar de maneira intuitiva com o conceito de frequência, que, em um fenômeno periódico, corresponde ao número de ciclos completos por unidade de medida de tempo transcorrido. Para responder à questão proposta, espera-se que eles façam o seguinte cálculo:

$$1 \text{ s} : 0{,}0167 \text{ s} \simeq 59{,}88$$

Portanto, em 1 segundo a curva se repete, aproximadamente, 60 vezes.

Comente que, no Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade de medida de frequência é o hertz (Hz), o qual corresponde a um ciclo por segundo ou s^{-1}. Dessa forma, podemos concluir que a frequência da variação da tensão na rede elétrica na cidade de São Paulo é de 60 Hz.

Para finalizar o capítulo 9

Objetivos

- Revisitar e mobilizar os conceitos estudados no capítulo.
- Apresentar sugestões de ampliação.
- Possibilitar a autoavaliação dos estudantes.

Orientações didáticas

Em *Conexões entre conceitos*, os estudantes vão analisar e completar um mapa conceitual que relaciona conceitos estudados no capítulo. Se achar conveniente, reproduza o mapa conceitual na lousa e realize a análise coletiva, perguntando a eles se ajustariam algo ou fariam-no de uma maneira diferente.

Em *Sugestões de ampliação*, são indicados materiais que visam enriquecer a compreensão do conteúdo. Esses recursos podem auxiliar os estudantes a aprofundar o conhecimento, a preencher lacunas de compreensão, a desenvolver habilidades de pesquisa e a extrapolar o conteúdo. Reserve um momento em seu plano de aula para discutir e explorar as sugestões. Isso pode incluir sessões de leitura compartilhada, atividade prática, discussão em grupo ou a realização de um projeto.

As questões propostas em *Autoavaliação* visam promover a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado e auxiliar na identificação de conceitos que precisam ser retomados. Depois que resolverem as questões, forneça *feedback* para ajudá-los a interpretar as respostas e a definir metas de estudo. Nesse sentido, as questões propostas compõem uma avaliação ipsativa, pois permitem que cada estudante avalie seu progresso, promovendo o autoaperfeiçoamento.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA – Inteligência Artificial na Educação

Objetivos

- Entender o que é inteligência artificial (IA) e suas potencialidades.
- Refletir sobre os desafios trazidos pela IA.
- Avaliar criticamente as respostas fornecidas por um *chatbot* que utiliza IA.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 5** e **9**.
- **Competências específicas da área de Matemática e suas Tecnologias: 3** e **5**.

Os textos na íntegra das competências gerais e das competências específicas da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Tema Contemporâneo Transversal

Ciência e Tecnologia

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável

Orientações didáticas

Ao iniciar o trabalho com o tema proposto, em uma roda de conversa, incentive a participação de todos. Pergunte aos estudantes o que sabem sobre inteligência artificial (IA). Em seguida, explique que IA é uma área da computação que busca desenvolver sistemas capazes de realizar tarefas, usualmente executadas por seres humanos. O objetivo é melhorar e otimizar a entrega de serviços para a sociedade. Assim, ela desenvolve máquinas que aprendem padrões, tomam decisões e executam atividades cognitivas complexas. A IA prevê economia de tempo, automatização de tarefas repetitivas e personalização de atendimentos, entre outras vantagens.

A IA tem o potencial de auxiliar muitos setores, como saúde, transporte, segurança, comunicação e educação, porém apresenta alguns desafios e preocupações que merecem a atenção de todos. Um deles é a questão da ética, em casos de uso indevido de informações pessoais e de violação à privacidade dos dados. Outro grande desafio está relacionado ao mercado de trabalho, pois o uso dessa tecnologia pode gerar desemprego em alguns setores.

Para a educação, há ferramentas de IA valiosas, que proporcionam soluções no processo de ensino, tornando-se um apoio para os professores. Com elas, é possível personalizar a aprendizagem, adaptando o ensino de acordo com as necessidades específicas dos estudantes.

Essa abordagem contempla o **TCT Ciência e Tecnologia** ao proporcionar discussões sobre a influência da tecnologia na educação e na sociedade.

Na sequência, solicite aos estudantes que respondam às questões propostas na **atividade 1**. Se necessário, eles podem fazer uma pesquisa. Nesse caso, cheque a confiabilidade das fontes consultadas. Em relação ao **item c**, espera-se que eles mencionem alguns desafios, como:

- desenvolver mecanismos para evitar respostas equivocadas ou com vieses discriminatórios;
- evitar a desinformação;
- criar regras de responsabilização (Se algo der errado, quem será responsabilizado? Será o programador que criou o algoritmo? Será a empresa que o implementou? Será a própria IA?);
- adequar a ferramenta à Lei de Direitos Autorais (Lei nº 9.610/1998);
- tornar o processo transparente (Como os dados são coletados, armazenados e utilizados? Quem tem acesso a esses dados? Como eles são protegidos?);
- conscientizar os usuários quanto à utilização da ferramenta com ética e criticidade.

Essa atividade contribui para o desenvolvimento do **ODS 16: Paz, justiça e instituições eficazes**, pois leva os estudantes a considerar questões éticas e legais que garantam que a utilização de *softwares* de IA seja justa e transparente.

Na **atividade 2**, os estudantes vão avaliar a resposta fornecida por um *software* de IA para a pergunta "O que é círculo?". Após identificarem o problema, peça a eles que ajustem a resposta a fim de torná-la conceitualmente correta. Você pode ampliar a proposta e questionar se a resposta estaria adequada, caso a pergunta fosse: "O que é circunferência?".

Na **atividade 3**, os estudantes vão avaliar e ajustar respostas fornecidas por um *chatbot* que utiliza IA sobre conceitos estudados no volume, o que auxilia no desenvolvimento da **competência específica 5**. Caso julgue necessário, analise coletivamente algumas respostas fornecidas. Circule pelos grupos e procure validar ou refutar os ajustes propostos por eles. Nesta atividade, os estudantes utilizam o *chatbot* de forma crítica e reflexiva e exercitam a empatia e o diálogo favorecendo o desenvolvimento das **competências gerais 5** e **9**. Além disso, conceitos são utilizados para avaliar a plausibilidade de respostas e construir argumentação consistente favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 3**.

PESQUISA E AÇÃO – Maquete

Objetivos

- Pesquisar sobre o Desenho Universal e a norma técnica NBR 9050.
- Planejar as alterações em espaços da estrutura física escolar para se adaptar à norma.
- Construir uma maquete que represente o espaço escolar.
- Expor a maquete para a comunidade escolar.

BNCC

- **Competências gerais da BNCC: 2**, **4**, **6**, **7**, **8**, **9** e **10**.
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**

  Competência específica 1: **EM13MAT103**.

  Competência específica 2: **EM13MAT201**.

  Competência específica 3: **EM13MAT308**.

Os textos na íntegra das competências gerais, das competências específicas e das habilidades da BNCC citadas da área de Matemática e suas Tecnologias encontram-se na Parte Geral deste *Suplemento para o professor*.

Tema Contemporâneo Transversal

Educação em Direitos Humanos

Objetivos de Desenvolvimento Sustentável

Orientações didáticas

As atividades da seção são propostas em etapas, com a finalidade de organizar o trabalho, e podem ser realizadas no decorrer do período escolar. Mesmo que algumas etapas, como a de pesquisa, possam ser realizadas extraclasse, verifique o perfil dos estudantes e oriente-os com relação ao planejamento, ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho, reservando algumas aulas (momentos presenciais) para o acompanhamento do progresso das tarefas.

Com base em critérios científicos e utilizando dados, fatos e evidências, esta atividade orienta os estudantes a argumentar e a propor soluções para problemas reais. Além disso, incentiva a modificar e a adaptar ideias existentes e a criar propostas novas, colocando-as em prática, aplicando conhecimentos matemáticos, o que trabalha a **competência específica 2**.

O tema da seção também promove o trabalho com o **TCT Educação em Direitos Humanos**, com o **ODS 3: Saúde e Bem-Estar,** com o **ODS 9: Indústria, inovação e infraestrutura** e com o **ODS 10: Redução das desigualdades** ao expor aos estudantes a necessidade de acessibilidade e sugerir que proponham mudanças, baseadas na NBR 9050.

As preocupações com questões de acessibilidade estão presentes em diversas áreas responsáveis por construções de escolas, hospitais, calçadas, *shopping centers* etc., já que é necessário garantir acesso a todos, respeitando as diferenças das pessoas que circulam nesses espaços. Para isso, recorre-se à abordagem própria da ciência, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para resolver problemas e buscar soluções com base nos conhecimentos das diferentes áreas. Valoriza-se ainda a diversidade de saberes e apropria-se de conhecimentos e experiências para fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania, garantindo liberdade, autonomia e responsabilidade, utilizando dados e informações confiáveis para tomar decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos e favorecendo, assim, o desenvolvimento das **competências gerais 2**, **6** e **7**.

Na realização desta seção, os estudantes vão colocar em prática alguns dos pilares do pensamento computacional: a **decomposição**, ao dividir o trabalho em etapas claras e objetivas; e a **abstração**, ao identificar as características do ambiente que são de interesse da pesquisa e, também, ao identificar os materiais necessários para construção da maquete.

ETAPA 1

O objetivo desta etapa é incentivar os estudantes a compartilhar os conhecimentos prévios sobre os assuntos abordados na seção, ampliando-os. Também se busca levá-los a refletir sobre as especificidades de uma sociedade inclusiva: que se define pelo respeito e pela valorização das diferenças; reconhece a igualdade entre as pessoas; considera a diferença um princípio básico, o que torna inaceitável qualquer tipo de discriminação.

No **item a** da **atividade 1**, segundo o *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa* (2009), *acessibilidade* é a "qualidade ou caráter do que é acessível" e *acessível* é "a que pode se ter acesso; a que se tem acesso; fácil de atingir; que pode ser facilmente compreendido; inteligível". Segundo a NBR 9050 da ABNT:

> **Acessibilidade:** possibilidade e condição de alcance, percepção e entendimento para utilização, com segurança e autonomia, de espaços, mobiliários, equipamentos urbanos, edificações, transportes, informação e comunicação, inclusive seus sistemas e tecnologias, bem como outros serviços e instalações abertos ao público, de uso público ou privado de uso coletivo, tanto na zona urbana como na rural, por pessoa com deficiência ou mobilidade reduzida.

> **Acessível:** espaços, mobiliários, equipamentos urbanos, edificações, transportes, informação e comunicação, inclusive seus sistemas e tecnologias ou elemento que possa ser alcançado, acionado, utilizado e vivenciado por qualquer pessoa (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2020, p. 2).

No **item b** da **atividade 1**, a acessibilidade física, de acordo com o texto inicial desta seção, visa garantir mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa: crianças, adultos, pessoas idosas, gestantes, pessoas obesas, com deficiência ou com mobilidade reduzida. Os estudantes poderão trazer exemplos como: pisos táteis, elevadores especiais, rampas de acesso, corrimão de escadas, sanitários adaptados, semáforos com dispositivos sonoros para os deficientes visuais etc.

No **item c** da **atividade 1**, espera-se que os estudantes reflitam sobre sociedade inclusiva, respeito e valorização das diferenças, reconhecendo a necessidade de tratamento igual às pessoas. Se for viável, antes de debater este item, dê uma volta na região próxima à escola, a fim de que identifiquem e presenciem as dificuldades.

ETAPAS 2 e 3

Para trabalhar com essas etapas, os estudantes deverão interpretar e compreender a NBR 9050. Nesse texto, há diversas especificações que empregam unidades de medida de diferentes grandezas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT103**, que se articula com as habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT308**, já que o documento propõe ações adequadas às demandas da comunidade, envolvendo medições e cálculos de medidas de perímetro e de área e a aplicação de noções de semelhança, que serão utilizadas também na **etapa 4**. Dessa maneira, é possível compreender relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento, possibilitando sua aplicação na busca de soluções de problemas tecnológicos para alicerçar construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho, o que favorece também as **competências específicas 1** e **3**.

Durante a atividade de pesquisa, oriente os estudantes a buscar informações em fontes confiáveis, como *sites* do governo e de instituições de ensino e/ou de pesquisa. Algumas possíveis fontes, que serviram de bibliografia para a elaboração desta seção, além das indicadas no livro, podem ser recomendadas aos estudantes. São elas: **Desenho Universal: um conceito para todos**, de Ana Claudia Carletto e Silvana Cambiaghi; e **Manual de acessibilidade: diretrizes de acessibilidade física e digital em ambientes didáticos**, de Manoel R. Alves.

Exemplo de resposta do **item a** da **atividade 2**: Desenho Universal é um conceito sobre acessibilidade física – conjunto de critérios que visa garantir mobilidade e usabilidade para qualquer pessoa. Desenvolvido no final dos anos 1980, nos Estados Unidos, por profissionais da área de Arquitetura, visa definir projetos de produtos e ambientes que contemplem a diversidade humana adotando sete princípios. Segundo o texto da NBR 9050, Desenho Universal é a "concepção de produtos, ambientes, programas e serviços a serem Utilizados por todas as pessoas, sem necessidade de adaptação ou projeto específico, incluindo os recursos de tecnologia assistiva" (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2020, p. 4).

Exemplos de resposta para o **item b** da **atividade 2**:

I. Uso igualitário, equitativo. Exemplos: rampas com corrimãos e guarda-corpo; portas com sensores que se abrem sem exigir força física ou com maçanetas ao alcance de usuários de alturas variadas.
II. Uso flexível, adaptável. Exemplos: projetos que preveem o deslocamento de paredes ou divisórias para ampliar dormitórios ou outros ambientes; tesouras que se adaptam a destros e a canhotos.
III. Uso simples e intuitivo. Exemplos: placas visíveis e legíveis para identificar sanitários; projetos que definem percursos simples e intuitivos para a circulação.
IV. Informação de fácil percepção. Exemplos: semáforos sonoros; mapas de informações em alto-relevo; maquetes táteis.
V. Tolerância ao erro (segurança). Exemplos: escadas e rampas com corrimãos duplos; pisos táteis de alerta; elevadores com sensores em diversas alturas que permitem às pessoas entrar sem riscos de a porta ser fechada no meio do procedimento.
VI. Esforço físico mínimo. Exemplos: sistemas de alavancas, que permitem que pessoas em cadeiras de rodas abram janelas com facilidade; torneiras de sensor ou do tipo alavanca, que minimizam o esforço e a torção das mãos para acioná-las; maçanetas tipo alavanca, de fácil utilização, que podem ser acionadas até com o cotovelo, facilitando a abertura de portas no caso de incêndios, dispensando o uso das mãos.
VII. Dimensão e espaço para aproximação e uso. Exemplos: mobiliário adequado para que uma pessoa em cadeira de rodas tenha acesso a todos os compartimentos com conforto e segurança; poltronas para pessoas obesas em cinemas e teatros; banheiros com dimensões adequadas para pessoas em cadeira de rodas ou as que estão com bebês em carrinhos.

Exemplos de resposta para o **item c** da **atividade 2**:

- Pessoas com mobilidade reduzida ou com deficiência – público-alvo: gestantes, pessoas obesas, crianças, pessoas idosas e usuários de próteses e órteses, entre outros; dificuldades: vencer desníveis, principalmente subir escadas sem corrimãos; passar por locais estreitos, percorrer longos percursos, atravessar pisos escorregadios; abrir e fechar portas; manipular objetos; acionar mecanismos redondos ou que necessitem do uso das duas mãos simultaneamente, entre outras.
- Pessoas em cadeira de rodas – público-alvo: paraplégicos, tetraplégicos, hemiplégicos, pessoas que tiveram membros amputados, entre outros; dificuldades: vencer desníveis isolados, escadas e rampas muito íngremes; ter alcance visual limitado; manusear comandos de janelas e metais sanitários muito altos; não ter espaços amplos para girar; abrir portas; passar por locais estreitos, como portas de 60 cm; utilizar banheiros que não permitem a aproximação a vasos sanitários, entre outras.
- Pessoas com deficiências sensoriais – público-alvo: usuários com limitação da capacidade visual, auditiva e da fala; dificuldades: identificar sinalização visual, como placas de orientação, advertência e numeração de imóveis; localizar comandos e aparelhos, como botoeiras e interfones; detectar obstáculos, como telefones públicos, caixas de correio e desníveis não sinalizados de forma podotátil

(faixas em alto-relevo fixadas no chão para fornecer auxílio na locomoção pessoal de deficientes visuais); determinar direção a seguir (pessoas com deficiência visual); utilizar comandos sonoros, como campainhas e interfones (pessoas com deficiência auditiva e/ou da fala), entre outras.

- Pessoas com deficiência cognitiva – público-alvo: usuários com dificuldades em habilidades adaptativas; dificuldades: compreender símbolos e sinais em placas informativas, entre outras.

Resposta do **item d** da **atividade 2**: A norma NBR 9050: "[...] estabelece critérios e parâmetros técnicos a serem observados quanto ao projeto, construção, instalação e adaptação do meio urbano e rural, e de edificações às condições de acessibilidade. [...] Esta Norma visa proporcionar a utilização de maneira autônoma, independente e segura do ambiente, edificações, mobiliário, equipamentos urbanos e elementos à maior quantidade possível de pessoas, independentemente de idade, estatura ou limitação de mobilidade ou percepção" (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2020, p. 1).

Resposta do **item e** da **atividade 2**: Foram consideradas: "[...] diversas condições de mobilidade e de percepção do ambiente, com ou sem a ajuda de aparelhos específicos, como próteses, aparelhos de apoio, cadeiras de rodas, bengalas de rastreamento, sistemas assistivos de audição ou qualquer outro que venha a complementar necessidades individuais" (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2020, p. 1).

Exemplo de resposta do **item f** da **atividade 2**: parâmetros antropométricos são medidas do corpo humano e as diversas proporções de suas partes. Para a determinação das medidas das dimensões referenciais da NBR 9050," [...] foram consideradas as medidas entre 5% a 95% da população brasileira, ou seja, os extremos correspondentes a mulheres de baixa estatura e homens de estatura elevada" (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2020, p. 7).

Caso algum estudante mencione o conceito de ergonomia, explique que é o estudo da adaptação dos membros do corpo humano ao ambiente à sua volta. Esse estudo utiliza técnicas da antropometria para adaptar o espaço ao ser humano, criando produtos e objetos que sejam fáceis e confortáveis de manusear e que se adaptem ao corpo humano.

No **item g** da **atividade 2**, se necessário, indique à turma que os parâmetros antropométricos são apresentados nas páginas 7 a 31 do documento. Espera-se que os estudantes compreendam que todos os parâmetros apresentados são importantes no ambiente escolar.

No **item h** da **atividade 2**, caso precise, explique à turma que os critérios específicos para os edifícios escolares são apresentados nas páginas 134 e 135 do documento.

Na **atividade 5**, caso a planta baixa da escola esteja disponível, compartilhe-a com os estudantes.

No **item a** da **atividade 7**, espera-se que os estudantes percebam que os espaços poderão ser reorganizados de várias formas, desde que contemplem as exigências necessárias.

No **item c** da **atividade 7**, espera-se que os estudantes citem conceitos desenvolvidos neste volume.

ETAPA 4

Nesta etapa, os estudantes são estimulados a mobilizar conhecimentos sobre proporcionalidade e semelhança de figuras.

Na **atividade 10**, incentive os estudantes a empregar, se possível, material reciclável para a confecção das maquetes e a optar pelo uso de madeira ou papelão para a base, em vez de isopor, contribuindo para a preservação do meio ambiente.

Na **atividade 11**, converse com os estudantes para que não se esqueçam de reservar um lugar na base da maquete para inserir os nomes dos integrantes do grupo e a escala utilizada, além de indicarem quais alterações foram realizadas e os critérios para realizá-las.

ETAPA 5

O trabalho desta etapa favorece o desenvolvimento da **competência geral 4**, já que a exposição de maquetes com as adequações para ambientes acessíveis, de acordo com as especificações da NBR 9050, é um modo eficiente de expressar e partilhar informações empregando a linguagem matemática.

O trabalho em grupo requer dos participantes as **competências gerais 8**, **9** e **10**, já que precisam reconhecer as próprias emoções e a dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas, além de exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro.

Se achar conveniente, incentive os estudantes a criar cartazes divulgando a exposição para a comunidade escolar.

ETAPA 6

Proponha aos estudantes que realizem a autoavaliação baseando-se nas experiências que tiveram no decorrer de todo o processo e nas questões norteadoras. Espera-se que reflitam sobre o processo de aprendizagem, os objetivos alcançados, as dificuldades apresentadas, a importância dos conhecimentos matemáticos em diferentes âmbitos e a contribuição para a formação geral.

PREPARE-SE PARA O ENEM E VESTIBULARES

Objetivos

- Mobilizar conceitos e procedimentos estudados no volume.
- Avaliar a aprendizagem dos estudantes.
- Ajudar os estudantes a se prepararem para os exames de larga escala que tenham a intenção de realizar.

Orientações didáticas

Após todos terem respondido às questões, reserve um momento para discutir cada uma delas coletivamente. É importante compreender o que levou alguns estudantes a assinalar uma alternativa diferente da esperada e que, na medida do possível, esses pontos sejam discutidos.

Se achar necessário, enriqueça a seção e proponha questões mais atuais do Enem e de vestibulares que contemplem os temas estudados.

RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES

Avaliação Diagnóstica 1

1. Observando os dados, temos:

Satisfeitos 1º A:

$6 + 6 + 6 + 5 = 23$

Insatisfeitos 1º A:

$6 + 6 + 4 = 16$

Satisfeitos 1º B:

$6 + 6 + 2 = 14$

Insatisfeitos 1º B:

$6 + 6 + 6 + 6 = 24$

A tabela da alternativa **d** apresenta os mesmos dados, mas não apresenta título ou fonte, portanto deve ser descartada.

Alternativa **e**.

2. Para analisar a mudança de uma variável ao longo do tempo, a melhor representação é o gráfico de linhas, pois permite uma melhor percepção da variação nos intervalos.

Alternativa **d**.

3. Para mostrar uma distribuição percentual com mais clareza, o gráfico de setores é a melhor opção, por mostrar mais diretamente como cada categoria compõe o todo.

Alternativa **c**.

4. Colocando as medidas de massa em ordem crescente, teremos: 66,5 kg, 67,4 kg, 68 kg, 68,6 kg, 100 kg
Como nenhum valor se repete, não é possível adotar uma moda única. Além disso, há um valor muito distante dos outros que afeta a média aritmética e a amplitude. Portanto, a mediana, de 68 kg, seria a medida que melhor representaria esse conjunto de dados.

Alternativa **b**.

5. O número de combinações será $3 \cdot 4 = 12$.

Alternativa **a**.

6. A probabilidade será

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$.

Alternativa **a**.

7. Se uma bola verde já foi sorteada, temos 6 azuis e 4 verdes, então a probabilidade será

$\frac{4}{4+6} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

Alternativa **c**.

Capítulo 1 Organização e apresentação de dados

Atividades propostas

1. a. A população da pesquisa é formada pelos 125.000 habitantes do município.

b. A amostra tomada foi de 800 pessoas.

c. Resposta pessoal.

2. a. Quantitativa discreta.

b. Qualitativa nominal.

c. Qualitativa ordinal.

d. Qualitativa ordinal.

e. Quantitativa contínua.

f. Qualitativa nominal.

g. Qualitativa ordinal.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes enfatizem a importância da educação na formação de uma sociedade mais respeitosa e inclusiva.

4. Respostas pessoais.

5. Convém testar uma amostra, porque o teste destrói o palito de fósforo, o que inutilizaria a população toda.

6. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar, por exemplo, memória e medida de tempo de duração da bateria como variáveis quantitativas e sistema operacional e marca como variáveis qualitativas.

7. Espera-se que os estudantes compreendam que o fato da escolha ter sido feita aleatoriamente, significa que ela foi feita ao acaso, como em um sorteio cujo resultado é incerto.

8. a. Exemplos de resposta: número de pessoas que residem no domicílio, escolaridade, sexo, ocupação, número de filhos, tipo de domicílio etc.

b. Exemplo de resposta: A PNAD Contínua divulga, de forma periódica, informações importantes sobre diversos setores, como educação, moradia, mobilidade urbana, entre outros, permitindo que sejam adotadas políticas públicas para cada um deles.

9. a. Exemplo de resposta: idade, bairro em que reside, condições socioeconômicas etc.

b. Não. Nesse caso, seria melhor usar o recenseamento, pois seriam entrevistadas todas as pessoas idosas.

10. a. A população pesquisada foi dos jovens brasileiros com idade entre 15 e 29 anos.

b. A amostra tomada foi dos jovens que participaram das entrevistas da PNAD Contínua.

c. A pesquisa foi realizada entre 2012 e 2022.

d. Espera-se que os estudantes percebam que, como a amostra foi composta apenas de jovens que participaram das entrevistas da PNAD Contínua, os resultados podem não refletir com exatidão a realidade do Brasil, mas provavelmente apresentam uma boa estimativa.

11. a. Cor dos veículos que transitam na rua de Pedro:

Frequência absoluta de carros segundo a cor

Período / Cor	Manhã	Tarde	Total
Branca	1	1	2
Prata	9	8	17
Azul	4	4	8
Vermelha	4	4	8
Amarela	1	0	1
Preta	6	4	10
Verde	2	2	4
Total	27	23	50

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Frequência relativa de carros segundo a cor

Período / Cor	Manhã	Tarde	Total
Branca	0,02	0,02	0,04
Prata	0,18	0,16	0,34
Azul	0,08	0,08	0,16
Vermelha	0,08	0,08	0,16
Amarela	0,02	0	0,02
Preta	0,12	0,08	0,20
Verde	0,04	0,04	0,08
Total	0,54	0,46	1,00

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Frequência percentual de carros segundo a cor

Período / Cor	Manhã	Tarde	Total
Branca	2%	2%	4%
Prata	18%	16%	34%
Azul	8%	8%	16%
Vermelha	8%	8%	16%
Amarela	2%	0%	2%
Preta	12%	8%	20%
Verde	4%	4%	8%
Total	54%	46%	100%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

b. A cor que apresentou maior frequência percentual de manhã, à tarde e no dia foi prata, 18%, 16% e 34%, respectivamente. As que apresentaram menor frequência percentual de manhã foram as cores branca e amarela, 2%; à tarde foi a amarela, 0%; e no dia foi a amarela, 2%.

12. a.

Posse de computador segundo o sexo

Sexo / Tem computador	Sim	Não	Total
Masculino	36%	10%	46%
Feminino	40%	14%	54%
Total	76%	24%	100%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

b. Percentual masculino: $\frac{18}{23} \simeq 0{,}7826 = 78{,}26\%$

O percentual de meninos que têm computador em relação a todos os meninos é, aproximadamente, 78,26%.

Percentual feminino: $\frac{20}{27} \simeq 0{,}7407 = 74{,}07\%$

O percentual de meninas que têm computador em relação a todas as meninas é, aproximadamente, 74,07%.

Logo, quem tem mais computadores, percentualmente, em relação a seu grupo, são os meninos.

13. Resposta pessoal.

14. O candidato A, pois apenas apresentou os finais de placas dos veículos da empresa, sem organizar esses dados.

15. Resposta pessoal.

16. a. Segundo o IBGE, a medida da área territorial da Índia é de 3.287.260 km^2; então, sua densidade demográfica em 2022 era dada por $\frac{1.417.173.173}{3.287.260}$ hab./km^2, que representa, aproximadamente, 431 hab./km^2.

b. Espera-se que os estudantes percebam que será necessário saber a medida da área territorial da Índia, que não é fornecida no livro, mas pode ser encontrada facilmente em atlas ou *sites* confiáveis na internet.

17. a. Ramo de atividade: variável qualitativa nominal; vendas: variável quantitativa discreta.

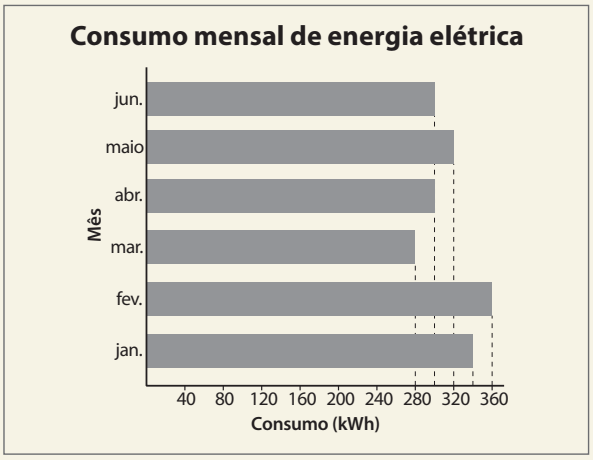
b. Espera-se que os estudantes percebam que o critério utilizado não facilita esse tipo de análise. Para essa análise, seria melhor que a tabela estivesse ordenada de acordo com os valores das vendas em 2024, em ordem crescente ou decrescente.

c. Pela análise da tabela, podemos afirmar que a empresa Extrações obteve maior crescimento nas vendas de 2023 para 2024:

$\frac{34{,}5}{30{,}3} \simeq 1{,}1390$

Assim, a empresa Extrações obteve um crescimento de, aproximadamente, 13,9%.

18. Resposta possível:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

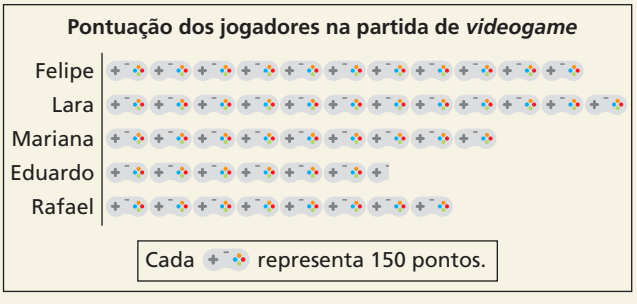
Fonte: elaborado para fins didáticos.

19. a. Não. As porcentagens indicadas nos gráficos são porcentagens do total de domicílios de cada região; logo, não faz sentido somá-las. Para calcular a porcentagem de domicílios com acesso à internet no Brasil seria necessário saber o total de domicílios com acesso à internet (de todas as regiões) em relação ao total de domicílios do Brasil.

b. Não é possível chegar a essa conclusão, pois o gráfico apresenta porcentagens de quantidades de domicílios que não necessariamente são iguais. Poderíamos comparar porcentagens, mas, para comparar os valores absolutos (número de domicílios com acesso à internet) de cada região, seria necessário conhecer o número de domicílios de cada região na ocasião da pesquisa.

20. Resposta pessoal.

Os estudantes podem, por exemplo, estabelecer que cada símbolo representa 150 pontos, arredondar os valores 1.640, 1.370 e 1.000 para 1.650, 1.350 e 975, respectivamente, e esboçar o seguinte gráfico:

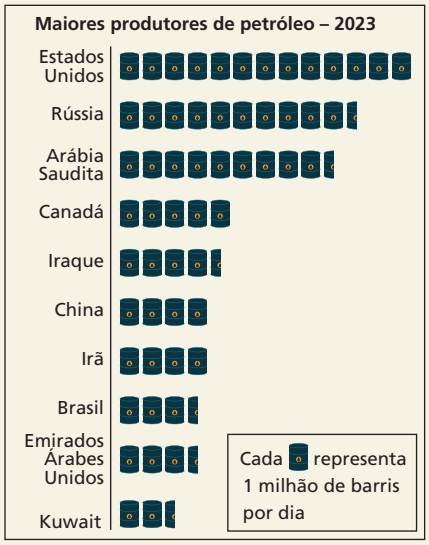


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

21. Resposta pessoal.
Exemplos de resposta: Havia aproximadamente 11 milhões de homens ocupados em "comércio e reparação"; havia aproximadamente 4 milhões de mulheres ocupadas na "indústria"; o número de homens ocupados em "serviços domésticos" era maior que o número de mulheres ocupadas em "construção"; menos de 8 milhões de homens estavam ocupados em "administração pública, educação, saúde e serviços sociais".

22. a.



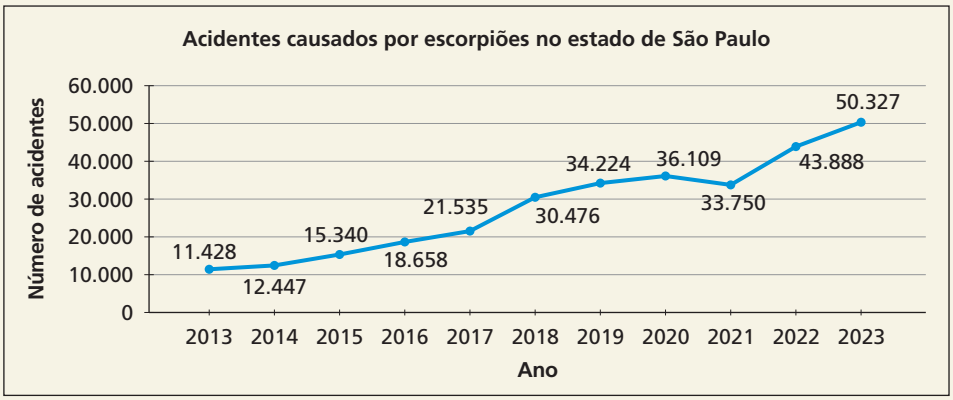
b. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes escolham o pictograma que apresenta a melhor relação entre o elemento usado e a quantidade de ocorrências que ele representa.

c. Em um gráfico de colunas, pois o gráfico de linha é indicado para representar a variação de uma variável ao longo de um período, o que não é o caso.

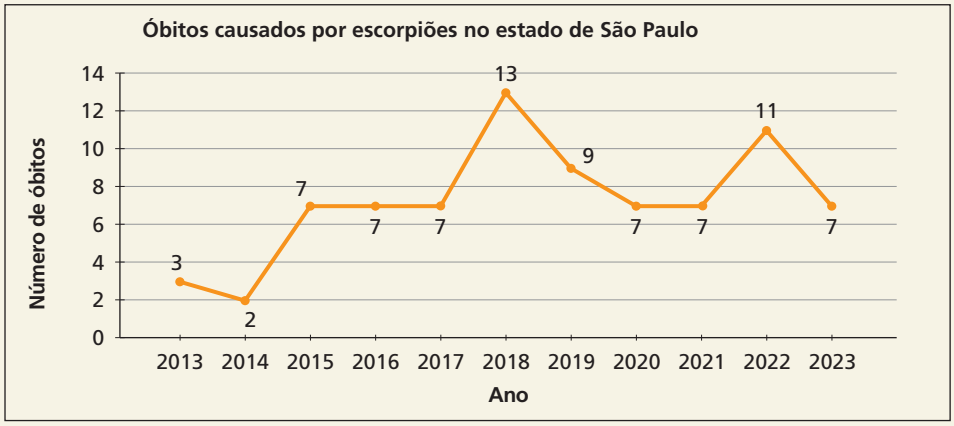
d. Espera-se que os estudantes percebam que não é possível concluir algo, pois não há dados sobre a produção de petróleo em 2022 na tabela.

Fonte: elaborado com base em IBP – Instituto Brasileiro de Petróleo e Gás. **Maiores produtores mundiais de petróleo em 2023**. Disponível em: https://www.ibp.org.br/observatorio-do-setor/snapshots/maiores-produtores-mundiais-de-petroleo/#:~:text=Em%202022%2C%20o%20Brasil%20foi,metade%20da%20produ%C3%A7%C3%A3o%20mundial%20total. Acesso em: 30 ago. 2024.

23. a.



Fonte: elaborado com base em GOVERNO do estado de São Paulo, CVE – Centro de Vigilância Epidemiológica "Prof. Alexandre Vranjac". **Dados estatísticos**. Disponível em: https://www.saude.sp.gov.br/cve-centro-de-vigilancia-epidemiologica-prof.-alexandre-vranjac/areas-de-vigilancia/doencas-de-transmissao-por-vetores-e-zoonoses/agravos/animais-peconhentos/dados-estatisticos. Acesso em: 14 maio. 2024.



Fonte: elaborado com base em GOVERNO do estado de São Paulo, CVE – Centro de Vigilância Epidemiológica "Prof. Alexandre Vranjac". **Dados estatísticos**. Disponível em: https://www.saude.sp.gov.br/cve-centro-de-vigilancia-epidemiologica-prof.-alexandre-vranjac/areas-de-vigilancia/doencas-de-transmissao-por-vetores-e-zoonoses/agravos/animais-peconhentos/dados-estatisticos. Acesso em: 14 maio. 2024.

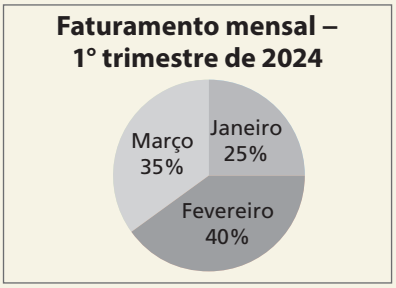
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

b. Espera-se que os estudantes percebam que não seria conveniente construir um único gráfico com os acidentes e os óbitos, pois, como os números de acidentes são da ordem das dezenas de milhar e os óbitos são da ordem das unidades e das dezenas a construção do gráfico seria inviável ou não representaria a variação no número de óbitos.

24. Vamos construir um quadro com os valores do gráfico e calcular a porcentagem que cada mês representa em relação ao faturamento total. Em seguida, determinamos a medida da abertura do ângulo central de cada setor para construir o gráfico de setores.

Cálculo da porcentagem de cada mês em relação ao faturamento total

Mês	Faturamento (em milhão de reais)	Porcentagem	Ângulo central de cada setor
Jan.	0,5	(0,5 : 2) = 0,25 = 25%	0,25 · 360° = 90°
Fev.	0,8	(0,8 : 2) = 0,40 = 40%	0,40 · 360° = 144°
Mar.	0,7	(0,7 : 2) = 0,35 = 35%	0,35 · 360° = 126°
Total	2,0	100%	360°



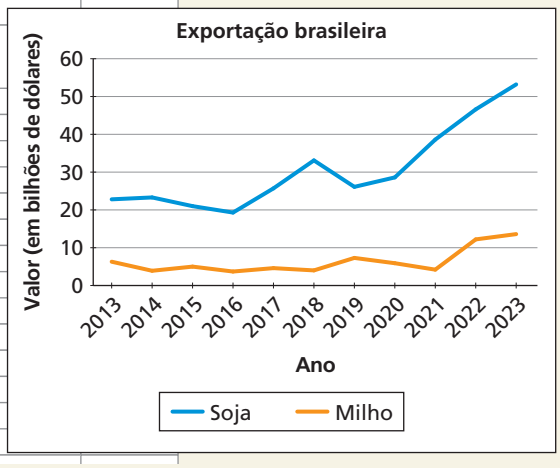
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

25. a. Para construir o gráfico em uma planilha eletrônica, inicialmente é necessário copiar a tabela na planilha. Em seguida, basta selecionar as células com os dados que serão inseridos no gráfico e escolher a opção para inserir gráfico de linha.
Depois que o gráfico estiver construído, é necessário arrumar os rótulos do eixo que exibe os anos. Além disso, é possível inserir nomes nos eixos, título no gráfico, alterar cores, escalas, linhas auxiliares etc.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

	A	B	C	D	E	F
1						
2		**Exportação brasileira (em bilhões de dólares)**				
3		**Ano**	**Soja**	**Milho**		
4		2013	22,8	6,3		
5		2014	23,3	3,9		
6		2015	21	5		
7		2016	19,3	3,7		
8		2017	25,7	4,6		
9		2018	33,1	4		
10		2019	26,1	7,3		
11		2020	28,6	5,9		
12		2021	38,6	4,2		
13		2022	46,6	12,2		
14		2023	53,2	13,6		
15						
16						



b. Exemplo de resposta: Nos anos apresentados, o valor em exportação de milho ficou abaixo do valor em exportação de soja em todos eles, e a diferença absoluta tem aumentado mais desde 2019.

---

26. a. Para organizar os dados em uma tabela de frequências, inicialmente preenchemos a coluna das frequências absolutas.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

	Fórmula			
	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3		
3	5,0	8		
4	6,0	6		
5	7,0	6		
6	8,0	7		
7	9,0	3		
8	10,0	3		
9	**Total**	36		

Para preencher a coluna da frequência relativa, basta digitar na célula C2 a fórmula:

=B2/$B$9

Em seguida, é preciso selecionar a célula C2 e arrastar a seleção até a célula C8. O total pode ser calculado digitando-se na célula C9 a fórmula:

=SOMA(C2:C8)

Para preencher a coluna da frequência percentual, basta digitar na célula D2 a fórmula:

=C2

Em seguida, deve-se formatar a célula para exibir o valor em porcentagem, depois selecionar a célula D2 e arrastar a seleção até a célula D8. O total pode ser calculado digitando-se na célula D9 a fórmula:

=SOMA(D2:D8)

D9	*Fórmula*	=SOMA(D2:D8)	
A	B	C	D
Nota	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
4,0	3	0,0833	8,33%
5,0	8	0,2222	22,22%
6,0	6	0,1667	16,67%
7,0	6	0,1667	16,67%
8,0	7	0,1944	19,44%
9,0	3	0,0833	8,33%
10,0	3	0,0833	8,33%
Total	36	1,0000	100,00%

b. Para calcular a porcentagem de notas iguais ou acima de 6 e a porcentagem de notas abaixo de 6, também é possível usar a planilha eletrônica. Basta digitar, em duas células quaisquer da planilha (que ainda não estejam sendo usadas), as fórmulas =SOMA(D4:D8) e =SOMA(D2:D3), para obter as porcentagens de notas iguais ou acima de 6 e de notas abaixo de 6.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

H2 | *Fórmula* | =SOMA(D2:D3)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**			**Notas iguais ou acima de 6**	**Notas abaixo de 6**
2	4,0	3	0,0833	8,33%			69,44%	30,56%
3	5,0	8	0,2222	22,22%				
4	6,0	6	0,1667	16,67%				
5	7,0	6	0,1667	16,67%				
6	8,0	7	0,1944	19,44%				
7	9,0	3	0,0833	8,33%				
8	10,0	3	0,0833	8,33%				
9	**Total**	36	1,0000	100,00%				
10								

Portanto, a porcentagem de notas iguais ou acima de 6 é de 69,44%, e a porcentagem de notas abaixo de 6 é de 30,56%.

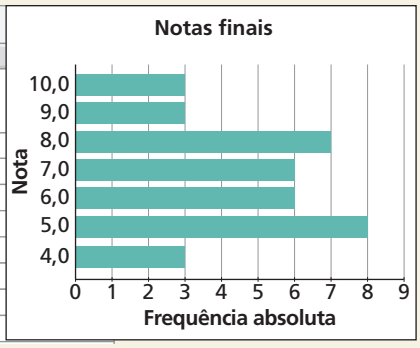
c. Vamos construir os dois tipos de gráfico aproveitando a tabela já construída no **item a**.

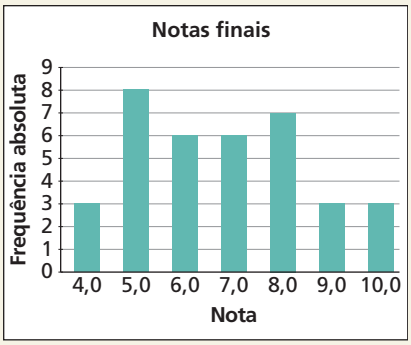
- Para construir o gráfico de barras, basta selecionar os dados da coluna de frequência absoluta e selecionar a opção para inserir gráfico de barras. Há várias opções de estilo para os gráficos de barras (horizontais, verticais, em duas dimensões, em três dimensões, usando outras figuras geométricas no lugar dos retângulos).

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

B2 | *Fórmula* | 3

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	2,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%



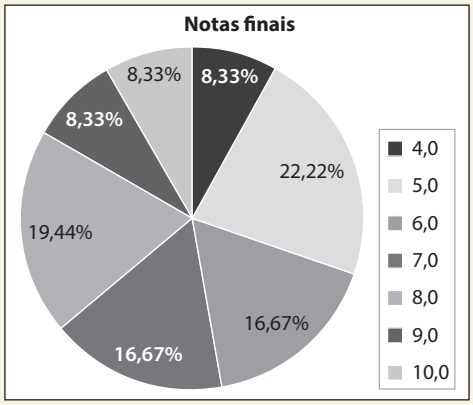


- Para construir o gráfico de setores, pode-se selecionar os dados da coluna de frequência absoluta ou da coluna de frequência percentual e escolher a opção para inserir gráfico de setores; nesse caso, também há várias opções de estilo para o gráfico.

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

D2 | *Fórmula* | =C2

	A	B	C	D
1	**Nota**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência percentual**
2	4,0	3	0,0833	8,33%
3	5,0	8	0,2222	22,22%
4	6,0	6	0,1667	16,67%
5	7,0	6	0,1667	16,67%
6	8,0	7	0,1944	19,44%
7	9,0	3	0,0833	8,33%
8	10,0	3	0,0833	8,33%
9	**Total**	36	1,0000	100,00%
10				



d. Espera-se que os estudantes percebam que o tipo de gráfico mais recomendado depende do que se pretende analisar. O gráfico de setores é melhor para representar os dados quando se quer analisar a distribuição de cada nota em relação ao total; o gráfico de barras, por sua vez, é mais indicado quando se deseja deixar evidente o número de estudantes que tiraram cada uma das notas.

27. Espera-se que os estudantes percebam as diferenças entre os tipos de gráfico de acordo com a informação que querem transmitir e identifiquem que o gráfico de segmentos (ou de linhas) não é adequado para o caso de uma variável qualitativa.

As resoluções/comentários das atividades da seção *Trabalho e juventudes – Pais não podem tirar licença-paternidade em 67 nações* estão nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Para finalizar o capítulo 1

Autoavaliação

Q1. Sexo: variável qualitativa;
Tempo de residência: variável quantitativa;
Satisfação: variável qualitativa;
Frequência: variável quantitativa.
Alternativa **c**.

Q2. Nos sábados:

- Homens:
  $35 + 32 + 37 + 39 = 143$
- Mulheres:
  $28 + 30 + 25 + 37 = 120$
- Total de espectadores:
  $143 + 120 = 263$
  $\frac{263}{100} = \frac{143}{x} \Rightarrow 263 \cdot x = 14.300 \Rightarrow x \simeq 54$
  $y \simeq 100 - 54 \Rightarrow y \simeq 46$

Portanto, o percentual de homens é de aproximadamente 54%, e o percentual de mulheres é de aproximadamente 46%.

Nos domingos:

- Homens:
  $40 + 28 + 28 + 27 = 123$
- Mulheres:
  $30 + 31 + 35 + 33 = 129$
- Total de espectadores:
  $123 + 129 = 252$
  $\frac{252}{100} = \frac{123}{x} \Rightarrow 252 \cdot x = 12.300 \Rightarrow x \simeq 49$
  $y \simeq 100 - 49 \Rightarrow y \simeq 51$

Portanto, o percentual de homens é de aproximadamente 49%, e o percentual de mulheres é de aproximadamente 51%.
Alternativa **b**.

Q3. $\frac{25}{100} = \frac{x}{360^\circ} \Rightarrow 100 \cdot x = 25 \cdot 360^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$
Portanto, a região 2 representa 25%, pois é a que apresenta ângulo central mais próximo de 90°.
Alternativa **c**.

Q4. Cálculo da soma das notas de Matemática da turma

Nota	Número de estudantes	Soma das notas
4	2	$4 \cdot 2 = 8$
5	10	$5 \cdot 10 = 50$
6	12	$6 \cdot 12 = 72$
7	8	$7 \cdot 8 = 56$
8	3	$8 \cdot 3 = 24$
10	5	$10 \cdot 5 = 50$
Total	40	260

Razão da soma das notas pelo número de estudantes:
$260 : 40 = 6{,}5$
Alternativa **d**.

Q5. a. Das 12 pessoas com 31 anos ou mais, 9 pessoas (a maioria) atribuíram nota acima de 5; portanto, consideram a educação de qualidade acima da média. (correta)

b. Nenhum entrevistado até 25 anos atribuiu nota máxima. (errada)

c. Pela tabela, podemos calcular a soma das notas dadas pelos 32 entrevistados:
$1 \cdot 3 + (2 + 2) \cdot 4 + (2 + 1 + 3) \cdot 5 +$
$+ (4 + 4 + 1 + 1) \cdot 6 + (3 + 1 + 1 + 1) \cdot 7 +$
$+ (1 + 1 + 1) \cdot 8 + (1 + 1) \cdot 9 =$
$= 3 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 9 =$
$= 3 + 16 + 30 + 60 + 42 + 24 + 18 = 193$
A nota média da pesquisa é dada pelo quociente entre a soma das notas e o total de pessoas entrevistadas na pesquisa.
$193 : 32 \simeq 6$
Como a nota 5 determina qualidade média, então a nota 6 está acima da média. (errada)

d. Com base nas alternativas anteriores, pode-se perceber que existe uma relação entre as duas variáveis. (errada)
Alternativa **a**.

Capítulo 2 Análise de dados

Atividades propostas

1. Espera-se que os estudantes percebam que o gráfico apresenta porcentagens de valores totais diferentes. Então, somente com as informações apresentadas, não é possível chegar a conclusões sobre o número absoluto de pessoas que cada porcentagem representa. É possível concluir que a razão de usuários de internet entre os moradores da área rural era menor que a razão entre os moradores da área urbana em 2022.

2. Não, pois a frequência relativa é a razão entre uma parte e o todo, sendo, portanto, sempre um número de 0 a 1 ou de 0% a 100%.

3. a. Distribuição dos conceitos da turma

Conceito	f_i	f_r	F_i	F_r
A	6	18,75%	6	18,75%
B	8	25,00%	14	43,75%
C	10	31,25%	24	75,00%
D	4	12,50%	28	87,50%
E	4	12,50%	32	100,0%
Total	32	100%	—	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

b. 6 estudantes obtiveram conceito A (quantidade correspondente à frequência absoluta do conceito A).

c. 8 estudantes estão reprovados (quantidade correspondente à soma das frequências absolutas dos conceitos D e E).

d. 31,25% dos estudantes obtiveram conceito C (porcentagem correspondente à frequência relativa do conceito C).

e. 25% dos estudantes obtiveram conceitos D ou E (porcentagem correspondente à soma das frequências relativas dos conceitos D e E).

f. 43,75% dos estudantes obtiveram conceitos A ou B (porcentagem correspondente à frequência relativa acumulada do conceito B).

4. a. Medidas de distância diárias percorridas pelos taxistas

Medida de distância (km)	Frequência absoluta (f_i)
[0, 100[	4
[100, 200[	2
[200, 300[	7
[300, 400[	11
[400, 500]	6

Fonte: elaborado para fins didáticos.

b. O uso desse procedimento facilita o estudo da variável quando temos de analisar um grande número de valores diferentes, já que, se fizéssemos uma tabela com os valores não agrupados, teríamos uma tabela com 30 dados, cada um com frequência 1. Assim, agrupá-los em intervalos permite uma análise mais imediata da distribuição de frequência da variável.

5. A frequência acumulada até 65 dB é 22. Então, 22 áreas apresentam medida de ruídos abaixo do limite máximo recomendado pela ABNT.

6. Quanto maior a amplitude, menor a quantidade de intervalos, o que implica comprometimento da análise dos dados por perda de informações.

7. a. Resposta pessoal.
b. Resposta pessoal.

8.

Valor da diária no hotel

Diária (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[100, 130[	73	73	36,5%	36,5%
[130, 160[	48	121	24,0%	60,5%
[160, 190[	40	161	20,0%	80,5%
[190, 220[	24	185	12,0%	92,5%
[220, 250[	15	200	7,5%	100%
Total	200	—	100%	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. O extremo inferior da 1ª classe é R$ 100,00.
b. O intervalo que apresenta as diárias mais comuns é o que vai de R$ 100,00 a R$ 130,00, com 73 quartos.
c. 60,5% dos quartos têm diárias inferiores a R$ 160,00.
d. 161 quartos têm diárias menores que R$ 190,00.
e. 39 quartos (24 + 15) têm diárias a partir de R$ 190,00.

9.

Previsão de ganho por ação de uma empresa

Ganho por ação (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[4, 6[	a	4	i	8%
[6, 8[	b	8	j	n
[8, 10[	c	f	22%	o
[10, 12[	8	27	k	p
[12, 14[	d	37	l	74%
[14, 16[	e	g	16%	q
[16, 18[	5	h	m	100%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

- Como os intervalos têm amplitude R$ 2,00, podemos completar os campos dos intervalos.
- Para o intervalo [4, 6[, temos: $a = 4$ e $i = 8\%$
- Para o intervalo [6, 8[, temos: $a + b = 8 \Rightarrow b = 4$
  Como 4 analistas representam 8% do total, então:
  $j = 8\%$ e $n = 8\% + 8\% = 16\%$
- Para o intervalo [8, 10[, temos:
  Como 4 analistas representam 8% do total, então 22% do total de analistas são 11 analistas. Então: $c = 11$
  $8 + c = f \Rightarrow f = 19$
  $n + 22\% = o \Rightarrow o = 38\%$
- Para o intervalo [10, 12[, temos:
  8 analistas correspondem a 16% do total, então:
  $k = 16\%$ e $o + k = p \Rightarrow p = 54\%$
- Para o intervalo [12, 14[, temos: $27 + d = 37 \Rightarrow d = 10$
  Como 10 analistas correspondem a 20% do total, então:
  $l = 20\%$
- Para o intervalo [14, 16[, temos:
  Como 16% dos analistas são 8 analistas, então: $e = 8$
  $37 + e = g \Rightarrow g = 45$
  $74\% + 16\% = q \Rightarrow q = 90\%$
- Para o intervalo [16, 18[, temos: $g + 5 = h \Rightarrow h = 50$
  Como 5 analistas representam 10% do total, então: $m = 10\%$

Logo, a tabela completa fica assim:

Previsão de ganho por ação de uma empresa

Ganho por ação (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[4, 6[	4	4	8%	8%
[6, 8[	4	8	8%	16%
[8, 10[	11	19	22%	38%
[10, 12[	8	27	16%	54%
[12, 14[	10	37	20%	74%
[14, 16[	8	45	16%	90%
[16, 18[	5	50	10%	100%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

10. a. Elaborando a tabela em uma planilha eletrônica, temos:

B8	*Fórmula*	=SOMA(B2:B12)		
	A	B	C	D	E
1	**Número de focos de queimadas**	**Número de Unidades Federativas (f_i)**	F_i	f_r	F_r
2	[0, 100.000[	17	17	63,0%	63,0%
3	[100.000, 200.000[	2	19	7,4%	70,4%
4	[200.000, 300.000[	3	22	11,1%	81,5%
5	[300.000, 400.000[	1	23	3,7%	85,2%
6	[400.000, 500.000[	1	24	3,7%	88,9%
7	[500.000, 600.000[	1	25	3,7%	92,6%
8	[600.000, 700.000[	1	26	3,7%	96,3%
9	[700.000, 800.000[	0	26	0,0%	96,3%
10	[800.000, 900.000[	0	26	0,0%	96,3%
11	[900.000, 1.000.000[	0	26	0,0%	96,3%
12	[1.000.000, 1.100.000[	1	27	3,7%	100,0%
13	**Total**	27		100,0%	
14					

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

b. 17 Unidades Federativas (frequência absoluta até 100.000).
c. Aproximadamente 29,6% das Unidades Federativas (100% – 70,4%, que é a subtração do total menos a frequência relativa acumulada até 200.000) tiveram 200.000 focos ou mais.

11. a. 150, 200, 208, 468, 624, 624, 676, 728, 780, 832, 988, 988, 1.040, 1.092, 1.196, 1.248, 1.404, 1.710, 1.716, 1.976, 2.028, 2.132, 2.132, 2.132, 2.236, 2.392, 2.704, 2.948, 3.172, 3.174, 3.208, 3.728, 3.926, 3.959, 4.040, 4.108, 4.404, 4.472, 5.132, 5.928

b. Resposta possível: Escolhendo a amplitude de R$ 900,00 para cada intervalo, temos a distribuição apresentada na tabela abaixo:

Distribuição da contribuição fiscal

Contribuição fiscal (R$)	f_i	F_i	f_r	F_r
[150, 1.050[	13	13	32,5%	32,5%
[1.050, 1.950[	6	19	15,0%	47,5%
[1.950, 2.850[	8	27	20,0%	67,5%
[2.850, 3.750[	5	32	12,5%	80,0%
[3.750, 4.650[	6	38	15,0%	95,0%
[4.650, 5.550[	1	39	2,5%	97,5%
[5.550, 6.450[	1	40	2,5%	100%
Total	40	—	100%	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

c. Resposta possível: O intervalo de contribuições fiscais de maior ocorrência nessa distribuição é o primeiro intervalo: de 150 reais a 1.050 reais.

12. Resposta pessoal.

13.

Quantidade de *e-mails* recebidos em uma semana

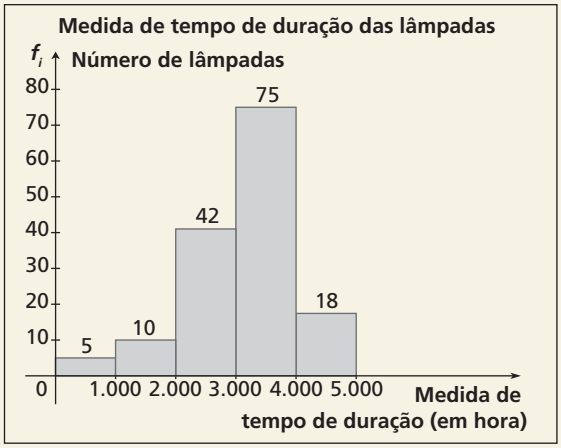
Quantidade de *e-mails*	Quantidade de funcionários (f_i)	F_i	f_r	F_r
0 ⊢ 10	15	15	15%	15%
10 ⊢ 20	35	50	35%	50%
20 ⊢ 30	15	65	15%	65%
30 ⊢ 40	15	80	15%	80%
40 ⊢ 50	5	85	5%	85%
50 ⊢ 60	5	90	5%	90%
60 ⊢ 70	5	95	5%	95%
70 ⊢ 80	5	100	5%	100%
Total	100	—	100%	—

Fonte: elaborado para fins didáticos.

14. O segundo histograma, pois utiliza intervalos menores, enquanto o intervalo [4.000, 6.000[utilizado no primeiro histograma não permite diferenciar quais funcionários recebem mais de R$ 5.000,00.

15. As medidas de área dos retângulos são proporcionais às frequências absolutas (f_i) das classes correspondentes. Admitindo que, para a construção do histograma, as classes têm a mesma amplitude, então as medidas de área são proporcionais às medidas de altura dos retângulos, ou seja, às frequências.

16. a.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

b. Para construir um diagrama de ramo e folhas, seria necessário conhecer cada um dos dados, e não somente sua distribuição nos intervalos; portanto, não seria possível construir um diagrama de ramo e folhas nesse caso.

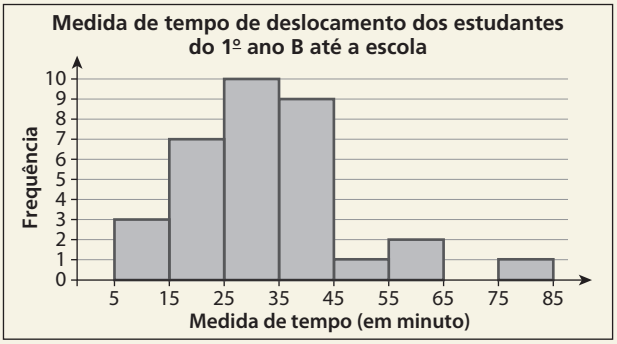
17. a. Para determinar a quantidade de estudantes da turma, basta contar o número de folhas do diagrama (cada folha corresponde a um estudante). Assim, há 33 estudantes na turma.

b. Exemplo de resposta:

Medida de tempo de deslocamento dos estudantes do 1º ano B até a escola ABC

Medida de tempo (em minuto)	Frequência (f_i)
5 ⊢ 15	3
15 ⊢ 25	7
25 ⊢ 35	10
35 ⊢ 45	9
45 ⊢ 55	1
55 ⊢ 65	2
65 ⊢ 75	0
75 ⊢ 85	1

Fonte: elaborado para fins didáticos.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

c. Os estudantes poderão responder que, de acordo com o diagrama, os deslocamentos estão mais concentrados entre 10 e 39 minutos ou, então, dar outra resposta de acordo com a escala adotada no **item b** (no nosso caso, entre 25 e 45 minutos).

18. a. Na representação 1, há menos perda de informações sobre os dados, já que cada um deles está expresso no diagrama.

b. A representação 3 resumiu mais os dados, pois distribuiu os dados em intervalos com maior amplitude, o que levou à maior perda de informações.

c. 27 apartamentos gastaram menos de R$ 150,00 em energia elétrica nesse mês.

Esse valor pode ser obtido da contagem de todas as folhas dos ramos de 8 a 14 (valores que vão de 82 a 149 reais) na representação 1 ou da adição das frequências dos intervalos de [80, 90[até [140, 150[na representação 2.

d. Sim, 3 apartamentos gastaram mais de R$ 200,00 em energia elétrica.

Não é possível responder a essa questão somente observando a representação 3, pois nesse histograma o último intervalo é [192, 214[, o que não permite saber como é a distribuição dos valores nesse intervalo.

e. Sim, um dos apartamentos do condomínio gastou R$ 130,00 em energia elétrica. Para responder a essa questão, é necessário consultar a representação 1, a única que preservou os valores dos dados.

19. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar, por exemplo, que estava previsto que a China ultrapassaria o número de vendas da Europa em 2022, que a China e a Europa juntas devem ser responsáveis por mais de metade das vendas globais até 2035 e que as vendas na Índia só se tornariam notáveis a partir de 2032.

20. Como a intenção é que o time melhore na defesa, espera-se que os estudantes escolham o jogador que tem a pontuação mais alta no critério DEF, expressa pelo ponto mais distante da origem no eixo DEF (ponto roxo). Portanto, espera-se que escolham o jogador 3.

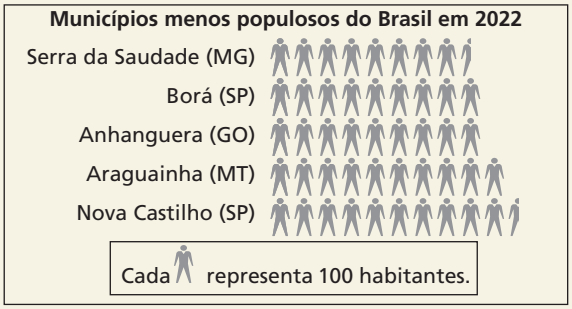
21. Sim. Pode ser usado qualquer valor para o símbolo do pictograma. Espera-se que os estudantes relacionem que dependendo do valor atribuído ao símbolo, haverá mais ou menos símbolos para representar um mesmo número.

22. a. A balança comercial do turismo foi negativa em todos os anos de 2007 a 2021.

b. A receita cambial turística foi maior em 2014, quando ocorreu a Copa do Mundo de Futebol.

23. a. Espera-se que os estudantes percebam que não seria coerente, pois, se cada símbolo representasse 1.000.000 de habitantes, teríamos de arredondar todos os valores da tabela para 500.000 (e representá-los por meio símbolo) ou para zero; em ambos os casos, isso seria incoerente e provocaria falsas interpretações.

b. Exemplo de resposta:



Fonte: elaborado com base em IBGE. **Panorama do Censo 2022**. Disponível em: https://censo2022.ibge.gov.br/panorama/. Acesso em: 20 fev. 2024.

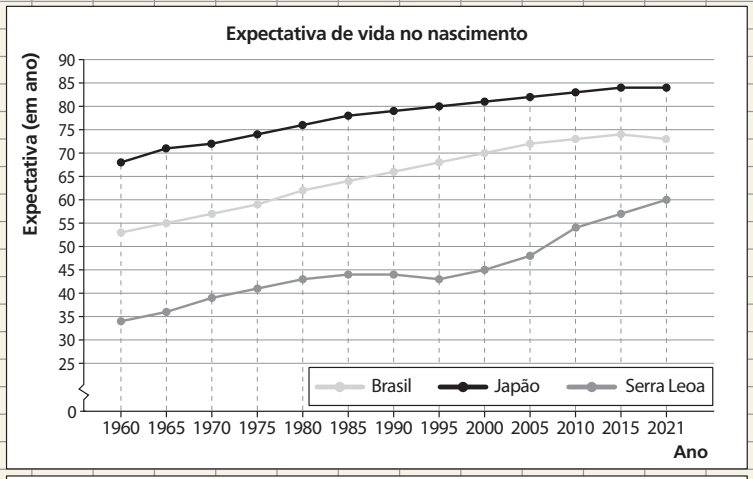
c. Resposta pessoal.

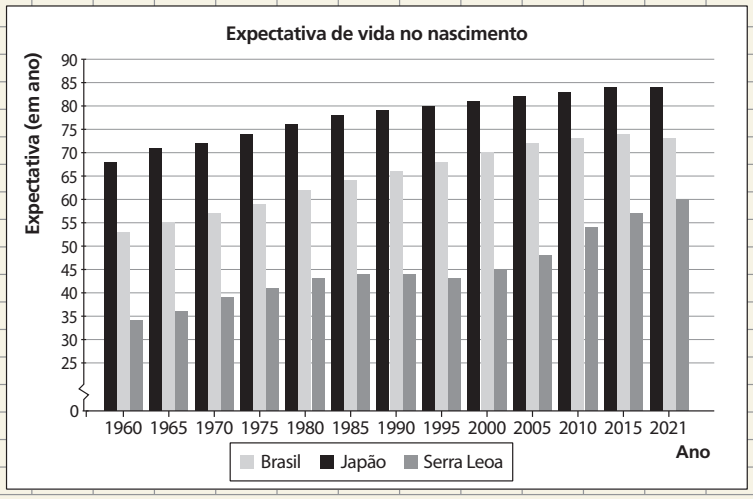
24. a. Resposta possível:

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

B3 | Fórmula | 54,241

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Expectativa de vida no nascimento													
2	**País / Ano**	**1960**	**1965**	**1970**	**1975**	**1980**	**1985**	**1990**	**1995**	**2000**	**2005**	**2010**	**2015**	**2021**
3	Brasil	53	55	57	59	62	64	66	68	70	72	73	74	73
4	Japão	68	71	72	74	76	78	79	80	81	82	83	84	84
5	Serra Leoa	34	36	39	41	43	44	44	43	45	48	54	57	60





b. Espera-se que os estudantes percebam que não seria coerente construir um ou mais gráficos de setores para representar esses dados, pois esse tipo de gráfico é usado para comparar as partes com o todo.

25. a. Energia hidrelétrica, responsável por atender 62,87% da demanda energética brasileira.

b. As fontes de energia limpa utilizadas no Brasil eram: hidrelétrica, eólica, solar, biocombustíveis e nuclear.

c. Somando os valores de uso de energia de fontes limpas, obtemos um total de 89,12%, enquanto, somando a porcentagem de uso das energias de fontes poluentes, obtemos cerca de 10,79%. Portanto, a diferença entre as porcentagens é de, aproximadamente, 78,33%, pois 89,12% – 10,79% = 78,33%.

d. Espera-se que os estudantes descubram, em suas pesquisas, que usinas nucleares não emitem gases do efeito estufa em sua produção energética.

26. a. Falsa, em todos os aspectos há mais preconceito por parte dos homens.

b. Verdadeira, tanto por parte dos homens como por parte das mulheres, o educacional é o aspecto com menor índice de preconceito.

c. Verdadeira, pois 76,2 – 73,4 = 2,8.

27. a. Verdadeira. Em 2013, o número de inscritos no Enem foi de 7,1 milhões.

b. Verdadeira. Pelo gráfico de linha, é possível concluir que o ponto mais alto no período mostrado (8,7 milhões) corresponde ao número de inscritos em 2014.

c. Verdadeira. Em 2023, dos mais de 3,9 milhões inscritos, 0,3% tinham 60 anos ou mais:
0,3% de 3,9 milhões = 0,003 · 3,9 milhões = 11.700 =
= 11,7 mil

d. Verdadeira. Pelos dados do enunciado, calculamos que $\frac{2,4}{3,9} \simeq 61,5\%$ dos inscritos no Enem 2023 eram mulheres.

e. Verdadeira. Pela observação do gráfico de linha, de 2016 a 2019 o número de inscritos no Enem caiu a cada ano.

f. Falsa. Em 2021, houve 3,1 milhões de inscritos, que é o mesmo que 3.100.000 inscritos.

28. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes reconheçam que a Educação Indígena é uma forma de valorizar a cultura dos povos indígenas e, também, de adequar o conteúdo às tradições e à realidade deles.

a. Verdadeira. Pela observação da distribuição por região, podemos identificar que a região Norte tinha 673 escolas em terras indígenas que utilizavam materiais pedagógicos para a Educação Indígena.

b. Falsa. A região que tinha mais escolas em terras indígenas que utilizavam materiais pedagógicos para a Educação Indígena era a região Norte (parte amarela no gráfico de setores).

c. Falsa. No Brasil, havia 3.363 escolas em terras indígenas.

d. Falsa. Na região Sudeste, havia 38 escolas em terras indígenas que utilizavam materiais pedagógicos para a Educação Indígena, mas não é apresentada a informação de que porcentagem essas escolas representam no total de escolas em terras indígenas na região Sudeste.

e. Falsa. 36% das escolas em terras indígenas brasileiras utilizavam materiais pedagógicos para a Educação Indígena, mas não sabemos que porcentagem essas escolas representavam do total de escolas do Brasil.

29. a. De acordo com os gráficos, a escola que obteve a maior pontuação no quesito alegoria foi a Samba Nascente, com 30 pontos.

b. De acordo com os gráficos, a escola que obteve o menor número de quesitos com pontuação máxima (30 pontos) foi a Samba Nascente, com 6 quesitos.

c. Apenas com as informações do enunciado e dos gráficos, não é possível responder à pergunta.

30. Resposta pessoal.

Para finalizar o capítulo 2

Autoavaliação

Q1. A tabela de frequências mostra a relação entre a variável e a frequência, podendo agrupar os dados por intervalo ou não.

Alternativa **d**.

Q2. $a = 90 + 210 + 180 + 120 = 600$

$b = \frac{210}{600} = 35\%$

$c = \frac{120}{600} = 20\%$

Alternativa **d**.

Q3. Em um histograma, no eixo das abscissas representamos a amplitude de cada classe e, no eixo das ordenadas, a frequência (absoluta ou relativa) de cada classe.

Alternativa **a**.

Q4. Em um diagrama de ramo e folhas, uma linha vertical separa os ramos e as folhas.

Alternativa **c**.

Q5. De acordo com o gráfico, no 3º bimestre a empresa vendeu:
10 · 50 mil unidades = 500 mil unidades

Alternativa **b**.

Q6. Com base na observação do gráfico, dos estudantes do 2º ano A, 12,5% tiveram nota A, 50% tiveram nota B, 27,5% tiveram nota C e 10% tiveram nota D. Como a turma tem 40 estudantes, temos:
Nota A: 12,5% de 40 estudantes = 5 estudantes
Nota B: 50% de 40 estudantes = 20 estudantes
Nota C: 27,5% de 40 estudantes = 11 estudantes
Nota D: 10% de 40 estudantes = 4 estudantes

Alternativa **c**.

Q7. O gráfico de linha, o diagrama de ramo e folhas e o histograma não são coerentes para representar uma variável qualitativa; já o gráfico de barras é coerente tanto para variáveis quantitativas como qualitativas.

Alternativa **b**.

Capítulo 3 Medidas estatísticas

Atividades propostas

1. A soma não pode ser zero, pois a soma do número de vezes que cada valor se repete é sempre positiva.

2. a. Determinar a média aritmética ponderada das notas n_1, n_2 e n_3.

b. A nota n_3 tem o maior peso, pois é multiplicada por 4 para calcular a média, enquanto a nota n_1 tem o menor peso, sendo multiplicada apenas por 1.

3. a. $\bar{x} = \frac{12 + 13 + 14 + 1 + 2 + 3 + 12 + 11 + 11 + 11}{10} = \frac{90}{10}$

$\bar{x} = 9$

Agora, vamos colocar os dados em ordem crescente:
1, 2, 3, 11, 11, 11, 12, 12, 13, 14
Como temos 10 valores, a mediana será a média aritmética dos dois termos centrais, que ocupam a 5ª e a 6ª posição.
Assim: $Me = \frac{11 + 11}{2} = 11$
Para esses valores, a moda é $Mo = 11$.

b. $\bar{x} = \frac{51 + 4 + 34 + 78 + 65 + 90 + 106}{7} = \frac{428}{7} \simeq 61{,}14$
Colocando os valores em ordem crescente, temos:
4, 34, 51, 65, 78, 90, 106
Como temos 7 valores, a mediana será o termo central, que ocupa a 4ª posição. Assim: $Me = 65$
Como todos os valores aparecem com a mesma frequência, não existe moda.

c. $\bar{x} = \frac{4 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5}{15} = \frac{47}{15} \simeq 3{,}13$
Como temos 15 valores, a mediana é o termo central, que ocupa a 8ª posição. Assim: $Me = 4$
Esse conjunto de valores é trimodal, pois apresenta três modas: 1, 4 e 5.

d. $\bar{x} = \frac{7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7}{7} = \frac{49}{7} = 7$
Como temos 7 valores, a mediana é o termo central, que ocupa a 4ª posição. Assim: $Me = 7$
Para esses valores, a moda é $Mo = 7$.

e. $\bar{x} = \frac{-10 - 6 - 6 - 4 - 1 - 3}{6} = \frac{-30}{6} = -5$
Colocando os dados em ordem crescente, temos:
−10, −6, −6, −4, −3, −1
Como temos 6 valores, a mediana será a média aritmética dos dois termos centrais, que ocupam a 3ª e a 4ª posição.
Assim: $Me = \frac{-6 - 4}{2} = -5$
Para esses valores, a moda é $Mo = -6$.

4. a. Para obter o consumo médio do período de 12 meses, calculamos $\bar{x} = \frac{y}{z}$, em que y é a soma dos valores mensais referentes ao consumo de energia elétrica e z é a quantidade de valores.
$y = 50 + 294 + 267 + 272 + 279 + 297 + 262 + 257 + 226 + 244 + 298 + 50 = 2.796$
$z = 12$
Assim: $\bar{x} = \frac{2.796}{12} = 233$
O consumo médio do período foi de 233 quilowatt-hora.

b. Ordenando os dados, temos:
$50, 50, 226, 244, 257, \underbrace{262, 267}_{\text{termos centrais}}, 272, 279, 294, 297, 298$
$Me = \frac{262 + 267}{2} = \frac{529}{2} = 264{,}5$
O consumo mediano foi de 264,5 quilowatt-hora.

c. Nesse caso, o valor mediano representa melhor o consumo de energia elétrica da casa, pois ele não é afetado por valores muito baixos, diferentemente do valor médio.

5. a. $\bar{x} = \frac{3.270 + 3.649 + 3.381 + 3.541 + 3.258 + 3.533}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{x} = \frac{20.632}{6} \simeq 3.438{,}67$
Logo, o lucro médio do período foi de aproximadamente R$ 3.438,67.

b. Colocando os valores em ordem crescente, temos:
3.258, 3.270, 3.381, 3.533, 3.541, 3.649
Como há 6 valores, a mediana é a média aritmética dos termos centrais, que ocupam a 3ª e a 4ª posição.
Assim: $Me = \frac{3.381 + 3.533}{2} = 3.457$
Logo, o lucro mediano nesse semestre foi R$ 3.457,00.

c. Não, pois a moda não depende da mediana nem da média.

6. a. $\bar{x} = \frac{2 + 1 + 0 + 3 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1}{12} \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{x} = \frac{11}{12} \simeq 0{,}917$
Logo, a média mensal de acidentes nesse período foi de aproximadamente 0,917 acidente.

b. O número mensal de acidentes mais frequente nesse ano é 1, com frequência 6.

c. Colocando os dados em ordem crescente, temos:
0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3
Como há 12 valores, a mediana é a média aritmética dos termos centrais, que ocupam a 6ª e a 7ª posição.
Assim: $Me = \frac{1 + 1}{2} = 1$
Logo, o número mediano de acidentes é 1.

7. a. Em terra indígena: $316.496 + 21.519 + 113.943 = 451.958$
Fora de terra indígena: $436.861 + 101.850 + 85.969 = 624.680$
Logo, é maior a população indígena residente fora de terras indígenas.

b. $\bar{x} = \frac{316.496 + 21.519 + 113.943}{3} = \frac{451.958}{3} \simeq 150.653$
Média de, aproximadamente, 150.653 pessoas indígenas.

c. Não é um bom parâmetro, pois a quantidade de pessoas indígenas vivendo em terras indígenas em cada região varia muito. Logo, a média obtida no **item b** não é um bom parâmetro para indicar a quantidade de pessoas indígenas vivendo em terras indígenas de cada uma dessas três grandes regiões do Brasil.

8. O novo grupo formado tem $25 + n$ pessoas.
O total das medidas de massa dos integrantes desse novo grupo é:
$(25 \cdot 84 + 90 \cdot n)$ kg
Como a média das medidas de massa é 85, temos:
$\frac{25 \cdot 84 + 90 \cdot n}{25 + n} = 85 \Rightarrow 2.100 + 90n = 85(25 + n) \Rightarrow$
$\Rightarrow 90n - 85n = 2.125 - 2.100 \Rightarrow 5n = 25 \Rightarrow n = 5$

9. a. Para determinar a moda, basta verificar o grau de instrução que corresponde à maior frequência, que é aquele representado pela maior porcentagem (44%). Assim, a moda do grau de instrução é o Ensino Superior.

b. Não é possível calcular a média e a mediana. Espera-se que os estudantes percebam que essas medidas só fazem sentido para variáveis quantitativas, e não qualitativas.

10. Chamando de x o número de gols marcados até a 8ª rodada do campeonato de 2024, temos:
$\frac{x}{80} = 2{,}525 \Rightarrow x = 2{,}525 \cdot 80 \Rightarrow x = 202$
Chamando de y o número de gols que deveriam ser marcados em 10 partidas para que, na 9ª rodada, se atingisse a média de 2,9 gols por jogo (como em 2023), temos:
$\frac{y + 202}{90} = 2{,}9 \Rightarrow y + 202 = 2{,}9 \cdot 90 \Rightarrow y = 261 - 202 = 59$
Portanto, deveriam ser marcados 59 gols em 10 partidas.

11. Resposta pessoal.

12. Resposta pessoal. Exemplo de conjunto de dados: 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 10.

13. Para facilitar os cálculos, construímos a tabela a seguir.

Medida de tempo gasta na realização de um *pit stop*

Medida de tempo (em segundo)	Quantidade de pilotos (f_i)	F_i	PM_i	$PM_i \cdot f_i$
[0, 4[	2	2	2	4
[4, 8[	5	7	6	30
[8, 12[	9	16	10	90
[12, 16[	3	19	14	42
[16, 20]	1	20	18	18
–	$\sum f_i = 20$	–	–	$\sum (PM_i \cdot f_i) = 184$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. $\bar{x} = \frac{184}{20} = 9{,}2$

Logo, a medida de tempo média que os pilotos gastaram no *pit stop* foi 9,2 segundos.

b. Como os valores estão agrupados, vamos primeiro encontrar a classe mediana.

Note que: $\frac{\sum f_i}{2} = \frac{20}{2} = 10$

A frequência acumulada imediatamente superior a 10 é 16 e corresponde à classe [8, 12[, que é a classe mediana.

Então: $\frac{12-8}{9} = \frac{Me-8}{10-7} \Rightarrow Me \simeq 9{,}3$

Logo, a medida de tempo mediana de *pit stop* foi aproximadamente 9,3 segundos.

14. Vamos construir a seguinte tabela:

Medida de tempo gasta no banho

Medida de tempo (em minuto)	Quantidade de pessoa (f_i)	F_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
[0, 5[	20	20	2,5	50
[5, 10[	30	50	7,5	225
[10, 15[	10	60	12,5	125
[15, 20]	40	100	17,5	700
–	$\sum f_i = 100$	–	–	$\sum f_i \cdot PM_i = 1.100$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. $\bar{x} = \frac{1.100}{100} = 11$

Logo, a medida de tempo média que as pessoas desse condomínio gastam para tomar banho é 11 minutos.

b. A classe modal é [15, 20], pois apresenta a maior frequência.

Portanto, a moda é 17,5 minutos.

c. Espera-se que os estudantes percebam que não é possível responder a essa questão por falta de informações. Sabemos que 50 pessoas gastam menos de 10 minutos, mas não é possível saber, somente com as informações fornecidas, quantas pessoas gastam menos de 12 minutos no banho.

15. a. Com base nos dados da tabela, podemos encontrar:

Distribuição de salários dos funcionários

Salário (em real)	Quantidade de funcionários	f_i	PM_i	$f_i \cdot PM_i$
[1.320, 2.120[	6	6	1.720	10.320
[2.120, 2.920[	5	5	2.520	12.600
[2.920, 3.720[	5	5	3.320	16.600
[3.720, 4.520[	3	3	4.120	12.360
[4.520, 5.320[	2	2	4.920	9.840
[5.320, 6.120[	1	1	5.720	5.720
[6.120, 6.920[	1	1	6.520	6.520
[6.920, 7.720[	1	1	7.320	7.320
[7.720, 8.520[	1	1	8.120	8.120

Fonte: elaborado para fins didáticos.

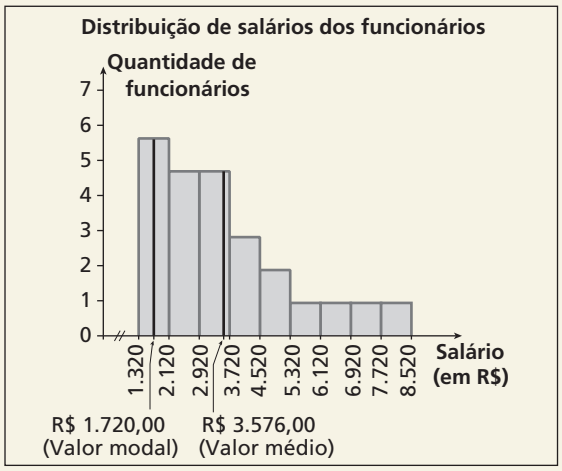
Logo, para encontrar a média dos salários, fazemos:

$$\bar{x} = \frac{10.320 + 12.600 + 16.600 + 12.360 + 9.840 + 5.720 + 6.520 + 7.320 + 8.120}{25} = \frac{89.400}{25} = 3.576$$

Logo, o salário médio é R$ 3.576,00.

b. Podemos observar que a classe com maior frequência é a que vai de R$ 1.320,00 a R$ 2.120,00. Logo, a moda dos salários é R$ 1.720,00.

c.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

16. Resposta pessoal.

17. $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \cdot \bar{x} =$

$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - n \cdot \dfrac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} =$

$= x_1 + x_2 + \ldots + x_n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0$

Pode-se concluir que a soma dos desvios é nula.

18. Se os valores x_i observados em uma distribuição de frequências fossem todos iguais entre si, eles também seriam iguais à média $\bar{x}$; logo, $(x_1 - \bar{x}) = 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$. Portanto, a variância seria zero.

19. Com os dados da tabela, podemos calcular as medidas indicadas e analisar cada uma das alternativas:

Média aritmética: $\bar{x} = \dfrac{5 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 9}{10} = \dfrac{70}{10} = 7$

Mediana: Como há 10 elementos, para encontrar a mediana, fazemos a média do 5º e 6º elementos:

$Me = \dfrac{6 + 7}{2} = 6{,}5$

Moda: $Mo = 6$

Para desvio padrão e variância, podemos fazer uma tabela.

Resultado da avaliação de inglês

Número de estudantes (f_i)	Resultado da avaliação (x_i)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
5	6,0	$6 - 7 = -1$	$(-1)^2 = 1$
1	7,0	$7 - 7 = 0$	$0^2 = 0$
3	8,0	$8 - 7 = 1$	$1^2 = 1$
1	9,0	$9 - 7 = 2$	$2^2 = 4$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

$Var = \dfrac{5 \cdot 1 + 0 + 3 \cdot 1 + 4}{10} = \dfrac{12}{10} = 1{,}2$

$Dp = \sqrt{1{,}2} \simeq 1{,}1$

Analisando cada alternativa, temos:

a. Verdadeira, pois a variância é 1,2, e, portanto, maior que 1.

b. Falsa, pois essa distribuição tem apenas uma moda.

c. Falsa, pois o desvio padrão é aproximadamente 1,1, ou seja, maior que 1.

d. Falsa, pois a média, a mediana e a moda são, nessa ordem: 7; 6,5 e 6, formando uma progressão aritmética, e não uma progressão geométrica.

Alternativa **a**.

20. a. Primeiro, determinamos a média:

$\bar{x} = \dfrac{10 \cdot 120 + 15 \cdot 400 + 20 \cdot 150}{670} = \dfrac{10.200}{670} \simeq 15$

Assim:

$Var \simeq \dfrac{120 \cdot (10 - 15)^2 + 400 \cdot (15 - 15)^2}{670} +$

$+ \dfrac{150 \cdot (20 - 15)^2}{670} \Rightarrow Var \simeq \dfrac{6.750}{670} \simeq 10{,}07$

$Dp \simeq \sqrt{10{,}07} \simeq 3{,}17$

b. Os valores observados distanciam-se cerca de 3,17 viagens do valor médio (aproximadamente 15 viagens).

21. Em 2021, temos os seguintes dados:

$\sum_{i=1}^{12} x_i = 1.110$, $\bar{x} = 92{,}5$ e $Dp = 100$.

Como, em 2022, adicionamos 10 mm em cada um dos 12 meses, podemos calcular a nova média fazendo:

$\bar{x} = \dfrac{1.110 + 12 \cdot 10}{12} = \dfrac{1.230}{12} = 102{,}5$

Ou seja, a média também teve um acréscimo de 10 mm em relação aos dados de 2021.

Para o cálculo do desvio padrão, percebemos, em cada termo, a seguinte relação:

$[x + 10 - (\bar{x} + 10)] = x - \bar{x}$ (mesma relação de 2021)

Logo, não há alteração no desvio padrão. Portanto, em 2022, teremos média de 102,5 mm e desvio padrão de 100,0 mm.

Alternativa **d**.

22. a. Média da promoção A:

$\bar{x}_A = \dfrac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 5}{20} = \dfrac{85}{20} = 4{,}25$

Média da promoção B:

$\bar{x}_B = \dfrac{3 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{20} = \dfrac{46}{20} = 2{,}3$

b. Para calcular o desvio padrão, precisamos calcular primeiro a variância.

Para a promoção A, temos:

$Var_A = \dfrac{1 \cdot (1 - 4{,}25)^2 + 1 \cdot (3 - 4{,}25)^2 + 9 \cdot (4 - 4{,}25)^2 + 9 \cdot (5 - 4{,}25)^2}{20}$

$Var_A = \dfrac{17{,}75}{20} = 0{,}8875$

Assim: $Dp_A = \sqrt{0{,}8875} \simeq 0{,}94$

Para a promoção B, temos:

$Var_B = \dfrac{3 \cdot (1 - 2{,}3)^2 + 10 \cdot (2 - 2{,}3)^2 + 5 \cdot (3 - 2{,}3)^2 + 2 \cdot (4 - 2{,}3)^2}{20}$

$Var_B = \dfrac{14{,}2}{20} = 0{,}71$

Assim: $Dp_B = \sqrt{0{,}71} \simeq 0{,}84$

c. Como o desvio padrão das notas da promoção B é menor que o desvio padrão das notas da promoção A, podemos dizer que as notas atribuídas à promoção B apresentam maior homogeneidade que as da promoção A que estão mais dispersos em relação à sua média.

23. Colocando os dados em ordem crescente, temos:

21, 22, 23, 23, 25, 25, 25, 25, 26, 28, 28, 30, 31, 32, 40

a. $\bar{x} = \dfrac{404}{15} \Rightarrow \bar{x} \simeq 27$

Logo, a média de veículos alugados nessa locadora é, aproximadamente, 27 veículos por dia.

b. Como temos 15 valores observados, a mediana será o valor central, que ocupa a 8ª posição. Assim: $Me = 25$
Logo, o número mediano de veículos alugados nessa locadora é 25.

c. O número de veículos alugados com maior frequência (por 4 dias) é 25.

d. $At = 40 - 21 = 19$
Portanto, a amplitude desse grupo de dados é 19 veículos.
Para facilitar os cálculos dos **itens e** e **f**, construímos a tabela a seguir.

Veículos alugados durante 15 dias

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$(x_i - \bar{x})^2$
25	−2	2	4
32	5	5	25
25	−2	2	4
28	1	1	1
30	3	3	9
21	−6	6	36
23	−4	4	16
40	13	13	169
25	−2	2	4
26	−1	1	1
22	−5	5	25
23	−4	4	16
25	−2	2	4
28	1	1	1
31	4	4	16
–	–	$\sum \lvert x_i - \bar{x}\rvert = 55$	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 331$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Observação: Os valores de $(x_i - \bar{x})$, $|x_i - \bar{x}|$ e $(x_i - \bar{x})^2$ são aproximados, já que $\bar{x} \simeq 27$.

e. $Dm \simeq \frac{55}{15} \Rightarrow Dm \simeq 3{,}67$

f. $Var \simeq \frac{331}{15} \Rightarrow Var \simeq 22{,}07$

$Dp = \sqrt{22{,}07} \Rightarrow Dp \simeq 4{,}7$

g. Os valores desse conjunto se distanciam do valor médio cerca de 4,7 veículos.

24. a. Ao observar os diagramas, espera-se que os estudantes percebam que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior, pois os dados estão menos concentrados em torno de alguns valores.

b. Nesse caso, os estudantes podem usar qualquer uma das medidas de dispersão estudadas.

Calculando cada uma das medidas para os dados do 1º dia e do 2º dia, temos:

$At_1 = 15{,}30 - 3{,}80 = 11{,}50$

$At_2 = 9{,}75 - 5{,}20 = 4{,}55$

Para calcular as outras medidas, primeiro é necessário calcular as médias:

$\bar{x}_1 = \frac{174{,}10}{20} = 8{,}705$

$\bar{x}_2 = \frac{138{,}10}{20} = 6{,}905$

Então, construímos as tabelas para facilitar os cálculos.

1º dia

x_i	$x_i - \bar{x}_1$	$\lvert x_i - \bar{x}_1\rvert$	$(x_i - \bar{x}_1)^2$
3,80	−4,905	4,905	24,059
4,50	−4,205	4,205	17,682
5,20	−3,505	3,505	12,285
5,40	−3,305	3,305	10,923
5,60	−3,105	3,105	9,641
6,50	−2,205	2,205	4,862
7,30	−1,405	1,405	1,974
7,45	−1,255	1,255	1,575
7,80	−0,905	0,905	0,819
8,10	−0,605	0,605	0,366
9,50	0,795	0,795	0,632
9,70	0,995	0,995	0,990
9,75	1,045	1,045	1,092
9,80	1,095	1,095	1,199
10,25	1,545	1,545	2,387
11,60	2,895	2,895	8,381
11,75	3,045	3,045	9,272
11,80	3,095	3,095	9,579
13,00	4,295	4,295	18,447
15,30	6,595	6,595	43,494
–	–	$\sum \lvert x_i - \bar{x}_1\rvert = 50{,}800$	$\sum (x_i - \bar{x}_1)^2 = 179{,}660$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

2º dia

x_i	$x_i - \bar{x}_2$	$\lvert x_i - \bar{x}_2\rvert$	$(x_i - \bar{x}_2)^2$
5,20	−1,705	1,705	2,907
5,45	−1,455	1,455	2,117
5,50	−1,405	1,405	1,974
5,55	−1,355	1,355	1,836
5,60	−1,305	1,305	1,703
5,75	−1,155	1,155	1,334
5,80	−1,105	1,105	1,221
5,95	−0,955	0,955	0,912
6,50	−0,405	0,405	0,164
6,60	−0,305	0,305	0,093
6,85	−0,055	0,055	0,003
6,90	−0,005	0,005	0,000
7,50	0,595	0,595	0,354
7,65	0,745	0,745	0,555
7,70	0,795	0,795	0,632
7,80	0,895	0,895	0,801
7,90	0,995	0,995	0,990
8,55	1,645	1,645	2,706
9,60	2,695	2,695	7,263
9,75	2,845	2,845	8,094
–	–	$\sum \lvert x_i - \bar{x}_2\rvert = 22{,}420$	$\sum (x_i - \bar{x}_2)^2 = 35{,}660$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Assim:

$Dm_1 = \frac{50{,}800}{20} = 2{,}54$ $\qquad$ $Dm_2 = \frac{22{,}420}{20} \simeq 1{,}12$

$Var_1 \simeq \frac{179{,}660}{20} = 8{,}983$ $\qquad$ $Var_2 \simeq \frac{35{,}660}{20} = 1{,}783$

$Dp_1 \simeq \sqrt{8{,}983} \simeq 3{,}00$ $\qquad$ $Dp_2 \simeq \sqrt{1{,}783} \simeq 1{,}34$

Com o cálculo de qualquer uma das medidas, é possível verificar que a variabilidade dos valores do 1º dia foi maior.

25. Resposta pessoal.

26. Primeiro, determinamos o ponto médio de cada intervalo e, em seguida, calculamos a média.

$\bar{x} = \frac{10 \cdot 600 + 40 \cdot 800 + 80 \cdot 1.000 + 50 \cdot 1.200 + 20 \cdot 1.400}{200}$

$\bar{x} = \frac{206.000}{200} = 1.030$

Agora, vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos.

Aluguel pago por moradores da zona urbana da cidade

Aluguel (em real)	f_i	PM_i	$(PM_i - \bar{x})$	$(PM_i - \bar{x})^2$	$f_i \cdot (PM_i - \bar{x})^2$
[500, 700[	10	600	−430	184.900	1.849.000
[700, 900[	40	800	−230	52.900	2.116.000
[900, 1.100[	80	1.000	−30	900	72.000
[1.100, 1.300[	50	1.200	170	28.900	1.445.000
[1.300, 1.500[	20	1.400	370	136.900	2.738.000
–	$\sum f_i = 200$	–	–	–	$\sum [f_i \cdot (PM_i - \bar{x})^2] = 8.220.000$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Com base nos dados da tabela, temos:

$Var = \frac{8.220.000}{200} = 41.100$

$Dp = \sqrt{41.100} \simeq 202{,}73$

Os valores do conjunto distanciam-se cerca de R$ 202,73 do valor médio (R$ 1.030,00).

---

27. Vamos inicialmente considerar o ponto médio de cada intervalo e calcular a média.

$\bar{x} = \frac{3 \cdot 7 + 8 \cdot 9 + 5 \cdot 11 + 2 \cdot 13 + 2 \cdot 15}{3 + 8 + 5 + 2 + 2}$

$\bar{x} = \frac{204}{20} = 10{,}2$

Agora, vamos construir uma tabela para facilitar os cálculos.

Comparação entre automóveis de mesma marca e modelo

PM_i	f_i	$PM_i - \bar{x}$	$f_i \cdot \lvert PM_i - \bar{x} \rvert$
7	3	−3,2	9,6
9	8	−1,2	9,6
11	5	0,8	4
13	2	2,8	5,6
15	2	4,8	9,6
–	$\sum f_i = 20$	–	$\sum (f_i \cdot \lvert PM_i - \bar{x} \rvert) = 38{,}4$

Fonte: elaborado para fins didáticos.

Assim:

$Dm = \frac{38{,}4}{20} = 1{,}92$

Logo, os valores do grupo distanciam-se cerca de 1,92 km/L do valor médio (10,2 km/L).

28. a. Como o retângulo do *box-plot* é limitado pelo primeiro e pelo terceiro quartil, então $Q_1 = 5$ e $Q_3 = 7$.

b. Como $Q_1 = 5$ e $Q_3 = 7$, entre 5 e 7 estão 50% das notas dos estudantes, que correspondem a 40 notas. Portanto, 40 estudantes tiveram notas entre 5 e 7.

c. A menor nota é dada pelo valor extremo no gráfico. Logo, a menor nota foi 1.

d. Como $Q_3 = 7$ e 10 é o valor máximo da distribuição, entre 7 e 10 estão 25% das notas. Assim, 25% dos estudantes tiveram notas entre 7 e 10.

e. Espera-se que os estudantes percebam que somente com o *box-plot* não é possível saber quantos estudantes tiveram nota 10. Pode-se saber que 25% de 80 estudantes (ou seja, 20 estudantes) tiveram notas entre 7 e 10, mas não se sabe como foi a distribuição das notas dentro desse intervalo.

29. A maior medida de massa entre as mulheres é 106 kg (um dos valores extremos), não 85 kg.
Alternativa **d**.

30. a. Espera-se que os estudantes percebam que a representação mais adequada depende dos fatores que se pretendem analisar.

b. A representação que apresentou menor perda de informações dos dados em si foi o diagrama de ramo e folhas. Por meio desse diagrama, é possível saber o valor de cada dado.

Observe:

7,19	9,42	9,45	9,77	9,86	10,08
10,2	10,91	11,12	11,7	11,87	12,43
12,92	13,42	13,91	14,5	14,62	15,17
16,68	16,82	16,89	17,98	19,62	20,07
20,13	20,92	22,01	25,81	25,87	26,02
30,85	32,13	32,28	37,67	37,98	40,8
42,53	44,5	45,05	46,31	47,76	51,22
58,04	58,25				

c. Por meio do *box-plot*, não é possível saber quantos participantes havia nessa rodada do campeonato. Pode-se extrair essa informação do diagrama de ramo e folhas (contando-se todos os elementos) ou do histograma (adicionando-se as frequências de cada classe).

Nessa rodada do campeonato, havia 44 participantes.

d. Espera-se que os estudantes percebam que a representação mais adequada nesse caso seria o *box-plot*.

e. Observando o *box-plot*, temos:

$Me = 18{,}800$

$Q_1 = 12{,}150$

$Q_3 = 34{,}975$

f. Para identificar o menor e o maior valor desse conjunto de dados, seria mais adequado consultar o diagrama de ramo e folhas ou o *box-plot*.

Menor valor: 7,19 Maior valor: 58,25

g. 23 participantes tiveram melhor tempo abaixo de 20 segundos, e 6 participantes tiveram melhor tempo entre 40 e 50 segundos. Para responder a essas questões, é necessário consultar o diagrama de ramo e folhas.

h. Resposta pessoal.

i. Respostas pessoais.

31. Resposta pessoal.

32. a. Resposta pessoal.

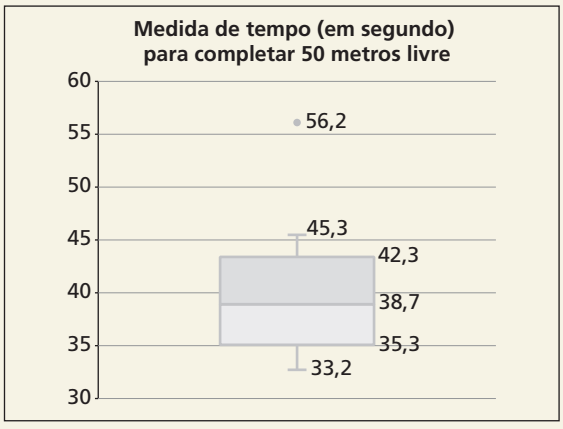
Alguns exemplos de representações:

Medida de tempo (em segundo) para completar 50 metros livre

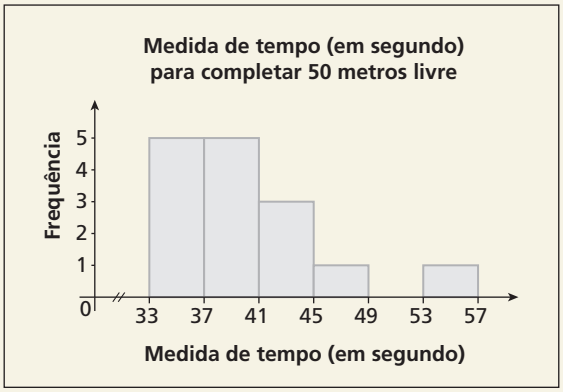
3	32 33 42 53 55 75 84 87
4	01 03 21 23 32 53
5	62

3 | 32 = 33,2 segundos

Fonte: elaborado para fins didáticos.



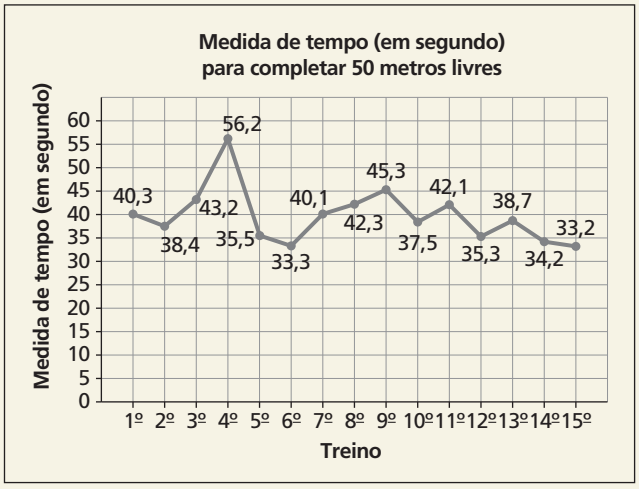
Fonte: elaborado para fins didáticos.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: elaborado para fins didáticos.

b. Espera-se que os estudantes percebam que, para visualizar a evolução das medidas de tempo ao longo dos treinos, um diagrama de ramo e folhas, um histograma ou um *box-plot* não são adequados. Para esse tipo de análise, um gráfico de linha, como o ilustrado, seria mais adequado.



Fonte: elaborado para fins didáticos.

33. Resposta pessoal.

34. a. Há uma correlação positiva entre a média de Matemática no Pisa 2015 e o Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural (ESCS), pois valores crescentes do ESCS estão associados a valores crescentes da média de Matemática no Pisa 2015.

b. Dos países representados no diagrama, o Brasil é o que teve a menor média de Matemática no Pisa 2015 e o menor Índice Pisa de *status* econômico, social e cultural.

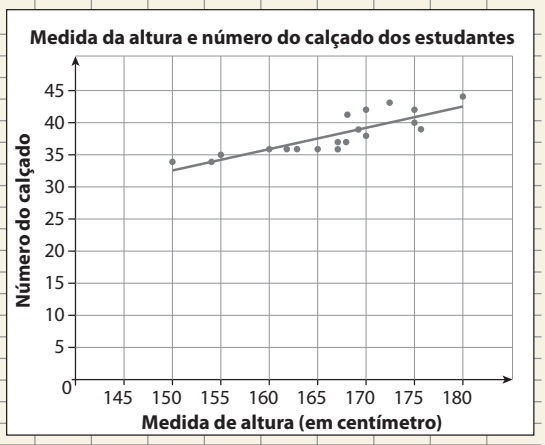
35. Observando o gráfico, é possível perceber que há uma correlação positiva entre as variáveis (confirmada pelo coeficiente de correlação 0,948). Portanto, os municípios representados no diagrama (que é uma amostra dos municípios da região Nordeste) com maior população tendem a ter maior coleta diária de resíduos sólidos urbanos por habitante.

Alternativa **c**.

36. Pelo gráfico é possível perceber que a correlação entre as variáveis é nula, ou seja, as variações de idade e medida de massa ocorrem independentemente.

37.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
D22			Fórmula	=CORREL(A2:A21; B2:B21)								
1	**Medida da altura (em centímetro)**	**Número do calçado**										
2	150	34										
3	154	34										
4	155	35										
5	160	36										
6	162	36										
7	163	36										
8	165	36										
9	167	36										
10	167	37										
11	167	37										
12	168	37										
13	168	41										
14	169	39										
15	170	42										
16	170	38										
17	172	43										
18	175	40										
19	175	42										
20	176	39										
21	180	44	r_{xy}									
22			0,840322									
23												



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

De modo geral, quanto maior a medida da altura, maior o número do calçado. As variáveis estão relacionadas, e a correlação é linear positiva.

Para finalizar o capítulo 3

Autoavaliação

Q1. $\bar{x} = \frac{7 + 11 + 8 + 14 + 10}{5} = \frac{50}{5} = 10$

Como os valores têm a mesma frequência, podemos dizer que não existe moda.
Organizando os dados em ordem crescente, temos:
7, 8, 10, 11, 14
Portanto: $Me = 10$
Alternativa **c**.

Q2. $\bar{x} = \frac{16 + 15 + 17 + 14 + 15}{5} = \frac{77}{5} = 15{,}4$

Portanto, o gasto médio de Samanta com almoço foi de R$ 15,40.
Alternativa **d**.

Q3. A idade mais frequente, ou idade modal, é 12 anos.
Alternativa **b**.

Q4. Quando todos os valores observados são iguais, o desvio padrão é nulo, ou seja, é zero.
Alternativa **b**.

Q5. $\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5}{5} = \frac{15}{5} = 3$

$Dm = \frac{|1 - 3| + |2 - 3| + |3 - 3| + |4 - 3| + |5 - 3|}{5}$

$Dm = \frac{2 + 1 + 0 + 1 + 2}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

$Var = \frac{(1 - 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (5 - 3)^2}{5}$

$Var = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$

Alternativa **d**.

Q6. $\bar{x} = \frac{9 + 5 + 8 + 10 + 4 + 6}{6} = \frac{42}{6} = 7$

$Var = \frac{(9 - 7)^2 + (5 - 7)^2 + (8 - 7)^2 + (10 - 7)^2 + (4 - 7)^2 + (6 - 7)^2}{6} = \frac{4 + 4 + 1 + 9 + 9 + 1}{6} = \frac{28}{6} \simeq 4{,}7$

$Dp \simeq \sqrt{4{,}7} \simeq 2{,}2$

Alternativa **d**.

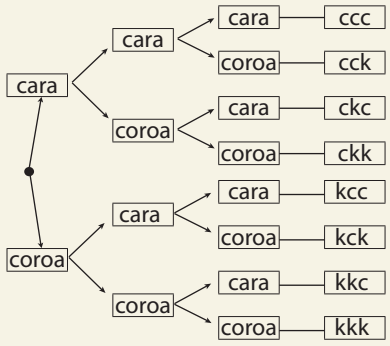
Q7. Conforme o *box-plot*, o primeiro quartil é 4, a mediana é 5, o terceiro quartil é 7 e a amplitude é 8 (10 − 2).
Alternativa **a**.

Q8. Para verificar a associação entre duas variáveis numéricas, o tipo de gráfico mais adequado é o diagrama de dispersão.
Alternativa **c**.

Capítulo 4 Análise combinatória

Atividades propostas

1. A árvore de possibilidades, nesse caso, seria assim:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Para 2 lançamentos, temos 4 resultados, pois $2^2 = 4$.

Para 3 lançamentos, temos 8 resultados, pois $2^3 = 8$.

Dessa maneira, pode-se observar que, para 4 lançamentos, teremos 16 resultados, pois $2^4 = 16$ e, generalizando para n lançamentos, teremos 2^n resultados possíveis.

2. A situação de 7 estudantes escolherem 2 cadeiras é análoga à de 7 cadeiras serem escolhidas por 2 estudantes quanto ao número de possibilidades. Logo, a quantidade seria a mesma.

3. Pelo princípio multiplicativos, temos:
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$
Logo, são 5.040 maneiras diferentes.

4. Espera-se que os estudantes percebam que o número de possibilidades de placas será igual ao do Brasil, pois ele também é obtido pelo produto de quatro fatores iguais a 26 e três fatores iguais a 10.

5. • E_1 (escolha de um tipo de macarrão): 3 possibilidades
• E_2 (escolha de um tipo de molho): 2 possibilidades
Pelo princípio multiplicativo: $3 \cdot 2 = 6$
Logo, podem ser preparadas 6 opções de pratos diferentes de macarronada.

6. Para formar a senha, temos 26 letras, cada uma podendo ser maiúscula ou minúscula, e mais 10 algarismos. Logo, são 62 (26 + 26 + 10) caracteres para utilizar na senha.
Como a senha sugerida deve ter 8 caracteres, calculamos:
$62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 \cdot 62 = 62^8$
Portanto, temos 62^8 senhas.

7. 12 corredores podem ganhar o 1º prêmio, e 11 corredores (todos os corredores, menos o que ganhar o 1º prêmio) podem ganhar o 2º prêmio.
Pelo princípio multiplicativo: $12 \cdot 11 = 132$
Logo, o 1º e o 2º prêmio podem ser distribuídos de 132 maneiras.

8. _ _ _ _
10 possibilidades
10 possibilidades
10 possibilidades
9 possibilidades: (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9)

Pelo princípio multiplicativo: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9.000$

Logo, há 9.000 números com 4 algarismos.

9. _ _ _ _ _
5 4 3 2 1
$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Logo, 5 livros podem ser colocados lado a lado em uma prateleira de 120 maneiras distintas.

10. letras | algarismos
8 possibilidades
9 possibilidades
9 possibilidades: (não pode ser zero)
23 possibilidades
24 possibilidades
25 possibilidades
25 possibilidades: (não pode ser *z*)

Pelo princípio multiplicativo:
$25 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 223.560.000$
Podem ser criadas, portanto, 223.560.000 diferentes senhas de acesso ao *site*.

11. a. _ _ _
6 possibilidades
6 possibilidades
5 possibilidades: (não pode começar por zero)

Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$
Logo, podem ser formados 180 números de 3 dígitos.

b. _ _ _
4 possibilidades
5 possibilidades
5 possibilidades: (não pode começar por zero)

Pelo princípio multiplicativo: $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$
Logo, podem ser formados 100 números de 3 dígitos sem repetir os algarismos.

12. _ _ _ _
2 possibilidades
3 possibilidades
4 possibilidades
4 possibilidades: (1, 3, 5 e 7)

Pelo princípio multiplicativo: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$
Logo, podemos formar 96 números.

13. • E_1 (escolha da resposta para a 1ª questão): 3 possibilidades
• E_2 (escolha da resposta para a 2ª questão): 3 possibilidades
• E_3 (escolha da resposta para a 3ª questão): 3 possibilidades
• E_4 (escolha da resposta para a 4ª questão): 3 possibilidades
• E_5 (escolha da resposta para a 5ª questão): 3 possibilidades
• E_6 (escolha da resposta para a 6ª questão): 3 possibilidades
Pelo princípio multiplicativo: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$
Logo, o cartão pode ser preenchido de 729 maneiras diferentes.

14. Como há 729 maneiras de preencher o cartão de resposta, pode-se garantir que pelo menos 2 cartões sejam preenchidos com as mesmas respostas com um mínimo de 730 pessoas prestando o concurso.

15. 1ª equipe: _ _ _ melhor
6 5 4 1
2ª equipe: _ _ _ melhor
3 2 1 1

Pelo princípio multiplicativo: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
Logo, o técnico pode formar os times de 720 maneiras distintas.

16. 1 bandeira hasteada: $\underset{5}{__}$

2 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{__}\ \underset{4}{__}$

3 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{__}\ \underset{4}{__}\ \underset{3}{__}$

4 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{__}\ \underset{4}{__}\ \underset{3}{__}\ \underset{2}{__}$

5 bandeiras hasteadas: $\underset{5}{__}\ \underset{4}{__}\ \underset{3}{__}\ \underset{2}{__}\ \underset{1}{__}$

Total $= 5 + 20 + 60 + 120 + 120 = 325$
Portanto, podem ser enviadas 325 mensagens distintas.

17. Para formar um soneto, podemos escolher um dos 10 versos para a primeira linha, um dos 10 versos para a segunda linha e assim por diante. Ou seja, a quantidade de sonetos possíveis é:

$\underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{\text{14 vezes}} = 10^{14}$

18. São 9 dígitos, todos distintos, e sempre começando com 96, então as possibilidades restantes para cada posição são:

$\underset{9}{__}\ \underset{6}{__}\ \underset{8}{__}\ \underset{7}{__}\ \underset{6}{__}\ \underset{5}{__}\ \underset{4}{__}\ \underset{3}{__}\ \underset{2}{__}$

Pelo princípio multiplicativo:

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 40.320$

Podem ser criadas então 40.320 linhas novas.

Alternativa **d**.

19.
- Com 1 sinal: 2
- Com 2 sinais: $2 \cdot 2 = 4$
- Com 3 sinais: $2^3 = 8$
- Com 4 sinais: $2^4 = 16$

Logo, podemos representar 30 letras distintas $(2 + 4 + 8 + 16)$.

20. Números de 5.000 a 6.999:

$\underset{2}{\underline{\text{5 ou 6}}}\ \underset{10}{__}\ \underset{10}{__}\ \underset{10}{__} \Rightarrow$ total $= 2.000$

Números de 5.000 a 6.999 que não contêm o algarismo 3:

$\underset{2}{\underline{\text{5 ou 6}}}\ \underset{9}{__}\ \underset{9}{__}\ \underset{9}{__} \Rightarrow$ total $= 1.458$

Total de números que contêm o algarismo 3:
$2.000 - 1.458 = 542$

Logo, 542 números de 5.000 a 6.999 contêm pelo menos um algarismo 3.

21. Considerando as duas primeiras letras de um nome:

$\underset{\text{26 possibilidades}}{__}\ \underset{\text{26 possibilidades}}{__}$

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades para as duas primeiras letras de um nome é: $26 \cdot 26 = 676$
Como a escola tem 677 estudantes, pelo menos 2 estudantes têm as mesmas duas letras iniciais de seus nomes.

22. $\underbrace{__\ __\ __}_{\text{código de área}}\ \underbrace{__\ __\ __}_{\text{prefixo}}\ \underbrace{__\ __\ __\ __}_{\text{linha}}$

a. $\underset{8}{\underset{\downarrow}{__}}\ \underset{10}{__}\ \underset{10}{__}$ (não pode ser 0 ou 1)

Pelo princípio multiplicativo: $8 \cdot 10 \cdot 10 = 800$
Logo, existem 800 diferentes códigos de área.

b. $\underset{4}{__}\ \underset{3}{__}\ \underset{1}{__}\ \underset{8}{__}\ \underset{8}{__}\ \underset{10}{__}$

$8 \cdot 8 \cdot 10 = 640$
Logo, existem 640 prefixos para esse código de área.

c. $\underset{4}{__}\ \underset{3}{__}\ \underset{1}{__}\ \underset{2}{__}\ \underset{2}{__}\ \underset{3}{__}\ \underbrace{__\ __\ __\ __}_{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 9.999}$

Logo, são possíveis 9.999 números de linha.

d. $\underset{4}{__}\ \underset{3}{__}\ \underset{1}{__}\ \underset{8}{__}\ \underset{8}{__}\ \underset{10}{__}\ \underbrace{__\ __\ __\ __}_{9.999}$

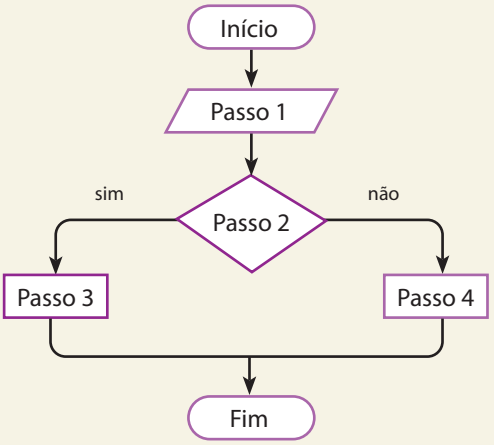
$8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9.999 = 6.399.360$
Logo, são possíveis 6.399.360 diferentes números de telefone de 7 dígitos dentro desse código de área.

e. $\underset{8}{__}\ \underset{10}{__}\ \underset{10}{__}\ \underset{8}{__}\ \underset{8}{__}\ \underset{10}{__}\ \underbrace{__\ __\ __\ __}_{9.999}$

$8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 9.999 = 5.119.488.000$
Logo, são possíveis 5.119.488.000 números de telefone de 10 dígitos nesse país.

23. Resposta pessoal.

24.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

25. **a.** $\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

b. $\frac{3! \cdot 7!}{4! \cdot 6!} = \frac{\cancel{3!} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4 \cdot \cancel{3!} \cdot \cancel{6!}} = \frac{7}{4}$

26. **a.** $\frac{5!}{5} = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4!$

b. $\frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4!}{2 \cdot 1} = \frac{5}{2} \cdot 4!$

c. $\frac{7! - 5!}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4! - 5 \cdot 4!}{4} = \frac{5 \cdot 4!(42 - 1)}{4} = \frac{205}{4} \cdot 4!$

27. **a.** $\frac{n!}{(n-2)!} = 30 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot (n-1) = 30 \Rightarrow n^2 - n - 30 = 0$
Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos:
$n = 6$ ou $n = -5$ (não convém)
Logo, $n = 6$.

b. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72 \Rightarrow \frac{(n+1) \cdot n \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 72 \Rightarrow$

$\Rightarrow (n+1) \cdot n = 72 \Rightarrow n^2 + n - 72 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:
$n = 8$ ou $n = -9$ (não convém)
Logo, $n = 8$.

28. Exemplos de respostas:
$5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$
$6 = (4! : 4) + 4 - 4$
$7 = (4 + 4) - (4 : 4)$
$8 = 4 + 4 + 4 - 4$
$9 = (4 : 4) + 4 + 4$
$10 = (44 - 4) : 4$

29. $\underset{6}{__} \quad \underset{5}{__} \quad \underset{4}{__} \quad \underset{3}{__} \quad \underset{2}{__} \quad \underset{1}{__}$
$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
Logo, as 6 letras podem ser escritas de 720 maneiras diferentes.

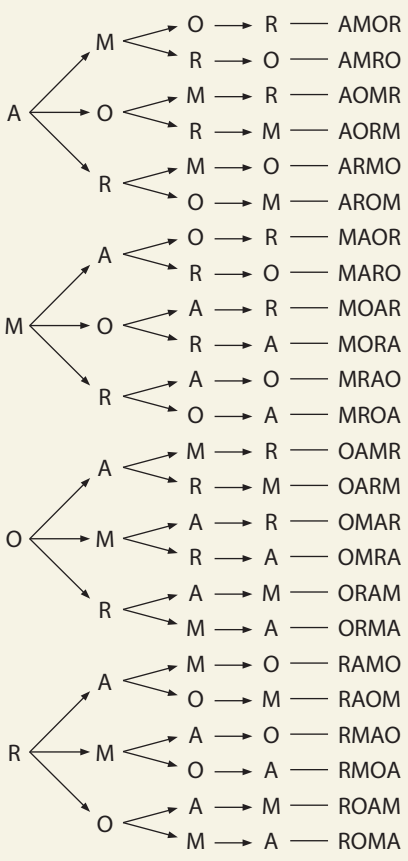
30. Espera-se que os estudantes percebam que não é possível resolver o problema, pois não é possível pintar cinco portões com cores distintas sendo que há apenas quatro cores disponíveis.

31. Começando com 4:
$\underset{4}{__} \quad \underset{3}{__} \quad \underset{2}{__} \quad \underset{1}{__} \quad \underset{2}{\text{2 ou 6}}$
$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$
Começando com 5:
$\underset{5}{__} \quad \underset{3}{__} \quad \underset{2}{__} \quad \underset{1}{__} \quad \underset{3}{\text{2, 4 ou 6}}$
$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18$
Começando com 6:
$\underset{6}{__} \quad \underset{3}{__} \quad \underset{2}{__} \quad \underset{1}{__} \quad \underset{2}{\text{2 ou 4}}$
$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$
Total $= 12 + 18 + 12 = 42$
Logo, podem ser formados 42 números pares.

32. Espera-se que os estudantes percebam que falta uma cor no enunciado da **atividade 30**. Assim, eles podem reescrever o enunciado com mais uma cor, diferente das que já constam no enunciado, e obter o total de 120 maneiras de pintar os portões.
Os estudantes podem também reescrever o enunciado com mais opções de cores, obtendo assim resultados diferentes.

33. Como a palavra SABER é formada por 5 letras diferentes, temos:
$P_5 = 5! = 120$
Logo, a palavra SABER possui 120 anagramas.

34. **a.** Sim, pode-se resolver o problema usando uma árvore de possibilidades:



b. Não. Anagramas como AOMR, RMAO ou MROA, por exemplo, formam palavras sem significado.

35. Fixando uma letra A no início do anagrama, permutamos as letras restantes, e temos:
$1 \cdot P_4 = 1 \cdot 4! = 24$
Portanto, a palavra AMORA tem 24 anagramas que começam com a letra A.

36. Temos 2 possibilidades de escolher uma vogal. Tendo escolhido essa vogal, sobram 4 letras para serem permutadas. Então, o número de anagramas que começam por vogal é:
$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$
Temos 3 possibilidades de escolher uma consoante que comece o anagrama e 2 possibilidades de escolher uma consoante que termine o anagrama. Tendo escolhido essas consoantes, sobram 3 letras para serem permutadas. Então, o número de anagramas que começam e terminam por consoante é:
$3 \cdot P_3 \cdot 2 = 3 \cdot 3! \cdot 2 = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$
Portanto, temos 48 anagramas que começam por vogal e 36 anagramas que começam e terminam por consoante.

37. Vamos permutar 8 letras com a repetição de 3 letras R e 2 letras A.
$P_8^{3,2} = \frac{8!}{3! \cdot 2!} = \frac{40.320}{6 \cdot 2} = 3.360$
Logo, a palavra CARREIRA tem 3.360 anagramas.

38. Como as mulheres devem ficar juntas, vamos considerar que há um grupo com 3 mulheres e que elas podem se posicionar de P_3 maneiras.
Tendo escolhido a posição do grupo de mulheres, temos uma permutação de 6 elementos (5 homens e 1 grupo de mulheres).
Pelo princípio multiplicativo, temos:
$P_3 \cdot P_6 = 3! \cdot 6! = 6 \cdot 720 = 4.320$
Portanto, as pessoas dessa fila podem se posicionar de 4.320 maneiras diferentes, mantendo as mulheres juntas.

39. Devemos permutar 6 bandeiras, sendo 2 vermelhas e 3 azuis. Então:
$P_6^{2,3} = \frac{6!}{2! \cdot 3!} = \frac{720}{2 \cdot 6} = 60$
Podemos emitir 60 sinais diferentes.

40. **a.** $P_{12} = 12! = 479.001.600$
Portanto, se não houver restrições, os livros poderão ser arrumados de 479.001.600 maneiras.

b. $P_4 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3! = 103.680$
Portanto, mantendo os livros de uma mesma matéria juntos, haverá 103.680 maneiras de arrumá-los.

41. Analisando a quantidade de anagramas para cada alternativa, temos

a. CASCAS
2 letras C, 2 letras A e 2 letras S
$\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 90$

b. CABANA
3 letras A
$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$

c. BATATA
3 letras A e 2 letras T
$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2} = 60$

d. PLANTA
2 letras A
$\frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 360$

Logo, a palavra BATATA é a que tem o menor número de anagramas.
Alternativa **c**.

42. A soma procurada (S) tem P_5 parcelas:
$P_5 = 5! = 120$
Na ordem das unidades simples (U), cada algarismo aparece 24 vezes (número de permutações dos algarismos nas outras ordens).

Quadro de ordens dos números a serem adicionados

DM	UM	C	D	U
1	2	3	4	5
2	1	3	4	5
1	3	2	4	5
2	3	1	4	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5	2	3	4	1
2	5	3	4	1

Ocorre o mesmo com as outras ordens. Então, a soma dos valores absolutos, em cada ordem, é:

$$\underbrace{(5+5+...+5)}_{24\text{ vezes}}+\underbrace{(4+4+...+4)}_{24\text{ vezes}}+\underbrace{(3+3+...+3)}_{24\text{ vezes}}+$$
$$+\underbrace{(2+2+...+2)}_{24\text{ vezes}}+\underbrace{(1+1+...+1)}_{24\text{ vezes}}=$$
$$=24\cdot5+24\cdot4+24\cdot3+24\cdot2+24\cdot1=360$$

Assim:
$S = 360\text{ U} + 360\text{ D} + 360\text{ C} + 360\text{ UM} + 360\text{ DM}$
$S = 360 + 3.600 + 36.000 + 360.000 + 3.600.000$
$S = 3.999.960$
Portanto, a soma é 3.999.960.

43. Temos 10 objetos, dos quais 5 serão guardados na primeira caixa, 3 na segunda e 2 na terceira. Então, fazemos o seguinte cálculo, considerando os objetos que iriam para cada caixa como de um tipo distinto:

$$\frac{10!}{5!\cdot3!\cdot2!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot\cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot3\cdot2\cdot2}=\frac{30.240}{12}=2.520$$

Portanto, podemos guardar os 10 objetos nas 3 caixas de 2.520 modos diferentes.

44. Para se locomover de *A* para *B*, a pessoa deverá deslocar-se 4 vezes para a direita (D) e 2 vezes para baixo (B), em qualquer ordem; assim, a quantidade de caminhos diferentes possíveis pode ser dada pela permutação de 6 letras em que 4 são D e 2 são B:

$$P_6^{4,2}=\frac{6!}{4!\cdot2!}=\frac{6\cdot5}{2}=\frac{30}{2}=15$$

Para se locomover de *B* para *C*, a pessoa deverá deslocar-se 2 vezes para a direita e 4 vezes para baixo, assim: $P_6^{4,2}=15$

Pelo princípio multiplicativo, a quantidade de possíveis caminhos diferentes para ir de *A* para *C* é: $15\cdot15=225$
Portanto, são possíveis 225 caminhos diferentes.

45. Resposta pessoal.

46. $A_{5,3}=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=60$

Logo, 3 pessoas podem sentar em um sofá de 5 lugares de 60 modos diferentes.

47. $A_{10,2}=\frac{10!}{(10-2)!}=\frac{10!}{8!}=\frac{10\cdot9\cdot\cancel{8!}}{\cancel{8!}}=90$

Logo, há 90 possíveis resultados da eleição.

48. $A_{5,3}=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{120}{2}=60$

Logo, há 60 possíveis resultados para as 3 primeiras colocações.

49. $A_{20,2}=\frac{20!}{(20-2)!}=\frac{20!}{18!}=\frac{20\cdot19\cdot\cancel{18!}}{\cancel{18!}}=380$

Logo, há 380 possibilidades de classificação para os dois primeiros lugares.

50. a. $A_{n,n}=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=\frac{n!}{1}=n!$

Como $P_n=n!$, então: $A_{n,n}=n!=P_n$

b. $A_{n,1}=\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}=n$

Portanto, $A_{n,1}=n$.

51. Não, no caso sem restrições teríamos de contar os números com algarismos repetidos; assim, haveria 125 números.

52. $A_{x,2}=156$

$$\frac{x!}{(x-2)!}=156\Rightarrow\frac{x\cdot(x-1)\cdot\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}}=156\Rightarrow x^2-x-156=0$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, temos:
$x = 13$ ou $x = -12$ (não convém, pois $x \geqslant 2$)
Logo, $x = 13$.

53. $A_{6,2}=\frac{6!}{(6-2)!}=\frac{6!}{4!}=30$

Logo, uma pessoa pode entrar por uma porta e sair por outra de 30 maneiras diferentes.

54. $A_{10,3}=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=10\cdot9\cdot8=720$

Então, há 720 possíveis segredos.
Se uma pessoa levar 10 segundos em cada um dos possíveis segredos, vai gastar 7.200 segundos (720 · 10), ou seja, 2 horas para testar todos os possíveis segredos.

55. $A_{5,3}\cdot A_{3,2}=\frac{5!}{(5-3)!}\cdot\frac{3!}{(3-2)!}=60\cdot6=360$

Logo, o número de sequências numéricas será 360.

56. Resposta pessoal.

57. $C_{15,10}=\frac{15!}{10!\cdot(15-10)!}=\frac{15!}{10!\cdot5!}=3.003$

Logo, ele poderá escolher as 10 questões de 3.003 formas.

58. $C_{6,3}=\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}=\frac{6\cdot5\cdot4}{3!}=\frac{120}{6}=20$

Ou seja, há 20 maneiras de escolher 3 frutas diferentes em um conjunto com 6 frutas disponíveis.

59. Apenas um, o próprio conjunto. É importante lembrar que um conjunto não é diferente de "outro" se tiver os mesmos elementos dispostos em outra ordem.

60. Na **atividade 50**, já foi verificado que $A_{n,n}=P_n=n!$. Resta verificar quanto vale $n!\cdot C_{n,n}$:

$$n!\cdot C_{n,n}=n!\cdot\frac{n!}{n!\cdot(n-n)!}=n!\cdot\frac{n!}{n!\cdot0!}=n!\cdot\frac{n!}{n!}=n!\cdot1=n!$$

Portanto, $A_{n,n}=P_n=n!\cdot C_{n,n}$.

61. Diagonal de um polígono é o segmento de reta que une dois de seus vértices não consecutivos.
Sendo *d* o número de diagonais de um polígono de *n* lados e *n* vértices, a quantidade de segmentos que unem dois de seus vértices é:
$C_{n,2}$ = nº de diagonais + nº de lados $\Rightarrow d=C_{n,2}-n$

$$d=\frac{n!}{(n-2)!\cdot2!}-n\Rightarrow d=\frac{n\cdot(n-1)}{2}-n\Rightarrow d=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$$

62. $C_{7,3}=\frac{7!}{3!\cdot(7-3)!}=\frac{7!}{3!\cdot4!}=\frac{7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{6}\cdot\cancel{4!}}=35$

Podem ser formadas 35 comissões diferentes.

63. $C_{10,2}=\frac{10!}{2!\cdot(10-2)!}=\frac{10!}{2!\cdot8!}=\frac{10\cdot9\cdot\cancel{8!}}{2\cdot\cancel{8!}}=45$

Foram trocados 45 apertos de mão.

64. $C_{6,2}\cdot C_{6,3}=\frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}\cdot\frac{6!}{3!\cdot(6-3)!}=15\cdot20=300$

Portanto, há 300 possibilidades de comissão.

65. $C_{5,2} \cdot C_{10,3} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} \cdot \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = 10 \cdot 120 = 1.200$

Podemos formar 1.200 conjuntos diferentes de 5 elementos com 2 vogais diferentes e 3 algarismos distintos.

66. S U C E SS O

Como queremos grupos de 3 letras distintas, devemos considerar as combinações formadas com as letras S, U, C, E e O:

$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2} = 10$

Logo, podem ser constituídos 10 grupos de 3 letras distintas. Entre as letras utilizadas para formar esses grupos, temos apenas duas consoantes; portanto, não há grupos sem vogal.

67. 1, 2, 3, 4, ..., 15

Temos nesse grupo 8 números ímpares e 7 números pares.

$C_{8,5} \cdot C_{7,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 56 \cdot 35 = 1.960$

Logo, podem ser escolhidos 1.960 diferentes grupos de 8 números.

68. Em um baralho de 52 cartas, há 13 cartas de espadas.

$C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \cancel{10!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{10!}} = 286$

Logo, podem ser selecionados 286 grupos de 3 cartas de espadas.

69. Vamos combinar 8 bolas tomadas 3 a 3 e retirar o número de combinações das 3 bolas vermelhas, tomadas 3 a 3.

$C_{8,3} - C_{3,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} - \frac{\cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 0!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{3 \cdot 2 \cdot \cancel{5!}} - 1 = 56 - 1 = 55$

Logo, o número de maneiras diferentes de retirar 3 bolas, de modo que não saiam somente bolas vermelhas, é 55.

70. Para formar os triângulos, devemos escolher 2 pontos de uma reta e 1 ponto da outra, independentemente de qual reta tenha mais pontos escolhidos.

$C_{7,2} \cdot C_{4,1} + C_{7,1} \cdot C_{4,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 4 + 7 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$

$= 21 \cdot 4 + 7 \cdot 6 = 84 + 42 = 126$

Portanto, podem ser formados 126 triângulos.

71. $C_{53,6} = \frac{53!}{47! \cdot 6!} = \frac{53 \cdot 52 \cdot \cancel{51}^{17} \cdot \cancel{50}^{10} \cdot 49 \cdot \cancel{48}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 22.957.480$

O jogador pode escolher 6 números de 22.957.480 maneiras.

72. Resposta pessoal.

Para finalizar o capítulo 4

Autoavaliação

Q1. A ⟶ B ⟶ C

$3 \cdot 4 = 12$

Logo, existem 12 maneiras de ir da cidade A até a cidade C passando por B.

Alternativa **c**.

Q2. — — — —

$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 9^2 \cdot 56$

Portanto, existem $9^2 \cdot 56$ números naturais de 4 algarismos que não se repetem.

Alternativa **b**.

Q3. $6! = 6 \cdot 5!$

Alternativa **d**.

Q4. $(n-5)! = 24 \Rightarrow (n-5)! = 4! \Rightarrow n - 5 = 4 \Rightarrow n = 9$

Portanto, $S = \{9\}$.

Alternativa **b**.

Q5. $P_4 = 4! = 24$

Logo, são possíveis 24 classificações nessa prova.

Alternativa **d**.

Q6. PAPAGAIO

$P_8^{2,3} = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 3.360$

Portanto, há 3.360 anagramas da palavra PAPAGAIO.

Alternativa **d**.

Q7. CLARO

Para que as letras A e R fiquem juntas e nessa ordem, consideramos as duas um único elemento da permutação; assim, a quantidade de anagramas será $P_4 = 4! = 24$.

Alternativa **a**.

Q8. Uma reta passará por 2 pontos desses 15. O número de retas será $C_{15,2}$.

Alternativa **c**.

Q9. $C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$

Logo, há 10 possibilidades de escolha da dupla.

Alternativa **b**.

Q10. Combinações são problemas de contagem que envolvem situações nas quais a ordem não é importante.

Alternativa **c**.

Capítulo 5 Probabilidade

Atividades propostas

1. Dos números de 1 a 75, os múltiplos de 5 são:
5, 10, 15, 20, 25, ..., 70 e 75
Logo: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 74, 75\}$ e $E = \{5, 10, 15, ..., 70, 75\}$

2. O evento "sair um número maior que 3" é $E = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 74, 75\}$, que tem 72 elementos.
O espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, ..., 74, 75\}$, que tem 75 elementos.

3. Sim, o número de elementos do evento "vai sair um rei de ouros" é muito menor que o número de elementos do espaço amostral, pois $n(E) = 1$ e $n(S) = 52$.

4. O espaço amostral é o conjunto dos pares ordenados (x, y) tal que x seja o número que poderá ocorrer no lançamento do dado azul e y seja o número que poderá ocorrer no lançamento do dado vermelho. Então:

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

a. $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

b. $\{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$

c. $\varnothing$, pois a menor soma é igual a 2.

d. $\{(6, 6)\}$

e. $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (6, 1)\}$

f. S (todos os elementos do espaço amostral)

g. $\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

h. $\{(6, 3), (3, 6), (6, 6)\}$

5. $n(S) = C_{500,3} = \frac{500!}{3! \cdot 497!} = \frac{500 \cdot 499 \cdot 498}{3 \cdot 2} = 20.708.500$

6. Resposta pessoal.

7. Considerando $P(n)$ a probabilidade de a face superior no lançamento de um dado apresentar o número n, temos:

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) =$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$

8. a. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Não é equiprovável, pois a probabilidade de ocorrer o evento {6} é maior do que a de ocorrer qualquer um dos outros eventos simples.

b. Não podemos usar a fórmula, pois ela só é válida para eventos equiprováveis.

c. Usando a fórmula, teríamos: $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{6}$ e $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

As reais probabilidades, de acordo com o enunciado, são: $P(E_1) = \frac{1}{9}$ e $P(E_2) = \frac{4}{9}$

9. Temos: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $n(S) = 12$

a. E_1: sair um número par

$E_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e $n(E_1) = 6$

$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b. E_2: sair um número maior que 4

$E_2 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e $n(E_2) = 8$

$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

c. E_3: sair um número divisível por 3

$E_3 = \{3, 6, 9, 12\}$ e $n(E_3) = 4$

$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

d. E_4: sair um número múltiplo de 5

$E_4 = \{5, 10\}$ e $n(E_4) = 2$

$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

e. E_5: sair um número menor que 1

$E_5 = \varnothing$ e $n(E_5) = 0$

$P(E_5) = \frac{n(E_5)}{n(S)} = \frac{0}{12} = 0$

10. Temos: $S = \{5$ bolas brancas, 3 bolas pretas, 7 bolas vermelhas$\}$ e $n(S) = 15$

a. E_1: a bola ser branca $\Rightarrow n(E_1) = 5$

$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

b. E_2: a bola ser preta $\Rightarrow n(E_2) = 3$

$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

c. E_3: a bola ser branca ou preta $\Rightarrow n(E_3) = 8$

$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{8}{15}$

d. E_4: a bola ser vermelha e branca $\Rightarrow n(E_4) = 0$

$P(E_4) = \frac{n(E_4)}{n(S)} = \frac{0}{15} = 0$

11. Como não importa a ordem de retirada das balas, o número de elementos do espaço amostral é igual ao número de combinações de 15, tomadas 3 a 3.

$n(S) = C_{15, 3} = \frac{15!}{3! \cdot (15 - 3)!} = 455$

Temos E: 3 balas sabor morango, de um total de 5. Então:

$n(E) = C_{5, 3} = 10 \Rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$

12. O número de agrupamentos com as letras R, O, M e A que podem ser formados por ordem de saída, retirando-se uma a uma as cartelas do saco, é:

$n(S) = P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

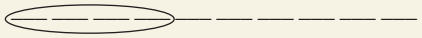
E: a palavra formada é AMOR $\Rightarrow n(E) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{24}$

13. O espaço amostral S é formado por todas as possibilidades de fila, sem restrição de lugar.

Assim: $n(S) = P_{10} = 10!$

Para as 4 pessoas ficarem juntas, consideramos um único elemento e permutamos com as outras 6 pessoas da fila:



$P_7 = 7!$

As pessoas da mesma família podem, ainda, ser permutadas entre si de P_4 maneiras; então: $n(E) = P_7 \cdot P_4$

$P(E) = \frac{P_7 \cdot P_4}{P_{10}} = \frac{7! \cdot 4!}{10!} = \frac{7! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!} = \frac{1}{30}$

Logo, a probalidade de que as 4 pessoas da mesma família fiquem juntas é de $\frac{1}{30}$.

14. O espaço amostral S é formado por todas as combinações das 6 crianças, tomadas 5 a 5. Então: $n(S) = C_{6, 5} = 6$

Se 5 crianças são selecionadas e os 2 meninos devem estar no grupo, devemos escolher 3 das 4 meninas: $n(E) = C_{4, 3} = 4$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

A probabilidade de os 2 meninos estarem no grupo é $\frac{2}{3}$.

15. Considerando o grupo de 7 notas, do qual serão retiradas 2, simultaneamente e ao acaso, o número de elementos do espaço amostral corresponde ao número de combinações de 7, tomadas 2 a 2.

$n(S) = C_{7, 2} = \frac{7!}{2! \cdot (7 - 2)!} = 21$

E: soma dos valores das 2 notas retiradas ser maior que R$ 40,00, ou seja, uma das notas não ser de R$ 10,00

$n(E) = n(S) - C_{4, 2} \Rightarrow n(E) = 21 - 6 = 15$

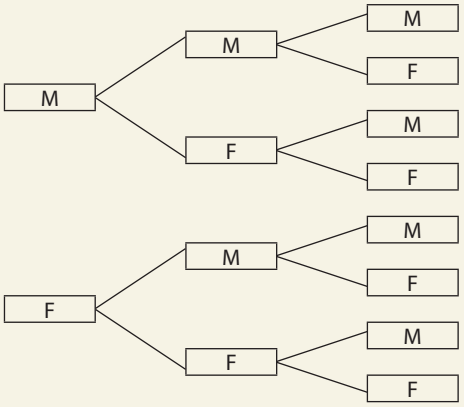
$C_{4, 2}$: combinação das 4 notas de R$ 10,00, tomadas 2 a 2

$P(E) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

16. a. Não, pois o evento elementar "sair cara" tem probabilidade diferente da do evento elementar "sair coroa".

b. O espaço amostral para 3 lançamentos seguidos dessa moeda é $S = \{$ccc, cck, ckc, ckk, kcc, kck, kkc, kkk$\}$.

17. Sendo M para menino e F para menina:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$S = \{$(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)$\}$ e $n(S) = 8$

a. $E_1 = \{$(M, F, F), (F, M, F), (F, F, M)$\} \Rightarrow n(E_1) = 3$

$P(E_1) = \frac{3}{8}$

b. $E_2 = \{(M, M, M)\} \Rightarrow n(E_2) = 1$

$P(E_2) = \frac{1}{8}$

c. $E_3 = S - \{(F, F, F)\} \Rightarrow n(E_3) = 7$

$P(E_3) = \frac{7}{8}$

d. $E_4 = \{(M, M, M), (F, F, F)\} \Rightarrow n(E_4) = 2$

$P(E_4) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

18. Considerando o grupo de 16 bolas, do qual serão retiradas 3, simultaneamente e ao acaso, o número de elementos do espaço amostral corresponde ao número de combinações de 16, tomadas 3 a 3.

$n(S) = C_{16,3} = \frac{16!}{3! \cdot (16-3)!} = 560$

a. E_1: as três bolas retiradas serem amarelas

$n(E_1) = C_{5,3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = 10$

$P(E_1) = \frac{10}{560} = \frac{1}{56}$

b. E_2: as três bolas retiradas serem azuis

$n(E_2) = C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 4$

$P(E_2) = \frac{4}{560} = \frac{1}{140}$

c. E_3: as três bolas retiradas serem vermelhas

$n(E_3) = C_{7,3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = 35$

$P(E_3) = \frac{35}{560} = \frac{1}{16}$

d. E_4: as três bolas retiradas serem da mesma cor

$n(E_4) = n(E_1) + n(E_2) + n(E_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow n(E_4) = 10 + 4 + 35 = 49$

$P(E_4) = \frac{49}{560} = \frac{7}{80}$

19. a. Vamos considerar:

E_1: a carta ser de paus $\Rightarrow n(E_1) = 13$

E_2: a carta ser dama $\Rightarrow n(E_2) = 4$

$E_1 \cap E_2$: a carta ser dama de paus $\Rightarrow$

$\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 1$

Então:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} =$

$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

Logo, a probabilidade de a carta retirada ser de paus ou ser uma dama é $\frac{4}{13}$.

b. Vamos considerar:

E_1: a carta ser de ouros ou de copas $\Rightarrow n(E_1) = 26$

E_2: a carta ser rei $\Rightarrow n(E_2) = 4$

$E_1 \cap E_2$: a carta ser rei de ouros ou de copas $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 2$

Então:

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} =$

$= \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$

Logo, a probabilidade de a carta retirada ser de ouros ou de copas ou ser um rei é $\frac{7}{13}$.

20. Cores primárias: vermelho, amarelo e azul.

Vamos considerar que:

E_1: a bola ser vermelha $\Rightarrow n(E_1) = 4$

E_2: a bola ser azul $\Rightarrow n(E_2) = 2$

$E_1 \cap E_2$: a bola ser vermelha e azul $\Rightarrow$

$\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 0$

Os conjuntos E_1 e E_2 são eventos mutuamente exclusivos:

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Logo, a probabilidade de a bola retirada ter cor primária é $\frac{2}{3}$.

21. Sendo (a, b) um par ordenado em que a representa a face superior no dado vermelho e b, a face superior no dado preto, temos:

$S = \{(1, 1), (1, 2), ..., (6, 6)\} \Rightarrow n(S) = 36$

Vamos considerar:

E_1: sair 3 no dado vermelho $\Rightarrow$

$\Rightarrow n(E_1) = 6$

E_2: sair 2 no dado preto $\Rightarrow n(E_2) = 6$

$E_1 \cap E_2$: sair 3 no dado vermelho e 2 no preto $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 1$

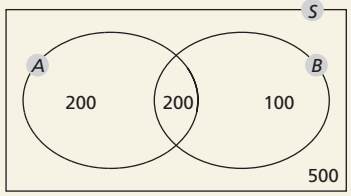
Então: $P(E_1 \cup E_2) =$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

Logo, a probabilidade de sair 3 no dado vermelho ou 2 no preto é $\frac{11}{36}$.

22.



$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{400}{1.000} + \frac{300}{1.000} - \frac{200}{1.000} =$

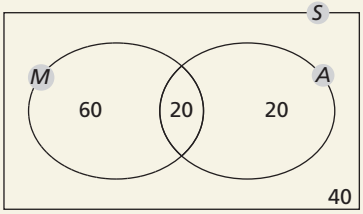
$= \frac{500}{1.000} = \frac{1}{2}$

Logo, a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, ser sócia do clube A ou do clube B é $\frac{1}{2}$.

23. Vamos representar a situação por meio de um diagrama de Venn.

A: estudantes de Artes Cênicas

M: estudantes de Música



a. $n(M) = 80 \Rightarrow P(M) = \frac{80}{140} = \frac{4}{7}$

Logo, a probabilidade de um estudante escolhido ao acaso cursar Música é $\frac{4}{7}$.

b. $n(A) = 40 \Rightarrow P(A) = \frac{40}{140} = \frac{2}{7}$

Logo, a probabilidade de o estudante cursar Artes Cênicas é $\frac{2}{7}$.

c. $n(M \cap A) = 20 \Rightarrow P(M \cap A) = \frac{20}{140} = \frac{1}{7}$

Logo, a probabilidade de o estudante cursar Música e Artes Cênicas é $\frac{1}{7}$.

d. $P(M \cup A) = P(M) + P(A) - P(M \cap A) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(M \cup A) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{7} = \frac{5}{7}$

Logo, a probabilidade de o estudante cursar Música ou Artes Cênicas é $\frac{5}{7}$.

24. Considerando os números de 1 a 36, o número de elementos do espaço amostral S é: $n(S) = 36$

a. E_1: número par $\Rightarrow n(E_1) = 18$

Então: $P(E_1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

Logo, a probabilidade de sair um número par é $\frac{1}{2}$.

b. E_2: número múltiplo de 3 $\Rightarrow$

$\Rightarrow n(E_2) = 12$

Então: $P(E_2) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

Logo, a probabilidade de sair um múltiplo de 3 é $\frac{1}{3}$.

c. E_3: sair um número par e múltiplo de 3, ou seja, sair um múltiplo de 6 $\Rightarrow n(E_3) = 6$

Então: $P(E_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Logo, a probabilidade de sair um número par e múltiplo de 3 é $\frac{1}{6}$.

d. E_1: sair um número par $\Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{2}$

E_2: sair um múltiplo de 3 $\Rightarrow P(E_2) = \frac{1}{3}$

E_3: sair um número par e múltiplo de 3

$E_3 = E_1 \cap E_2 \Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

Então: $P(E_1 \cup E_2) =$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Logo, a probabilidade de sair um número par ou múltiplo de 3 é $\frac{2}{3}$.

e. Os eventos "par ou múltiplo de 3" e "não par nem múltiplo de 3" são complementares.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Então, considerando E_4: não sair par nem múltiplo de 3:

$P(E_4) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Logo, a probabilidade de não sair número par nem múltiplo de 3 é $\frac{1}{3}$.

f. E_5: não sair número par

$P(E_5) = 1 - P(E_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

E_6: não sair um múltiplo de 3

$P(E_6) = 1 - P(E_2) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

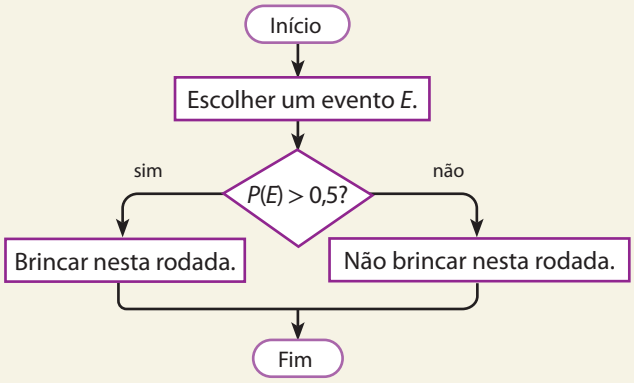
$E_5 \cap E_6 = E_4 \Rightarrow P(E_5 \cap E_6) = \frac{1}{3}$

Então: $P(E_5 \cup E_6) = P(E_5) + P(E_6) - P(E_5 \cap E_6) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(E_5 \cup E_6) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Logo, a probabilidade de não sair um número par ou não sair um múltiplo de 3 é $\frac{5}{6}$.

25. Exemplo de resposta:



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

26. Organizando os dados, temos:

Distribuição dos presentes no auditório por gênero e cor de cabelo

Cor do cabelo / Gênero	Homens	Mulheres	Total
Morenos(as)	16	7	23
Loiros(as)	4	8	12
Total	20	15	35

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. E_1: ser mulher $\Rightarrow n(E_1) = 15$

E_2: ser uma pessoa loira $\Rightarrow n(E_2) = 12$

$E_1 \cap E_2$: ser uma mulher loira $\Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 8$

Então: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = \frac{15}{35} + \frac{12}{35} - \frac{8}{35} = \frac{19}{35}$

Logo, a probabilidade de ser uma mulher ou uma pessoa loira é $\frac{19}{35}$.

b. E_3: ser homem moreno $\Rightarrow n(E_3) = 16$

Então: $P(E_3) = \frac{16}{35}$

Logo, a probabilidade de ser um homem moreno é $\frac{16}{35}$.

c. E_4: ser uma mulher morena $\Rightarrow n(E_4) = 7$

E_5: ser homem $\Rightarrow n(E_5) = 20$

$E_4 \cap E_5 = \varnothing$ (eventos mutuamente exclusivos)

Então: $P(E_4 \cup E_5) = P(E_4) + P(E_5) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(E_4 \cup E_5) = \frac{7}{35} + \frac{20}{35} = \frac{27}{35}$

Logo, a probabilidade de ser uma mulher morena ou um homem é $\frac{27}{35}$.

27. Vamos considerar os eventos:

E_1: João ganhar a corrida $\Rightarrow P(E_1) = 0{,}25$

E_2: Pedro ganhar a corrida $\Rightarrow P(E_2) = 0{,}20$

$E_1 \cap E_2$: João e Pedro ganharem a corrida

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$ (os eventos são mutuamente exclusivos)

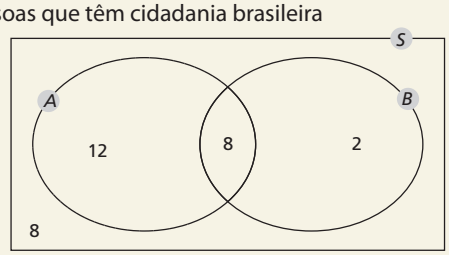
Então: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = 0{,}25 + 0{,}20 = 0{,}45$

Logo, a probabilidade de João ou de Pedro ganhar a corrida é 0,45, isto é, 45%.

28. a. Sejam:

A: pessoas que têm cidadania australiana

B: pessoas que têm cidadania brasileira



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. E_1: a pessoa selecionada não ter nenhuma das duas cidadanias $\Rightarrow n(E_1) = 8$

$P(E_1) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

c. E_2: a pessoa ter apenas uma das cidadanias $\Rightarrow$

$\Rightarrow n(E_2) = 12 + 2 = 14$

$P(E_2) = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

29. E_1: número divisível por 3

$E_1 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \Rightarrow n(E_1) = 6$

E_2: número divisível por 5

$E_2 = \{5, 10, 15, 20\} \Rightarrow n(E_2) = 4$

$E_1 \cap E_2$: número divisível por 3 e por 5

$E_1 \cap E_2 = \{15\} \Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 1$

Então: $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = \frac{6}{20} + \frac{4}{20} - \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$

Portanto, a probabilidade de a ficha apresentar um número divisível por 3 ou divisível por 5 é $\frac{9}{20}$.

30. Sejam c a ocorrência "cara" e k a ocorrência "coroa", o espaço amostral é dado por:

$S = \{(c, c, c), (c, c, k), (c, k, c), (c, k, k), (k, k, k), (k, k, c), (k, c, k), (k, c, c)\} \Rightarrow n(S) = 8$

Considere:

E_1: sair cara nas três moedas

$E_1 = \{(c, c, c)\} \Rightarrow n(E_1) = 1$

E_2: sair coroa nas três moedas

$E_2 = \{(k, k, k)\} \Rightarrow n(E_2) = 1$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$P(E_1 \cup E_2) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Logo, a probabilidade de que ocorram três caras ou três coroas é $\frac{1}{4}$.

31. Total de atendentes: $8 + 12 + 3 = 23$

$n(S) = C_{23, 3} = \frac{23!}{3! \cdot 20!} = 1.771$

Considere:
E_1: os três atendentes trabalham no primeiro turno
E_3: os três atendentes trabalham no terceiro turno
$E_1 \cap E_3 = \varnothing \Rightarrow n(E_1 \cap E_2) = 0$ (os eventos são mutuamente exclusivos)
Então:
$n(E_1 \cup E_3) = n(E_1) + n(E_3) =$
$= C_{8,3} + C_{3,3} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} + 1 = 57 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(E_1 \cup E_3) = \frac{57}{1.771}$

Portanto, a probabilidade de que os 3 atendentes trabalhem no primeiro ou no terceiro turno é $\frac{57}{1.771}$.

32. Resposta pessoal.

33. **a.** A: ser homem $\Rightarrow$
$\Rightarrow n(A) = 210 + 390 = 600 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(A) = \frac{600}{1.000} = 0,6 = 60\%$
Logo, a probabilidade de a pessoa escolhida ao acaso ser homem é 60%.

b. B: ser mulher não especializada $\Rightarrow$
$\Rightarrow n(B) = 260 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(B) = \frac{260}{1.000} = 0,26 = 26\%$
Logo, a probabilidade de ser mulher não especializada é 26%.

c. C: ser não especializado $\Rightarrow$
$\Rightarrow n(C) = 390 + 260 = 650 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(C) = \frac{650}{1.000} = 0,65 = 65\%$
Logo, a probabilidade de ser não especializado é 65%.

d. D: ser homem especializado $\Rightarrow$
$\Rightarrow n(D) = 210 \Rightarrow$
$\Rightarrow P(D) = \frac{210}{1.000} = 0,21 = 21\%$
Logo, a probabilidade de ser homem especializado é 21%.

e. E: ser especializado $\Rightarrow$
$\Rightarrow n(E) = 210 + 140 = 350$
F: ser mulher $\Rightarrow$
$\Rightarrow n(F) = 140 + 260 = 400$
$E \cap F$: ser mulher especializada $\Rightarrow$
$\Rightarrow n(E \cap F) = 140$
$P(F|E) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)} = \frac{140}{350} =$
$= 0,4 = 40\%$
Logo, a probabilidade de, se for especializado, ser mulher é 40%.

34. $P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$

Como os eventos "sair coroa na 1ª vez", "sair coroa na 2ª vez" e "sair coroa na 3ª vez" são independentes, temos:
$P(3 \text{ coroas}) =$
$= P(\text{coroa}) \cdot P(\text{coroa}) \cdot P(\text{coroa}) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(3 \text{ coroas}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
Logo, a probabilidade de sair coroa nas três vezes é $\frac{1}{8}$.

35. Como o experimento é feito com reposição, os eventos são independentes.

a. $P(1ª \text{ ser branca}) = \frac{7}{12}$
$P(2ª \text{ ser verde}) = \frac{5}{12}$
$P(1ª \text{ ser branca e } 2ª \text{ ser verde}) =$
$= \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{35}{144}$
Logo, a probabilidade de a primeira bola ser branca e a segunda bola ser verde é $\frac{35}{144}$.

b. $P(1ª \text{ e } 2ª \text{ serem brancas}) =$
$= \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$
Logo, a probabilidade de as duas bolas serem brancas é $\frac{49}{144}$.

c. Resposta pessoal.

36. Considere os eventos:
C: carta é de copas
P: carta é de paus
E: carta é de espadas

a. $P(4|C) = \frac{P(4 \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$
$P(4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$P(4|C) \neq P(4)$
Portanto, os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de copas" não são independentes.

b. $P(4|P) = \frac{P(4 \cap P)}{P(P)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$
$P(4) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Então: $P(4|P) = P(4)$
$P(P|4) = \frac{P(4 \cap P)}{P(4)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$
$P(P) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Assim: $P(P|4) = P(P)$
Como $P(4|P) = P(4)$ e $P(P|4) = P(P)$, os eventos "escolher um 4" e "escolher uma carta de paus" são independentes.

---

37. Organizando os dados, temos:

Distribuição dos estudantes da escola

Segmento \ Gênero	Meninos (*M*)	Meninas (*F*)	Total
Ensino Médio (*EM*)	400	200	600
Ensino Fundamental (*EF*)	300	400	700
Total	700	600	1.300

Fonte: elaborado para fins didáticos.

a. $P(M|EM) = \frac{P(M \cap EM)}{P(EM)} = \frac{\frac{400}{1.300}}{\frac{600}{1.300}} = \frac{2}{3}$
Logo, a probabilidade de o estudante sorteado ser menino, sabendo que é estudante do Ensino Médio, é $\frac{2}{3}$.

b. $P(EM|M) = \frac{P(EM \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{400}{1.300}}{\frac{700}{1.300}} = \frac{4}{7}$
Logo, a probabilidade de ser estudante do Ensino Médio, sabendo que é menino, é $\frac{4}{7}$.

38. Usando a letra V para representar a retirada de uma bola verde, a letra A, de uma bola azul, e a letra B, de uma bola branca, temos:
$P(V) = \frac{1}{3} \qquad P(A) = \frac{1}{3} \qquad P(B) = \frac{1}{3}$
$P(3 \text{ de cores distintas}) = P(V) \cdot P(A) \cdot P(B) \cdot P_3 \Rightarrow$
(P_3: permutação das 3 cores)
$\Rightarrow P(3 \text{ de cores distintas}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{2}{9}$
Logo, a probabilidade de serem retiradas três bolas de cores distintas é $\frac{2}{9}$.

39. O enunciado está incompleto. Falta a informação sobre reposição da bola após a primeira retirada.
Resposta com reposição de bola:
$P(\text{preta e vermelha}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{2}{9}$
Resposta sem a reposição de bola:
$P(\text{preta e vermelha}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{8}{33}$

40. Resposta pessoal.

41. a. **Distribuição dos 1.000 lançamentos de um dado**

Face	f_i	f_r
1	150	15,0%
2	175	17,5%
3	163	16,3%
4	166	16,6%
5	174	17,4%
6	172	17,2%
Total	1.000	100,0%

b. Supondo que o dado seja honesto, a probabilidade de sair qualquer uma das seis faces é a mesma e igual a $\frac{1}{6}$, ou seja, aproximadamente 16,7%.

Observando a coluna das frequências relativas, podemos perceber que todos os valores estão próximos de 16,7%. Logo, com essa quantidade de lançamentos do dado, podemos considerar a frequência relativa a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado.

42. a. **Distribuição das camisetas vendidas por uma grife em janeiro de 2025**

Cor de camiseta	f_i	f_r
branca	4.200	35%
preta	3.600	30%
azul	1.200	10%
vermelha	1.800	15%
rosa	600	5%
amarela	600	5%
Total	12.000	100%

Fonte: elaborado para fins didáticos.

b. Foram vendidas 7.800 camisetas brancas ou pretas, sendo 4.200 brancas e 3.600 pretas.

c. De acordo com a tabela, a venda de camisetas pretas representa 30% do total de itens vendidos pela loja.

d. A probabilidade da camiseta vendida ser amarela é de 5%, de acordo com a tabela construída.

43. De acordo com a tabela, nesse bairro 15% das pessoas apresentam 3 sintomas e 5% apresentam 4 sintomas, ou seja, 20% das pessoas (15% + 5%) necessitam de acompanhamento médico.

44. De acordo com a tabela, temos:

- Modelo A: 380 carros roubados de 10.000 carros segurados.
  A probabilidade de um carro do modelo A ser roubado é:
  $\frac{380}{10.000} = 0{,}0380 = 3{,}80\%$
- Modelo B: 289 carros roubados de 10.000 carros segurados.
  A probabilidade de um carro do modelo B ser roubado é:
  $\frac{289}{10.000} = 0{,}0289 = 2{,}89\%$
- Modelo C: 254 carros roubados de 10.000 carros segurados.
  A probabilidade de um carro do modelo C ser roubado é:
  $\frac{254}{10.000} = 0{,}0254 = 2{,}54\%$

Para finalizar o capítulo 5

Autoavaliação

Q1. O conjunto dos resultados possíveis é o espaço amostral; qualquer subconjunto do espaço amostral é denominado evento.
Alternativa **c**.

Q2. $S = \{A_1, A_2, A_3, V_1, V_2, V_3, V_4\}$
$n(S) = 7$
Alternativa **a**.

Q3. $E = \{A_c, 1_c, 2_c, 3_c, \ldots, Q_c, K_c\}$
$n(E) = 13$
$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
Alternativa **b**.

Q4. Os números sorteados são pares ou ímpares; logo, o evento A é um evento certo e o evento B é um evento impossível, pois não existem números negativos no espaço amostral.
Alternativa **d**.

Q5. Para obter o número de elementos do espaço amostral, devemos fazer uma combinação de 20 elementos, tomados 5 a 5: $C_{20,5} = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = 15.504$
Alternativa **c**.

Q6. $P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
Alternativa **b**.

Q7. $n(S) = 100$
$M_{10} = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\} \Rightarrow n(M_{10}) = 10$
$M_{15} = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\} \Rightarrow n(M_{15}) = 6$
$M_{10} \cap M_{15} = \{30, 60, 90\} \Rightarrow n(M_{10} \cap M_{15}) = 3$
$P(M_{10} \cup M_{15}) = P(M_{10}) + P(M_{15}) - P(M_{10} \cap M_{15}) =$
$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{3}{100} = \frac{13}{100}$
Alternativa **d**.

Q8. $P(\text{nenhuma usar o sabonete X}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$
Alternativa **b**.

Q9. S: soma 7
$S = \{(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\} \Rightarrow n(S) = 6$
E: ocorrer face 4 em um deles
$E = \{(3, 4), (4, 3)\} \Rightarrow n(E) = 2$
$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
Alternativa **a**.

Q10. Se 8 em cada 10 recomendam a marca X, 2 em cada 10 não a recomendam.

$P(\text{recomendar}) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$P(\text{não recomendar}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Para calcular a probabilidade de que, dos 3 solicitados, nenhum recomende a marca X, temos:

$P(\text{3 não recomendarem}) = \frac{3!}{3! \cdot 0!} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{125}$

Alternativa **b**.

As resoluções/orientações das atividades das seções *Educação midiática – Como mentir com gráficos: 7 detalhes que podem te enganar* e *Pesquisa e ação – Pesquisa estatística*, encontram-se nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

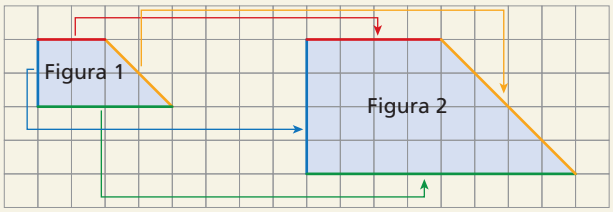
AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA 2

1. Da figura, tem-se: 180 partes no total, sendo 120 verdes, 36 cinza, 16 laranja, 4 vermelhas e 4 roxas. Assim:

- a alternativa **a** é falsa, pois $\frac{4}{16} \neq \frac{16}{4}$;
- a alternativa **b** é falsa, pois $\frac{120}{36} \neq \frac{16}{4}$;
- a alternativa **c** é falsa, pois $\frac{36}{120} \neq \frac{120}{180}$;
- a alternativa **d** é verdadeira, pois $\frac{16}{4} > \frac{36}{16}$;
- a alternativa **e** é falsa, pois $\frac{4}{16} \neq \frac{4}{36}$.

Alternativa **d**.

2. Pode-se verificar que todas as medidas de comprimento dos segmentos da figura 2 correspondem ao dobro das medidas de comprimento dos segmentos da figura 1.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, a figura 2 é uma ampliação da figura 1.

Alternativa **c**.

3.
- Alternativa **a**: falsa. Os ângulos de medida de abertura x e k são ângulos colaterais internos e são suplementares.
- Alternativa **b**: falsa. Os ângulos de medida de abertura y e 120° são ângulos correspondentes e são congruentes.
- Alternativa **c**: verdadeira. Os ângulos de medida de abertura z e 60° são ângulos alternos externos e são congruentes.
- Alternativa **d**: falsa. Os ângulos de medida de abertura z e 120° são ângulos colaterais externos e são suplementares.
- Alternativa **e**: falsa. Os ângulos de medida de abertura 60° e x são ângulos correspondentes e são congruentes.

Alternativa **c**.

4. Como o ângulo $A\hat{V}B$ é um ângulo inscrito, a medida desse ângulo é igual à metade da medida de abertura do ângulo central correspondente. Assim, $\text{med}(A\hat{O}B) = 100°$. A medida em grau de um arco de circunferência é a medida de abertura do ângulo central correspondente a esse arco. Portanto, $\overset{\frown}{AB} = 100°$.

Alternativa **e**.

Capítulo 6 A semelhança e os triângulos

Atividades Propostas

1. Os pares de segmentos paralelos são aqueles que têm seus extremos nos mesmos pares de retas paralelas, ou seja: $\overline{AB}$ e $\overline{AM}$; $\overline{BC}$ e $\overline{MP}$; $\overline{AC}$ e $\overline{AP}$.

2. Espera-se que os estudantes notem que as razões mudam conforme movimentam um dos pontos, mas continuam iguais entre si.

3. a. $\frac{x}{6} = \frac{21}{7} \Rightarrow x = 18$

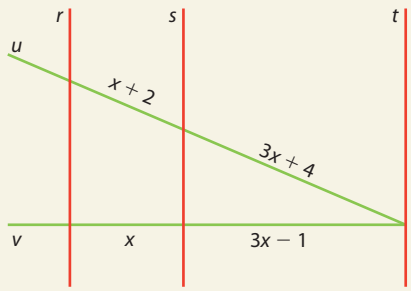
b. $\frac{1{,}5}{1{,}2} = \frac{6{,}25}{x} \Rightarrow x = 5$

c. $\frac{x}{10} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = 15$

d. Apenas com os dados informados, não é possível determinar o valor de x.

4. Exemplo de resposta:

Indicando as medidas de comprimento x e $3x - 1$ para os segmentos, temos:

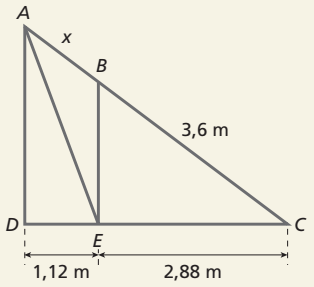


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$\frac{x+2}{x} = \frac{3x+4}{3x-1} \Rightarrow (x+2)(3x-1) = (3x+4)x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 4x \Rightarrow x = 2$

5. Representando a distância de A até B por x, temos:



$\frac{3{,}6}{2{,}88} = \frac{x}{1{,}12} \Rightarrow x = \frac{3{,}6 \cdot 1{,}12}{2{,}88} \Rightarrow x = 1{,}4$

Logo, $AB = 1{,}4$ m.

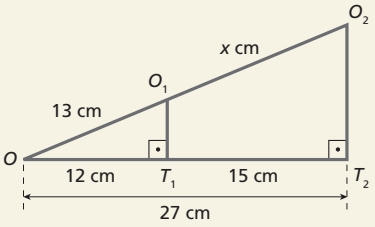
6. Pelo teorema de Tales, as medidas procuradas, em metro, são:

$\frac{20}{22} = \frac{y}{27} \Rightarrow y \simeq 24{,}5$

$\frac{20}{22} = \frac{32}{x} \Rightarrow x = 35{,}2$

Logo, $y \simeq 24{,}5$ m e $x = 35{,}2$ m.

7. No esquema a seguir, x representa a distância entre os centros O_1 e O_2.



Então:

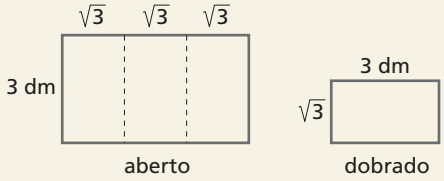
$\frac{x}{15} = \frac{13}{12} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 13}{12} \Rightarrow x = 16{,}25$

Logo, a distância entre os centros O_1 e O_2 é 16,25 cm.

8. a. Não, pois triângulos retângulos podem ter formatos diferentes, apenas com o ângulo reto equivalente sendo congruente.

b. Sim, dois triângulos equiláteros são sempre polígonos semelhantes, pois ambos possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

9.



Razão entre as larguras: $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Razão entre as medidas dos comprimentos: $\frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

Como as razões são iguais, os retângulos são semelhantes, com razão de semelhança $\sqrt{3}$.

10. Espera-se que os estudantes percebam que os ângulos e os lados correspondentes das figuras devem ser congruentes.

11. a. A razão entre as medidas de comprimento das diagonais é igual à razão de semelhança r, pois deve ser igual à dos outros segmentos correspondentes.

b. Como somar as medidas dos quatro lados multiplicados por r é o mesmo que multiplicar por r a soma dos lados, a razão entre as medidas dos perímetros é igual à razão de semelhança r.

c. Como a medida da área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida de seu lado, multiplicando essa medida pela razão de proporção r, a razão também será elevada ao quadrado no cálculo da medida da área. Assim, a razão entre as medidas de área é igual a r^2.

12. a. Como a razão de semelhança é $\frac{1}{100}$, podemos efetuar:

$\frac{3}{x_1} = \frac{1}{100} \Rightarrow x_1 = 300$

$\frac{4}{x_2} = \frac{1}{100} \Rightarrow x_2 = 400$

Logo, as dimensões do quarto são: 300 cm e 400 cm ou 3 m e 4 m.

b. Sendo a a medida da área do quarto da maquete e A a medida da área do quarto da casa:

$a = 3 \cdot 4 = 12$

$A = 300 \cdot 400 = 120.000$

Razão entre as medidas das áreas: $\frac{a}{A} = \frac{12}{120.000} = \frac{1}{10.000}$

13. a. Como os retângulos são semelhantes, temos:

$\frac{1}{3} = \frac{3}{A'B'} \Rightarrow A'B' = 9$

Logo, a medida do comprimento do retângulo maior é 9 cm.

b. A razão de semelhança é $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

c. Medida do perímetro de $ABCD$: 8 cm

Medida do perímetro de $A'B'C'D'$: 24 cm

Logo, a razão entre as medidas dos perímetros é: $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

d. Medida da área de $ABCD$: $(3 \cdot 1)$ cm^2 = 3 cm^2

Medida da área de $A'B'C'D'$: $(9 \cdot 3)$ cm^2 = 27 cm^2

Logo, a razão entre as medidas das áreas é: $\frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

14. Sendo L a medida da largura do terreno, l a medida da largura da oficina, C a medida do comprimento do terreno e c a medida do comprimento da oficina:

a. Sabemos que: $\frac{l}{L} = \frac{c}{C} = \frac{2}{5}$

Razão entre as medidas das áreas: $\frac{l \cdot c}{L \cdot C} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 16\%$

b. Sabemos que a medida da área do terreno é 1.440 m^2 e que a razão entre as medidas das áreas é $\frac{4}{25}$. Assim, sendo x a medida da área da oficina:

$\frac{4}{25} = \frac{x}{1.440} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 1.440}{25} \Rightarrow x = 230{,}4$

Logo, a medida da área da oficina é 230,4 m^2.

15. Espera-se que os estudantes percebam que o retângulo $ABFG$ construído é áureo, pois a razão obtida é uma aproximação do número de ouro: 1,61...

16. a. Pela congruência entre os ângulos, concluímos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Logo:

$\frac{4}{6} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 7{,}5$

$\frac{4}{6} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 9$

b. Temos que $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Logo:

$\frac{2}{x+2} = \frac{x+4}{12} \Rightarrow (x+2)(x+4) = 24 \Rightarrow$

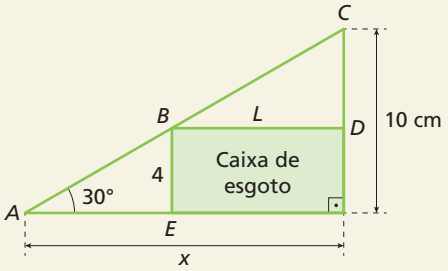
$\Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \Rightarrow x = -8$ (não convém) ou $x = 2$

17. Pela semelhança entre os triângulos ABD e ECD, temos:

$\frac{x}{1{,}7} = \frac{5{,}7 + 2{,}3}{2{,}3} \Rightarrow x \simeq 5{,}9$

Logo, a altura aproximada do poste é 5,9 metros.

18. Com base no esquema do enunciado, marcamos os pontos A, B, C, D e E como ilustrado.



Pelo teorema de Tales, os triângulos ABE e BCD são semelhantes; logo:

$\frac{x-L}{L} = \frac{4}{10-4} \Rightarrow 6 \cdot (x-L) = 4L \Rightarrow 6x = 4L + 6L \Rightarrow x = \frac{10L}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{5L}{3}$

Alternativa **d**.

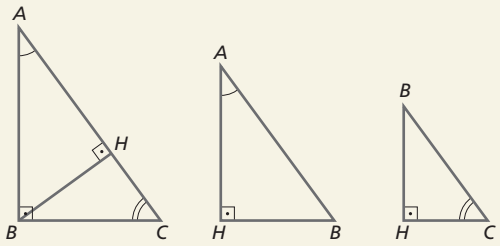
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

19. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$. Logo:

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{x}{21} \Rightarrow x = 14$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{12}{12 + y} \Rightarrow y = 6$

20. Desenhando os triângulos separadamente, temos:



O triângulo *AHB* é semelhante ao triângulo *ABC* por possuir os três ângulos congruentes aos ângulos de *ABC*. O triângulo *BHC* é semelhante ao triângulo *ABC* por possuir os três ângulos congruentes aos ângulos de *ABC*.

Logo, os triângulos *AHB* e *BHC* são semelhantes entre si.

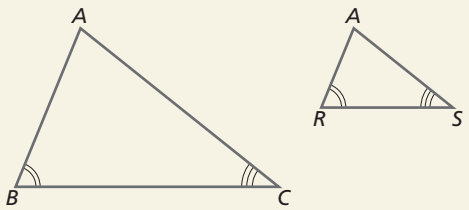
21. a. Como $\overline{RS} \parallel \overline{BC}$, e notando que $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ estão contidos em retas transversais a $\overline{RS}$ e $\overline{BC}$, temos: $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{SC}$

Como $AR = RB$, por R ser o ponto médio de $\overline{AB}$, temos:

$1 = \frac{AS}{SC} \Rightarrow AS = SC$

Logo, S é o ponto médio de $\overline{AC}$.

b. Como $\overline{RS} \parallel \overline{BC}$, temos:

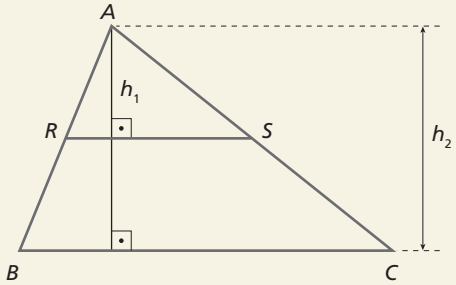


O triângulo *ABC* é semelhante ao triângulo *ARS*, pois tem dois ângulos respectivos congruentes. Assim:

$\frac{AB}{AR} = \frac{BC}{RS} \Rightarrow \frac{2 \cdot AR}{AR} = \frac{BC}{RS} \Rightarrow RS = \frac{BC}{2}$

Logo, *RS* é metade de *BC*.

c. Na figura a seguir, h_1 representa a medida da altura do triângulo *ARS* relativa ao lado $\overline{RS}$, e h_2 representa a medida da altura do triângulo *ABC* relativa ao lado $\overline{BC}$.



A reta que contém as alturas dos triângulos é transversal às retas paralelas $\overleftrightarrow{RS}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; então, temos:

$\frac{AR}{AB} = \frac{h_1}{h_2}$

Como $AB = 2 \cdot AR$, conseguimos:

$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_2 = 2 \cdot h_1$

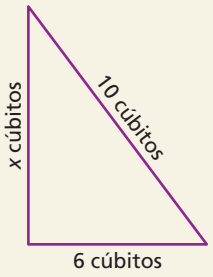
Logo, verificamos que a altura do triângulo *ARS* relativa ao lado $\overline{RS}$ é metade da medida da altura do triângulo *ABC* relativa ao lado $\overline{BC}$.

d. Exemplo de resposta:

A reta que passa pelo ponto médio de um dos lados de um triângulo e é paralela a um dos outros lados forma um triângulo semelhante ao original, com razão de proporção $\frac{1}{2}$.

22. O algoritmo toma a medida dos comprimentos dos dois catetos, calcula a raiz quadrada da soma dos quadrados das duas e devolve esse valor como a medida da hipotenusa; portanto, a relação utilizada foi o teorema de Pitágoras.

23. O triângulo descrito pode ser representado por:

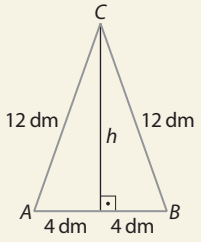


Usando o teorema de Pitágoras, teremos:

$10^2 = 6^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{64} \Rightarrow x = 8$

Logo, a medida de altura que a escada atinge é 8 cúbitos.

24. a. Traçando a altura, obtemos a figura a seguir.



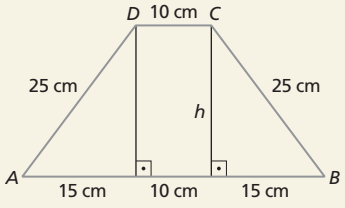
Assim:

$h^2 + 4^2 = 12^2 \Rightarrow h^2 = 144 - 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

Logo, a medida da altura é $8\sqrt{2}$ dm.

b. Traçando as alturas, obtemos a figura a seguir.



Assim:

$h^2 + 15^2 = 25^2 \Rightarrow h^2 = 400 \Rightarrow h = 20$

Assim, a medida da altura é 20 cm.

25. Começando pelo sistema de equações:

$\begin{cases} 3x = 4\sqrt{3} + 2y \\ 2x - \sqrt{3} = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 4\sqrt{3} \\ 2x - 3y = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -6x + 4y = -8\sqrt{3} \\ 6x - 9y = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow -5y = -5\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Substituindo na equação $3x - 2y = 4\sqrt{3}$, temos:

$3x - 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$

Pela ilustração do enunciado, podemos utilizar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ABC:

$(2\sqrt{3})^2 = AB^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 12 = AB^2 + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \pm\sqrt{9} \Rightarrow AB = \pm 3$

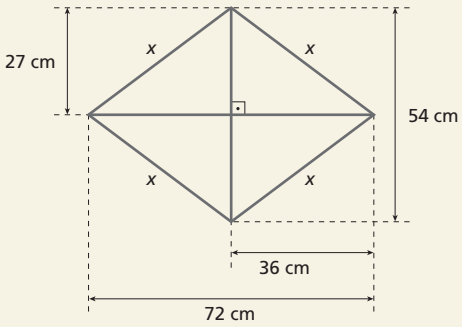
Como se trata de uma medida de comprimento, o valor de AB deve ser positivo; logo, $AB = 3$.

Assim, a medida da área será:

$A = \frac{AB \cdot y}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Alternativa **d**.

26. Como as diagonais de um losango interceptam-se nos seus pontos médios, temos:

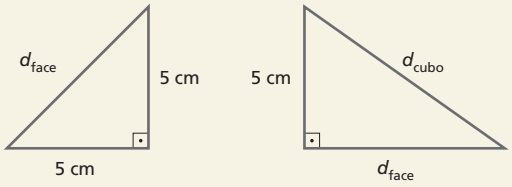


Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 = 36^2 + 27^2 \Rightarrow x^2 = 2.025 \Rightarrow x = 45$

Logo, a medida do perímetro do losango é $4 \cdot 45$, ou seja, 180 cm.

27.



a. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(d_{face})^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow (d_{face})^2 = 50 \Rightarrow d_{face} = 5\sqrt{2}$

Portanto, a medida da diagonal de uma face é $5\sqrt{2}$ cm.

$(d_{cubo})^2 = (d_{face})^2 + 5^2 \Rightarrow (d_{cubo})^2 = (5\sqrt{2})^2 + 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_{cubo})^2 = 75 \Rightarrow d_{cubo} = 5\sqrt{3}$

Logo, a medida da diagonal do cubo é $5\sqrt{3}$ cm.

b. Usando o teorema de Pitágoras para obter a diagonal da face, temos:

$(d_{face})^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d_{face} = \sqrt{2a^2} \Rightarrow d_{face} = a\sqrt{2}$

Logo, pelo teorema de Pitágoras, verificamos que:

$(d_{cubo})^2 = (d_{face})^2 + a^2 \Rightarrow (d_{cubo})^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_{cubo})^2 = 2a^2 + a^2 \Rightarrow d_{cubo} = 3a^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_{cubo} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow d_{cubo} = a\sqrt{3}$

Portanto, as medidas da diagonal e da aresta do cubo se relacionam da seguinte maneira: $d_{cubo} = a\sqrt{3}$

28. Pelo teorema de Pitágoras, temos: $a^2 + b^2 = 10^2$

Temos também a seguinte proporção:

$\frac{a}{b} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4b}{3}$

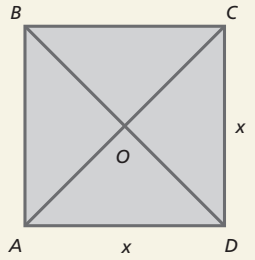
Então:

$\frac{16}{9}b^2 + b^2 = 100 \Rightarrow \frac{25}{9}b^2 = 100 \Rightarrow b = 6$

E, assim, $a = \frac{4 \cdot 6}{3} = 8$.

Logo, $a = 8$ cm e $b = 6$ cm.

29. Seja x a medida de um dos lados do piso. Esquematizando esse piso, temos a figura a seguir.

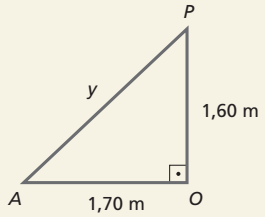


Área do piso = 5,76 m^2 $\Rightarrow x^2 = 5,76 \Rightarrow x = 2,4$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(AC)^2 = x^2 + x^2 \Rightarrow (AC)^2 = 11,52 \Rightarrow AC \simeq 3,4$

Agora, consideramos o $\triangle AOP$, em que AO é metade de AC, $\overline{OP}$ representa o mastro central e y é a medida da haste lateral, como representado no esquema a seguir.



$y^2 = (1,7)^2 + (1,6)^2 \Rightarrow y \simeq 2,33$

Assim, cada haste lateral mede, aproximadamente, 2,33 m.

30. Para descobrir o lado do azulejo de menor medida de área, pode-se utilizar o triângulo retângulo EFH.

Como EFH é um triângulo retângulo, $H\hat{E}F + E\hat{F}H = 90°$. Por outro lado, $C\hat{E}D + D\hat{E}F + H\hat{E}F = 180°$, e $D\hat{E}F$ faz parte de um quadrado, portanto vale 90°, assim temos:

$C\hat{E}D + H\hat{E}F = 90° = H\hat{E}F + E\hat{F}H$

Logo, $C\hat{E}D = E\hat{F}H$.

Assim, como ambos os triângulos EFH e DEC são retângulos, têm hipotenusa igual à medida de lado do azulejo $DEFG$, e os ângulos $C\hat{E}D$ e $E\hat{F}H$ são congruentes, então eles são congruentes.

A medida do lado do triângulo de menor área é igual à medida do comprimento de $\overline{FH}$ que, por congruência de triângulos, é igual à medida do comprimento de $\overline{CE}$.

Como a medida da área de $ABCD$ é 93 cm^2, então a medida de comprimento de $\overline{CD}$ é $\sqrt{93}$ cm. Analogamente, da medida da área de $DEFG$, sabemos que a medida de comprimento de $\overline{DE}$ é $\sqrt{157}$ cm. Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DCE temos:

$(CE)^2 + (CD)^2 = (DE)^2 \Rightarrow (CE)^2 + 93 = 157 \Rightarrow$

$\Rightarrow (CE)^2 = 64 \Rightarrow CE = \pm 8$

Como se trata de uma medida de comprimento, apenas o valor positivo convém, então a medida do lado do azulejo de menor medida de área é 8 cm.

Alternativa **d**.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

31. a. Exemplo de resposta:
6, 8, 10, pois $6^2 + 8^2 = 10^2$
5, 12, 13, pois $5^2 + 12^2 = 13^2$

b. Quando as medidas dos lados de um triângulo formam um terno pitagórico, ele é um triângulo retângulo, pois se torna possível a aplicação do teorema de Pitágoras.

c. Sim; por exemplo, 1, 1 e $\sqrt{2}$ formam um triângulo retângulo, mas não um triângulo pitagórico, já que $\sqrt{2}$ não é um número natural.

32. a. Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:
$(IA)^2 = (PA)^2 + (PI)^2 \Rightarrow 17^2 = 15^2 + (PI)^2 \Rightarrow PI = 8$
Logo, a medida do cateto $\overline{PI}$ é 8 cm.

b. Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos:
$h \cdot 17 = 8 \cdot 15 \Rightarrow h \simeq 7{,}1$
Logo, a medida h dessa altura é, aproximadamente, 7,1 cm.

c. Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos:
$8^2 = 17 \cdot m \Rightarrow m \simeq 3{,}8$
$15^2 = 17 \cdot n \Rightarrow n \simeq 13{,}2$
Logo, as medidas m e n das projeções dos catetos sobre a hipotenusa são, respectiva e aproximadamente, 3,8 cm e 13,2 cm.

33. Resposta pessoal.

Para finalizar o capítulo 6

Autoavaliação

Q1. Pelo teorema de Tales, temos: $\frac{2}{3{,}8} = \frac{x}{5{,}7} \Rightarrow x = 3$

Alternativa **c**.

Q2. Os triângulos *AIM* e *AMO* são semelhantes, pois são triângulos isósceles e retângulos.

Alternativa **a**.

Q3. Todos os triângulos equiláteros são semelhantes, pois têm todos os ângulos internos com abertura medindo 60°.

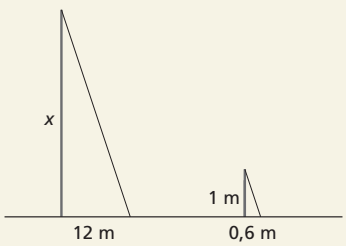
Alternativa **c**.

Q4. Se $AB = 10$ cm e $AM = 35$ cm, concluímos que $BM = 25$ cm. Sendo x a medida de CN, podemos escrever a seguinte relação:
$\frac{10}{15} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = \frac{25 \cdot 15}{10} \Rightarrow x = 37{,}5$

Alternativa **c**.

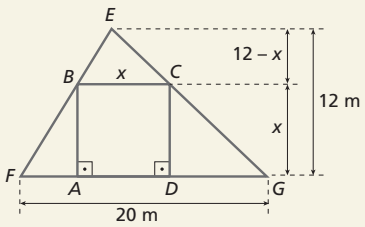
Q5. A figura a seguir representa a situação descrita.
Observe que os triângulos são semelhantes. Então, temos:
$\frac{x}{1} = \frac{12}{0{,}6} \Rightarrow x = 20$

Alternativa **d**.

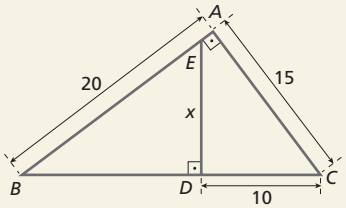


Q6. Sendo x a medida do lado do quadrado, temos:
$\triangle EBC \sim \triangle EFG$
$\frac{12 - x}{12} = \frac{x}{20} \Rightarrow$
$\Rightarrow 240 - 20x = 12x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 7{,}5$

Alternativa **a**.

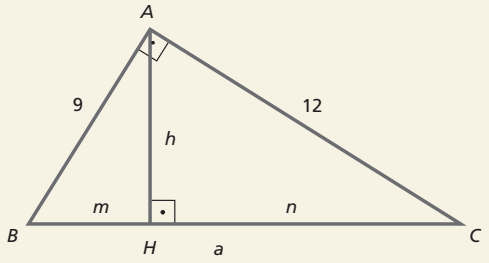


Q7.



O triângulo *ABC* é retângulo em *A*. Então, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:
$(BC)^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow BC = 25$
Portanto, $BD = 15$.
$\triangle BDE \sim \triangle BAC$, pois têm um ângulo reto e um ângulo comum. Assim:
$\frac{x}{15} = \frac{15}{20} \Rightarrow x = 11{,}25$
Alternativa **d**.

Q8. Considere a figura:



- $a^2 = 9^2 + 12^2 \Rightarrow a = 15$
- $h \cdot 15 = 9 \cdot 12 \Rightarrow h = 7{,}2$
- $9^2 = 15 \cdot m \Rightarrow m = 5{,}4$
- $12^2 = 15 \cdot n \Rightarrow n = 9{,}6$

Alternativa **d**.

Capítulo 7 Trigonometria no triângulo retângulo

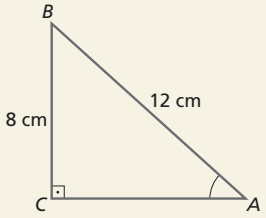
Atividades propostas

1. É verdadeira, pois, como são razões entre medidas de comprimento dos lados de um triângulo, devem ser maiores que zero e, como no denominador dessas razões está a medida da hipotenusa, que é o maior lado de um triângulo retângulo, o valor sempre será um número menor que 1.

2. Espera-se que os estudantes percebam as relações a seguir.
$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$
$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$

3. $\operatorname{sen} \alpha = \frac{12}{13}$; $\cos \alpha = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$

4. Do enunciado, temos:
$(AC)^2 = 12^2 - 8^2 \Rightarrow AC = 4\sqrt{5}$
Assim:
$\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
$\cos \hat{A} = \frac{4\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
$\operatorname{tg} \hat{A} = \frac{8}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$



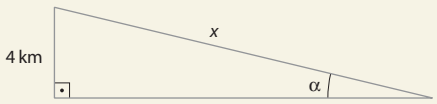
5. $\cos \alpha = \frac{x}{45} \Rightarrow x = 45 \cdot 0{,}8 \Rightarrow x = 36$
Portanto, a medida de comprimento x vale 36 cm.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

6. $\text{tg } 60° = \frac{r}{1.100} \Rightarrow 1{,}7321 \simeq \frac{r}{1.100} \Rightarrow r \simeq 1.905$

Logo, a medida aproximada da largura do rio Amazonas nesse local é 1.905 m.

7. a.



b. $\text{sen } \alpha = \frac{4}{x} \Rightarrow 0{,}1045 = \frac{4}{x} \Rightarrow x \simeq 38{,}3$

Logo, o avião percorreu aproximadamente 38,3 km até atingir a medida de altura de 4 km.

8. Resposta pessoal.

9. $\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = \left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{225}{289} + \frac{64}{289} = \frac{289}{289} = 1$

10. Sabemos que, se α e β são complementares, temos $\text{sen } \alpha = \cos \beta$.

Além disso, $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$. Assim:

$\text{tg } 20° = \frac{0{,}3420}{0{,}9397} \simeq 0{,}3639$

$\text{sen } 70° = \cos 20° \simeq 0{,}9397$

$\cos 70° = \text{sen } 20° \simeq 0{,}3420$

$\text{tg } 70° = \frac{0{,}9397}{0{,}3420} \simeq 2{,}7477$

$\cos 40° = \frac{0{,}6428}{0{,}8391} \simeq 0{,}7661$

$\text{sen } 50° = \cos 40° \simeq 0{,}7661$

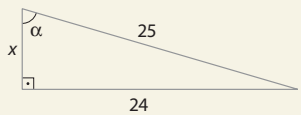
$\cos 50° = \text{sen } 40° \simeq 0{,}6428$

$\text{tg } 50° = \frac{0{,}7661}{0{,}6428} \simeq 1{,}1918$

Seno, cosseno e tangente de 20º, 70º, 50º e 40º

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
20°	0,3420	0,9397	**0,3639**
70°	**0,9397**	**0,3420**	**2,7477**
50°	**0,7661**	**0,6428**	**1,1918**
40°	0,6428	**0,7661**	0,8391

11. a. Como $\text{sen } \alpha = \frac{24}{25}$, podemos desenhar a figura representada.



$x^2 + 24^2 = 25^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

Logo, $\cos \alpha = \frac{7}{25}$ e $\text{tg } \alpha = \frac{24}{7}$.

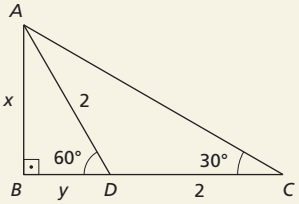
b. $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{24}{25}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{576}{625} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{49}{625} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{7}{25}$

Temos, então:

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{24}{7}$

12. Como o triângulo ADC é isósceles, temos $AD = DC = 2$, em que AD é a hipotenusa do triângulo ABD, como apresentado no esquema. Portanto:



$\text{sen } 60° = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 1$

13. a. $\cos 60° = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5$

$\text{sen } 60° = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 5\sqrt{3}$

Logo, $x = 5$ cm e $y = 5\sqrt{3}$ cm.

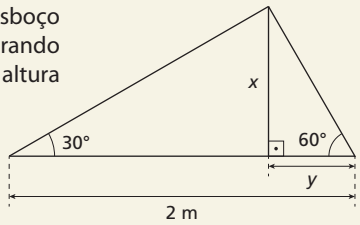
b. Pelo teorema de Pitágoras: $x^2 + 4^2 = 8^2 \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

Assim, $x = 4\sqrt{3}$ cm.

$\text{sen } y = \frac{4}{8} \Rightarrow \text{sen } y = \frac{1}{2}$

Consultando a tabela de razões trigonométricas, concluímos que $y = 30°$.

14. a. Podemos fazer um esboço da situação, considerando que x é a medida da altura da coluna.



Como temos dois triângulos retângulos, podemos fazer:

$\text{tg } 30° = \frac{x}{2 - y}$ e $\text{tg } 60° = \frac{x}{y}$

Como $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$, teremos:

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{2 - y} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3} \cdot (2 - y)}{3}$ (I)

$\sqrt{3} = \frac{x}{y} \Rightarrow x = \sqrt{3} \cdot y$ (II)

Igualando (I) e (II):

$\frac{\sqrt{3} \cdot (2 - y)}{3} = \sqrt{3} \cdot y \Rightarrow 2 - y = 3y \Rightarrow 2 = 4 \cdot y \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

Substituindo o valor encontrado em (II):

$x = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Logo, a medida da altura da coluna é $\frac{\sqrt{3}}{2}$ metros, e a medida da distância da tábua à coluna é $\frac{1}{2}$ metro.

b. Entre as informações do enunciado, alguns dos dados não necessários foram o tipo da madeira, o valor do serviço e o preço das tábuas.

15. a. $\text{sen } 30° = \frac{5}{c} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{c} \Rightarrow c = 10$

Logo, o cabo de aço mede 10 m de comprimento.

b. $\text{tg } 30° = \frac{5}{h} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{h} \Rightarrow h = \frac{15}{\sqrt{3}}$

Considerando $\sqrt{3} \simeq 1{,}73$, obtemos $h \simeq 8{,}7$.

Assim, a medida da altura do poste é, aproximadamente, 8,7 m.

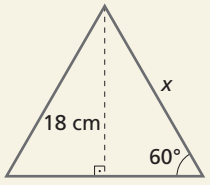
16. $\text{sen } 30° = \frac{h}{3} \Rightarrow h = 3 \cdot 0{,}5 \Rightarrow h = 1{,}5$

Portanto, a altura h mede 1,5 m.

17. $\text{sen } 60° = \frac{18}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18}{x} \Rightarrow$

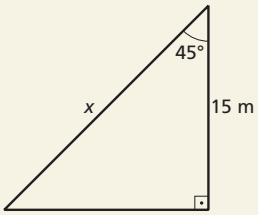
$\Rightarrow x = \frac{36}{\sqrt{3}} \Rightarrow x \simeq 20{,}8$

Logo, a medida de comprimento de cada lado desse triângulo equilátero é, aproximadamente, 20,8 cm.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

18. Do enunciado, temos:



Para cada cabo de medida de comprimento x, temos:

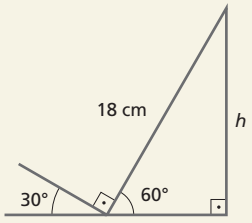
$\cos 45° = \frac{15}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{x} \Rightarrow x \simeq 21{,}2$

Então, para um cabo, foram usados aproximadamente 21,2 m de cabo de aço.

Para prender a antena, foram necessários quatro cabos: $4x \simeq 4 \cdot 21{,}2 \simeq 84{,}8$

Portanto, foram usados cerca de 85 m de cabo de aço.

19. Como as medidas dos três ângulos formados pelo vértice do bloco que está encostado no chão somam 180º, temos:



$\text{sen } 60° = \frac{h}{18} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{18} \Rightarrow h \simeq 15{,}6$

Portanto, h é, aproximadamente, 15,6 cm.

20. Como o esquema do enunciado mostra que a medida de comprimento do lado $\overline{PR}$ do triângulo PER é 12 cm e a medida de abertura do ângulo $P\hat{E}R$ é 45°, então:

$\text{tg } 45° = \frac{12}{EP} \Rightarrow 1 = \frac{12}{EP} \Rightarrow EP = 12$

Ainda pela figura, a abertura do ângulo $M\hat{E}P$ do triângulo EPM mede 30°; como a medida de comprimento do lado $\overline{EP}$ é 12 cm, temos:

$\text{tg } 30° = \frac{MP}{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{MP}{12} \Rightarrow MP = 4\sqrt{3}$

Assim, calculamos a medida da área do triângulo MER, em cm^2, como:

$A = \frac{(4\sqrt{3} + 12) \cdot 12}{2} = (4\sqrt{3} + 12) \cdot 6 =$

$= 4 \cdot (\sqrt{3} + 3) \cdot 6 = 24 \cdot (\sqrt{3} + 3)$

Alternativa **c**.

21. a. $\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}707$

b. $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0{,}866$

c. $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}577$

22. Resposta pessoal.

23. Para valer a igualdade $\text{sen } x = \cos y$, devemos ter $x + y = 90°$, isto é, x e y devem ser medidas de abertura de ângulos complementares.

24. Espera-se que os estudantes percebam que as medidas de abertura dos ângulos agudos correspondentes são aproximadamente iguais.

25. Na tabela trigonométrica, não há o ângulo de abertura medindo 20,5°. No entanto, espera-se que os estudantes observem os valores tg 20° = 0,3640 e tg 21° = 0,3839 e, assim, concluam que tg 20,5° está entre esses valores, ou seja, é aproximadamente 0,37.

26. Espera-se que os estudantes procurem na coluna dos senos da tabela trigonométrica o valor mais próximo de 0,4533, valor calculado como sen α. Nela eles podem encontrar 0,4540, que é o seno de 27°, concluindo assim que $\alpha \simeq 27°$.

27. a. O algoritmo apresentado pretende calcular o valor do cosseno de um ângulo utilizando uma calculadora.

b. Exemplo de resposta:

Passo 1. Ative a função "grau" da calculadora.

Passo 2. Digite a medida da abertura do ângulo em grau.

Passo 3. Pressione a tecla da função cosseno "cos".

Passo 4. Pressione a tecla "igual".

28. $\text{sen } 20° = \frac{h}{3} \Rightarrow h \simeq 3 \cdot 0{,}342 \Rightarrow h \simeq 1{,}026$

Logo, após percorrer 3 km, o avião estará a aproximadamente 1,026 km de medida de altura.

29. a. $\cos 89{,}83° = \frac{TL}{TS}$

Em uma calculadora científica, obtemos $\cos 89{,}83° \simeq \simeq 0{,}0030$. Assim:

$0{,}0030 \simeq \frac{384.000}{TS} \Rightarrow TS \simeq \frac{384.000}{0{,}0030} \Rightarrow TS \simeq 128.000.000$

Portanto: $TS \simeq 128.000.000$ km

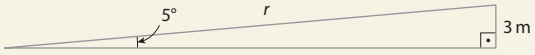
b. $\frac{TS}{TL} = \frac{128.000.000}{384.000} \simeq 333$

30. a. $\text{tg } \alpha = \frac{1}{12} \Rightarrow \text{tg } \alpha \simeq 0{,}0833$

Para obter a medida α na calculadora científica, digitamos 0,0833 e acionamos a tecla $\tan^{-1}$, obtendo 4,76. Aproximando para o inteiro mais próximo, temos $\alpha \simeq 5$. Esse valor também pode ser obtido na tabela trigonométrica.

Logo, a abertura do ângulo formado entre a rampa e a horizontal, quando a inclinação é máxima, mede aproximadamente 5°.

b. Para a inclinação máxima, temos o triângulo:



Sendo r o comprimento da rampa construída, temos:

$\text{sen } 5° = \frac{3}{r} \Rightarrow r \simeq \frac{3}{0{,}087} \Rightarrow r \simeq 34{,}5$

Logo, para um desnível de 3 m entre dois andares, devem ser construídos, aproximadamente, 34,5 m de rampa.

c. Resposta pessoal.

31. a. Exemplo de resposta:

Tomando o valor de tangente de 25° do quadro **Razões trigonométricas**, podemos elaborar o seguinte algoritmo:

SCRATCH - MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY. CANBRIDGE, EUA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. Espera-se que os estudantes percebam que basta mudar o valor da variável tangente para o valor encontrado no quadro **Razões trigonométricas** para a tangente de 35°. Assim, o algoritmo calcularia $x \simeq 0{,}7002 \cdot 18 = 12{,}6036$ e informaria o valor de saída aproximado como 12,60.

As resoluções/orientações das atividades da seção *Trabalho e juventudes – Inclusão no mercado de trabalho: lei de cotas para pessoas com deficiência completa 29 anos* encontram-se nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

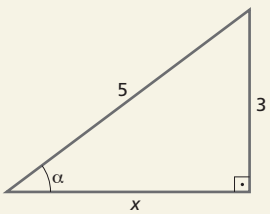
Para finalizar o capítulo 7

Autoavaliação

Q1. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

Alternativa **c**.

Q2. $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}6 \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$\cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$

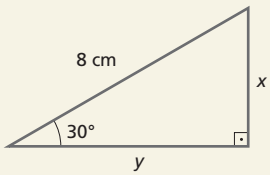
Alternativa **b**.

Q3. $\operatorname{sen} 30° = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4$

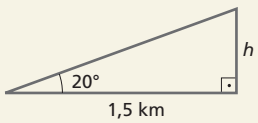
$\cos 30° = \frac{y}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 4\sqrt{3} \Rightarrow y \simeq 6{,}93$

Alternativa **a**.



Q4. Esquematizando a situação, temos:



Lembrando que 1,5 km = 1.500 m, temos:

$\operatorname{tg} 20° = \frac{h}{1.500} \Rightarrow 0{,}3640 = \frac{h}{1.500} \Rightarrow$

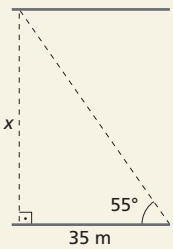
$\Rightarrow h = 546$

O avião estará a uma altura aproximada de 546 m.

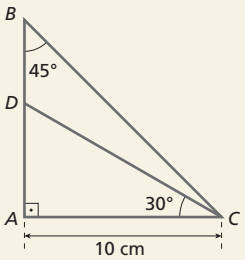
Q5. Observe o esquema da situação.

$\operatorname{tg} 55° = \frac{x}{35} \Rightarrow x = 35 \cdot 1{,}4281 \simeq 50$

Nesse local, a medida da largura do rio é, aproximadamente, 50 m.



Q6. Dada a figura, temos:



$\operatorname{tg} 30° = \frac{AD}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AD}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

O $\triangle ABC$ é retângulo isósceles; então, $AB = 10$. Logo:

$BD = AB - AD = 10 - \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = \frac{10(3 - \sqrt{3})}{3}$

Alternativa **a**.

Q7. $\operatorname{sen} 6° = \frac{4\text{ m}}{AC} \Rightarrow AC \simeq \frac{4\text{ m}}{0{,}1045} \simeq 38{,}3\text{ m}$

$d \simeq (1{,}5 + 38{,}3)\text{ m} \Rightarrow d \simeq 39{,}8\text{ m}$

Alternativa **d**.

Capítulo 8 Ciclo trigonométrico e Trigonometria em um triângulo qualquer

Atividades propostas

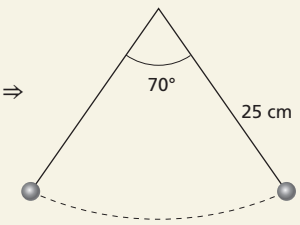
1. Espera-se que os estudantes percebam que a razão é constante e aproximadamente igual a 3,14.

2.

medida (grau)		comprimento (cm)
360	———	$2\pi r$
70	———	x

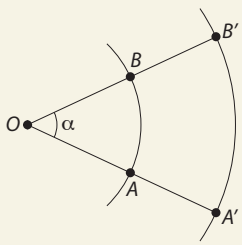
$\Rightarrow x = \frac{70 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 25}{360} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 30{,}5$



Logo, o pêndulo descreve um arco de aproximadamente 30,5 cm.

3.



a. Sim, pois a medida angular do arco depende apenas da medida do ângulo central; logo, ambas são iguais a α.

b. Não, pois as medidas de comprimento dos arcos dependem da medida de comprimento do raio da circunferência que contém cada um deles; logo, a medida de comprimento do arco $\overset{\frown}{A'B'}$ é maior que a medida de comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$.

4. a.

medida angular do arco (em rad)		medida angular do arco (em grau)	
π	———	180	$\Rightarrow x = 225°$
$\frac{5\pi}{4}$	———	x	

b.

medida angular do arco (em rad)		medida angular do arco (em grau)	
π	———	180	$\Rightarrow x = 210°$
$\frac{7\pi}{6}$	———	x	

c.

medida angular do arco (em rad)		medida angular do arco (em grau)	
π	———	180	$\Rightarrow x = 90°$
$\frac{\pi}{2}$	———	x	

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

5. a.

medida angular do arco (em grau)		medida angular do arco (em rad)
180	———	π
30	———	x

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$ rad

b.

medida angular do arco (em grau)		medida angular do arco (em rad)
180	———	π
60	———	x

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ rad

c.

medida angular do arco (em grau)		medida angular do arco (em rad)
180	———	π
120	———	x

$\Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ rad

d.

medida angular do arco (em grau)		medida angular do arco (em rad)
180	———	π
150	———	x

$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$ rad

e.

medida angular do arco (em grau)		medida angular do arco (em rad)
180	———	π
210	———	x

$\Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$ rad

f.

medida angular do arco (em grau)		medida angular do arco (em rad)
180	———	π
240	———	x

$\Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$ rad

6.

circunferência		medida angular do arco (em grau)
1	———	360
$\frac{2}{5}$	———	x

$\Rightarrow x = 144°$

circunferência		medida angular do arco (em rad)
1	———	2π
$\frac{2}{5}$	———	x

$\Rightarrow x = \frac{4\pi}{5}$ rad

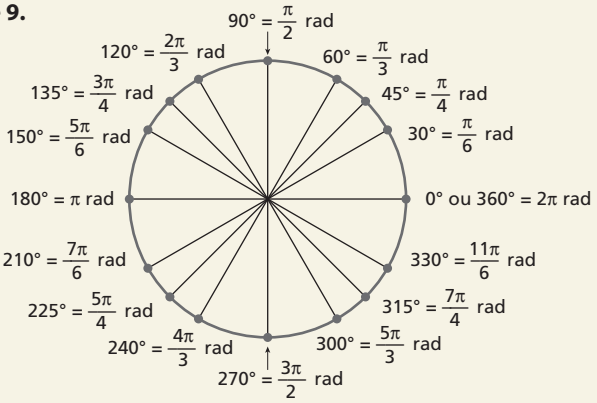
7. a. O relógio é dividido em 12 horas.
Então, a cada hora, o ponteiro percorre um ângulo de:
$360° : 12 = 30°$
Das 13 h às 17 h, temos 4 horas. Logo, o ponteiro das horas percorrerá: $4 \cdot 30° = 120°$
Em radiano, essa medida é equivalente a: $4 \cdot \frac{2\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$
Portanto, das 13 h às 17 h, o ponteiro percorre 120° ou $\frac{2\pi}{3}$ rad.

b. Sendo x a medida da distância percorrida das 13 h às 17 h, calculamos:

medida angular do arco (em grau)		medida do comprimento (em cm)
360	———	$2\pi \cdot 7$
120	———	x

$x = \frac{120 \cdot 2\pi \cdot 7}{360} \simeq \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7}{3} \simeq 14{,}65$
Logo, a extremidade do ponteiro percorre aproximadamente 14,65 cm.

8 e **9.**



10. a. a: $180° - 20° = 160°$
b: $180° + 20° = 200°$
c: $360° - 20° = 340°$

b. a: $2\pi \text{ rad} - \frac{9\pi}{5} \text{ rad} = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$
b: $\pi \text{ rad} - \frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad}$
c: $\pi \text{ rad} + \frac{\pi}{5} \text{ rad} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$

11. a. $250° - 180° = 70°$

b. $2\pi \text{ rad} - \frac{11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{12\pi - 11\pi}{6} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$

12. a. Observando o ciclo trigonométrico, percebe-se que qualquer arco α no 1º quadrante terá $\text{sen } \alpha > 0$ e $\cos \alpha > 0$.

b. Qualquer arco α no 2º quadrante terá $\text{sen } \alpha > 0$ e $\cos \alpha < 0$.

c. Qualquer arco α no 3º quadrante terá $\text{sen } \alpha < 0$ e $\cos \alpha < 0$.

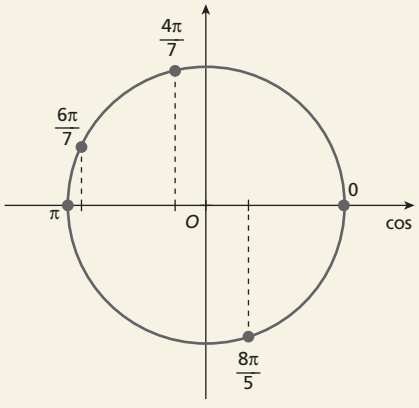
13. a. Como $\text{sen } 215° < 0$ e $\text{sen } 280° < 0$, temos:
$\text{sen } 215° \cdot \text{sen } 280° > 0$

b. $\left.\begin{matrix}\cos 50° > 0 \\ \cos 325° > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\cos 50° + \cos 325°) > 0$ (I)

$\left.\begin{matrix}\cos 215° < 0 \\ \cos 145° < 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow (\cos 215° + \cos 145°) < 0$ (II)

De (I) e (II), temos:
$(\cos 50° + \cos 325°) \cdot (\cos 215° + \cos 145°) < 0$

14. Representando no ciclo trigonométrico, temos:



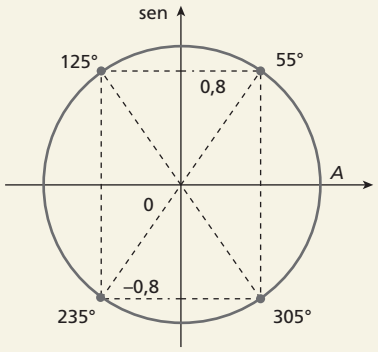
Observando o eixo dos cossenos, concluímos que:
$\cos \pi < \cos \frac{6\pi}{7} < \cos \frac{4\pi}{7} < \cos \frac{8\pi}{5} < \cos 0$

15. a. $\text{sen } 125° \simeq 0{,}8$

b. $\text{sen } 235° \simeq -0{,}8$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

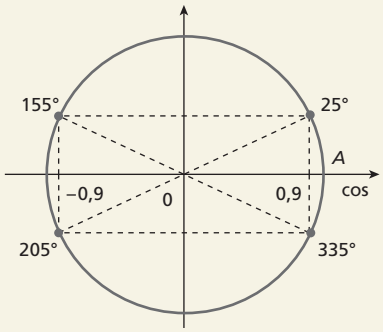
c. sen 305° ≃ −0,8



16. a. cos 155° ≃ −0,9

b. cos 205° ≃ −0,9

c. cos 335° ≃ 0,9



17. a. sen α = −sen 27° ≃ −0,45

b. sen β = −sen 130° = −sen 50° ≃ −0,77

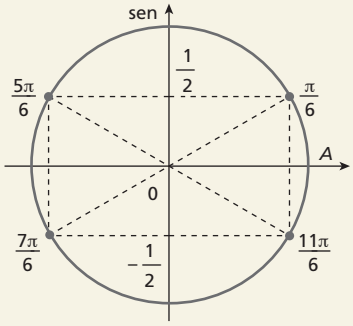
c. sen θ = −sen 260° = −(−sen 80°) ≃ 0,98

18. cos α = −cos 48° ≃ −0,67

cos β = −cos 110° = −(−cos 70°) ≃ 0,34

cos θ = −cos 260° = −(−cos 80°) ≃ 0,17

19.



$\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\ \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\ \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

$\text{sen}\ \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

20. a. $\text{sen}\ 2\pi + \cos 2\pi + \text{sen}\ \pi + \cos \pi = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$

b. $\text{sen}\ \frac{\pi}{2} - \text{sen}\ \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2} = 1 - (-1) + 0 - 0 = 2$

c. $\text{sen}\ \frac{2\pi}{3} - \text{sen}\ \frac{11\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{6} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

d. $\frac{\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{4\pi}{3}}{2 \cdot \text{sen}\ \frac{5\pi}{6}} = \frac{0 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

21. Com a calculadora de um celular ou com uma calculadora científica, obtemos:

a. $\text{sen}\ \frac{\pi}{9} \simeq 0{,}342$

b. $\text{sen}\ \frac{2\pi}{9} \simeq 0{,}643$

c. $\text{sen}\ \frac{3\pi}{9} \simeq 0{,}866$

22. a. $2 \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{9} \simeq 2 \cdot 0{,}342 = 0{,}684$

$\text{sen}\ \frac{2\pi}{9} \simeq 0{,}643$

Logo: $2 \cdot \text{sen}\ \frac{\pi}{9} \neq \text{sen}\ \frac{2\pi}{9}$

Portanto, a igualdade é falsa.

b. $\text{sen}\ \frac{\pi}{9} + \text{sen}\ \frac{2\pi}{9} \simeq 0{,}342 + 0{,}643 = 0{,}985$

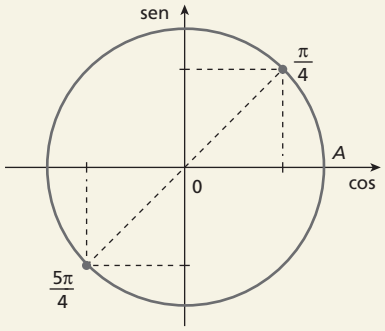
$\text{sen}\ \frac{3\pi}{9} = 0{,}866$

Logo: $\text{sen}\ \frac{\pi}{9} + \text{sen}\ \frac{2\pi}{9} \neq \text{sen}\ \frac{3\pi}{9}$

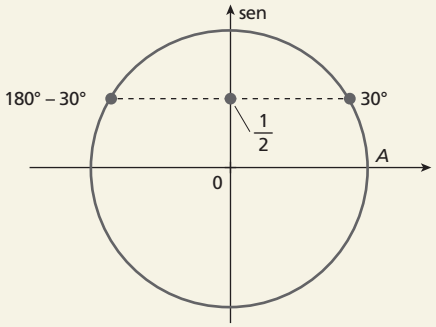
Portanto, a igualdade é falsa.

23. Nos 1º e 3º quadrantes, temos seno e cosseno com mesmo sinal.

- No 1º quadrante: $\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- No 3º quadrante: $\text{sen}\ \frac{5\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

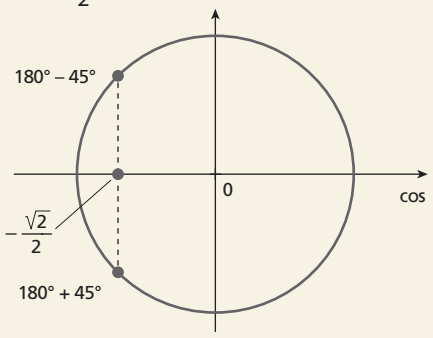


24. a. Observando o ciclo trigonométrico e lembrando que $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$, concluímos que há dois arcos que satisfazem a equação:



$\text{sen}\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30°$ ou $x = 150°$

b.



$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 135°$ ou $x = 225°$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

25. No ciclo trigonométrico, percebe-se que a tangente será positiva para arcos nos 1º e 3º quadrantes; por outro lado, será negativa para arcos nos 2º e 4º quadrantes.

26. a. $\left.\begin{array}{l} \text{tg } 40° > 0 \\ \text{tg } 220° > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{tg } 40° + \text{tg } 220°) > 0$ (I)

$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 315° < 0 \\ \text{tg } 165° < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\text{tg } 315° + \text{tg } 165°) < 0$ (II)

De (I) e (II), vem:

$(\text{tg } 40° + \text{tg } 220°) \cdot (\text{tg } 315° + \text{tg } 165°) < 0$

b. $\left.\begin{array}{l} \text{tg } \frac{4\pi}{6} = \text{tg } \frac{2\pi}{3} < 0 \\ \text{tg } \frac{5\pi}{4} = \text{tg } \frac{\pi}{4} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot \text{tg } \frac{4\pi}{6} \cdot \text{tg } \frac{5\pi}{4} < 0$

Logo: $\frac{2 \cdot \text{tg } \frac{4\pi}{6} \cdot \text{tg } \frac{5\pi}{4}}{-2} > 0$

27. $\text{tg } \alpha = \text{tg } 42° \simeq 0{,}90$

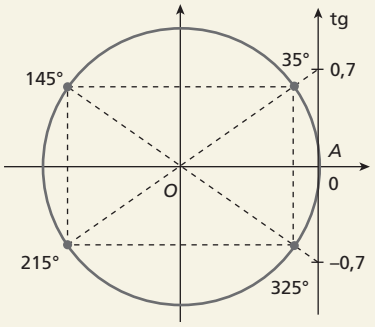
$\text{tg } \beta = \text{tg } 160° = -\text{tg } 20° \simeq -0{,}36$

$\text{tg } \theta = \text{tg } 260° = \text{tg } 80° \simeq 5{,}67$

28. a. $\text{tg } 145° \simeq -0{,}7$

b. $\text{tg } 215° \simeq 0{,}7$

c. $\text{tg } 325° \simeq -0{,}7$



29. Podemos escolher, por exemplo, $\alpha = 20°$; assim, $\text{tg } 20° \simeq$ $\simeq 0{,}364$ e $\text{tg } 40° \simeq 0{,}839$. Como $0{,}839 \neq 0{,}728$, verificamos que $\text{tg } 40° \neq 2 \cdot \text{tg } 20°$. Portanto, não podemos afirmar que $\text{tg } 2\alpha = 2 \cdot \text{tg } \alpha$.

30. a. $\text{tg } \alpha = \frac{0{,}55}{0{,}84}$ é menor que 1.

b. $\text{tg } \alpha = \frac{0{,}55}{0{,}84} \simeq 0{,}65$ é menor que 1.

c. $\cos \alpha > 0$ e $\text{sen } \alpha > 0$; então, α pertence ao 1º quadrante.

d. $(\pi - \alpha) \in$ 2º quadrante $\Rightarrow \text{tg } (\pi - \alpha) < 0$

$(\pi + \alpha) \in$ 3º quadrante $\Rightarrow \text{tg } (\pi + \alpha) > 0$

$(2\pi - \alpha) \in$ 4º quadrante $\Rightarrow \text{tg } (2\pi - \alpha) < 0$

e. $\text{tg } (\pi - \alpha) \simeq -0{,}65$

$\text{tg } (\pi + \alpha) \simeq 0{,}65$

$\text{tg } (2\pi - \alpha) \simeq -0{,}65$

31. $\cos^2 x + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{12}{13}$

Como x pertence ao 1º quadrante, temos $\cos x > 0$.

Logo, $\cos x = \frac{12}{13}$.

32. a. $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow (0{,}8)^2 + \text{sen}^2 x = 1 \Rightarrow \text{sen } x = \pm 0{,}6$

Como x pertence ao 4º quadrante, temos $\text{sen } x < 0$.

Logo, $\text{sen } x = -0{,}6$.

b. $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{-0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \text{tg } x = -0{,}75$

33. a. $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3 \cdot \text{sen } \alpha}{4}$

Como $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, temos:

$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{3 \cdot \text{sen } \alpha}{4}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \frac{9 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{16} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{25 \cdot \text{sen}^2 \alpha}{16} = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \pm\frac{4}{5}$

Como α pertence ao 3º quadrante, temos:

$\text{sen } \alpha = -\frac{4}{5} = -0{,}8$

b. $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{-\frac{4}{5}}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -0{,}6$

34. Para um arco de medida angular α, a relação fundamental da Trigonometria sempre é válida: $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. Como $(0{,}8)^2 + (0{,}4)^2 = 0{,}64 + 0{,}16 = 0{,}8$, não são possíveis as igualdades $\text{sen } \alpha = 0{,}8$ e $\cos \alpha = 0{,}4$.

35. a. $180° - 80° - 30° = 70°$

$\frac{6}{\text{sen } 70°} = \frac{y}{\text{sen } 30°} = \frac{x}{\text{sen } 80°}$

$x = \frac{6 \cdot \text{sen } 80°}{\text{sen } 70°} \simeq \frac{6 \cdot 0{,}98}{0{,}94} \Rightarrow x \simeq 6{,}3$

$y = \frac{6 \cdot \text{sen } 30°}{\text{sen } 70°} \simeq \frac{6 \cdot 0{,}5}{0{,}94} \Rightarrow y \simeq 3{,}2$

Logo, $x \simeq 6{,}3$ cm e $y \simeq 3{,}2$ cm.

b. $\frac{4}{\text{sen } 60°} = \frac{3}{\text{sen } x} \Rightarrow \text{sen } x \simeq \frac{3 \cdot 0{,}87}{4} \Rightarrow \text{sen } x \simeq 0{,}6525$

Pela tabela dada, obtemos: $x \simeq 40°$

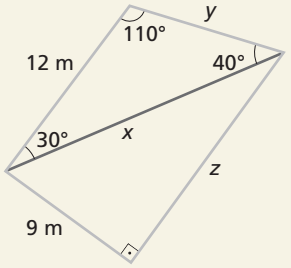
$180° - 60° - 40° = 80°$

Assim: $\frac{4}{\text{sen } 60°} \simeq \frac{y}{\text{sen } 80°}$

$y \simeq \frac{4 \cdot \text{sen } 80°}{\text{sen } 60°} \simeq \frac{4 \cdot 0{,}98}{0{,}87} \simeq 4{,}5$

Logo, $x \simeq 40°$ e $y \simeq 4{,}5$ m.

36. a. Esquematizando:



Aplicando a lei dos senos no triângulo obtusângulo, temos:

$\frac{x}{\text{sen } 110°} = \frac{12}{\text{sen } 40°} \Rightarrow x \simeq \frac{12 \cdot 0{,}94}{0{,}64} \Rightarrow x \simeq 17{,}6$

Logo, a medida da distância entre a casa e a entrada é, aproximadamente, 17,6 metros.

b. Aplicando a lei dos senos, vamos descobrir a medida da distância entre a entrada e o pomar:

$\frac{17{,}6}{\text{sen } 110°} = \frac{y}{\text{sen } 30°}$

$y \simeq \frac{17{,}6 \cdot 0{,}5}{0{,}94} \simeq 9{,}4$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos:

$z^2 = (17{,}6)^2 - 9^2 \Rightarrow z \simeq 15{,}1$

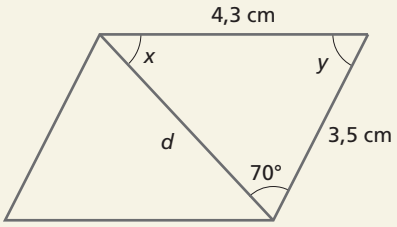
Caminho 1: $12 + 9{,}4 \simeq 21{,}4$

Caminho 2: $9 + 15{,}1 \simeq 24{,}1$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, o caminho 1 é o mais curto.

37.



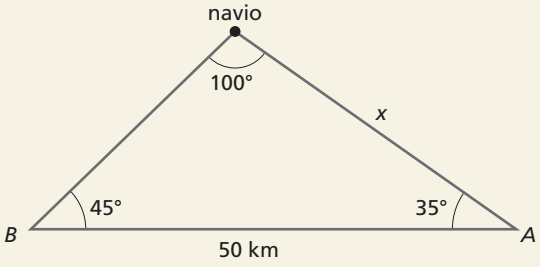
$\frac{d}{\operatorname{sen} y} = \frac{4,3}{\operatorname{sen} 70°} = \frac{3,5}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow \operatorname{sen} x \simeq \frac{3,5 \cdot 0,94}{4,3} \simeq 0,77 \Rightarrow x \simeq 50°$

$y \simeq 180° - 50° - 70° \Rightarrow y \simeq 60°$

$\frac{d}{\operatorname{sen} 60°} \simeq \frac{3,5}{\operatorname{sen} 50°} \Rightarrow \frac{d}{0,87} \simeq \frac{3,5}{0,77} \Rightarrow d \simeq \frac{0,87 \cdot 3,5}{0,77} \Rightarrow d \simeq 3,95$

Logo, a medida aproximada da diagonal é 3,95 cm.

38. Esquematizando a situação:



Aplicando a lei dos senos, temos:

$\frac{50}{\operatorname{sen} 100°} = \frac{x}{\operatorname{sen} 45°} \Rightarrow x \simeq \frac{50 \cdot 0,71}{0,98} \simeq 36,2$

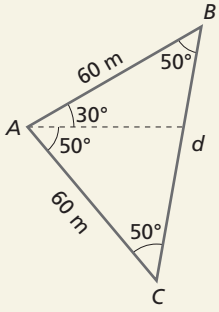
Assim, a medida da distância entre o navio e o ponto de observação *A* é, aproximadamente, 36,2 km.

39. Velocidade: 0,2 m/s

Em 5 minutos, ou seja, em 300 segundos, cada nadador percorre: $300 \cdot 0,2 \text{ m} = 60 \text{ m}$

Como o triângulo *ABC* é isósceles, temos:

$\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 50°$



Aplicando a lei dos senos, temos:

$\frac{60}{\operatorname{sen} 50°} = \frac{d}{\operatorname{sen} 80°} \Rightarrow d \simeq \frac{60 \cdot 0,98}{0,77} \simeq 76,36$

Logo, a medida da distância entre os nadadores será, aproximadamente, 76,36 m.

40. a. $y^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 25,6$

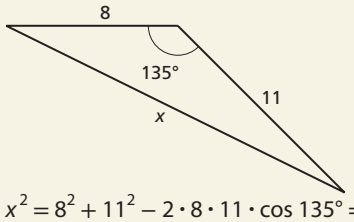
Portanto, $y \simeq 5,1$ cm.

b. $x^2 = 2,5^2 + 3^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 6,25 + 9 - 2 \cdot 2,5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 22,75$

Portanto, $x \simeq 4,8$ cm.

41.



$x^2 = 8^2 + 11^2 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \cos 135° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 64 + 121 - 2 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \simeq 309,08$

Portanto, $x \simeq 17,6$ cm.

42. a. $5^2 = 2^2 + 3,5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3,5 \cdot \cos \alpha$

$25 = 4 + 12,25 - 14 \cdot \cos \alpha$

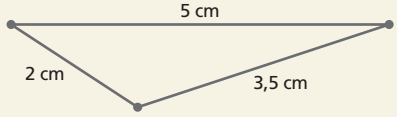
$25 - 4 - 12,25 = -14 \cdot \cos \alpha$

$8,75 = -14 \cdot \cos \alpha$

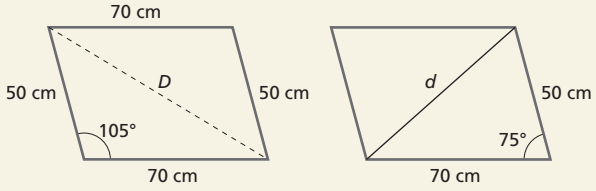
$\cos \alpha = -\frac{8,75}{14} = -\frac{5}{8}$

Como $\cos \alpha < 0$, concluímos que o ângulo α é obtuso e, portanto, o triângulo é obtusângulo.

b. Para construir o triângulo, os estudantes podem, primeiro, traçar o segmento medindo 5 cm de comprimento. Em seguida, em uma ponta do segmento, fazer uma circunferência com comprimento do raio medindo 2 cm e, na outra ponta, uma circunferência com comprimento do raio medindo 3,5 cm. Escolhendo então um dos pontos de intersecção das duas circunferências, eles podem formar o triângulo desejado.



43.



Sabemos que $\cos 105° = -\cos 75°$.

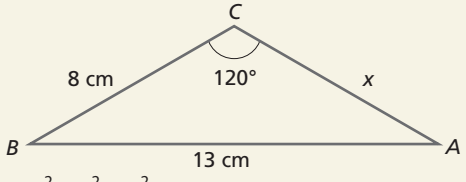
Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$D^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 105° \Rightarrow D \simeq 96$

$d^2 = 50^2 + 70^2 - 2 \cdot 50 \cdot 70 \cdot \cos 75° \Rightarrow d \simeq 74,7$

As diagonais medem, aproximadamente, 96 cm e 74,7 cm de comprimento.

44.



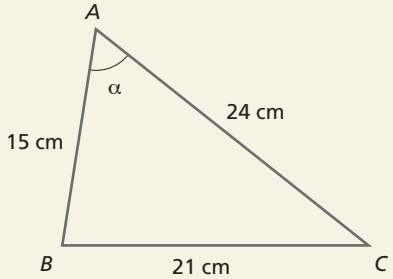
$(13)^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow 169 = 64 + x^2 - 16 \cdot x \cdot (-0,5) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 8x - 105 = 0 \Rightarrow x = -15$ (não serve) e $x = 7 \Rightarrow AC = 7$

Portanto, a medida de comprimento do lado *AC* é 7 cm.

45.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$21^2 = 15^2 + 24^2 - 2 \cdot 15 \cdot 24 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 441 = 225 + 576 - 720 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \alpha = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 60°$

Portanto, a medida de abertura do ângulo formado entre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo é 60°.

46. Sabemos que: 1 nó = 1.852 m/h = 1,852 km/h

Ao meio-dia, os navios viajaram 4 horas. Então:

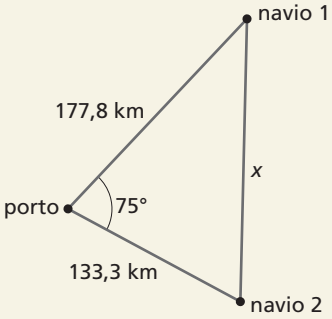
Navio 1:

- Medida da velocidade (km/h): $24 \cdot 1{,}852 = 44{,}448$
- Medida da distância percorrida (km): $4 \cdot 44{,}448 \simeq 177{,}8$

Navio 2:

- Medida da velocidade (km/h): $18 \cdot 1{,}852 = 33{,}336$
- Medida da distância percorrida (km): $4 \cdot 33{,}336 \simeq 133{,}3$

Representando a situação ao meio-dia, temos:



Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$x^2 = 177{,}8^2 + 133{,}3^2 - 2 \cdot 177{,}8 \cdot 133{,}3 \cdot \cos 75°$

$x \simeq 192{,}5$

Portanto, a medida da distância entre os navios ao meio-dia é, aproximadamente, 192,5 km.

Para finalizar o capítulo 8

Autoavaliação

Q1.

medida angular do arco (em grau)		medida do comprimento (em cm)
360	———	$2\pi \cdot 12$
120	———	x

$x = \dfrac{120 \cdot 2\pi \cdot 12}{360} = 8\pi$

Portanto, $x \simeq 25$ cm

Alternativa **d**.

Q2.

medida angular do arco (em grau)		medida angular do arco (em rad)
180	———	π
210	———	x

$x = \dfrac{210 \cdot \pi}{180} = \dfrac{7\pi}{6}$

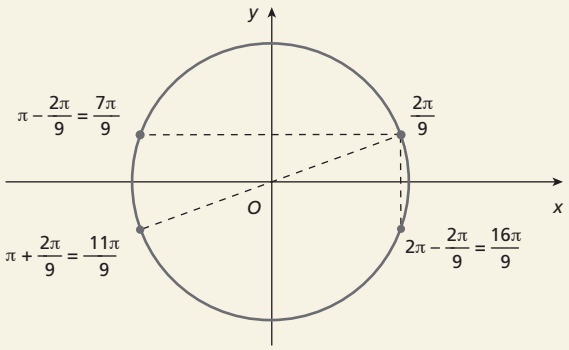
Alternativa **c**.

Q3. $\dfrac{6\pi}{12} < \dfrac{11\pi}{12} < \dfrac{12\pi}{12} \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{11\pi}{12} < \pi$

Logo, um arco de $\dfrac{11\pi}{12}$ rad pertence ao 2º quadrante.

Alternativa **b**.

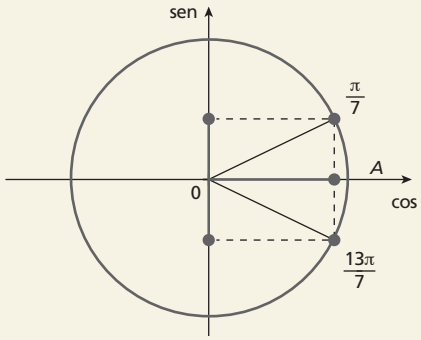
Q4.



Os arcos simétricos de $\dfrac{2\pi}{9}$ rad, respectivamente aos eixos x e y e à origem O, medem $\dfrac{16\pi}{9}$, $\dfrac{7\pi}{9}$ e $\dfrac{11\pi}{9}$.

Alternativa **b**.

Q5.

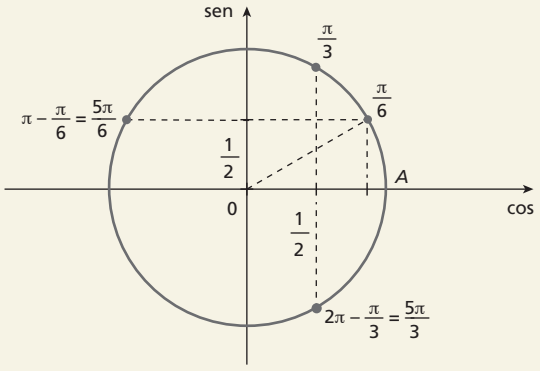


Observando o ciclo trigonométrico, concluímos que:

$\operatorname{sen} \dfrac{13\pi}{7} = -\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{7}$ e $\cos \dfrac{13\pi}{7} = \cos \dfrac{\pi}{7}$

Alternativa **c**.

Q6.



O seno de $\dfrac{\pi}{6}$ é igual ao cosseno de $\dfrac{5\pi}{3}$ e ao sen $\dfrac{5\pi}{6}$.

Alternativa **a**.

Q7.

a. $\left.\begin{matrix}\operatorname{sen} 210° < 0 \\ \cos 150° < 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen} 210° + \cos 150° < 0$

b. $\left.\begin{matrix}\operatorname{tg} 150° < 0 \\ \operatorname{tg} 225° > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} 150° \cdot \operatorname{tg} 225° < 0$

c. $\left.\begin{matrix}\cos 270° = 0 \\ \operatorname{sen} 125° > 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \cos 270° \cdot \operatorname{sen} 125° = 0$

d. $\left.\begin{matrix}\operatorname{sen} 240° < 0 \\ \cos 110° < 0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \operatorname{sen} 240° \cdot \cos 110° > 0$

Alternativa **d**.

Q8. $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + (0{,}8)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 0{,}36 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm 0{,}6$

Como α pertence ao 4º quadrante, temos $\operatorname{sen} \alpha = -0{,}6$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim: $\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}6}{0{,}8} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -0{,}75$

Alternativa **a**.

Q9. $\frac{6}{\text{sen } 44^\circ} = \frac{y}{\text{sen } 36^\circ} = \frac{x}{\text{sen } 100^\circ}$

$x = \frac{6 \cdot \text{sen } 100^\circ}{\text{sen } 44^\circ}$

$y = \frac{6 \cdot \text{sen } 36^\circ}{\text{sen } 44^\circ}$

Alternativa **d**.

Q10. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$(AB)^2 = 12^2 + 8^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot \cos 20^\circ$

$(AB)^2 \simeq 144 + 64 - 180{,}48$

$(AB)^2 \simeq 27{,}52$

$AB \simeq 5{,}25$

Alternativa **c**.

Capítulo 9 Funções trigonométricas

Atividades propostas

1. a. Analisando alguns pontos do gráfico, verificamos que:

$f(-2) = f(2) = f(6)$

Como a função é periódica, observamos que:

$f(x) = f(x + 4)$

Logo, o período p da função é 4.

b. Com procedimento análogo ao do **item a**, temos:

$f(-3) = f(-1) = f(1) = f(3)$

$f(x) = f(x + 2) \Rightarrow p = 2$

c. Com procedimento análogo ao do **item a**, temos:

$f(-1{,}5) = f(1{,}5) = f(4{,}5)$

$f(x) = f(x + 3) \Rightarrow p = 3$

2. Analisando os gráficos, concluímos que:

a. Valor mínimo: 0; valor máximo: 2.

b. Valor mínimo: −1; não tem máximo, pois 1 não pertence à imagem.

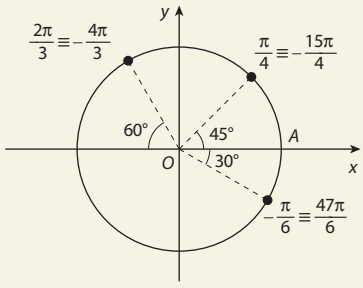
c. Valor mínimo: 8; valor máximo: 12.

3. a. O valor máximo de $\cos x$ é 1 e ocorre quando $x = 0$ e $x = 2\pi$.

b. O valor mínimo de $\cos x$ é −1 e ocorre para $x = \pi$.

4. Resposta pessoal. Há vários *sites* que tratam desse assunto, incluindo o do Ministério do Turismo, que disponibilizou uma cartilha sobre turismo sustentável.

5.



a. $\frac{\pi}{4} \equiv 45^\circ$

b. $\frac{2\pi}{3} \equiv 120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$

c. $-\frac{4\pi}{3} \equiv -\frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{2\pi}{3}$

d. $-\frac{15\pi}{4} \equiv -\frac{15\pi}{4} + 4\pi = \frac{\pi}{4}$

e. $-\frac{\pi}{6} \equiv -30^\circ \equiv 330^\circ$

f. $\frac{47\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6} + 8\pi = -\frac{\pi}{6}$

6. a. Uma expressão geral dos arcos côngruos a 60° é:

$60^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$

b. Uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{\pi}{6}$ é:

$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

c. $385^\circ = 25^\circ + 360^\circ \equiv 25^\circ$

Uma expressão geral dos arcos côngruos a 385° é:

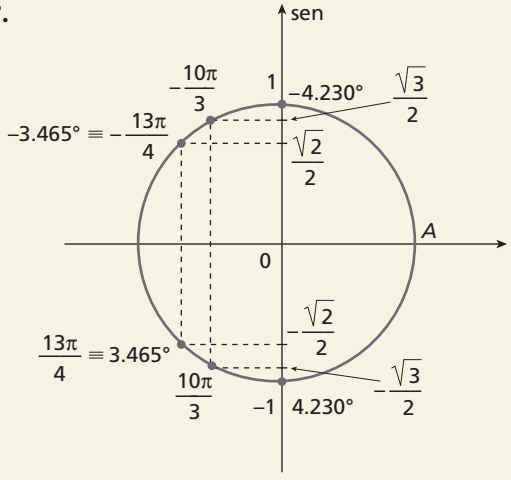
$25^\circ + k \cdot 360^\circ,\ k \in \mathbb{Z}$

d. $\frac{25\pi}{7} = \frac{11\pi}{7} + \frac{14\pi}{7} = \frac{11\pi}{7} + 2\pi \equiv \frac{11\pi}{7}$

Uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{25\pi}{7}$ é:

$\frac{11\pi}{7} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

7.



a. $\text{sen } 3.465^\circ = \text{sen } 225^\circ = -\text{sen } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\text{sen}\,\frac{13\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\text{sen } 4.230^\circ = \text{sen } 270^\circ = -1$

d. $\text{sen}\left(-\frac{10\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

e. $\text{sen } (-3.465^\circ) = \text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

f. $\text{sen}\left(-\frac{13\pi}{4}\right) = \text{sen}\,\frac{3\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

g. $\text{sen } (-4.230^\circ) = \text{sen } 90^\circ = 1$

h. $\text{sen}\,\frac{10\pi}{3} = \text{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. Observando os valores na atividade anterior, podemos generalizar:

- $\text{sen } (-\alpha) = -\text{sen } \alpha$
- $\text{sen } \alpha = -\text{sen } (-\alpha)$

9. a. Como o máximo da função seno é 1, o máximo da função apresentada é: $850 + 400 \cdot 1 = 1.250$.

Logo, a população máxima de zebras foi de 1.250 zebras.

b. A função $\text{sen}\,\frac{\pi t}{4}$ atingirá o máximo pela primeira vez, para $t \geqslant 0$, quando:

$\frac{\pi t}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{4\pi}{2\pi} \Rightarrow t = 2$

Logo, a população máxima foi atingida pela primeira vez 2 anos após 2004, em 2006.

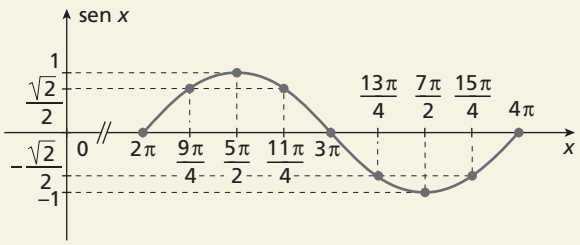
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

10. Sabemos que os valores da função $f(x) = \text{sen } x$ variam no intervalo $[-1, 1]$. Assim:

$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant 2k - 3 \leqslant 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \leqslant 2k \leqslant 4 \Rightarrow 1 \leqslant k \leqslant 2$

11.



12. a. O gráfico I aproximou os números irracionais para números racionais com duas casas decimais. Assim, 2π foi representado por 6,28.

b. amplitude $= \frac{2-0}{2} = 1$

c. $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [0, 2]$

d. Espera-se que os estudantes concluam que o gráfico de f é o gráfico de g deslocado 1 unidade para cima. Assim, a imagem das duas funções não é a mesma. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

13. O número máximo ocorre quando $\text{sen}\left(\frac{\pi t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$. Então:

$f(t)_{\text{máx.}} = 2.500 + 1.215 \cdot 1 = 3.715$

Portanto, o número máximo de pessoas que procuram emprego nessa empresa é 3.715.

14. a. Analisando a função $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ verificamos que a medida da altura máxima é atingida pela maré quando seno assume seu valor máximo (1):

$h_{\text{máx.}} = 3 + 2 \cdot 1 = 5$

E a medida da altura mínima é atingida pela maré quando seno assume seu valor mínimo (−1):

$h_{\text{mín.}} = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$

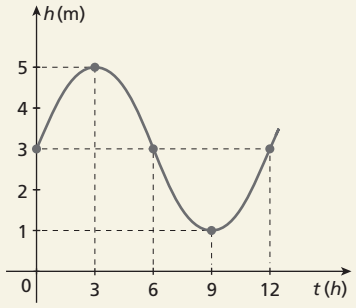
Logo, a medida da altura máxima atingida pela maré é 5 m e a mínima é 1 m.

b. Atribuindo alguns valores a t, obtemos:

Cálculo de $h(t)$ para alguns valores de t

t	$h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$
0	$h(0) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\,(0) = 3 + 2 \cdot 0 = 3$
3	$h(3) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 3\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 + 2 \cdot 1 = 5$
6	$h(6) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\,(\pi) = 3 + 2 \cdot 0 = 3$
9	$h(9) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 9\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3 + 2 \cdot (-1) = 1$
12	$h(12) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot 12\right) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\,(2\pi) = 3 + 2 \cdot 0 = 3$

Assim, esboçamos o gráfico de $h(t) = 3 + 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$:



c. Podemos observar, no gráfico esboçado na resposta ao **item b**, que a maré alta ocorre para $t = 3$. Além disso, observamos que, a partir de $t = 12$, o ciclo se reinicia. Logo, a altura máxima atingida pela maré ocorre novamente para $t = 15$.

Como $t = 0$ representa meio-dia (12 h), concluímos que a maré alta ocorre às 15 h e às 3 h.

Analogamente, concluímos que a maré baixa ocorre para $t = 9$ e $t = 21$, ou seja, às 21 h e às 9 h.

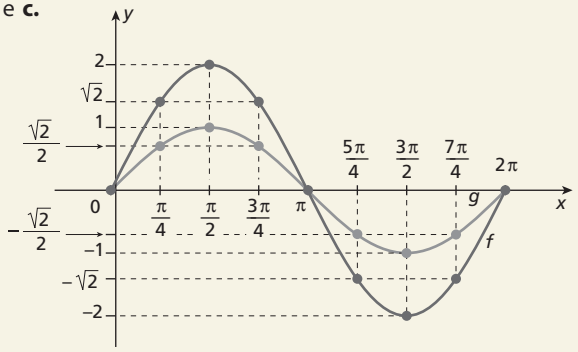
d. Observando o gráfico da função, concluímos que a maré alta se repete de 12 h em 12 h e que o mesmo acontece com a maré baixa.

15. a.

Cálculo de sen x e $2 \cdot \text{sen } x$ para alguns valores de x

x	sen x	$2 \cdot \text{sen } x$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	2
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	−1	−2
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$
2π	0	0

b. e **c.**

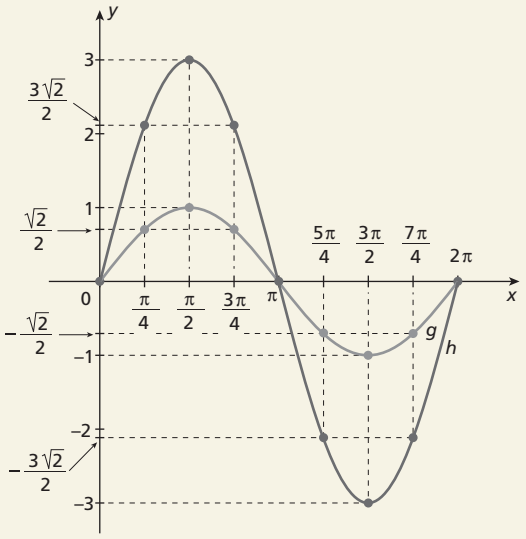


d. A amplitude da função g é 1 e a amplitude da função f é 2, ou seja, a amplitude da função f é o dobro da amplitude da função g.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

e. **Cálculo de sen x e $3 \cdot \text{sen } x$ para alguns valores de x**

x	sen x	$3 \cdot \text{sen } x$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	3
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-3
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
2π	0	0



A amplitude da função h é 3 e a amplitude da função g é 1, ou seja, a amplitude da função h é o triplo da amplitude da função g.

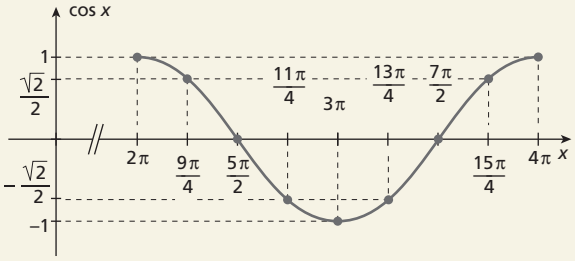
Para funções do tipo $i(x) = k \cdot \text{sen } x$, em que k é um número real positivo, a amplitude do gráfico de i será igual a k vezes o valor da amplitude do gráfico da função $g(x) = \text{sen } x$.

16. $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \ldots + \cos 78x + \cos 80x =$

$= \cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi + \cos\frac{3\pi}{2} + \cos 2\pi + \ldots + \cos 20\pi =$

$= 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + \ldots + 0 - 1 + 0 + 1 = 0$

17.



18. **a.** $g(0) = g(2\pi)$

Como a função é periódica, temos: $g(x) = g(x + 2\pi)$

O período p da função g é 2π.

b. amplitude $= \frac{2-0}{2} = 1$

c. $D(g) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g) = [0, 2]$

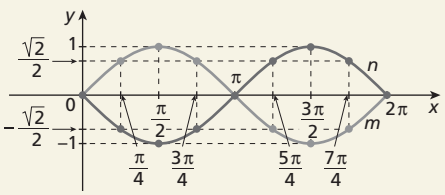
d. Espera-se que os estudantes concluam que o gráfico de g é o gráfico de f deslocado 1 unidade para cima. Assim, a imagem das duas funções não é a mesma. No entanto, o período, a amplitude e o domínio são iguais.

19. Como, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$ e $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$, a função cosseno é par e a função seno é ímpar.

20. Vamos construir um quadro com os valores de x, sen x e $-\text{sen } x$, considerando $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Cálculo de sen x e $-$sen x para alguns valores de x

x	sen x	$-\text{sen } x$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	-1
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	0	0
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	0	0



21. **a.** O pico da doença deu-se quando cosseno assumiu seu valor máximo, ou seja, para $\cos\left(\frac{\pi \cdot t - \pi}{6}\right) = 1$. Então:

$n_{\text{máx}} = 6.380 + 5.900 \cdot 1 = 12.280$

Portanto, ocorreram 12.280 casos nessa determinada região.

Sabemos que o valor máximo de cosseno ocorre para os arcos de 0, 2π, 4π, ...; então:

- $\frac{\pi \cdot t - \pi}{6} = 0 \Rightarrow \pi \cdot t - \pi = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{\pi} = 1$
- $\frac{\pi \cdot t - \pi}{6} = 2\pi \Rightarrow \pi \cdot t - \pi = 12\pi \Rightarrow t = \frac{13\pi}{\pi} = 13$

Logo, como t varia de 1 a 12 (de acordo com os meses do ano), concluímos que o pico da doença ocorreu em janeiro.

b. Espera-se que os estudantes citem, por exemplo, medidas educativas, como campanhas de conscientização e envolvimento das pessoas em mutirões de limpeza.

22. **a.** Observando o gráfico, temos: $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

Como a função é periódica, temos: $h(x) = h(x + \pi)$

O período p da função h é π.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. Observando o gráfico, concluímos que as assíntotas passam em: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

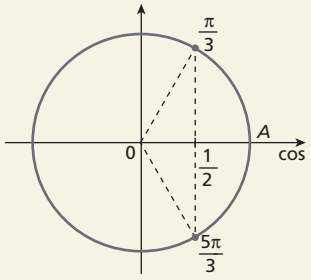
c. $D(h) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $\text{Im}(h) =]-\infty, +\infty[$

23. Espera-se que os estudantes concluam que $g(x) = \text{tg } x$ e $j(x) = -\text{tg } x$ são simétricas em relação ao eixo x.

24. Espera-se que os estudantes notem que os passos até a criação da reta paralela ao eixo das ordenadas que passa pelo ponto C seriam os mesmos, pois é essa a reta usada para marcar o valor das abcissas do gráfico. Depois disso, é importante traçar a reta tangente ao ciclo trigonométrico no ponto (1, 0) e a reta que passa pelo centro do ciclo e pelo ponto B que define o arco da circunferência do qual determinaremos a tangente. Marca-se o ponto D de encontro entre essas duas retas e se traça a reta paralela ao eixo das abcissas passando por esse ponto. O ponto de encontro entre essa reta e a reta paralela ao eixo y que passa pelo ponto C pode ser chamado de ponto E, cujo movimento será rastreado enquanto move-se o ponto B para simular a função tangente.

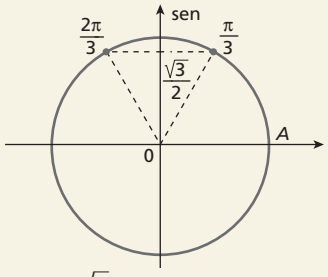
25. A função tangente é uma função ímpar, pois, para todo x pertencente a seu domínio, $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$.

26. a.



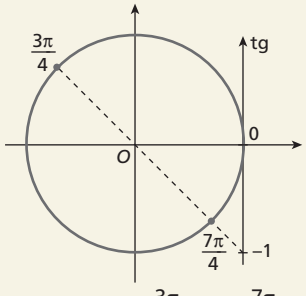
$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

b.



$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$

c.



$\text{tg } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

d. $\text{sen } x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

e. $\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ ou $x = 2\pi$

27. a. $\text{sen } x \cdot (\text{sen } x + 1) = 0$

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi \text{ ou } x = 2\pi \\ \text{ou} \\ \text{sen } x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Logo, os valores possíveis para x são 0, π, 2π e $\frac{3\pi}{2}$.

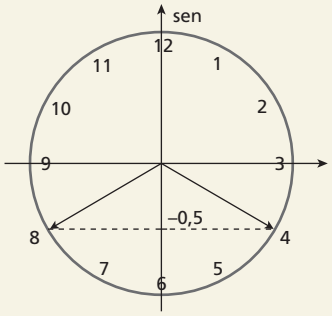
b. $2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos x (2 \cdot \text{sen } x - 1) = 0$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} \\ \text{ou} \\ 2 \cdot \text{sen } x - 1 = 0 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

Os valores possíveis de x são $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$ e $\frac{3\pi}{2}$.

c. $\cos^2 x - 2 \cdot \cos x + 1 = 0$
Sendo $\cos x = y$, temos:
$y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
Assim: $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$
Os possíveis valores de x são 0 e 2π.

28.



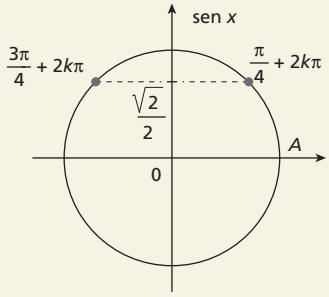
O relógio estará indicando 16 h ou 20 h.

29. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow x - \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

Assim, $x = \frac{3\pi}{2}$.

30. a. $\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

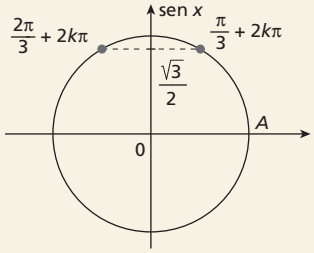
No intervalo $[0, 2\pi]$, os arcos cujo seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$ são $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$.



Logo, no universo real temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. $\text{sen } x = \text{sen } \frac{2\pi}{3}$



Portanto:

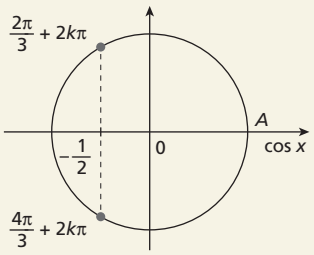
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c. $\cos x = -\frac{1}{2}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

No intervalo [0, 2π], os arcos cujo cosseno vale $-\frac{1}{2}$ são $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}$.

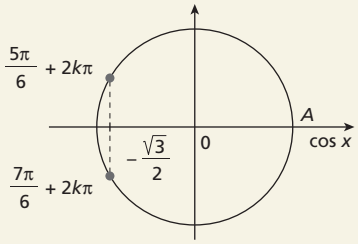


Logo, no universo real temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d. $\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

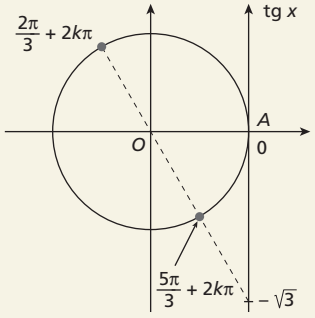
Como $-\frac{5\pi}{6} \equiv \frac{7\pi}{6}$, temos:



Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e. $\text{tg } x = -\sqrt{3}$

Os arcos cuja tangente vale $-\sqrt{3}$, considerando o intervalo [0, 2π], são $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

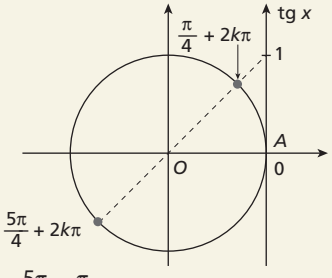


Observe que: $\frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \pi$

Logo, no universo real temos:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f. $\text{tg } x = \text{tg } \frac{5\pi}{4}$



Observe que: $\frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

31. No intervalo [0, 2π], os arcos cujo cosseno vale $\frac{\sqrt{3}}{2}$ são $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{6}$.

Assim, temos:

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi$

$x + \frac{\pi}{4} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi$

Portanto:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{23\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

32. $\text{sen } x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\cos x = 0$

No universo real, temos:

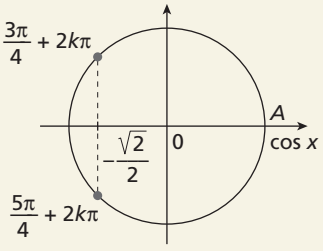
$\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Da união das soluções, concluímos que:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

33. $\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



Logo, um exemplo de resposta é: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

34. **a.** Para $x = 0$, temos: $f(0) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

Logo, a função f é representada pela curva em vermelho.

b. Para $x = \frac{\pi}{4}$, temos: $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 0 = 1$

Logo, a função g é representada pela curva em azul.

35. Partindo da função original $g(x) = \text{sen } x$:

- 1º passo: $\text{sen } x \rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

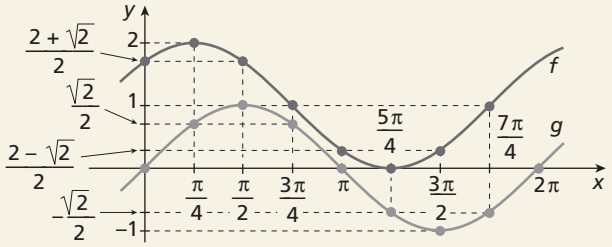
  O gráfico de g sofrerá uma translação de $\frac{\pi}{4}$ para a esquerda sobre o eixo x.

- 2º passo: $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow 1 + \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

  O gráfico da função translada 1 unidade para cima.

  O novo conjunto imagem será $\text{Im}(f) = [0, 2]$.

  Construindo o gráfico, temos:



O domínio, o período e a amplitude de f são os mesmos de g:

$D(f) = \mathbb{R}$, $p = 2\pi$ e a amplitude é 1.

36. Espera-se que os estudantes percebam que:

- A amplitude do gráfico é 2. Logo, $b = 2$;
- O gráfico está deslocado 2 unidades para cima em relação ao gráfico $g(x) = 2 \cdot \cos x$. Logo, $a = 2$.

Outro modo:

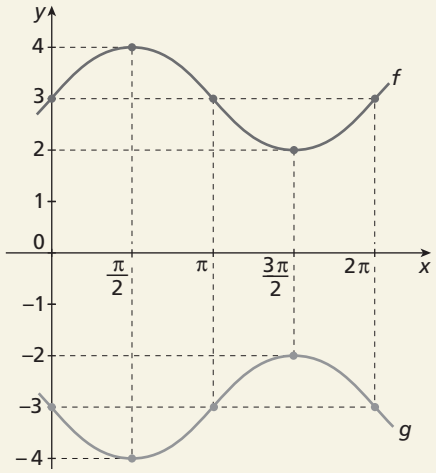
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Também podemos resolver essa atividade algebricamente:

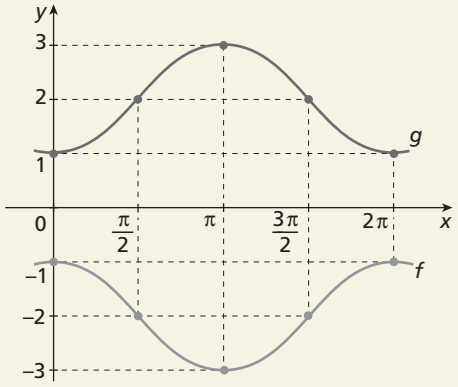
- Pelo gráfico, temos que $f(0) = 4$. Assim:
  $f(0) = a + b \cdot \cos 0 \Rightarrow 4 = a + b \cdot 1 \Rightarrow a + b = 4$ (I)
- Pelo gráfico, temos também que $f(\pi) = 0$. Assim:
  $f(\pi) = a + b \cdot \cos \pi \Rightarrow 0 = a + b \cdot (-1) \Rightarrow a = b$ (II)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II), obtemos $a = 2$ e $b = 2$.

37. a. $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = -3 - \operatorname{sen} x$



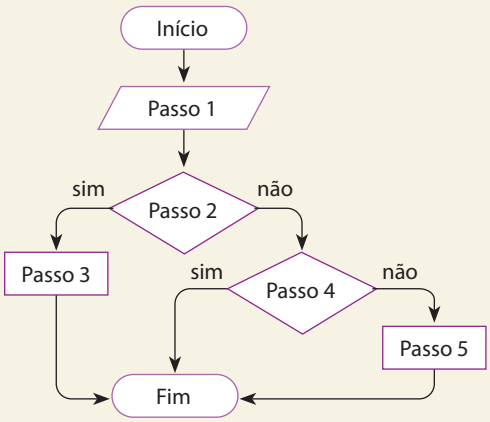
b. $f(x) = -2 + \cos x$ e $g(x) = 2 - \cos x$



38. Espera-se que os estudantes percebam que, dada uma função inicial, ao multiplicar sua lei por −1, as ordenadas negativas tornam-se positivas e as positivas tornam-se negativas. Por isso, seu gráfico será refletido, no plano cartesiano, em relação ao eixo x.

39. a. Dados os passos 3 e 5 do algoritmo apresentado, pode-se perceber que ele representa como se faz a translação vertical do gráfico de uma função trigonométrica $y = \operatorname{tg} x$ para obter o gráfico da função $y = c + \operatorname{tg} x$.

b.



40. Exemplo de resposta: translação do gráfico de $y = \operatorname{tg}(x + b)$

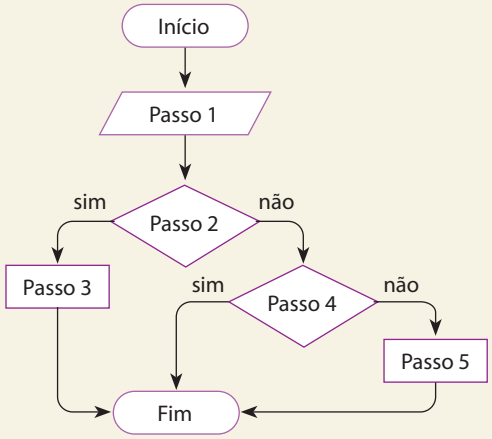
Passo 1. Construa o gráfico de $y = \operatorname{tg} x$.

Passo 2. Verificar o valor de b. Se $b > 0$, vá para o **passo 3**. Se não, vá para o **passo 4**.

Passo 3. Como $b > 0$, então o gráfico é transladado de b unidades para a esquerda. Termina-se o algoritmo.

Passo 4. Verificar o valor de b. Se $b = 0$, o gráfico não muda e termina-se o algoritmo. Se não, vá para o **passo 5**.

Passo 5. Como $b < 0$, então o gráfico é transladado de b unidades para a direita e termina-se o algoritmo.



41. a. Partindo da função $g(x) = \operatorname{sen} x$, temos:

- 1º passo: $\operatorname{sen} x \rightarrow \operatorname{sen} 2x$
  O novo período é $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
- 2º passo: $\operatorname{sen} 2x \rightarrow 3 \cdot \operatorname{sen} 2x$
  A nova amplitude é igual a 3.

Quando multiplicamos g por 3, sua imagem passa a ser $[-3, 3]$. Então, $\operatorname{Im}(f) = [-3, 3]$.

O domínio de f é o mesmo de g, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$.

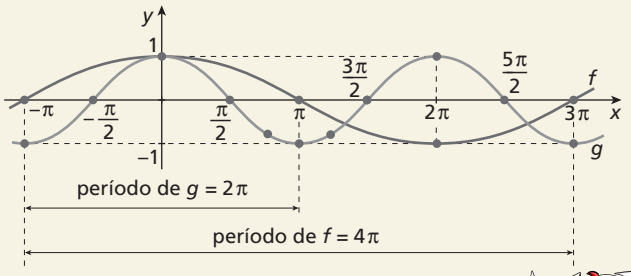
b. Partindo da função $g(x) = \cos x$, temos:

- 1º passo: $\cos x \rightarrow \cos 3x$
  O novo período é $p = \frac{2\pi}{3}$.
- 2º passo: $\cos 3x \rightarrow 2 \cdot \cos 3x$
  A nova amplitude é igual a 2.
- 3º passo: $2 \cdot \cos 3x \rightarrow 5 + 2 \cdot \cos 3x$
  Ocorre translação de 5 unidades para cima.

Após o 2º passo, o conjunto imagem da função g passa a ser $[-2, 2]$. Após o 3º passo, o conjunto imagem passa a ser $[3, 7]$. Logo, $\operatorname{Im}(f) = [3, 7]$.

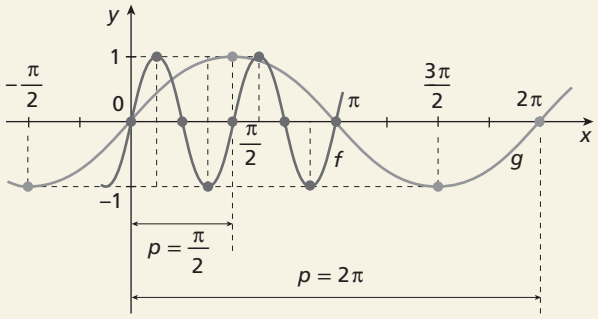
O domínio de f é o mesmo de g, ou seja, $D(f) = \mathbb{R}$.

42. a. Partimos da função $g(x) = \cos x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f com período $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.



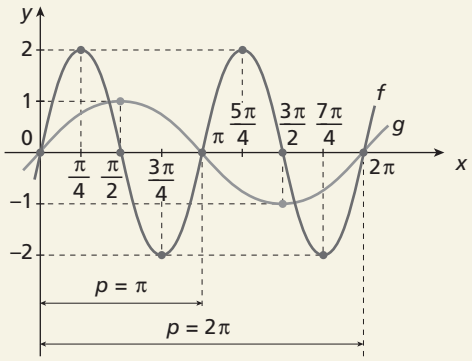
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

b. Partimos da função $g(x) = \text{sen } x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f com período $p = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

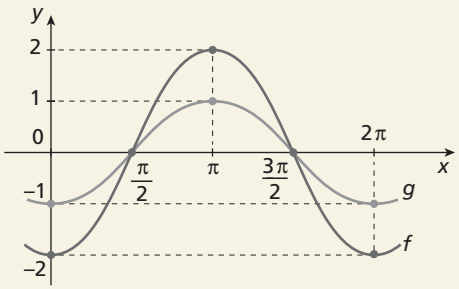


c. Partimos da função $g(x) = \text{sen } x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f cujo período é $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ e a amplitude é 2.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



d. Partimos da função $g(x) = -\cos x$ e, em seguida, construímos o gráfico de f com amplitude 2. Observe que o período não sofre mudança.



As resoluções/comentários das atividades da seção *Trabalho e juventudes – Eletricista* estão nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Para finalizar o capítulo 9

Autoavaliação

Q1. $\frac{16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + \frac{12\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 4\pi \equiv \frac{4\pi}{3}$
Alternativa **c**.

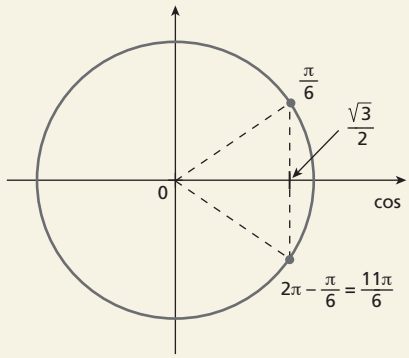
Q2. $\frac{22\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + \frac{20\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} + 4\pi \equiv \frac{2\pi}{5}$
Logo, uma expressão geral dos arcos côngruos a $\frac{22\pi}{5}$ é $\frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.
Alternativa **c**.

Q3. Observamos, no gráfico, que o período da função é 0,75.
Portanto, o intervalo de tempo de um batimento cardíaco é 0,75 s.
Alternativa **d**.

Q4. A função seno é periódica, pois $\text{sen } x = \text{sen } (x + 2\pi)$ e seu período é 2π.
Alternativa **b**.

Q5. $2 \cdot \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



Alternativa **d**.

Q6. $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Logo, $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Alternativa **b**.

Q7. A amplitude corresponde ao número que multiplica sen $(x + \pi)$.

Como $f(x) = -2 + 3 \cdot \text{sen}\,(x + \pi)$, a amplitude é 3.

Alternativa **a**.

Q8. A imagem da função $g(x) = \cos(2x + 1)$ é o conjunto $[-1, 1]$.

A imagem da função $h(x) = 2 \cdot \cos(2x + 1)$ é o conjunto $[-2, 2]$. Portanto, a imagem da função $f(x) = 3 + 2 \cdot \cos(2x + 1)$ é o conjunto $[1, 5]$.

Alternativa **d**.

Q9. $p = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

Alternativa **b**.

Q10. A medida de massa é máxima quando: $\text{sen}\,\frac{\pi t}{60} = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{60} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 30$

$m(t)_{\text{máx.}} = 4.500 + 3.400 \cdot 1 = 7.900$

A medida de massa é mínima quando: $\text{sen}\,\frac{\pi t}{60} = -1 \Rightarrow \frac{\pi t}{60} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t = 90$

$m(t)_{\text{mín.}} = 4.500 + 3.400 \cdot (-1) = 1.100$

Tempo decorrido: $90 - 30 = 60$

Alternativa **c**.

As resoluções/orientações das atividades das seções *Educação midiática – Inteligência Artificial na Educação* e *Pesquisa e ação – Maquete* encontram-se nas orientações didáticas da parte específica deste capítulo.

Prepare-se para o Enem e vestibulares

1. Observando os gráficos, percebe-se que os homens são minoria da população com ensino superior, em ambos os cortes raciais apresentados. No entanto, o rendimento deles é maior que o das mulheres, indicando um viés de gênero na remuneração.

Alternativa **b**.

2. Observando o gráfico, pode-se perceber que a quantidade de livros vendidos dos gêneros Biografia e Infantil foi a mesma nos dois anos. Portanto, a quantidade total de obras vendidas desses gêneros no período foi a mesma.

Alternativa **d**.

3. A média atual, em horas, é calculada por:

$\frac{5 + 2 + 9 + 2 + 8 + 12 + 4}{7} = \frac{42}{7} = 6$

Sendo x a quantidade de horas de uso do aparelho no sábado da segunda semana, temos:

$\frac{5 + 2 + 9 + 2 + 8 + x + 4}{7} \leqslant 5 \Rightarrow 30 + x \leqslant 35 \Rightarrow x \leqslant 5$

Alternativa **b**.

4. De todas as permutações do número 15.792, apenas as que começam com o algarismo 5 são maiores que 30.000 e menores que 70.000. Os outros algarismos ocupam as outras posições sem restrições; assim, temos: $N = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Portanto, existem 24 permutações dos algarismos do número 15.792 que estão no intervalo desejado.

Alternativa **e**.

5. Considerando os eventos E_1: "sair um número par", E_2: "sair um número múltiplo de 3" e E_3: "sair um número múltiplo de 7", temos: $n(E_1) = 10 \Rightarrow n(E_2) = 6$ e $n(E_3) = 2$.

Analisando as intersecções, percebe-se que $E_1 \cap E_2 = \{6, 12, 18\}$, $E_1 \cap E_3 = \{14\}$, e $E_2 \cap E_3 = \varnothing$, e das duas últimas igualdades temos $(E_1 \cup E_2) \cap E_3 = \{14\}$.

Calculamos então $n(E_1 \cup E_2) = n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \cap E_2) = 13$, e portanto:

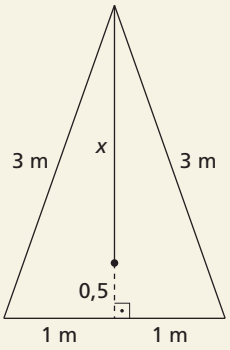
$n(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = n(E_1 \cup E_2) + n(E_3) - n((E_1 \cup E_2) \cap E_3) = 14$. O complementar disso, que seria E_4: "Marcela continuar no jogo", é tal que $n(E_4) = n(S) - n(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 6$.

Então, a probabilidade de Marcela continuar no jogo é:

$P(E_4) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 30\%$

Alternativa **b**.

6. Pela vista lateral podemos observar:



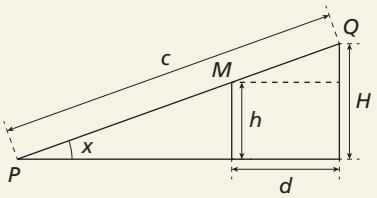
Aplicando o teorema de Pitágoras:

$(x + 0{,}5)^2 + 1^2 = 3^2 \Rightarrow (x + 0{,}5)^2 = 8 \Rightarrow x + 0{,}5 = \pm\sqrt{8}$

Como devemos ter $x > 0$, temos $x + 0{,}5 = \sqrt{8} \Rightarrow x = \sqrt{8} - 0{,}5$.

Alternativa **c**.

7.



Pelo esquema ilustrado, podemos verificar que a abertura do ângulo formado pelo cabo de aço e uma reta paralela ao chão saindo do topo da torre de menor medida de altura mede x graus, pois é congruente à abertura do ângulo formado entre o cabo de aço e o solo. Assim, temos:

$\text{tg}\, x = \frac{H - h}{d} \Rightarrow H - h = d \cdot \text{tg}\, x$

Portanto, a diferença entre as medidas das alturas da torre maior e da torre menor é $d \cdot \text{tg}\, x$.

Alternativa **b**.

8. Do enunciado, temos: $\text{tg}\, \alpha = \frac{3}{4}$

Assim, o cateto oposto a α é igual a $3 \cdot k$ e o cateto adjacente a α é igual a $4 \cdot k$, em que k é um número natural. Utilizando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$x^2 = (4 \cdot k)^2 + (3 \cdot k)^2 \Rightarrow x^2 = 16 \cdot k^2 + 9 \cdot k^2 \Rightarrow x = \sqrt{25 \cdot k^2} \Rightarrow x = 5 \cdot k$

Logo, lembrando que o cateto adjacente a α é o cateto oposto a γ:

$\text{sen}\, \gamma = \frac{4 \cdot k}{5 \cdot k} \Rightarrow \text{sen}\, \gamma = \frac{4}{5}$

Alternativa **a**.

9. $f(0) = a + b \cdot \cos 0 = -1 \Rightarrow a + b \cdot 1 = -1 \Rightarrow a + b = -1$

$f(\pi) = a + b \cdot \cos \pi = 5 \Rightarrow a + b \cdot (-1) = 5 \Rightarrow a - b = 5$

Escrevendo um sistema com as duas equações obtidas, temos:

$\begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 2$

E, substituindo na primeira equação, obtemos:

$2 + b = -1 \Rightarrow b = -3$

Logo, podemos escrever:

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 - 3 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$

Alternativa **c**.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

ISBN 978-85-16-13972-8