

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.
PNLD 2026 - ENSINO MÉDIO
Código da coleção:
0013 P26 01 01 202 814

MANOEL PAIVA

MODERNA PLUS



MATEMÁTICA PAIVA

MANUAL DO PROFESSOR

VOLUME I

ENSINO MÉDIO
1º ANO

Área de conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

Componente curricular:
Matemática

MODERNA

MANOEL PAIVA
Mestre em Educação Matemática pela
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Licenciado em Matemática pela Faculdade de Filosofia,
Ciências e Letras de Santo André (SP). Professor.

EWERTON PAIVA
Licenciado em Matemática pela Universidade
Federal Fluminense (RJ). Professor.

BETO PAIVA
Licenciado em Matemática pela
Universidade Federal Fluminense (RJ).
Professor e coordenador pedagógico.

MODERNA PLUS

MATEMÁTICA PAIVA

VOLUME 1

ENSINO MÉDIO – 1º ANO

Área de conhecimento: Matemática e suas Tecnologias
Componente curricular: Matemática

MANUAL DO PROFESSOR

2ª edição
São Paulo, 2024

MODERNA

Edição executiva: Maria Cecília da Silva Veridiano
Edição de texto: Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Katia Tiemy Sido, Sergio Luiz de Lima Filho
Assistência editorial: Tadashi Horita
Gerência de planejamento editorial e revisão: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero, Mônica Rodrigues de Lima
Revisão: Ana Cortazzo, Sirlene Prignolato, Tatiana Malheiro, Acácia Montagnolli, Diego Franco Gonçales
Gerência de *design*, produção gráfica e digital: Patricia Costa
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Mariza de Souza Porto, Bruno Tonel, Fábio Luna
Capa: Everson de Paula, Paula Miranda Santos
Colagem digital: Everson de Paula
Fotos: photovideostock/E+/Getty Images; Roy Harris/Shutterstock; Roman Samborskyi/Shutterstock; Ragnar Schmuck/fStop/Getty Images
Coordenação de produção gráfica: Aderson Oliveira
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Natália Demuri Manoel
Editoração eletrônica: Teclas Editorial
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Junior Rozzo, Mariana Alencar
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Marcio H. Kamoto
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Organização dos objetos digitais: Maria Cecília da Silva Veridiano
Elaboração dos objetos digitais: Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Katia Tiemy Sido, Maria Cecília da Silva Veridiano, Sergio Luiz de Lima Filho

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Paiva, Manoel
Moderna plus matemática Paiva / Manoel Paiva, Ewerton Paiva, Beto Paiva. -- 2. ed. -- São Paulo : Moderna, 2024.

1º ano : ensino médio : volume I.
Componente curricular: Matemática.
Área de conhecimento: Matemática e suas tecnologias.
ISBN 978-85-16-13979-7 (aluno)
ISBN 978-85-16-13980-3 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Paiva, Ewerton. II. Paiva, Beto. III. Título.

24-227386 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados.

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Canal de atendimento: 0303 663 3762
www.moderna.com.br
2024
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

o Ensino Médio, cada vez mais alinhado às exigências contemporâneas, tem objetivos gerais que podem ser resumidos em formar cidadãos produtivos e criativos, com raciocínio analítico e capazes de se antecipar a inovações, que busquem novos conhecimentos em um processo de formação contínua, sendo conscientes de seus direitos e deveres e capazes de atuar com protagonismo no mundo do trabalho e no convívio social.

Elaboramos esta obra nesse contexto, destacando que a Matemática no Ensino Médio, além de ter um caráter formativo e instrumental, deve ser compreendida como ciência, com suas características estruturais específicas.

Assim, para atingir os objetivos gerais nesta obra, recorremos à progressão do pensamento científico, ao pensamento computacional, às relações interdisciplinares, à contextualização, ao uso de tecnologias, aos aspectos históricos e às múltiplas representações de um mesmo objeto matemático.

Esperamos contribuir para a sua formação, instigar seu espírito crítico e científico e despertar sua curiosidade para o vasto universo do qual conhecemos uma minúscula parte.

Os autores

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ORGANIZAÇÃO DO LIVRO

Este livro foi elaborado para oferecer, de forma clara e objetiva, conteúdos matemáticos fundamentais para o Ensino Médio.


CAPÍTULO 1

A linguagem dos conjuntos

ODS 12

Meio sustentável

OBJETO DIGITAL Infográfico dicável: Coleta seletiva

A reciclagem e a sustentabilidade são práticas do cotidiano necessárias à conservação e à preservação ambiental. A prática de reciclagem consiste em reaproveitar parte do lixo que seria descartado na natureza. Ao fazer isso, estamos contribuindo para a sustentabilidade e, a partir dela, economizamos matéria-prima e reduzimos gastos para a fabricação de novos produtos.

Para a reciclagem acontecer, são necessárias algumas etapas. A mais importante delas é a separação dos materiais, que inclui a coleta seletiva, a limpeza e a separação adequada dos materiais. O Conselho Nacional do Meio Ambiente (Conama) estabeleceu um código com dez cores de lixeira, uma cor para identificação e coleta seletiva de cada tipo de resíduo. As lixeiras mais comuns em ambientes comerciais e residenciais são: azul, vermelho, verde e amarelo. Com a colaboração de todos, separando os resíduos de maneira correta para reciclagem, vamos construir um futuro mais sustentável.

Lixeiras para separação de resíduos: plástico, metal, orgânico, papel, vidro, madeira, resíduos ambulatoriais, radioativos, perigosos e lixo não reciclável. A reciclagem pode transformar o lixo em recurso!

Além da teoria

Em diversas situações do cotidiano, classificamos, agrupamos e organizamos informações e objetos de acordo com algumas características em comum. Por exemplo, ao separar o lixo descartado para a reciclagem ou ao agrupar músicas por gêneros em nossas listas de reprodução, estamos, intuitivamente, utilizando a ideia de conjuntos, que é a mesma ideia de coleção ou agrupamento.

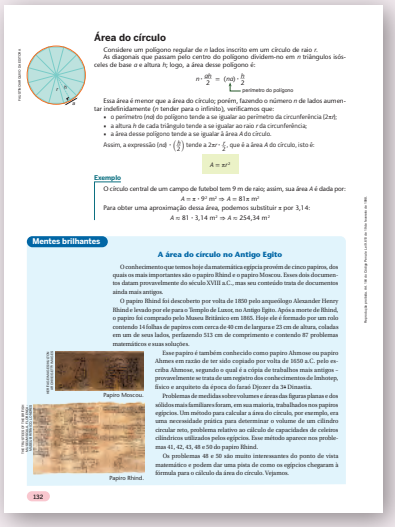
1. Cite outros exemplos em que a ideia de conjuntos esteja presente.
2. Escreva com as próprias palavras o que é um conjunto numérico.
3. Em sua opinião, qual é a importância da reciclagem sustentável? Converse com os colegas.

Para saber mais sobre reciclagem sustentável, acesse o site indicado a seguir.

Coleta seletiva. Disponível em: https://antigo.mma.gov.br/cidades-sustentaveis/residuos-solidos/catadores-de-materiais-reciclaveis/reciclagem-e-reaproveitamento.html. Acesso em: 7 ago. 2024.

10

A **abertura** pretende estimular a reflexão sobre um problema contextualizado relacionado a conteúdos do capítulo.


Área do círculo

Considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r. As diagonais que passam pelo centro do polígono dividem-no em n triângulos isósceles de base a e altura h; logo, a área desse polígono é:

$$n \cdot \frac{ah}{2} = \underbrace{(na)}_{\text{perímetro do polígono}} \cdot \frac{h}{2}$$

Essa área é menor que a área do círculo; porém, fazendo o número n de lados aumentar indefinidamente (n tender para o infinito), verificamos que:

- o perímetro (na) do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência ($2\pi r$);
- a altura h de cada triângulo tende a se igualar ao raio r da circunferência;
- a área desse polígono tende a se igualar à área A do círculo.

Assim, a expressão $(na) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)$ tende a $2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área A do círculo, isto é:

$A = \pi r^2$

Exemplo

O círculo central de um campo de futebol tem 9 m de raio; assim, sua área A é dada por:

$A = \pi \cdot 9^2 \text{ m}^2 \Rightarrow A = 81\pi \text{ m}^2$

Para obter uma aproximação dessa área, podemos substituir π por 3,14:

$A \approx 81 \cdot 3{,}14 \text{ m}^2 \Rightarrow A \approx 254{,}34 \text{ m}^2$

Mentes brilhantes

A área do círculo no Antigo Egito

O conhecimento que temos hoje da matemática egípcia provém de cinco papiros, dos quais os mais importantes são o papiro Rhind e o papiro Moscou. Esses dois documentos datam provavelmente do século XVIII a.C., mas seu conteúdo trata de documentos ainda mais antigos.

O papiro Rhind foi descoberto por volta de 1858 pelo arqueólogo Alexander Henry Rhind e levado por ele para o Templo de Luxor, no Antigo Egito. Após a morte de Rhind, o papiro foi comprado pelo Museu Britânico em 1865. Hoje ele é formado por um rolo contendo 14 folhas de papiro com cerca de 40 cm de largura e 23 cm de altura, coladas em um de seus lados, perfazendo 513 cm de comprimento e contendo 87 problemas matemáticos e suas soluções.

Esse papiro é também conhecido como papiro Ahmose ou papiro Ahmes em razão de ter sido copiado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmose, segundo o qual é a cópia de trabalhos mais antigos – provavelmente se trata de um registro dos conhecimentos de Imhotep, físico e arquiteto da época do faraó Djoser da 3ª Dinastia.

Problemas de medidas sobre volumes e áreas das figuras planas e dos sólidos mais familiares foram, em sua maioria, trabalhados nos papiros egípcios. Um método para calcular a área do círculo, por exemplo, era uma necessidade prática para determinar o volume de um cilindro circular reto, problema relativo ao cálculo de capacidades de celeiros cilíndricos utilizados pelos egípcios. Esse método aparece nos problemas 41, 42, 43, 48 e 50 do papiro Rhind.

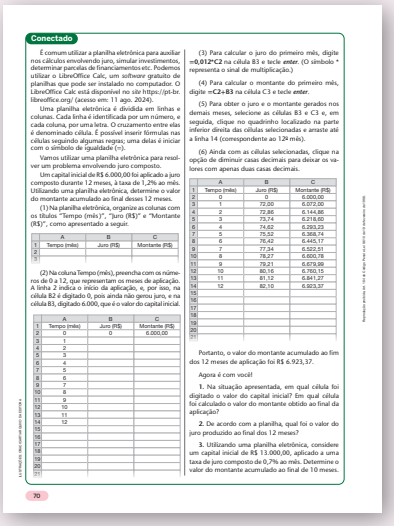
Os problemas 48 e 50 são muito interessantes do ponto de vista matemático e podem dar uma pista de como os egípcios chegaram à fórmula para o cálculo da área do círculo. Vejamos.

Papiro Moscou.

Papiro Rhind.

132

O boxe **Mentes brilhantes** apresenta realizações de pessoas ou povos que contribuíram com o desenvolvimento da Matemática ou da Ciência, além de textos sobre a História da Matemática ou Etnomatemática.


Conectado

É comum utilizar a planilha eletrônica para auxiliar nos cálculos envolvendo juro, simular investimentos, determinar parcelas de financiamentos etc. Podemos utilizar o LibreOffice Calc, um *software* gratuito de planilhas que pode ser instalado no computador. O LibreOffice Calc está disponível no site https://pt-br.libreoffice.org/ (acesso em: 11 ago. 2024).

Uma planilha eletrônica é dividida em linhas e colunas. Cada linha é identificada por um número, e cada coluna, por uma letra. O cruzamento entre elas é denominado célula. É possível inserir fórmulas nas células seguindo algumas regras; uma delas é iniciar com o símbolo de igualdade (=).

Vamos utilizar uma planilha eletrônica para resolver um problema envolvendo juro composto.

Um capital inicial de R$ 6.000,00 foi aplicado a juro composto durante 12 meses, à taxa de 1,2% ao mês. Utilizando uma planilha eletrônica, determine o valor do montante acumulado ao final desses 12 meses.

(1) Na planilha eletrônica, organize as colunas com os títulos "Tempo (mês)", "Juro (R$)" e "Montante (R$)", como apresentado a seguir.

(2) Na coluna Tempo (mês), preencha com os números de 0 a 12, que representam os meses de aplicação. A linha 2 indica o início da aplicação, e, por isso, na célula B2 é digitado 0, pois ainda não gerou juro, e na célula B3, digitado 6.000, que é o valor do capital inicial.

(3) Para calcular o juro do primeiro mês, digite **=0,012*C2** na célula B3 e tecle *enter*. (O símbolo * representa o sinal de multiplicação.)

(4) Para calcular o montante do primeiro mês, digite **=C2+B3** na célula C3 e tecle *enter*.

(5) Para obter o juro e o montante gerados nos demais meses, selecione as células B3 e C3 e, em seguida, clique no quadrinho localizado na parte inferior direita das células selecionadas e arraste até a linha 14 (correspondente ao 12º mês).

(6) Ainda com as células selecionadas, clique na opção de diminuir casas decimais para deixar os valores com apenas duas casas decimais.

Portanto, o valor do montante acumulado ao fim dos 12 meses de aplicação foi R$ 6.923,37.

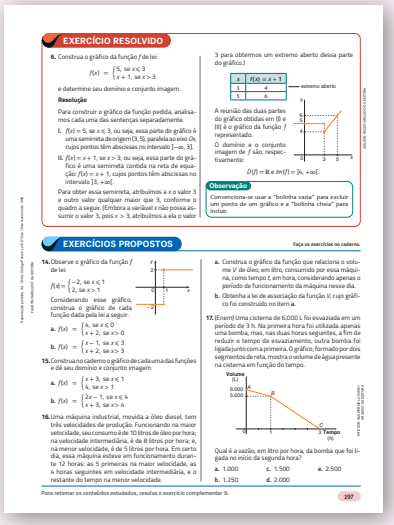
Agora é com você!

1. Na situação apresentada, em qual célula foi digitado o valor do capital inicial? Em qual célula foi calculado o valor do montante obtido ao final da aplicação?
2. De acordo com a planilha, qual foi o valor do juro produzido ao final dos 12 meses?
3. Utilizando uma planilha eletrônica, considere um capital inicial de R$ 13.000,00, aplicado a uma taxa de juro composto de 0,7% ao mês. Determine o valor do montante acumulado ao final de 10 meses.

70

O boxe **Conectado** apresenta atividades com o uso de tecnologias como *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas eletrônicas entre outros.

Os **Exercícios resolvidos** acompanham a teoria, auxiliando na compreensão dos conceitos.


EXERCÍCIO RESOLVIDO

6. Construa o gráfico da função f de lei:

$$f(x) = \begin{cases} 5, \text{ se } x \leq 3 \\ x + 1, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

e determine seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Para construir o gráfico da função pedida, analisamos cada uma das sentenças separadamente.

I. $f(x) = 5$, se $x \leq 3$, ou seja, essa parte do gráfico é uma semirreta de origem (3, 5), paralela ao eixo Ox, cujos pontos têm abscissas no intervalo $]-\infty, 3]$.

II. $f(x) = x + 1$, se $x > 3$, ou seja, essa parte do gráfico é uma semirreta contida na reta de equação $f(x) = x + 1$, cujos pontos têm abscissas no intervalo $]3, +\infty[$.

Para obter essa semirreta, atribuímos a x o valor 3 e outro valor qualquer maior que 3, conforme o quadro a seguir. (Embora a variável x não possa assumir o valor 3, pois $x > 3$, atribuímos a ela o valor 3 para obtermos um extremo aberto dessa parte do gráfico.)

x	$f(x) = x + 1$	
3	4	extremo aberto
5	6	

A reunião das duas partes do gráfico obtidas em (I) e (II) é o gráfico da função f representado.

O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:

$D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) =]4, +\infty[$.

Observação

Convencione-se usar a "bolinha vazia" para excluir um ponto de um gráfico e a "bolinha cheia" para incluir.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

14. Observe o gráfico da função f de lei:

$$f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x \leq 1 \\ 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Considerando esse gráfico, construa o gráfico de cada função dada pela lei a seguir.

a. $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ se } x \leq 0 \\ x + 2, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \leq 3 \\ 2, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

15. Construa no caderno o gráfico de cada uma das funções e dê seu domínio e conjunto imagem.

a. $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x < 1 \\ 4, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \leq 4 \\ x + 3, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

16. Uma máquina industrial, movida a óleo diesel, tem três velocidades de produção. Funcionando na maior velocidade, seu consumo é de 10 litros de óleo por hora; na velocidade intermediária, é de 8 litros por hora; e, na menor velocidade, é de 5 litros por hora. Em certo dia, essa máquina esteve em funcionamento durante 12 horas: as 5 primeiras na maior velocidade, as 4 horas seguintes em velocidade intermediária, e o restante do tempo na menor velocidade.

a. Construa o gráfico da função que relaciona o volume V de óleo, em litro, consumido por essa máquina, como tempo t, em hora, considerando apenas o período de funcionamento da máquina nesse dia.

b. Obtenha a lei de associação da função V, cujo gráfico foi construído no item a.

17. (Enem) Uma cisterna de 6.000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas, nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna em função do tempo.

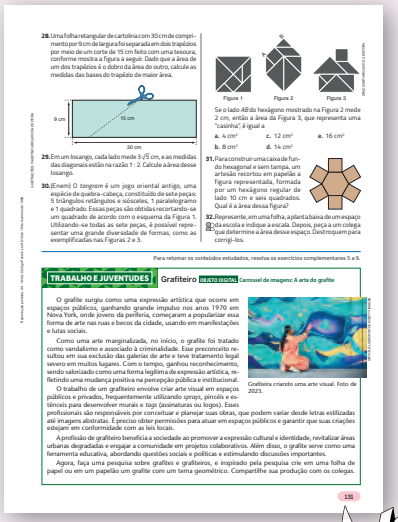
Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora?

a. 1.000 c. 1.500 e. 2.500
b. 1.250 d. 2.000

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 9.

197

Os **Exercícios propostos** têm o objetivo de verificar o aprendizado, por meio de uma aplicação mais imediata dos conteúdos, além de conexões com o cotidiano.


28. Uma folha retangular de cartolina com 30 cm de comprimento por 9 cm de largura foi separada em dois trapézios por meio de um corte de 15 cm feito com uma tesoura, conforme mostra a figura a seguir. Dado que a área de um dos trapézios é o dobro da área do outro, calcule as medidas das bases do trapézio de maior área.

29. Em um losango, cada lado mede $3\sqrt{5}$ cm, e as medidas das diagonais estão na razão 1 : 2. Calcule a área desse losango.

30. (Enem) O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da Figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas Figuras 2 e 3.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na Figura 2 mede 2 cm, então a área da Figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a. 4 cm² c. 12 cm² e. 16 cm²
b. 8 cm² d. 14 cm²

31. Para construir uma caixa de fundo hexagonal e sem tampa, um artesão recortou em papelão a figura representada, formada por um hexágono regular de lado 10 cm e seis quadrados. Qual é a área dessa figura?

32. Represente, em uma folha, a planta baixa de um espaço da escola e indique a escala. Depois, peça a um colega que determine a área desse espaço. Destroquem para corrigi-los.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 5 a 9.

TRABALHO E JUVENTUDES Grafiteiro OBJETO DIGITAL Carrossel de imagens: A arte do grafite

O grafite surgiu como uma expressão artística que ocorre em espaços públicos, ganhando grande impulso nos anos 1970 em Nova York, onde jovens da periferia, começaram a popularizar essa forma de arte nas ruas e becos da cidade, usando em manifestações e lutas sociais.

Como uma arte marginalizada, no início, o grafite foi tratado como vandalismo e associado à criminalidade. Essa preconceito resultou em sua exclusão das galerias de arte e teve tratamento legal severo em muitos lugares. Com o tempo, ganhou reconhecimento, sendo valorizado como uma forma legítima de expressão artística, refletindo uma mudança positiva na percepção pública e institucional.

O trabalho de um grafiteiro envolve criar arte visual em espaços públicos e privados, frequentemente utilizando spray, pincéis e estênceis para desenvolver murais e logs (assinaturas ou logos). Esses profissionais são responsáveis por conceituar e planejar suas obras, que podem variar desde letras estilizadas até imagens abstratas. É preciso obter permissões para atuar em espaços públicos e garantir que suas criações estejam em conformidade com as leis locais.

A profissão de grafiteiro beneficia a sociedade ao promover a expressão cultural e identidade, revitalizar áreas urbanas degradadas e engajar a comunidade em projetos colaborativos. Além disso, o grafite serve como uma ferramenta educativa, abordando questões sociais e políticas e estimulando discussões importantes.

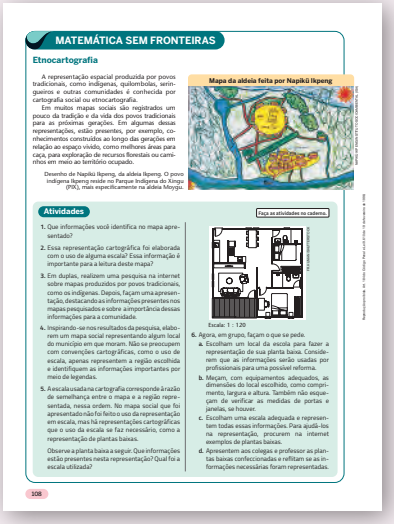
Agora, faça uma pesquisa sobre grafites e grafiteiros, e inspirado pela pesquisa crie em uma folha de papel ou em um papelão um grafite com um tema geométrico. Compartilhe sua produção com os colegas.

Grafiteira criando uma arte visual. Foto de 2023.

135

O boxe **Trabalho e juventudes** apresenta situações relacionadas ao mundo do trabalho ou às culturas juvenis conectadas ao conteúdo do capítulo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.


MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Etnocartografia

A representação espacial produzida por povos tradicionais, como indígenas, quilombolas, seringueiros e outras comunidades é conhecida por cartografia social ou etnocartografia.

Em muitos mapas sociais são registrados um pouco da tradição e da vida dos povos tradicionais para as próximas gerações. Em algumas dessas representações, estão presentes, por exemplo, conhecimentos construídos ao longo das gerações em relação ao espaço vivido, como melhores áreas para caça, para exploração de recursos florestais ou caminhos em meio ao território ocupado.

Mapa da aldeia feita por Napikü Ikpeng

Desenho de Napikü Ikpeng, da aldeia Ikpeng. O povo indígena Ikpeng reside no Parque Indígena do Xingu (PIX), mais especificamente na aldeia Moygu.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Que informações você identifica no mapa apresentado?
2. Essa representação cartográfica foi elaborada com o uso de alguma escala? Essa informação é importante para a leitura deste mapa?
3. Em duplas, realizem uma pesquisa na internet sobre mapas produzidos por povos tradicionais, como os indígenas. Depois, façam uma apresentação, destacando as informações presentes nos mapas pesquisados e sobre a importância dessas informações para a comunidade.
4. Inspirando-se nos resultados da pesquisa, elaborem um mapa social representando algum local do município em que moram. Não se preocupem com convenções cartográficas, como o uso de escala, apenas representem a região escolhida e identifiquem as informações importantes por meio de legendas.
5. A escala usada na cartografia corresponde à razão de semelhança entre o mapa e a região representada, nessa ordem. No mapa social que foi apresentado não foi feito o uso da representação em escala, mas há representações cartográficas que o uso da escala se faz necessário, como a representação de plantas baixas.

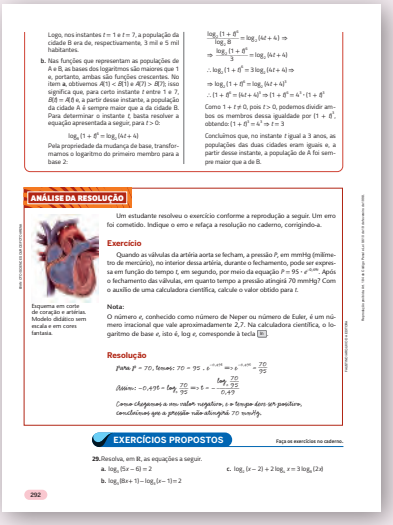
Observe a planta baixa a seguir. Que informações estão presentes nesta representação? Qual foi a escala utilizada?

Escala: 1 : 120

6. Agora, em grupo, façam o que se pede.
   a. Escolham um local da escola para fazer a representação de sua planta baixa. Considerem que as informações serão usadas por profissionais para uma possível reforma.
   b. Meçam, com equipamentos adequados, as dimensões do local escolhido, como comprimento, largura e altura. Também não esqueçam de verificar as medidas de portas e janelas, se houver.
   c. Escolham uma escala adequada e representem todas essas informações. Para ajudá-los na representação, procurem na internet exemplos de plantas baixas.
   d. Apresentem aos colegas e professor as plantas baixas confeccionadas e reflitam se as informações necessárias foram representadas.

108

O boxe **Análise da resolução** possibilita refletir sobre erros comuns na resolução de exercícios e mostra sua correção.


ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Esquema em corte de coração e artérias. Modelo didático sem escala e em cores fantasia.

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Indique o erro e refaça a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Quando as válvulas da artéria aorta se fecham, a pressão P, em mmHg (milímetro de mercúrio), no interior dessa artéria, durante o fechamento, pode ser expressa em função do tempo t, em segundo, por meio da equação $P = 95 \cdot e^{-4,49t}$. Após o fechamento das válvulas, em quanto tempo a pressão atingirá 70 mmHg? Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule o valor obtido para t.

Nota:

O número e, conhecido como número de Neper ou número de Euler, é um número irracional que vale aproximadamente 2,7. Na calculadora científica, o logaritmo de base e, isto é, $\log_e x$, corresponde à tecla ln.

Resolução

Para $P = 70$, temos: $70 = 95 \cdot e^{-4,49t} \Rightarrow e^{-4,49t} = \frac{70}{95}$

$\ln(e^{-0,49t}) = \log_e \frac{70}{95} \Rightarrow t = -\frac{\log_e \frac{70}{95}}{0,49}$

Como chegamos a um valor negativo, e o tempo deve ser positivo, concluímos que a pressão não atingirá 70 mmHg.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

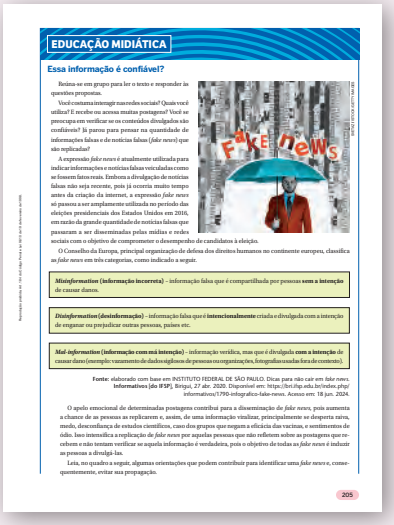
Faça os exercícios no caderno.

29. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir.
   a. $\log_2 (5x - 6) = 2$
   b. $\log_2 (8x + 1) - \log_2 (x - 1) = 2$
   c. $\log_2 (x - 2) + 2 \log_2 x = 3 \log_2 (2x)$

292

A seção **Matemática sem fronteiras** traz textos com situações de aplicação de conceitos estudados no capítulo.

A seção **Educação midiática** apresenta contextos e informações que visam explorar a importância da análise crítica de informações veiculadas nas mídias digitais.


EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Essa informação é confiável?

Reúna-se em grupo para ler o texto e responder às questões propostas.

Você costuma interagir nas redes sociais? Quais você utiliza? E recebe ou acessa muitas postagens? Você se preocupa em verificar se os conteúdos divulgados são confiáveis? Já parou para pensar na quantidade de informações falsas e de notícias falsas (*fake news*) que são replicadas?

A expressão *fake news* é atualmente utilizada para indicar informações e notícias falsas veiculadas como se fossem fatos reais. Embora a divulgação de notícias falsas não seja recente, pois já ocorria muito tempo antes da criação da internet, a expressão *fake news* só passou a ser amplamente utilizada no período das eleições presidenciais dos Estados Unidos em 2016, em razão da grande quantidade de notícias falsas que passaram a ser disseminadas pelas mídias e redes sociais com o objetivo de comprometer o desempenho de candidatos à eleição.

O Conselho da Europa, principal organização de defesa dos direitos humanos no continente europeu, classifica as *fake news* em três categorias, como indicado a seguir.

Misinformation (informação incorreta) – informação falsa que é compartilhada por pessoas **sem a intenção** de causar danos.

Disinformation (desinformação) – informação falsa que é **intencionalmente** criada e divulgada com a intenção de enganar ou prejudicar outras pessoas, países etc.

Mal-information (informação com má intenção) – informação verídica, mas que é divulgada **com a intenção** de causar dano (exemplo: vazamento de dados sigilosos de pessoas ou organizações, fotografias usadas fora de contexto).

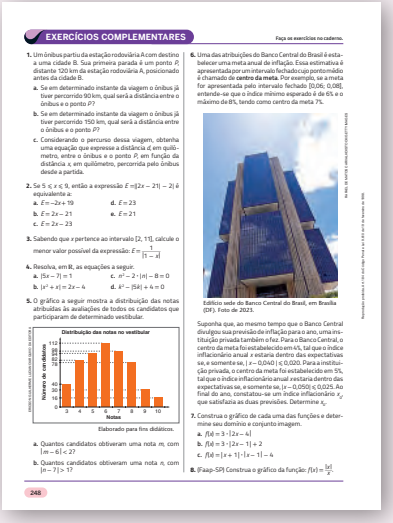
Fonte: elaborado com base em INSTITUTO FEDERAL DE SÃO PAULO. Dicas para não cair em *fake news*. **Informativos [do IFSP]**, Birigui, 27 abr. 2020. Disponível em: https://bri.ifsp.edu.br/index.php/informativos/1790-infografico-fake-news. Acesso em: 18 jun. 2024.

O apelo emocional de determinadas postagens contribui para a disseminação de *fake news*, pois aumenta a chance de as pessoas as replicarem e, assim, de uma informação viralizar, principalmente se despertar raiva, medo, desconfiança de estudos científicos, caso dos grupos que negam a eficácia das vacinas, e sentimentos de ódio. Isso intensifica a replicação de *fake news* por aquelas pessoas que não refletem sobre as postagens que recebem e não tentam verificar se aquela informação é verdadeira, pois o objetivo de todas as *fake news* é induzir as pessoas a divulgá-las.

Leia, no quadro a seguir, algumas orientações que podem contribuir para identificar uma *fake news* e, consequentemente, evitar sua propagação.

205

Os **Exercícios complementares** oferecem questões de aprofundamento, com fixação e revisão dos assuntos abordados.


EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Um ônibus partiu da estação rodoviária A com destino a uma cidade B. Sua primeira parada é um ponto P, distante 120 km da estação rodoviária A, posicionado antes da cidade B.
   a. Se em determinado instante da viagem o ônibus já tiver percorrido 90 km, qual será a distância entre o ônibus e o ponto P?
   b. Se em determinado instante da viagem o ônibus já tiver percorrido 150 km, qual será a distância entre o ônibus e o ponto P?
   c. Considerando o percurso dessa viagem, obtenha uma equação que expresse a distância d, em quilômetro, entre o ônibus e o ponto P, em função da distância x, em quilômetro, percorrida pelo ônibus desde a partida.
2. Se $5 \leq x \leq 9$, então a expressão $E = |2x - 21| - 2|$ é equivalente a:
   a. $E = -2x + 19$
   b. $E = 2x - 21$
   c. $E = 2x - 23$
   d. $E = 23$
   e. $E = 21$
3. Sabendo que x pertence ao intervalo $[2, 11]$, calcule o menor valor possível da expressão: $E = \frac{1}{|1 - x|}$
4. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir.
   a. $|5x - 7| = 3$
   b. $|x^2 + x| = 2x - 4$
   c. $x^2 - 2 \cdot |x| - 8 = 0$
   d. $x^2 - |5x| + 4 = 0$
5. O gráfico a seguir mostra a distribuição das notas atribuídas às avaliações de todos os candidatos que participaram de determinado vestibular.

Elaborado para fins didáticos.

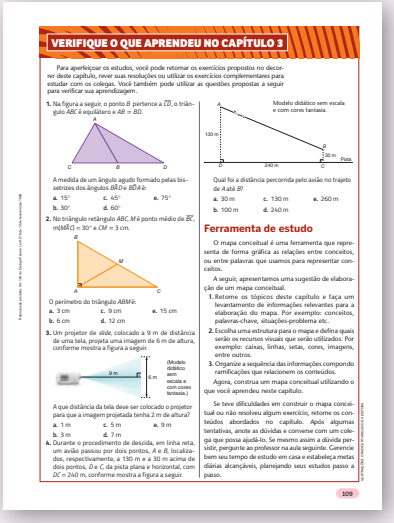
   a. Quantos candidatos obtiveram uma nota n, com $|n - 6| < 2$?
   b. Quantos candidatos obtiveram uma nota n, com $|n - 7| > 1$?
6. Uma das atribuições do Banco Central do Brasil é estabelecer uma meta anual de inflação. Essa estimativa é apresentada por um intervalo fechado cujo ponto médio é chamado de **centro da meta**. Por exemplo, se a meta for apresentada pelo intervalo fechado [0,06; 0,08], entende-se que o índice mínimo esperado é de 6% e o máximo de 8%, tendo como centro da meta 7%.

Edifício sede do Banco Central do Brasil, em Brasília (DF). Foto de 2023.

Suponha que, ao mesmo tempo que o Banco Central divulgou sua previsão de inflação para o ano, uma instituição privada também o fez. Para o Banco Central, o centro da meta foi estabelecido em 6%, tal que o índice inflacionário anual *x* estaria dentro das expectativas se, e somente se, $|x - 0{,}04| \leq 0{,}020$. Para a instituição privada, o centro da meta foi estabelecido em 5%, tal que o índice inflacionário anual *x* estaria dentro das expectativas se, e somente se, $|x - 0{,}050| \leq 0{,}025$. Ao final do ano, constatou-se um índice inflacionário x_p que satisfazia as duas previsões. Determine x_p.
7. Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem.
   a. $f(x) = 3 \cdot |2x - 4|$
   b. $f(x) = 3 \cdot |2x - 1| + 2$
   c. $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 1| - 4$
8. (Faap-SP) Construa o gráfico da função: $f(x) = \frac{|x|}{x}$

248

A seção **Verifique o que aprendeu no capítulo** traz exercícios e questões que possibilitam retomar os principais conteúdos do capítulo por meio de uma autoavaliação.


VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 3

Para aperfeiçoar os estudos, você pode retomar os exercícios propostos no decorrer deste capítulo, rever suas resoluções ou utilizar os exercícios complementares para estudar com os colegas. Você também pode utilizar as questões propostas a seguir para verificar sua aprendizagem.

1. Na figura a seguir, o ponto B pertence a $\overline{CD}$, o triângulo ABC é equilátero e $AB = BD$.

A medida de um ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos $BÂD$ e $BDÂ$ é:
   a. 15°
   b. 30°
   c. 45°
   d. 60°
   e. 75°

2. No triângulo retângulo ABC, M é ponto médio de $\overline{BC}$, $m(\widehat{MÂC}) = 30°$ e $CM = 3$ cm.

O perímetro do triângulo ABM é:
   a. 3 cm
   b. 6 cm
   c. 9 cm
   d. 12 cm
   e. 15 cm

3. Um projetor de slide, colocado a 9 m de distância de uma tela, projeta uma imagem de 6 m de altura, conforme mostra a figura a seguir.

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

A que distância da tela deve ser colocado o projetor para que a imagem projetada tenha 2 m de altura?
   a. 1 m
   b. 3 m
   c. 5 m
   d. 7 m
   e. 9 m

4. Durante o procedimento de descida, em linha reta, um avião passou por dois pontos, A e B, localizados, respectivamente, a 130 m e a 30 m acima de dois pontos, D e C, da pista plana e horizontal, com $DC = 240$ m, conforme mostra a figura a seguir.

Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

Qual foi a distância percorrida pelo avião no trajeto de A até B?
   a. 30 m
   b. 100 m
   c. 130 m
   d. 240 m
   e. 260 m

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos.

A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

1. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.
2. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais que serão utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.
3. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retorne os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Garanta bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

109

Ícones usados na coleção

Recursos tecnológicos

Produção de textos ou problemas

Atividade oral

Atividade em dupla ou em grupo

OBJETO DIGITAL Carrossel de imagens: Embalagens

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

OBJETIVOS DE DESENVOLVIMENTO SUSTENTÁVEL

Você já ouviu falar da **Agenda 2030**? Em 2015, a Organização das Nações Unidas (ONU) lançou os **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)**, com metas desafiadoras para acabar com a pobreza até 2030 e buscar um futuro sustentável para todos. Esses objetivos formam a base da chamada Agenda 2030.

Os 193 países que assinaram o documento, incluindo o Brasil, comprometeram-se a implementar esse plano de ação global, que envolve governos, empresas, instituições e sociedade civil. O monitoramento e a avaliação da agenda são fundamentais nos níveis global, nacional e regional, exigindo cooperação e engajamento de todos os setores da sociedade.

A seguir, apresentamos os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.



ODS 1

ERRADICAÇÃO DA POBREZA

Acabar com a pobreza em todas as formas e em todos os lugares.



ODS 2

FOME ZERO E AGRICULTURA SUSTENTÁVEL

Erradicar a fome, alcançar a segurança alimentar, melhorar a nutrição e promover a agricultura sustentável.



ODS 3

SAÚDE E BEM-ESTAR

Garantir o acesso à saúde de qualidade e promover o bem-estar para todos, em todas as idades.



ODS 4

EDUCAÇÃO DE QUALIDADE

Garantir educação inclusiva, de qualidade e equitativa, promovendo aprendizado contínuo para todos.



ODS 5

IGUALDADE DE GÊNERO

Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas.



ODS 6

ÁGUA POTÁVEL E SANEAMENTO

Garantir a disponibilidade e a gestão sustentável da água potável e do saneamento para todos.



ODS 7

ENERGIA LIMPA E ACESSÍVEL

Garantir o acesso a fontes de energia confiáveis, sustentáveis e modernas para todos.



ODS 8

TRABALHO DECENTE E CRESCIMENTO ECONÔMICO

Promover crescimento econômico inclusivo e sustentável, com emprego pleno e trabalho digno para todos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

ODS 9

INDÚSTRIA, INOVAÇÃO E INFRAESTRUTURA

Construir infraestruturas resilientes, promover a industrialização inclusiva e sustentável e fomentar a inovação.

ODS 10

REDUÇÃO DAS DESIGUALDADES

Reduzir as desigualdades no interior dos países e entre países.

ODS 11

CIDADES E COMUNIDADES SUSTENTÁVEIS

Tornar as cidades e comunidades mais inclusivas, seguras, resilientes e sustentáveis.

ODS 12

CONSUMO E PRODUÇÃO RESPONSÁVEIS

Garantir padrões de consumo e de produção sustentáveis.

ODS 13

AÇÃO CONTRA A MUDANÇA GLOBAL DO CLIMA

Adotar medidas urgentes para combater as alterações climáticas e os seus impactos.

ODS 14

VIDA NA ÁGUA

Conservar e usar de forma responsável os oceanos, os mares e os recursos marinhos para o desenvolvimento sustentável.

ODS 15

VIDA TERRESTRE

Proteger, restaurar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres, gerindo florestas, combatendo a desertificação, revertendo a degradação dos solos e preservando a biodiversidade.

ODS 16

PAZ, JUSTIÇA E INSTITUIÇÕES EFICAZES

Promover sociedades pacíficas e inclusivas para o desenvolvimento sustentável, garantindo o acesso à justiça e construindo instituições eficazes e responsáveis em todos os níveis.

ODS 17

PARCERIAS E MEIOS DE IMPLEMENTAÇÃO

Reforçar os meios de implementação e revitalizar a parceria global para o desenvolvimento sustentável.

Fonte: ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Sobre o nosso trabalho para alcançar os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável no Brasil**. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs. Acesso em: 22 set. 2024.

Neste livro, você encontrará indicações dos ODS quando houver propostas, temas ou conceitos com os quais eles podem estar relacionados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RELEITURA DOS ÍCONES DA ONU POR VINICIUS ROSSIGNOL FELIPE

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 A linguagem dos conjuntos..... 10

1. A Teoria dos conjuntos.....11
2. Representação de um conjunto 12
3. Conjunto e subconjunto 13
4. Operações entre conjuntos.....18
5. Problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos 26
6. Conjuntos numéricos.....32
7. O eixo real 44

- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 1 48

CAPÍTULO 2 Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira..... 50

1. Equações polinomiais do 1º grau.....52
2. Inequações polinomiais do 1º grau.....55
3. Sistemas de equações polinomiais do 1º grau.....56
4. Equações polinomiais do 2º grau.....58
5. Matemática financeira 62

- MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS O sistema Price...68
- EDUCAÇÃO MIDIÁTICA Golpes em ambiente virtual 76
- MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS A linha da pobreza 78
- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 2 80

CAPÍTULO 3 Geometria plana: triângulos e proporcionalidade 81

1. As origens da Geometria.....82
2. Polígonos.....82
3. Triângulos 84
4. Propriedades dos triângulos.....89
5. Proporcionalidade entre segmentos de reta.....93
6. Semelhança de figuras planas 95
7. Semelhança de triângulos.....96
8. Relações métricas no triângulo retângulo 100

- MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS A teoria da pavimentação 105
- MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS Etnocartografia 108
- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 3 109

CAPÍTULO 4 Circunferência, círculo e área de figuras planas 110

1. Circunferência e círculo.....112
2. Posições relativas envolvendo a circunferência.....115
3. Ângulos na circunferência.....117
4. Perímetro da circunferência 120
5. Cálculo de áreas.....124
6. Cálculo da área de algumas figuras planas.....125

- MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS Uma técnica da Cartografia 136
- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 4 140

CAPÍTULO 5 A linguagem das funções 142

1. Sistema de coordenadas 144
2. O conceito de função 146
3. Representação de uma função 149
4. Imagem de *x* pela função *f* 153
5. Função real de variável real 160
6. Zero (ou raiz) de uma função 161
7. Variação de uma função.....163
8. Funções inversas 167
9. Gráficos estatísticos.....173

- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 5 185

CAPÍTULO 6 Função polinomial do 1º grau ou função afim 186

1. A função polinomial do 1º grau ou função afim...188
2. Funções definidas por mais de uma sentença 196
3. Variação de sinal da função afim 198
4. Inequação-produto 200
5. Inequação-quociente 201

- EDUCAÇÃO MIDIÁTICA Essa informação é confiável? 205
- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 6 207

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 7 Função polinomial do 2º grau ou função quadrática **208**

1. A função polinomial do 2º grau ou função quadrática 209
2. Gráfico da função quadrática 210
3. Otimização da função quadrática 215
4. Variação de sinal da função quadrática 219
5. Inequações polinomiais do 2º grau 221

- MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS Curva de possibilidades de produção 226
- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 7 227

CAPÍTULO 8 Função modular **229**

1. Distância entre dois pontos do eixo real 230
2. Módulo, equações e inequações modulares 230
3. Função modular 238
4. O erro relativo 242

- MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS Hábito saudável e longevidade 246
- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 8 249

CAPÍTULO 9 Função exponencial **250**

1. Potenciação e radiciação 252
2. A função exponencial 261
3. Equação exponencial 265

- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 9 271

CAPÍTULO 10 Função logarítmica **272**

1. Os fundamentos da teoria dos logaritmos 274
2. O conceito de logaritmo 275
3. Função logarítmica 284

- MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS A idade dos fósseis 289

4. Equações logarítmicas 290

- VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 10 294

RESPOSTAS **295**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS **304**

SUMÁRIO DOS OBJETOS DIGITAIS

Infográfico clicável: Coleta seletiva 10
Infográfico clicável: Inteligência artificial (IA) no recrutamento de RH 30
Mapa clicável: Taxas de alfabetização no Brasil 64
Podcast: Financiamentos 68
Podcast: Consumo e moda 75
Vídeo: Pitágoras 101
Infográfico clicável: Sistema de irrigação por pivô central fixo 110
Carrossel de imagens: A arte do grafite 131
Podcast: *Bullying* e *cyberbullying* 184
Vídeo: Os aplicativos e os trabalhadores plataformizados 204
Vídeo: Armadilhas das *fake news* 206
Carrossel de imagens: Embalagens 215
Mapa clicável: Patrimônios da Humanidade no Brasil 229
Vídeo: Medidas e incertezas 243
Podcast: Imunização 255
Carrossel de imagens: Mulheres na Ciência 283
Infográfico clicável: Arqueologia 289

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 1

A linguagem dos conjuntos

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 12

Meio sustentável

OBJETO DIGITAL **Infográfico clicável: Coleta seletiva**

A reciclagem e a sustentabilidade são práticas do cotidiano necessárias à conservação e à preservação ambiental. A prática de reciclagem consiste em reaproveitar parte do lixo que seria descartado na natureza. Ao fazer isso, estamos contribuindo para a sustentabilidade e, a partir dela, economizamos matéria-prima e reduzimos gastos para a fabricação de novos produtos.

Para a reciclagem acontecer, são necessárias algumas etapas. A mais importante delas é a separação dos materiais, que inclui a coleta seletiva, a limpeza e a separação adequada dos materiais. O Conselho Nacional do Meio Ambiente (Conama) estabeleceu um código com dez cores de lixeira, uma cor para identificação e coleta seletiva de cada tipo de resíduo. As lixeiras mais comuns em ambientes comerciais e residenciais são: azul, vermelho, verde e amarelo. Com a colaboração de todos, separando os resíduos de maneira correta para reciclagem, vamos construir um futuro mais sustentável.



Lixeiras para separação de resíduos: plástico, metal, orgânico, papel, vidro, madeira, resíduos ambulatoriais, radioativos, perigosos e lixo não reciclável. A reciclagem pode transformar o lixo em recurso!

Além da teoria

Além da teoria: Respostas pessoais.

Em diversas situações do cotidiano, classificamos, agrupamos e organizamos informações e objetos de acordo com algumas características em comum. Por exemplo, ao separar o lixo descartado para a reciclagem ou ao agrupar músicas por gêneros em nossas listas de reprodução, estamos, intuitivamente, utilizando a ideia de conjuntos, que é a mesma ideia de coleção ou agrupamento.

1. Cite outros exemplos em que a ideia de conjuntos esteja presente.

2. Escreva com as próprias palavras o que é um conjunto numérico.

3. Em sua opinião, qual é a importância da reciclagem sustentável? Converse com os colegas.

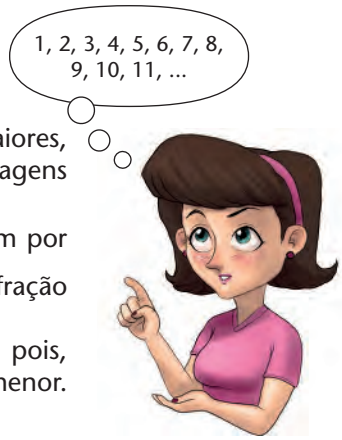
Para saber mais sobre reciclagem sustentável, acesse o *site* indicado a seguir.

Coleta seletiva. Disponível em: https://antigo.mma.gov.br/cidades-sustentaveis/residuos-solidos/catadores-de-materiais-reciclaveis/reciclagem-e-reaproveitamento.html. Acesso em: 7 ago. 2024.

MONTAGEM: MARCEL LISBOA; FOTOS: NIKOLAENKO EKATERINA/SHUTTERSTOCK; BIRTH BRAND/SHUTTERSTOCK; ELENABSL/SHUTTERSTOCK; DANIEL KITE/SHUTTERSTOCK; ONICA ALEXANDRU SERGIU/SHUTTERSTOCK; FROGELLA/SHUTTERSTOCK; MARINA_UA/SHUTTERSTOCK; NGANHAYCUOI/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. A Teoria dos conjuntos



BRUNO MOTA/ARQUIVO DA EDITORA

Até quanto é possível contar?

Para qualquer número atingido na contagem, sempre existirão números maiores, que podem ser contados. Por isso, dizemos que os números resultantes de contagens são **infinitos**.

Analogamente, metade de 1 é $\frac{1}{2}$, metade de $\frac{1}{2}$ é $\frac{1}{4}$, metade de $\frac{1}{4}$ é $\frac{1}{8}$, e assim por diante. Repetindo esse procedimento, isto é, calculando sempre a metade da fração resultante da operação anterior, qual será a menor fração a que podemos chegar?

Não existe a menor fração a que podemos chegar com esse procedimento, pois, obtida uma fração, sempre podemos dividi-la por 2, conseguindo uma fração menor. Por isso, dizemos que as frações resultantes desse processo são **infinitas**.

O conceito de infinito, claramente presente nessas duas situações, motivou intensos debates científicos, filosóficos e teológicos no decorrer dos séculos, desde a Antiguidade grega (cerca de 450 a.C.) até a segunda metade do século XIX, quando os matemáticos George Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916) definiram precisamente esse conceito. Para isso, utilizaram a nova teoria criada por Cantor em 1872: a **Teoria dos conjuntos**.

A definição de infinito foi um dos principais objetivos dessa teoria. Isso, aliás, pode ser observado no primeiro artigo publicado sobre o assunto, em que Cantor trata da comparação de coleções infinitas.

Além da definição rigorosa de infinito e de muitas outras contribuições, a Teoria dos conjuntos unificou a linguagem em todos os ramos da Matemática.


FÁBIO CORTEZ REIS/ ARQUIVO DA EDITORA

Representação artística do busto de George Cantor (1845-1918).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO PROPOSTO

Faça o exercício no caderno.

1. Os primeiros registros históricos sobre debates e tentativas de definir o conceito de infinito datam da Antiguidade grega, com os filósofos Zenão de Eleia (cerca de 490 a.C.-430 a.C.), Demócrito (cerca de 460 a.C.-370 a.C.), Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) e Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.). Os argumentos mais famosos sobre esses debates são, sem dúvida, os paradoxos de Zenão, com os quais ele pretendia provar a inconsistência do conceito de infinito (relacionado ao movimento, ao espaço e ao tempo) adotado até então.

Pesquise na internet "paradoxos de Zenão" e redija um breve texto sobre o paradoxo conhecido como "Aquiles e a tartaruga". Em seguida, apresente o resultado da pesquisa para os colegas e o professor. (A palavra **paradoxo** refere-se a uma ideia aparentemente absurda, contraditória.)

1. Pesquisa pessoal. Este exercício possibilita um trabalho interdisciplinar com Filosofia ao apresentar o conceito de paradoxo e sugerir uma pesquisa, proporcionando a oportunidade de os estudantes analisarem os processos culturais envolvidos no desenvolvimento de teorias e de conceitos como o de infinito. Você encontrará informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

Os conceitos primitivos

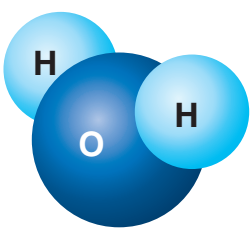
Os conceitos que iniciam a Teoria dos conjuntos são aceitos sem definição, pois, não existindo ainda a teoria, não há como defini-los; por isso, são chamados de **conceitos primitivos**. Na teoria dos conjuntos, esses conceitos são: **conjunto**, **elemento de um conjunto** e **pertinência entre elemento e conjunto**. A ideia de conjunto é a mesma de coleção, conforme mostram os exemplos a seguir.

Exemplos

a. Uma coleção de revistas é um **conjunto**. Cada uma dessas revistas é um **elemento** que **pertence** ao conjunto.

b. Os estudantes da sala de aula em que você estuda formam um **conjunto**. Você é um **elemento** que **pertence** a esse conjunto.

c. Uma molécula de água (H_2O) é um conjunto formado por três átomos: dois de hidrogênio (H) e um de oxigênio (O).



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Representação esquemática de uma molécula de água.

Observação

Na representação tabular, usa-se ponto e vírgula para separar números decimais, como no exemplo **c**, pois a vírgula poderia ser confundida com a vírgula que separa as casas decimais de cada número.

2. Representação de um conjunto

É usual dar nomes aos conjuntos usando letras maiúsculas (*A*, *B*, *C*, *D* etc.) e representar os elementos por letras minúsculas (*a*, *b*, *c*, *d* etc.).

Destacamos a seguir as três formas fundamentais de representação de um conjunto.

Representação tabular

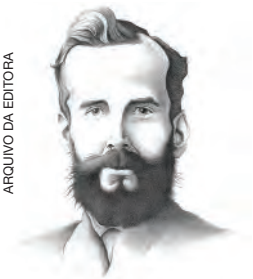
Na **representação tabular** de um conjunto, os elementos são apresentados entre chaves e separados por vírgula ou por ponto e vírgula.

Exemplos

a. $A = \{a, e, i, o, u\}$ **b.** $B = \{1, 2, 3, 4\}$ **c.** $C = \{3{,}2;\ 4{,}5;\ 8{,}9\}$

Note que, nos exemplos anteriores, *u* **é** elemento do conjunto *A*, mas **não é** elemento do conjunto *B*. Esses fatos são indicados, respectivamente, por:

- $u \in A$ (lê-se: "*u* pertence a *A*")
- $u \notin B$ (lê-se: "*u* não pertence a *B*")



FÁBIO CORTEZ REIS/ ARQUIVO DA EDITORA

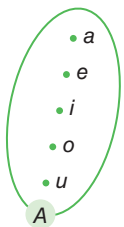
Representação artística do busto de John Venn (1834-1923).
Os diagramas de Venn, que são aplicados na Lógica, na Matemática, na Informática etc., receberam esse nome em homenagem ao matemático e filósofo inglês John Venn.

Representação por um diagrama de Venn

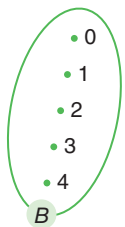
Na representação de um conjunto por um **diagrama de Venn**, os elementos são simbolizados por pontos interiores a uma região plana, delimitada por uma linha fechada que não se entrelaça.

Exemplos

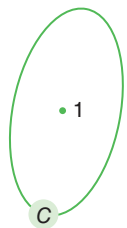
a.



b.



c.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Representação por uma propriedade

Na representação de um conjunto *A* por meio de uma **propriedade**, os elementos do conjunto são descritos pela propriedade que os determina. Representa-se o conjunto *A* por:

$$A = \{ x \mid x \text{ tem a propriedade } p\}$$

(lê-se: "*A* é o conjunto de **todos** os elementos *x*, tal que *x* tem a propriedade *p*")

Exemplos

a. $A = \{x \mid x \text{ é país da América do Sul}\}$



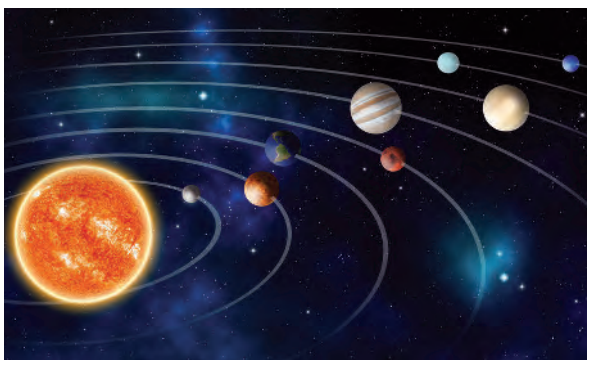
ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 45.

O conjunto *A* é formado por **todos** os países da América do Sul.

Os planetas do Sistema Solar são: Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno.

b. $B = \{x \mid x \text{ é planeta do Sistema Solar}\}$



WITHAN TOR/SHUTTERSTOCK

Representação artística do Sol com os planetas alinhados, baseada em imagens fornecidas pela Nasa. Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

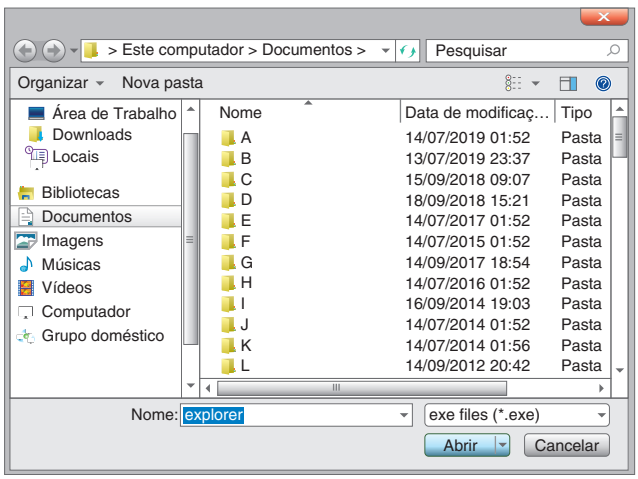
O conjunto *B* é formado por **todos** os planetas do Sistema Solar.

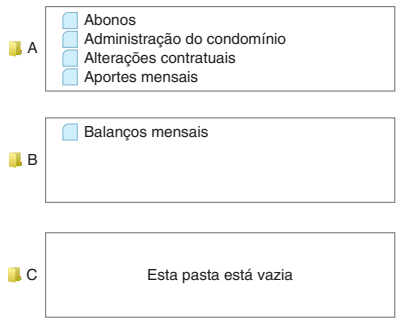
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Conjunto e subconjunto

Conjunto unitário e conjunto vazio

Carlos organiza suas pastas no computador de acordo com a ordem alfabética do nome dos arquivos, conforme a representação à esquerda. À direita, são mostrados os arquivos guardados nas pastas A, B e C.





ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Indicando por *A*, *B* e *C* os conjuntos de arquivos das pastas A, B e C, respectivamente, quantos elementos tem cada um desses conjuntos?

Observe que a pasta A tem 4 arquivos, a B tem apenas 1 arquivo, e a C não tem arquivo algum. Concluímos que o conjunto *A* tem 4 elementos, o *B* tem 1 elemento, e o *C* não tem elementos. Dizemos que *B* é um conjunto **unitário** e *C* é um conjunto **vazio**.

Conjunto unitário é aquele formado por um único elemento.

Conjunto vazio, representado por ∅ ou { }, é aquele que não tem elemento algum.

Exemplos

a. O conjunto $A = \{x \mid x \text{ é um número e } x \cdot 5 = 15\}$ é unitário, pois *A* é formado por um único elemento, isto é, $A = \{3\}$.

b. O conjunto $B = \{x \mid x \text{ é estrela do Sistema Solar}\}$ é unitário, pois o Sistema Solar tem uma única estrela: o Sol. Logo, $B = \{\text{Sol}\}$.

c. O conjunto $C = \{x \mid x \text{ é um número e } x \cdot 0 = 15\}$ é vazio, pois, como não existe número que satisfaça essa condição, *C* não tem elemento algum, isto é, $C = \varnothing$.

Conjunto finito e conjunto infinito

Um conjunto é **finito** se for vazio ou se for possível contar seus elementos um a um e chegar ao fim da contagem.

Um conjunto é **infinito** quando, por mais que se avance na contagem de seus elementos, sempre houver elementos a serem contados.

Exemplos

a. O conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ é um conjunto finito, pois podemos contar seus elementos e chegar ao fim da contagem.

b. O conjunto $C = \varnothing$ é um conjunto finito, pois é vazio.

c. Outros conjuntos infinitos que vamos usar como referência são: o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$; e o conjunto dos números inteiros: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Aproveite o exemplo de organização de pastas em um computador para perguntar aos estudantes se eles têm experiência com o uso do computador; explique que esse modelo de organização se assemelha à organização das imagens e vídeos em pastas, nos aplicativos do *smartphone*. Apresente outros exemplos, como: Qual é o conjunto das estrelas do Sistema Solar? Na língua portuguesa, qual é o conjunto das palavras proparoxítonas não acentuadas? Comente a conveniência de se considerar a existência do conjunto vazio. Ao admitirmos a existência do conjunto vazio, teremos sempre um conjunto como resposta a uma pergunta do tipo: "Qual é o conjunto dos elementos que têm a propriedade *p*?".

Sugerimos a leitura do livro de Ian Stewart **Em busca do infinito**: Uma história da Matemática dos primeiros números à teoria do caos. Com uma linguagem simples, o autor narra fatos da história da Matemática dos primeiros símbolos numéricos da Mesopotâmia até grandes problemas ainda insolúveis.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Apresente a noção de subconjunto por meio do conjunto formado pela população brasileira. Varie os exemplos: o conjunto dos estudantes da turma é subconjunto do conjunto dos estudantes da escola, entre outros.
Observe que a definição de subconjunto ($B \subset A$) não exige que B tenha algum elemento, mas que, se tiver todo elemento de B pertença a A.
Ressalte que o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

Subconjunto

Considere o conjunto P formado pela população nascida no Brasil. Com os elementos de P, podemos formar o conjunto H, de todos os homens nascidos no Brasil, e o conjunto M, de todas as mulheres nascidas no Brasil. Os conjuntos formados, H e M, são **subconjuntos** de P. Se um conjunto T de pessoas tem como elemento pelo menos uma pessoa que não tenha nascido no Brasil, dizemos que T não é subconjunto de P. Indicamos esses fatos por:

$H \subset P$ (lê-se: "H está contido em P")

$M \subset P$ (lê-se: "M está contido em P")

$T \not\subset P$ (lê-se: "T não está contido em P")

Dizer que um conjunto B é **subconjunto** de um conjunto A equivale a afirmar que, se x é elemento de B, então x é elemento de A.

Observe que, pela definição, se B é subconjunto de A, isso não significa que B tenha algum elemento, mas que, se tiver, todo elemento de B deverá pertencer a A.

A sentença $B \subset A$ equivale a $A \supset B$ (lê-se: "A contém B"), e a sentença $B \not\subset A$ equivale a $A \not\supset B$ (lê-se: "A não contém B").

Exemplos

a. $\{2, 5, 3\} \subset \{2, 5, 3, 8, 9\}$

b. $\{2, 5, 3\} \subset \{2, 5, 3\}$

c. $\{2, 5, 3\} \not\subset \{2, 5, 7, 9\}$

d. $\{2, 5, 3, 8, 9\} \supset \{2, 5, 3\}$

e. $\{2, 5, 7, 9\} \not\supset \{2, 5, 3\}$

f. $\{\text{cachorro, gato}\} \subset \{x \mid x \text{ é animal mamífero}\}$

Propriedades

P1. O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

$$\varnothing \subset A, \forall A$$

P2. Todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

$$A \subset A, \forall A$$

Observação

O símbolo $\forall$ é lido "qualquer que seja".

Exemplos

a. $\varnothing \subset \{5, 4, 3\}$

b. $\{5, 4, 3\} \subset \{5, 4, 3\}$

c. $\varnothing \subset \varnothing$

Reflexão

Escrevendo todos os subconjuntos do conjunto $M = \{a, b, c\}$, observa-se que ele tem 8 subconjuntos: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ e $\{a, b, c\}$. É possível calcular o número de subconjuntos do conjunto M sem precisar escrever todos eles?

Reflexão: Sim. Você encontrará informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

Igualdade de conjuntos

Observe que todo elemento do conjunto {1, 2, 3} também pertence ao conjunto {3, 2, 1} e que todo elemento de {3, 2, 1} também pertence a {1, 2, 3}. Por isso, dizemos que:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

Dois conjuntos A e B são iguais ($A = B$) se, e somente se, $A \subset B$ e $B \subset A$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

a. $\{b, c, d, e\} = \{e, b, d, c\}$ **b.** $\varnothing = \varnothing$

Notas:

1. Indicamos que dois conjuntos A e B não são iguais por $A \neq B$ (lê-se: "A é diferente de B").
2. Observe que $\{4, 5\} = \{4, 4, 4, 5, 5\}$, pois todo elemento do primeiro conjunto pertence ao segundo e todo elemento do segundo conjunto pertence ao primeiro. Por isso, convencionamos não repetir elementos em um conjunto.

Conjunto universo

Na linguagem cotidiana, usamos a palavra "universo" com vários significados. Um deles é o de conjunto de seres ou ideias que, em determinada circunstância, é tomado como referência. Por exemplo: o universo da Biologia é o conjunto dos seres vivos; o universo do Direito é o conjunto de regras que disciplinam as relações em sociedade. Na Matemática, a palavra "universo" assume significado semelhante.

Conjunto universo de um estudo, representado por U, é aquele ao qual pertencem todos os elementos relacionados a esse estudo.

Conceitue a igualdade de conjuntos por meio de uma situação do cotidiano. Por exemplo, pergunte qual dos conjuntos a seguir representa o conjunto das cores da bandeira brasileira: {verde, amarelo, azul, branco} ou {amarelo, branco, verde, azul}.
Explique, então, que os dois conjuntos são iguais, pois ambos representam as cores da bandeira brasileira.
Com base nesse exemplo, defina igualdade de conjuntos, enfatizando que a ordem dos elementos não é levada em consideração nessa definição.

Exemplos

a. Quando estudamos métodos de contagem, o conjunto universo é $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$, ou seja, é o conjunto dos números que podem resultar de uma contagem.

b. No estudo das figuras geométricas planas como conjuntos de pontos, o conjunto universo é o plano.

c. No estudo das figuras geométricas espaciais como conjuntos de pontos, o conjunto universo é o espaço tridimensional.

Separar e classificar é um procedimento básico em todas as ciências. Na Matemática, esse procedimento é realizado com eficácia pelos quadros, pelas tabelas e pela linguagem dos conjuntos, representados pelos diagramas de Venn, como estudaremos no exercício resolvido a seguir.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Para preencher uma vaga de gerente de produção em uma empresa, foram aplicadas avaliações de Matemática, Português e Inglês, com 16 candidatos, numerados de 1 a 16 pela ordem de inscrição. O quadro mostra os candidatos aprovados em cada disciplina de acordo com a seguinte convenção: a letra X indica que o candidato da respectiva coluna foi aprovado na disciplina mostrada na respectiva linha.

Candidatos aprovados por disciplina

Disciplina \ Candidato	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	X				X							X		X		X
Português			X		X		X	X	X		X		X			
Inglês		X	X	X	X	X		X		X					X	X

a. Sendo M, P e I os conjuntos dos números de inscrição dos candidatos aprovados em Matemática, Português e Inglês, respectivamente, represente os dados do quadro por um diagrama de Venn.

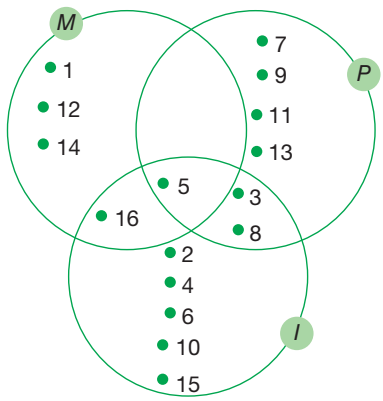
b. Quais foram os candidatos aprovados em Português e Inglês?

Resolução

a. Analisando o quadro, podemos escrever as informações listadas a seguir.

- Os candidatos aprovados apenas em Matemática foram os de números: 1, 12 e 14.
- Os candidatos aprovados apenas em Português foram os de números: 7, 9, 11 e 13.
- Os candidatos aprovados apenas em Inglês foram os de números: 2, 4, 6, 10 e 15.
- Nenhum candidato foi aprovado apenas em Matemática e Português.
- O único candidato aprovado apenas em Matemática e Inglês foi o de número 16.
- Os candidatos aprovados apenas em Português e Inglês foram os de números: 3 e 8.
- O único candidato aprovado nas três disciplinas foi o de número 5.

Com esses dados, construímos o diagrama:



b. Note que a pergunta não pediu que fossem identificados os candidatos aprovados **apenas** em Português e Inglês, mas sim os candidatos aprovados em Português e Inglês. Logo, o candidato de número 5, que foi aprovado nas três disciplinas, também deve ser incluído na resposta. Assim, os candidatos aprovados em Português e Inglês foram os de números: 3, 5 e 8.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

2. Represente, na forma tabular, cada um dos conjuntos a seguir. **2. a.** $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

a. $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}$

b. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\}$ **2. b.** $B = \{-3, 3\}$

c. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 9\}$ **2. c.** $C = \{3\}$

d. $D = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 \leqslant x < 100\}$ **2. d.** $D = \{9, 10, 11, 12, ..., 98, 99\}$

e. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 54\}$ **2. e.** $E = \{55, 56, 57, 58, ...\}$

3. Classifique como finito ou infinito cada um dos conjuntos a seguir.

a. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$ **3. a.** finito. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

b. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 5\}$ **3. b.** infinito. $B = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

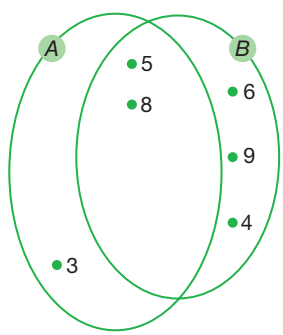
c. $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \text{ ou } x > 2\}$ **3. c.** infinito. $C = \{-3, 3, 4, 5, 6, ...\}$

d. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \text{ e } x > 2\}$ **3. d.** finito. $D = \{3\}$

e. $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \cdot 0 = 0\}$ **3. e.** infinito. $E = \mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

f. $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \cdot 0 = x\}$ **3. f.** finito. $F = \{0\}$

4. Observe o diagrama e classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.



a. $3 \in A$ **4. a.** verdadeira

b. $3 \in A$ e $3 \in B$ **4. b.** falsa

c. $3 \in A$ ou $3 \in B$ **4. c.** verdadeira

d. $5 \in A$ ou $5 \in B$ **4. d.** verdadeira

e. $5 \in A$ e $5 \notin B$ **4. e.** falsa

f. $\{5, 8\} \subset A$ **4. f.** verdadeira

g. $\{5, 8\} \subset B$ **4. g.** verdadeira

h. $\{6, 8\} \subset B$ **4. h.** verdadeira

i. $\{8, 4, 9\} \not\subset A$ **4. i.** verdadeira

j. Se $A = \{5, x, y\}$, então $x = 3$ e $y = 8$. **4. j.** falsa

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

5. Após o teste de um novo medicamento em dez culturas celulares, numeradas de 1 a 10, verificaram-se, como efeitos colaterais, os sintomas **A**, **B** e **C**. O pesquisador responsável pela equipe que realizou a experiência registrou em seu relatório um diagrama, que descreve a alteração em cada cultura submetida ao teste. *A*, *B* e *C* representam, respectivamente, os conjuntos das culturas celulares com alterações **A**, **B** e **C**.

a. Represente, na forma tabular, cada um dos conjuntos *A*, *B* e *C*.

b. Em vez de usar o diagrama, o pesquisador poderia organizar esses dados em um quadro, em que no cruzamento da linha alteração (**A**, **B** ou **C**) com a coluna cultura celular (1, 2, 3, ..., 10) ele assinalaria um X, indicando que tal alteração foi observada em tal cultura. Construa um quadro como esse.

6. O professor de Educação Física formou duas equipes, uma de basquetebol e outra de voleibol, para disputar uma Olimpíada do Ensino Médio. Devido à falta de inscritos nessas modalidades de esporte, o professor escalou alguns jogadores nas duas equipes titulares, conforme mostra o quadro a seguir, em que a letra X indica que o jogador da respectiva linha é titular da equipe da respectiva coluna.

Equipe titular de cada modalidade

Jogador	Basquetebol	Voleibol
Alex	X	
Carlos	X	
Gustavo	X	X
Ivan		X
Lucas	X	
Luís		X
Nelson		X
Paulo	X	X
Pedro		X

a. Indicando por *B* e *V* os conjuntos dos nomes dos jogadores titulares das equipes de basquetebol e de voleibol, respectivamente, represente esses conjuntos por um diagrama de Venn.

b. Quantos desses jogadores pertencem a apenas uma das equipes titulares? **6. b.** 7 jogadores

c. Identifique e liste as atividades físicas preferidas que os colegas de turma praticam. Depois, represente-as por meio de um diagrama de Venn.

6. c. Resposta pessoal.

d. Pesquise a importância de atividades físicas regulares para o bem-estar emocional e físico. Depois, converse com os colegas para compartilhar as informações que obtiveram na pesquisa.

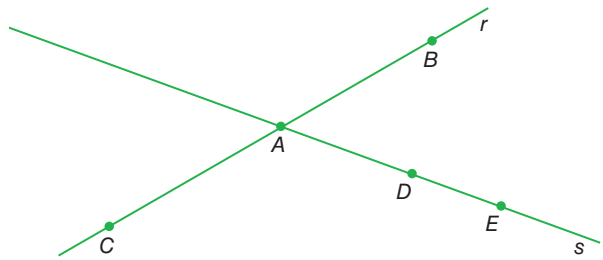
ODS 3

6. d. Resposta pessoal.

7. A linguagem dos conjuntos é usada em todos os ramos da Matemática. Neste exercício, aplicaremos essa linguagem à Geometria. Para isso, vamos recordar alguns conceitos.

- Pontos são nomeados por letras maiúsculas: *A*, *B*, *C*, *D* etc.
- Retas são nomeadas por letras minúsculas: *a*, *b*, *c*, *r*, *s*, *t* etc. Uma reta é um conjunto de pontos; logo, cada um de seus pontos é elemento da reta.
- Um segmento de reta de extremos *A* e *B* é representado por $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$. Um segmento de reta é um conjunto de pontos; logo, cada um de seus pontos é elemento do segmento de reta.
- Uma semirreta de origem *A* que passa por *B* é representada por $\overrightarrow{AB}$. Uma semirreta é um conjunto de pontos; logo, cada um de seus pontos é elemento da semirreta.

Considerando a figura, classifique em verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. $A \in r$ **7. a.** verdadeira

b. $A \subset r$ **7. b.** falsa

c. $\{A\} \subset r$ **7. c.** verdadeira

d. $\overrightarrow{AB} \in r$ **7. d.** falsa

e. $\overrightarrow{AB} \subset r$ **7. e.** verdadeira

f. $\overrightarrow{DE} \subset \overrightarrow{AE}$ **7. f.** verdadeira

g. $A \in \overrightarrow{AC}$ **7. g.** verdadeira

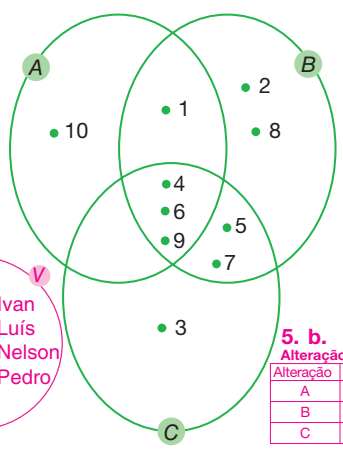
h. $A \subset \overline{AC}$ **7. h.** falsa

8. Considerando as situações apresentadas no exercício resolvido 1 e no exercício proposto 5, elabore um problema sobre uma situação fictícia que apresente um quadro organizando os dados do problema. Em seguida, represente os dados do quadro em um diagrama de Venn. Por fim, reúna-se com um colega e conversem sobre os problemas elaborados e como cada um pensou para construir o diagrama.

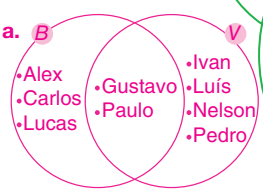
8. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



6. a.



5. b.

Alteração em culturas celulares

Alteração	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	X			X		X			X	X
B	X	X		X	X	X	X	X	X	
C			X	X	X	X	X		X	

5. a. $A = \{1, 4, 6, 9, 10\}$ $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $C = \{3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

4. Operações entre conjuntos

União (ou reunião) de conjuntos

Para se inscrever como jogadora da equipe de futebol feminino de uma escola, é necessário que a candidata tenha mais de 15 anos de idade **ou** esteja cursando o Ensino Médio. Vilma tem mais de 15 anos e está cursando o Ensino Fundamental; Cláudia tem menos de 15 anos e está cursando o Ensino Médio; Fernanda tem mais de 15 anos e está cursando o Ensino Médio; e Marcela tem menos de 15 anos e está cursando o Ensino Fundamental. Quais dessas quatro alunas da escola podem se inscrever?

Jogadoras praticando futebol de campo.



FOTOKOSTIC/SHUTTERSTOCK

Observe que, na exigência "ter mais de 15 anos de idade **ou** estar cursando o Ensino Médio", há duas condições: uma é "ter mais de 15 anos de idade", e a outra é "estar cursando o Ensino Médio". Se pelo menos uma dessas condições for obedecida, a exigência para a inscrição é satisfeita. Assim, apenas Vilma, Cláudia e Fernanda podem se inscrever.

É importante destacar que o conectivo **ou** nesse texto tem um sentido inclusivo, isto é, inclui, no conjunto das estudantes que podem efetivar a inscrição, todas cuja situação obedeça a apenas uma das duas condições e todas as que obedeçam às duas condições.

O conectivo **ou** com sentido inclusivo é usado na definição de união (ou reunião) de conjuntos, conforme segue:

Observação

$A \cup B$ é lido como "A união B".

A **união** de dois conjuntos, A e B, que indicaremos por $A \cup B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A **ou** a B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \textbf{ ou } x \in B\}$$

Exemplos

a. Sendo $A = \{7, 8, 9\}$ e $B = \{10, 11\}$, temos: $A \cup B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$.

b. Sendo $C = \{7, 8, 9, 10\}$ e $D = \{9, 10, 11, 12, 13\}$, temos: $C \cup D = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

c. Sendo $E = \{4, 5, 6\}$ e $F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, temos: $E \cup F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Conectado

Apresentamos uma proposta de construção de fluxograma. Você encontrará informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

Um algoritmo é uma sequência finita de etapas preestabelecidas que permite solucionar classes semelhantes de problemas. Uma das maneiras de representar um algoritmo é por meio de um fluxograma, que é uma representação gráfica da sequência de passos do algoritmo.

Os fluxogramas são amplamente utilizados para representar de forma visual um processo ou um fluxo de trabalho. Eles podem ser usados, por exemplo, para indicar as etapas de um processo de produção em uma empresa.

Na construção de um fluxograma, adotam-se figuras geométricas representando as etapas do algoritmo. Algumas delas estão representadas no quadro.

Terminal: indica o início e o final do fluxograma.	
Seta: conecta os demais símbolos, indicando o sentido do processo.	
Entrada/saída: indica a operação de entrada ou de saída de dados	
Processamento: indica uma ação (uma operação) a ser realizada.	
Decisão: indica o sentido a ser tomado dependendo da resposta, sim ou não.	Sim / Não

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe o problema a seguir e a construção de um fluxograma:

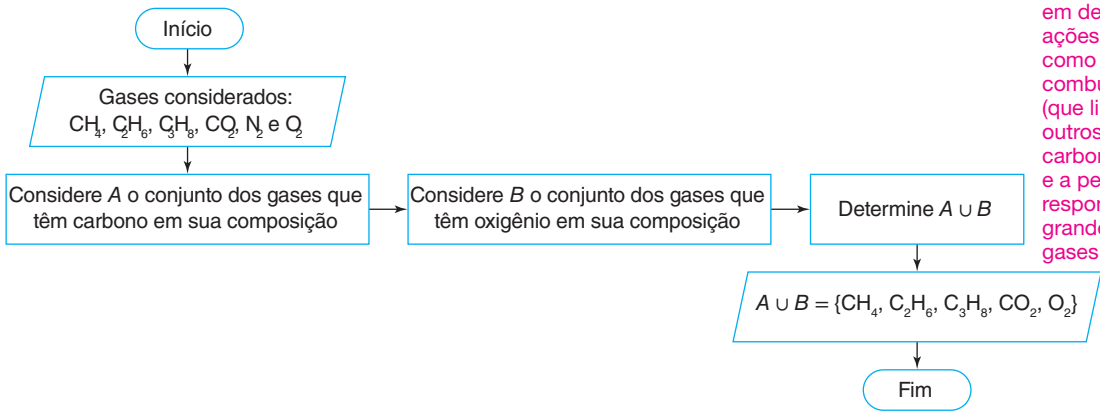
No quadro foi apresentada a composição química de cada molécula de alguns gases. As letras C, H, O e N representam átomos de carbono, hidrogênio, oxigênio e nitrogênio, respectivamente. O número subscrito à direita de cada letra indica o número de átomos, representados pela letra, que compõem a molécula. Por exemplo, cada molécula de metano (CH_4) é formada por 1 átomo de carbono e 4 de hidrogênio.

Composição química de cada molécula dos gases

Gás	Composição
Metano	CH_4
Etano	C_2H_6
Propano	C_3H_8
Dióxido de carbono	CO_2
Nitrogênio	N_2
Oxigênio	O_2

Em relação ao universo dos gases apresentados, se *A* é o conjunto dos gases que têm carbono em sua composição e *B* é o conjunto dos gases que têm oxigênio, quais são os gases que fazem parte do conjunto A ∪ B?

Vamos construir um fluxograma para representar os passos com a solução desse problema.

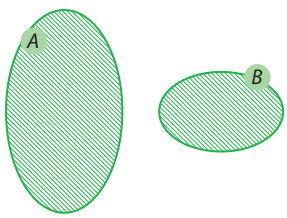


Este momento propicia o trabalho com a disciplina de Química. Uma sugestão de proposta interdisciplinar é solicitar aos estudantes que identifiquem no quadro o conjunto formado pelos gases que compõem a atmosfera da Terra. Dentre os gases do quadro, são componentes naturais da atmosfera: nitrogênio, oxigênio, dióxido de carbono e metano. Desses, metano e dióxido de carbono são considerados gases de efeito estufa, pois intensificam esse efeito natural. Convém lembrar, no entanto, que a concentração de ambos na atmosfera vem aumentando rapidamente nas últimas décadas, em decorrência de ações humanas, como a queima de combustíveis fósseis (que libera, entre outros, o dióxido de carbono), a agricultura e a pecuária, responsáveis por grandes emissões de gases do efeito estufa.

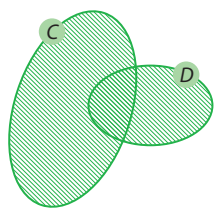
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

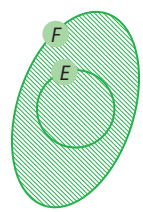
Representação da união de conjuntos por diagramas de Venn



Toda a região hachurada representa $A \cup B$.



Toda a região hachurada representa $C \cup D$.



Toda a região hachurada representa $E \cup F$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedades da união de conjuntos

Sendo *A*, *B* e *C* conjuntos quaisquer, temos:

P1. Se *B* é subconjunto de *A*, então $A \cup B = A$; e, se $A \cup B = A$, então *B* é subconjunto de *A*. Ou seja: $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$

P2. $A \cup B = B \cup A$

P3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Nota:

O símbolo ⇔ (lê-se: "se, e somente se") representa a relação de equivalência, que é a implicação mútua entre duas proposições. Assim, a sentença $B \subset A \Leftrightarrow A \cup B = A$ significa que:

$$B \subset A \Rightarrow A \cup B = A \text{ e } A \cup B = A \Rightarrow B \subset A$$

Como consequência da propriedade P1, vem:

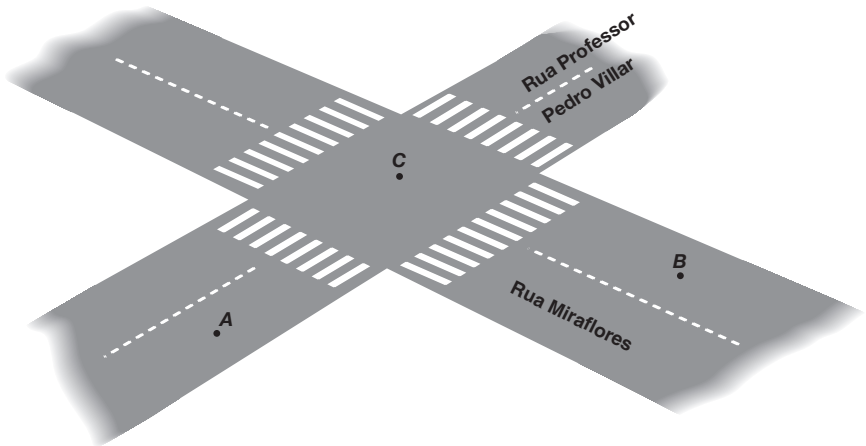
$$\varnothing \cup A = A \text{ e } A \cup A = A$$

E, como consequência da propriedade P3, a união de mais de dois conjuntos A_1, A_2, A_3, ..., A_n pode ser definida da seguinte maneira:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \textbf{ ou } x \in A_2 \textbf{ ou } x \in A_3 \textbf{ ou } \ldots \textbf{ ou } x \in A_n\}$$

Intersecção de conjuntos

A figura a seguir representa o cruzamento das ruas Miraflores e Professor Pedro Villar.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que o ponto *A* pertence à rua Professor Pedro Villar, o ponto *B* pertence à rua Miraflores, e o ponto *C* pertence às duas ruas simultaneamente, pois se encontra no cruzamento delas. Por pertencer à rua Professor Pedro Villar **e** à rua Miraflores, dizemos que o ponto *C* pertence à **intersecção** das duas ruas.

O conectivo **e**, com o sentido de simultaneidade, conforme usado anteriormente, é adotado na definição de intersecção de conjuntos.

Observação

$A \cap B$ é lido como "*A* intersecção *B*".

A **intersecção** de dois conjuntos, *A* e *B*, que indicaremos por $A \cap B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a *A* e a *B*.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Se a intersecção entre os conjuntos *A* e *B* é o conjunto vazio, dizemos que *A* e *B* são **disjuntos**.

Conectado: Resposta no final do livro.

Conectado

Utilizando as informações dos exemplos **a** e **b**, construa um fluxograma que defina a intersecção dos elementos dos conjuntos *N* e *D*.

Exemplos

a. Sendo $M = \{5, 6, 7, 8\}$ e $N = \{7, 8, 9, 10\}$, temos: $M \cap N = \{7, 8\}$

b. Sendo $C = \{3, 4, 5\}$ e $D = \{8, 9\}$, temos: $C \cap D = \varnothing$

c. Sendo $E = \{b, c, d, e\}$ e $F = \{a, b, c, d, e, f\}$, temos: $E \cap F = \{b, c, d, e\}$

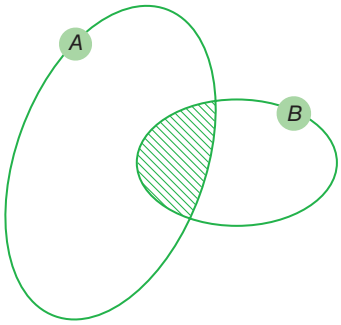
d. Retomando a composição química de alguns gases, apresentada na seção **Conectado** do tópico **União (ou reunião) de conjuntos**, temos que, em relação ao universo dos gases do quadro:

$$A \cap B = \{\text{dióxido de carbono}\}$$

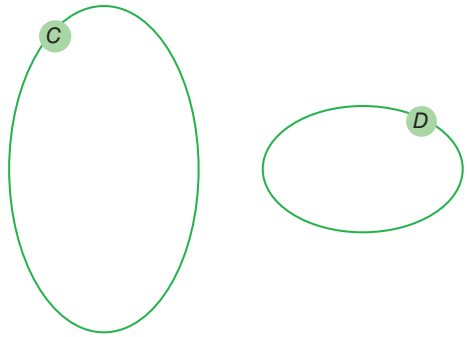
Isso significa que o dióxido de carbono é o único gás do quadro que tem carbono e oxigênio em sua composição.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

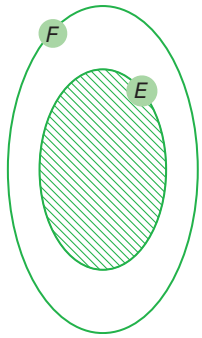
Representação da intersecção de conjuntos por diagramas de Venn



Toda a região hachurada representa $A \cap B$.



Os conjuntos C e D são disjuntos, isto é: $C \cap D = \varnothing$.



Toda a região hachurada representa $E \cap F$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedades da intersecção de conjuntos

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, temos:

P1. Se B é subconjunto de A, então $A \cap B = B$; e, se $A \cap B = B$, então B é subconjunto de A. Ou seja: $B \subset A \Leftrightarrow A \cap B = B$

P2. $A \cap B = B \cap A$

P3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Como consequência da propriedade P1, vem:

$$\varnothing \cap A = \varnothing \text{ e } A \cap A = A$$

E, como consequência da propriedade P3, a intersecção de mais de dois conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ pode ser definida da seguinte maneira:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \textbf{ e } x \in A_2 \textbf{ e } x \in A_3 \textbf{ e } \ldots \textbf{ e } x \in A_n\}$$

P4. Propriedade distributiva da intersecção em relação à união:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

P5. Propriedade distributiva da união em relação à intersecção:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

9. São dados os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x \leqslant 2\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 3\}$

$C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 5\}$

$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3 \leqslant x \leqslant 8\}$

Determine:

a. $A \cup B$

b. $A \cap B$

c. $A \cup D$

d. $A \cap D$

e. $A \cup B \cup D$

9. a. $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
9. b. $A \cap B = \{0, 1, 2\}$
9. c. $A \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
9. d. $A \cap D = \varnothing$
9. e. $A \cup B \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
9. f. $A \cap B \cap C = \{0, 1, 2\}$
9. g. $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$
9. h. $(A \cup D) \cap (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
9. i. $(A \cap D) \cup (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3\}$

f. $A \cap B \cap C$

g. $A \cap B \cap C \cap D$

h. $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

i. $(A \cap D) \cup (B \cap C)$

10. O número de elementos de um conjunto finito X é indicado por $n(X)$. Por exemplo, se $X = \{a, e, i, o, u\}$, temos que $n(X) = 5$. De acordo com essa notação, indique a alternativa correta para quaisquer conjuntos finitos A e B. **10.** alternativa **d**

a. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

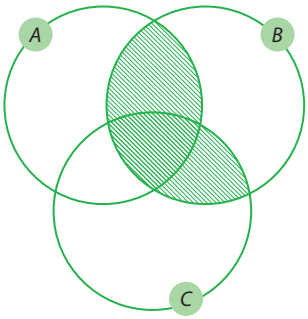
b. $n(A \cup B) > n(A) + n(B)$

c. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) + n(A \cap B)$

d. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

e. $n(A \cup B) > n(A)$

11. Os três círculos simbolizam os conjuntos A, B e C.



A região hachurada representa:

a. $(B \cup A) \cap C$

b. $(B \cap A) \cup C$

c. $(B \cup C) \cap A$

d. $B \cap (A \cup C)$

e. $B \cup (A \cap C)$

11. alternativa **d**

12. Os diagramas de Venn sintetizam informações, facilitando a visão global das relações entre conjuntos. Por exemplo, com o auxílio desses diagramas, podemos entender facilmente a distinção entre Inglaterra, Grã-Bretanha e Reino Unido.

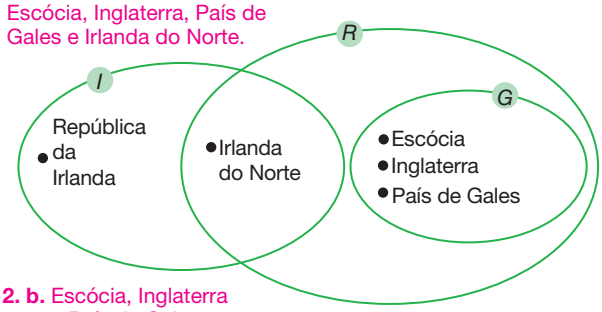
O diagrama a seguir apresenta os conjuntos:

$R = \{x \mid x \text{ é nação do Reino Unido}\}$

$I = \{y \mid y \text{ é nação da Ilha da Irlanda}\}$

$G = \{z \mid z \text{ é nação da Grã-Bretanha}\}$

12. a. Escócia, Inglaterra, País de Gales e Irlanda do Norte.



12. b. Escócia, Inglaterra e País de Gales.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Com base no diagrama, resolva as questões.

a. Quais são as nações que formam o Reino Unido?

b. Quais são as nações que formam a Grã-Bretanha?

c. Determine o conjunto $G \cap I$. **12. c.** $G \cap I = \varnothing$

d. Represente, na forma tabular, o conjunto $R \cap I$.

e. Represente, na forma tabular, o conjunto $R \cup I$.

f. Represente, na forma tabular, o conjunto $(R \cup I) \cap G$. **12. d.** $R \cap I$ = {Irlanda do Norte}

13. Considere o conjunto universo U das pessoas nascidas no Brasil e os conjuntos a seguir.

$A = \{x \in U \mid x \text{ nasceu na região Sul do Brasil}\}$

$B = \{y \in U \mid y \text{ nasceu na região Sudeste do Brasil}\}$

$C = \{z \in U \mid z \text{ nasceu na região Centro-Oeste do Brasil}\}$

$D = \{p \in U \mid p \text{ nasceu na região Nordeste do Brasil}\}$

$E = \{q \in U \mid q \text{ nasceu na região Norte do Brasil}\}$

Brasil: divisão por regiões



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 9. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2023. p. 112.

Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir, supondo que todas as pessoas mencionadas nasceram no Brasil.

a. Se Pedro nasceu em Minas Gerais, então ele pertence a B. **13. a.** verdadeira

b. Se Apolinário nasceu no Piauí, então ele pertence a E. **13. b.** falsa

13. c. falsa

c. Se Carlos pertence a E, então ele é amazonense.

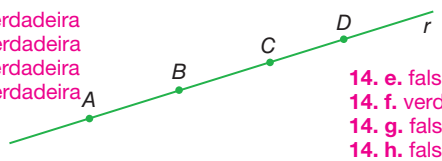
d. Se Lucas não pertence a $(A \cup B \cup C)$, então ele não é gaúcho. **13. d.** verdadeira

e. Se Luíza não pertence a $(C \cup D \cup E)$, então ela não é carioca. **13. e.** falsa

f. Se José não pertence a $(A \cup D) \cap (B \cup D)$, então ele não é baiano. **13. f.** verdadeira

14. A figura a seguir apresenta quatro pontos distintos, A, B, C e D, pertencentes a uma reta r.

14. a. verdadeira
14. b. verdadeira
14. c. verdadeira
14. d. verdadeira



14. e. falsa
14. f. verdadeira
14. g. falsa
14. h. falsa

Reúna-se com um colega e classifiquem em verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir.

a. $\overline{AB} \cup \overline{BC} = \overline{AC}$

b. $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \overline{BC}$

c. $\overrightarrow{BC} \cup \overline{AB} = \overrightarrow{AC}$

d. $\overrightarrow{BC} \cup \overrightarrow{CB} = r$

e. $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{CB} = r$

f. $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \overline{BC}$

g. $\overline{AD} \cup \overline{BC} = \overline{BC}$

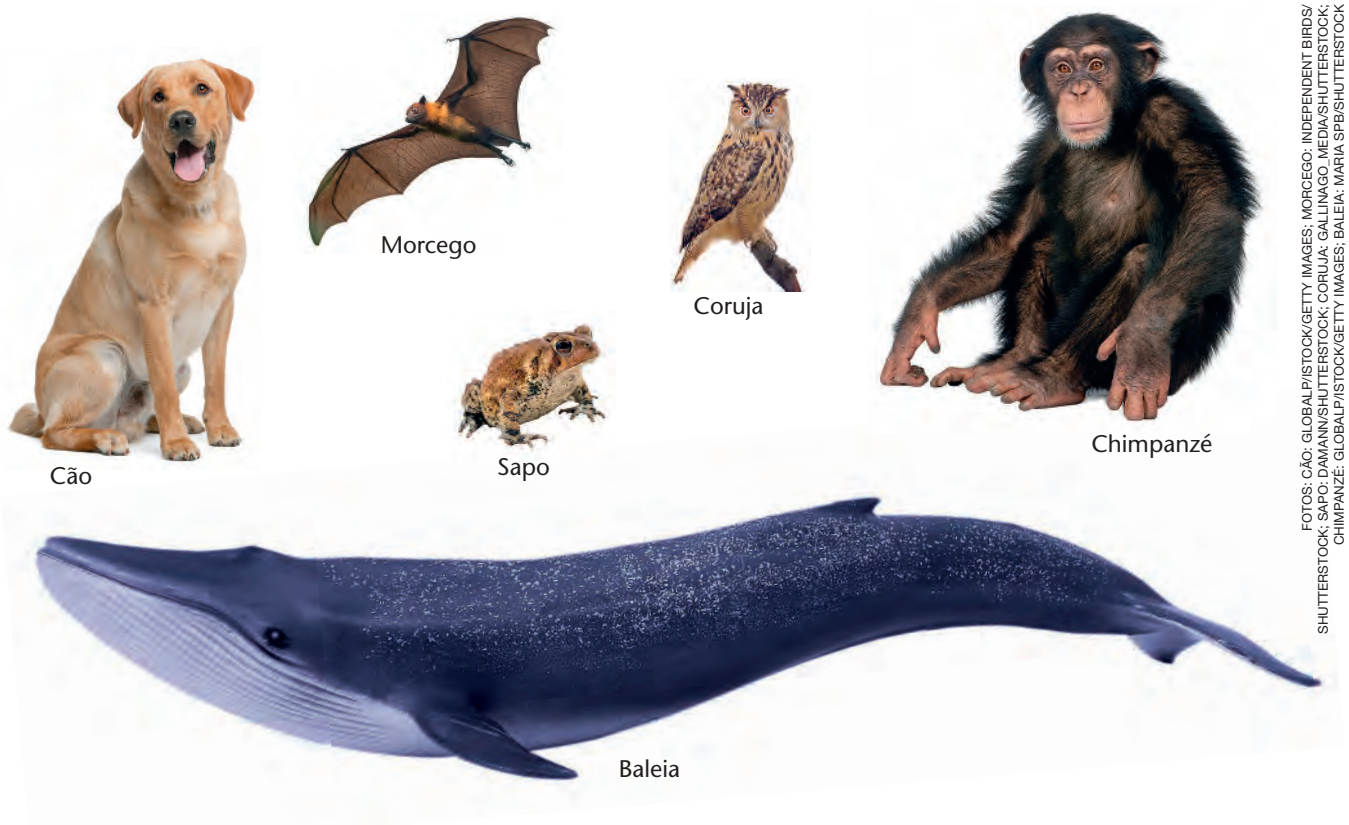
h. $\overrightarrow{CD} \cup \overrightarrow{BD} = \overline{BD}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

12. e. $R \cup I$ = {Escócia, Inglaterra, País de Gales, Irlanda do Norte, República da Irlanda}
12. f. $(R \cup I) \cap G$ = {Escócia, Inglaterra, País de Gales}

Conjunto diferença

Uma avaliação de Ciências da Natureza do Ensino Fundamental apresentou a seguinte questão: Quais dos animais retratados a seguir são mamíferos?



FOTOS: CÃO: GLOBALP/ISTOCK/GETTY IMAGES; MORCEGO: INDEPENDENT BIRDS/SHUTTERSTOCK; SAPO: DAMANN/SHUTTERSTOCK; CORUJA: GALLINAGO_MEDIA/SHUTTERSTOCK; CHIMPANZÉ: GLOBALP/ISTOCK/GETTY IMAGES; BALEIA: MARIA SPB/SHUTTERSTOCK

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os animais.)

Pedro respondeu corretamente a essa questão do seguinte modo: "Dentre os animais citados, são mamíferos: o cão, o morcego, o chimpanzé e a baleia."

Renato respondeu, também corretamente, de outra maneira: "Todos os animais citados, **menos** o sapo e a coruja, são mamíferos."

Observe que, em sua resposta, Renato usou uma espécie de **subtração**. Ele **tirou** {sapo, coruja} do conjunto {cão, morcego, sapo, coruja, chimpanzé, baleia}, ou seja, de todos os animais citados. Logo, entende-se que Renato apontou como mamíferos os animais do conjunto {cão, morcego, chimpanzé, baleia}.

Essa ideia de subtração, tão utilizada no dia a dia, é aplicada na definição de diferença de conjuntos.

A **diferença** de dois conjuntos, A e B, nessa ordem, que indicamos por $A - B$, é o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a A e não pertencem a B.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Exemplos

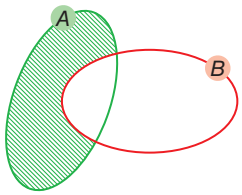
a. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, temos:
$A - B = \{1, 2, 3\}$ e $B - A = \{6, 7, 8, 9\}$

b. Sendo $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $D = \{3, 4, 5\}$, temos: $C - D = \{1, 2, 6\}$ e $D - C = \varnothing$

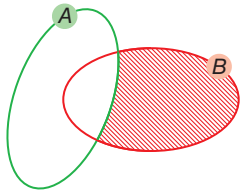
c. Sendo $E = \{1, 2, 3\}$ e $F = \{4, 5, 6\}$, temos: $E - F = E$ e $F - E = F$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

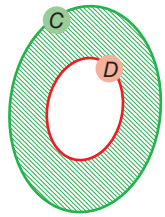
Representação da diferença de conjuntos por diagramas de Venn



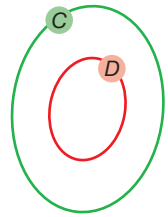
Toda a região hachurada representa $A - B$.



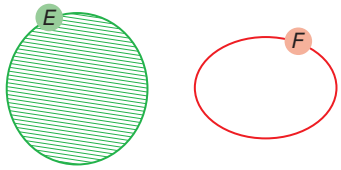
Toda a região hachurada representa $B - A$.



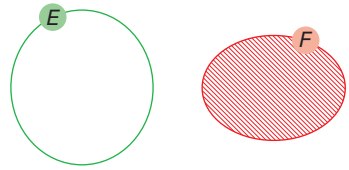
Toda a região hachurada representa $C - D$.



Como $D \subset C$, temos: $D - C = \varnothing$.



Toda a região hachurada representa $E - F$.

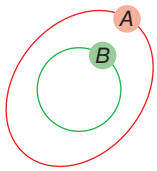


Toda a região hachurada representa $F - E$.

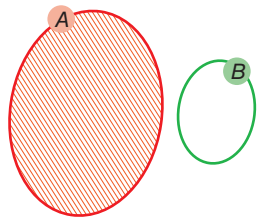
Propriedades da diferença de conjuntos

Sendo A e B conjuntos quaisquer, temos:

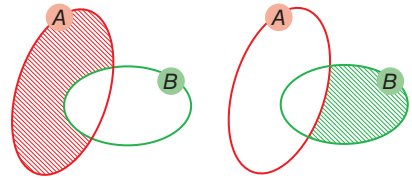
P1. $B \subset A \Leftrightarrow B - A = \varnothing$



P2. $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A - B = A$



P3. $A \neq B \Leftrightarrow A - B \neq B - A$



$A - B$ $\qquad$ $B - A$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Sabendo que $A - B = \{5, 8, 2\}$, $B - A = \{3, 6\}$ e $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, determine os conjuntos A e B.

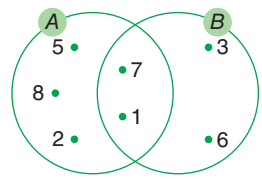
Resolução

Vamos construir um diagrama para auxiliar a resolução:

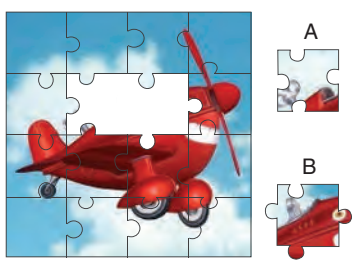
(1) Inicialmente, representamos os elementos de $A - B$, que são aqueles que pertencem a A e não pertencem a B.

(2) Depois, representamos os elementos de $B - A$, que são aqueles que pertencem a B e não pertencem a A.

(3) Finalmente, representamos os elementos de $A \cap B$, que são aqueles que pertencem a $A \cup B$ e não foram representados em (1) nem em (2).



Portanto, $A = \{1, 7, 2, 8, 5\}$ e $B = \{1, 7, 3, 6\}$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Conjunto complementar

Provavelmente, em algum momento de sua vida, você montou um quebra-cabeça e formou, assim, uma imagem com peças encaixantes, como mostra a ilustração. Vamos usar essa ilustração para entender a ideia de complementar.

Note que, encaixando as peças A e B nas posições vazias do quadro, completamos a imagem. Por isso, dizemos que essas peças são o **complemento** daquelas que já foram colocadas para completar a imagem. Assim, o **complemento** é aquilo que se inclui em uma parte para **completar** o todo.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exatamente essa ideia é aplicada na definição de conjunto complementar, apresentada a seguir.

Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subset B$. Chama-se **complementar** de A em relação a B, que indicamos por $\complement_B^A$ (lê-se: "complementar de A em relação a B"), o conjunto cujos elementos são todos aqueles que pertencem a B e não pertencem a A.

$$A \subset B \Leftrightarrow \complement_B^A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$$

A condição necessária e suficiente para que exista $\complement_B^A$ é que $A \subset B$. Caso contrário, dizemos que não existe complementar de A em relação a B.

Observação

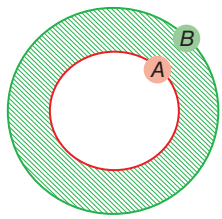
O conjunto $\{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}$ é exatamente a diferença $B - A$. Assim, temos: $A \subset B \Leftrightarrow \complement_B^A = B - A$

Exemplos

a. Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos $A \subset B$; logo, existe complementar de A em relação a B, que é igual a $B - A$, isto é: $\complement_B^A = B - A = \{4, 5\}$.

b. Sendo $D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{3, 4, 6, 7\}$, temos $D \not\subset E$; logo, não existe $\complement_E^D$.

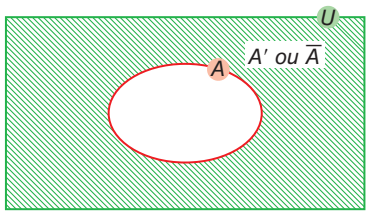
Representação do complementar de um conjunto por diagramas de Venn



Toda a região hachurada representa $\complement_B^A$.

Complementar de um conjunto A em relação a um universo U

Quando tivermos um conjunto universo U, previamente fixado, indicaremos o complementar de A em relação a U simplesmente por A' ou por $\overline{A}$, em vez de $\complement_B^A$.

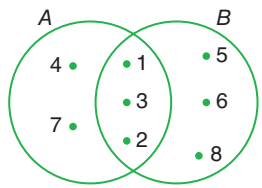


Toda a região hachurada representa $\complement_U^A$, que será indicado por A' ou $\overline{A}$.

Converse com os estudantes sobre o significado da palavra complemento, ou seja, aquilo que completa. Proponha perguntas do tipo:
• Qual é o complementar do conjunto das consoantes em relação ao conjunto das letras do nosso alfabeto?
• Qual é o complementar do conjunto dos números naturais pares em relação ao conjunto dos números naturais?
• Considerando o conjunto E = {janeiro, fevereiro, março, abril} de nomes de meses, qual é o complementar de E em relação ao conjunto dos nomes dos meses de um ano?
Também é importante explorar situações em que não seja possível aplicar o conceito de complemento, por exemplo: Considerando o conjunto $F = \{a, n, p\}$ de letras, qual é o complementar de F em relação ao conjunto das letras que compõem a palavra "estudante"?

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Considerando os conjuntos A e B representados no diagrama, determine $\complement_{A \cup B}^{(A \cap B)}$.



Resolução

Como $A \cap B$ é subconjunto de $A \cup B$, dizemos que existe o conjunto $\complement_{A \cup B}^{(A \cap B)}$ e que este é formado pelos elementos que pertencem a $A \cup B$ e não pertencem a $A \cap B$. Logo:

$$\complement_{A \cup B}^{(A \cap B)} = \{4, 7, 5, 6, 8\}$$

Explore um pouco mais o **exercício resolvido 3**, perguntando:
• Dados dois conjuntos quaisquer E e F, sempre existe $\complement_{E \cup F}^{(E \cap F)}$?
(Resposta: Sim, porque $(E \cap F) \subset (E \cup F)$)
• Dados dois conjuntos quaisquer E e F, se $\complement_{E \cup F}^{(E \cap F)} = \emptyset$, que relação existe entre E e F?
(Resposta: $E = F$)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

15. Sendo $E = \{3, 8, 6, 4\}$, $F = \{1, 2, 3, 8, 6, 4, 9\}$ e $G = \{4, 5, 6, 7, 8\}$, determine:

a. $F - E$ **15. a.** $\{1, 2, 9\}$

b. $G - E$ **15. b.** $\{5, 7\}$

c. $(E \cup G) - F$ **15. c.** $\{5, 7\}$

d. $(F - G) \cup (G - F)$ **15. d.** $\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

e. $\complement_F^E$ **15. e.** $\{1, 2, 9\}$

f. $\complement_F^{(E \cap G)}$ **15. f.** $\{1, 2, 3, 9\}$

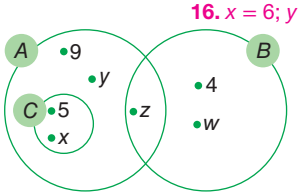
g. $\complement_F^G$ **15. g.** Não existe, pois $G \not\subset F$.

h. $\complement_E^E$ **15. h.** $\varnothing$

i. $\complement_F^{\varnothing}$ **15. i.** $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$

16. O diagrama apresenta os conjuntos A, B e C.

16. $x = 6$; $y = 8$; $z = 7$; $w = 1$



Determine os números x, y, z e w, sabendo que $\complement_A^C = \{9, 8, 7\}$, $\complement_A^{(A \cap B)} = \{9, 8, 5, 6\}$ e $B - A = \{4, 1\}$.

17. Sendo U o conjunto universo de todos os estudantes da escola onde você estuda, considere os seguintes conjuntos:

$A = \{x \in U \mid x \text{ é do sexo masculino}\}$

$B = \{y \in U \mid y \text{ tem no mínimo 1,5 m de altura}\}$

$C = \{z \in U \mid z \text{ tem no máximo 1,7 m de altura}\}$

Indicando por $\overline{X}$ o complementar de X em relação a U, represente cada conjunto a seguir por meio de uma propriedade que determine seus elementos.

a. $\overline{A}$

b. $\overline{B}$

c. $\overline{C}$

d. $\overline{B \cap C}$

e. $\overline{B} \cup \overline{C}$

17. a. $\overline{A} = \{x \in \cup \mid x \text{ é do sexo feminino}\}$

17. b. $\overline{B} = \{y \in \cup \mid y \text{ tem menos de 1,5 m de altura}\}$

17. c. $\overline{C} = \{z \in \cup \mid z \text{ tem mais de 1,7 m de altura}\}$

17. d. $\overline{B \cap C} = \{p \in \cup \mid p \text{ tem menos de 1,5 m ou mais de 1,7 m de altura}\}$

17. e. $\overline{B} \cup \overline{C} = \{q \in \cup \mid q \text{ tem menos de 1,5 m ou mais de 1,7 m de altura}\}$

18. Resposta pessoal.

18. Elabore um problema envolvendo conjunto complementar. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, destroquem para corrigir.

5. Problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos

Neste tópico, vamos resolver problemas que relacionam as operações entre conjuntos finitos com a quantidade de elementos desses conjuntos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. Foi realizada uma pesquisa com 350 pessoas para avaliar a eficácia de um anúncio na divulgação de dois produtos novos, A e B. Ao final da pesquisa, constatou-se que, dos entrevistados, precisamente:

- 280 conheciam o produto A;
- 80 conheciam os dois produtos;
- 20 não conheciam nenhum dos dois produtos.

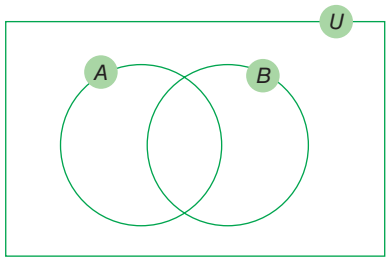
De acordo com esses dados, quantas pessoas entrevistadas conheciam apenas o produto B?



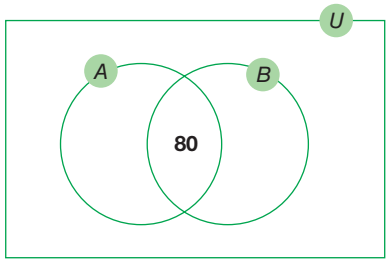
Resolução

Sejam:

- U o conjunto universo das pessoas entrevistadas;
- A o conjunto das pessoas entrevistadas que conhecem o produto A;
- B o conjunto das pessoas entrevistadas que conhecem o produto B.



Primeiro, vamos considerar o conjunto $A \cap B$; aquele das pessoas que conhecem os dois produtos. Essa intersecção possui 80 elementos. Para nos orientar, vamos escrever o número 80 na região correspondente a $A \cap B$.



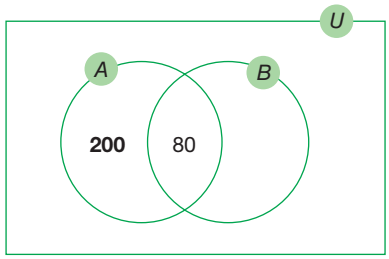
O conjunto A é o das pessoas que conhecem o produto A. Tal conjunto tem 280 elementos; porém já

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA
FERNANDO FAVORETTO/CRIAR IMAGEM
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

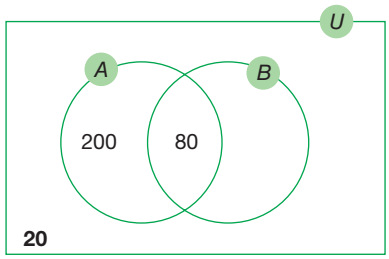
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

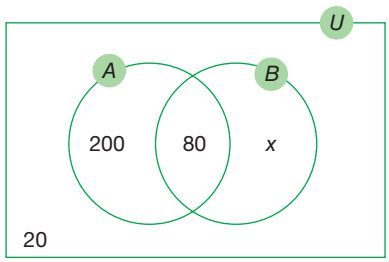
foram consideradas 80 pessoas desse total, faltando, portanto, 200 pessoas para completar o conjunto. O número 200 deve ser escrito na região que corresponde a $A - B$.



A região que corresponde a $(A \cup B)'$ é a das pessoas que não conhecem nenhum dos dois produtos. Nessa região, escrevemos o número 20.



A região que corresponde ao conjunto $B - A$ é a das pessoas que conhecem apenas o produto B. Seja x o número de elementos desse conjunto.



Como o número de elementos do universo é 350, temos: $20 + 200 + 80 + x = 350$

Resolvendo, obtemos $x = 50$. Portanto, o número de elementos do conjunto $B - A$ é 50.

Logo, 50 pessoas conheciam apenas o produto B.

5. Dos 180 funcionários que trabalham no escritório de uma empresa, precisamente:

- 108 falam inglês;
- 68 falam espanhol;
- 32 não falam inglês nem espanhol.

Quantos funcionários desse escritório falam as duas línguas (inglês e espanhol)?



A resolução deste exercício segue os passos do pensamento computacional. Você encontrará informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

Resolução

Vamos resolver este exercício por etapas.

1. Compreender o problema

O problema apresenta o total de funcionários de uma empresa.

2. Elaborar um plano de resolução

Precisamos pensar e registrar um possível plano para a resolução do problema.

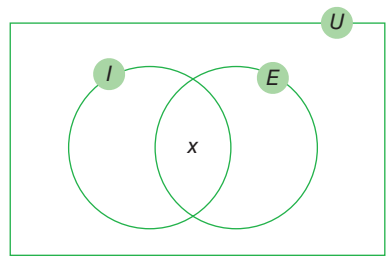
Para determinar a quantidade pedida, que vamos indicar por x, construiremos um diagrama de Venn e colocaremos nele os dados nos locais corretos. Com isso, poderemos calcular o número de elementos da intersecção dos conjuntos I e E, que será o valor de x.

3. Executar o plano elaborado

Para executar o plano, consideramos:

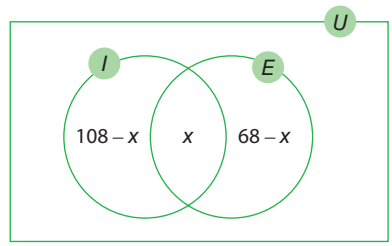
- U o conjunto dos 180 funcionários;
- I o conjunto dos funcionários que falam inglês;
- E o conjunto dos funcionários que falam espanhol.

Vamos indicar inicialmente o número de elementos da intersecção $I \cap E$. Como esse número é exatamente o que o problema pede, vamos indicá-lo por x.

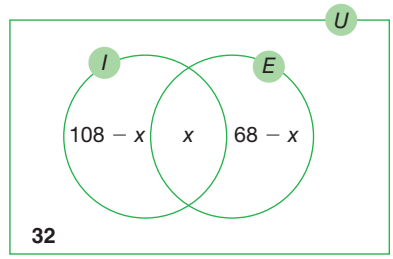


O conjunto I tem 108 elementos. Como já admitimos que x desses elementos estão em I, faltam $(108 - x)$ elementos em I, que devem ser indicados na região $I - E$.

O conjunto E tem 68 elementos. Como já admitimos que x desses elementos estão em E, faltam $(68 - x)$ elementos, que devem ser indicados na região $E - I$.



Se 32 funcionários não falam inglês nem espanhol, o conjunto $(I \cup E)'$ deve ter 32 elementos.



SERRALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Como o conjunto U tem 180 elementos, fazemos:

$$32 + 108 - x + x + 68 - x = 180$$

Resolvendo, obtemos $x = 28$.

Portanto, 28 funcionários do escritório falam as duas línguas (inglês e espanhol).

4. Verificar

Verifique se a resolução foi feita corretamente, analisando cada um dos passos executados.

6. O departamento pessoal de uma indústria automobilística fez entrevistas com 58 candidatos a vagas nos departamentos de pintura, tapeçaria e montagem. Em um momento das entrevistas, cada candidato respondeu "sim" ou "não" a cada uma das perguntas:

(1) Você já trabalhou em departamento de pintura?

(2) Você já trabalhou em departamento de tapeçaria?

(3) Você já trabalhou em departamento de montagem?

O resultado desse questionamento é apresentado no quadro a seguir.

Quantidade de candidatos que responderam "sim" às perguntas

Resposta "sim"	Quantidade de candidatos
À pergunta 1	39
À pergunta 2	30
À pergunta 3	31
Às perguntas 1 e 2 simultaneamente	20
Às perguntas 1 e 3 simultaneamente	18
Às perguntas 2 e 3 simultaneamente	14
Às perguntas 1, 2 e 3 simultaneamente	8

Elaborado para fins didáticos.

PEDRO VILELA/GETTY IMAGES



Automóveis em linha de montagem de uma fábrica, localizada em Betim (MG). Foto de 2020.

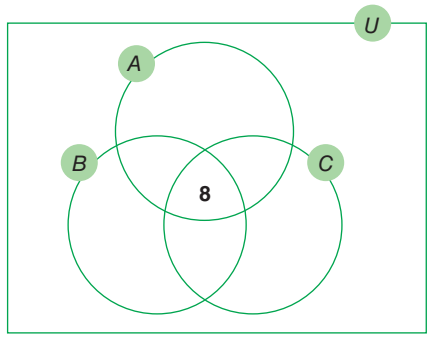
De acordo com esse resultado, quantos candidatos responderam "não" a todas as perguntas?

Resolução

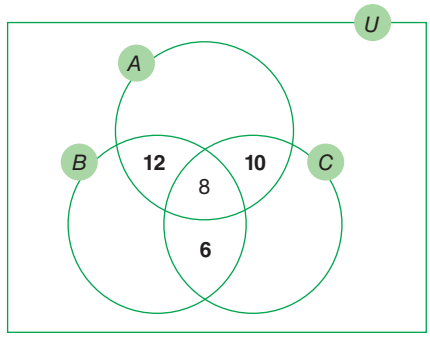
Sejam:

- U o conjunto dos 58 candidatos entrevistados;
- A o conjunto dos candidatos que responderam "sim" à pergunta 1;
- B o conjunto dos candidatos que responderam "sim" à pergunta 2;
- C o conjunto dos candidatos que responderam "sim" à pergunta 3.

Indicaremos, inicialmente, o número de elementos da intersecção dos conjuntos A, B e C. Como 8 candidatos responderam "sim" às perguntas 1, 2 e 3 simultaneamente, escrevemos o número 8 na região que corresponde a $A \cap B \cap C$.



Em seguida, indicamos o número de elementos das intersecções dos conjuntos A, B e C, tomados dois a dois. Como 20 candidatos responderam "sim" às perguntas 1 e 2 simultaneamente e já indicamos 8 elementos nessa intersecção, faltam 12 elementos em $A \cap B$; como 18 candidatos responderam "sim" às perguntas 1 e 3 simultaneamente e já indicamos 8 elementos nessa intersecção, faltam 10 elementos em $A \cap C$; como 14 candidatos responderam "sim" às perguntas 2 e 3 simultaneamente e já indicamos 8 elementos nessa intersecção, faltam 6 elementos em $B \cap C$.



Como 39 candidatos responderam "sim" à pergunta 1 e já indicamos 30 elementos em A, faltam 9 elementos para completar o conjunto; como 30 candidatos responderam "sim" à pergunta 2 e já indicamos

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

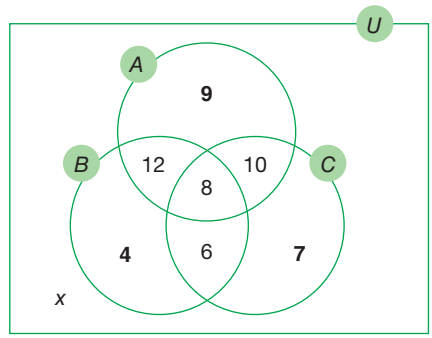
26 elementos em B, faltam 4 elementos; como 31 candidatos responderam "sim" à pergunta 3 e já indicamos 24 elementos em C, faltam 7 elementos. Finalmente, indicamos por x o número de candidatos que responderam "não" às três perguntas.

Como o total de candidatos entrevistados é 58, temos:

$$x + 4 + 9 + 7 + 12 + 10 + 6 + 8 = 58$$

Resolvendo, obtemos $x = 2$.

Portanto, apenas 2 dos candidatos entrevistados responderam "não" às três perguntas.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

22. b. Resposta pessoal. Oriente os estudantes na pesquisa proposta e depois converse sobre o resultado obtido. Explique que a vacina tem como principal função gerar imunidade, contribuindo diretamente para o controle e a eliminação de algumas doenças. Para saber mais, sugerimos o texto do *site*: https://www.unicef.org/brazil/vacinas-perguntas-e-respostas. Acesso em: 28 set. 2024.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

19. Em uma festa, 29 pessoas discutiam dois filmes, A e B. Dessas pessoas, precisamente: **19.** 15 pessoas.

- 13 assistiram ao filme A;
- 5 assistiram aos dois filmes;
- 6 não assistiram a nenhum dos dois filmes.

Sabendo que todas as 29 pessoas opinaram, responda: quantas pessoas assistiram ao filme B? Resolva este problema considerando as seguintes etapas: compreender o problema, elaborar um plano de resolução, executar o plano elaborado e verificar.

20. De uma pesquisa realizada pela Secretaria de Turismo do Estado com 2.200 pessoas, pôde-se concluir que:

- exatamente 816 dessas pessoas já estiveram na região Nordeste do Brasil;
- exatamente 602 dessas pessoas já estiveram na região Norte do Brasil;
- exatamente 206 dessas pessoas já estiveram nas duas regiões. **20.** 988 pessoas.

Quantas das pessoas entrevistadas nunca estiveram em nenhuma das duas regiões?

21. Para avaliar o conhecimento dos 32 estudantes de uma turma no início do ano letivo, um professor de História fez duas perguntas.

1ª pergunta: "Você já estudou, na Antiguidade Oriental, a história do Egito?"

2ª pergunta: "Você já estudou, na Antiguidade Ocidental, a história do mundo grego?"

Após a contagem, o professor constatou que exatamente 18 estudantes responderam "sim" à primeira pergunta, 21 responderam "sim" à segunda pergunta e 3 responderam "não" a ambas. Quantos estudantes dessa turma já haviam estudado a história do Egito e a história do mundo grego? **21.** 10 estudantes.

22. Além da covid-19, a população de uma cidade foi afetada por um surto de gripe e de dengue. Para conhecer a extensão do problema, a Secretaria da Saúde do município fez uma pesquisa com uma amostra de 1.500 pessoas que representasse, o mais fielmente possível, o cenário do município em relação a essas doenças. O resultado dessa pesquisa revelou que, entre os entrevistados, precisamente:

- 70 contraíram apenas covid-19;
- 400 contraíram apenas gripe;
- 143 contraíram apenas dengue;
- 496 contraíram gripe ou covid-19, mas não dengue;
- 588 contraíram gripe ou dengue, mas não covid-19;
- 333 contraíram dengue ou covid-19, mas não gripe.

O número de pessoas que contraíram as três doenças foi a quinta parte do número de pessoas que não contraíram nenhuma das três.

a. Quantas pessoas, entre os entrevistados, contraíram as três doenças? **22. a.** 116 pessoas.

b. Atualmente, existem vacinas para as três doenças (dengue, gripe e covid-19). Porém, nem todas as pessoas se vacinam. De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a vacinação evita de duas a três milhões de mortes anualmente. Pesquise alguns dos motivos para os quais as pessoas não se vacinam e a importância da vacinação para o sistema imunológico. Em seguida, compartilhe os resultados da sua pesquisa com os colegas.

c. Reúna-se em grupo, escolham uma das doenças apresentadas e elaborem uma campanha de conscientização sobre a importância da vacinação para a doença escolhida.



JOAO PAULO BURINI/ MOMENT RF/GETTY IMAGES

ODS 3

Aedes aegypti. Mosquito transmissor das doenças zika vírus, chikungunya, dengue e febre amarela.

22. c. Resposta pessoal. Oriente os estudantes sobre a campanha que pode ser feita na escola, em locais públicos ou em redes sociais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

23. Uma indústria de artigos esportivos fez uma pesquisa com 500 pessoas, perguntando:

1) Você pratica caminhada?

2) Você pratica corrida?

3) Você pratica ginástica?

23. alternativa **a**

Feito o levantamento dos dados, constatou-se que todas as pessoas responderam "sim" ou "não" a cada pergunta e que, precisamente:

- 236 dos entrevistados praticavam caminhada;
- 241 dos entrevistados praticavam corrida;
- 253 dos entrevistados praticavam ginástica;
- 68 dos entrevistados não praticavam nenhuma das três modalidades de exercício físico;
- 104 dos entrevistados praticavam caminhada e ginástica;
- 116 dos entrevistados praticavam corrida e ginástica;
- 110 dos entrevistados praticavam caminhada e corrida.

O número de pessoas entrevistadas que praticavam as três modalidades de exercício físico era:

a. 32. **b.** 74. **c.** 86. **d.** 59. **e.** 46.

24. Escolha um tema e faça uma pesquisa com os colegas de turma. Depois, elabore um problema sobre a quantidade de elementos de conjuntos finitos que envolva os dados da pesquisa. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

24. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 4.

OBJETO DIGITAL **Infográfico clicável: Inteligência artificial (IA) no recrutamento de RH**

TRABALHO E JUVENTUDES

Analista de Recursos Humanos (RH)

O profissional de RH que atua na seleção de candidatos para ocupar determinada vaga em uma empresa deve apresentar uma série de competências e habilidades que incluam, preferencialmente, a formação em Gestão de Recursos Humanos, Psicologia ou Administração de Empresas, entre outros cursos, ter conhecimentos específicos sobre a empresa, sua área de atuação e as características necessárias para o exercício de cada função exigida.

O analista de RH recebe os currículos dos candidatos e, com base nas informações declaradas e em entrevistas, presenciais ou *on-line*, seleciona aqueles que considera mais aptos para a função.

Essa seleção é feita por meio do cruzamento das informações dos candidatos. O candidato que apresentar as características necessárias para exercer a função é selecionado para o cargo. O conceito do diagrama de Venn pode ser utilizado nesse processo, pois a intersecção de todas as informações do candidato compõe o conjunto procurado (características necessárias para a vaga).

Em grandes corporações, em que a diversidade de cargos e funções é muito grande, o processo de seleção de currículos pode demandar muito tempo e não atender à necessidade de preenchimento rápido de vagas. Para agilizar esse trabalho, recursos disponibilizados pela inteligência artificial (IA) podem ser utilizados para obter alguns parâmetros que permitam a seleção prévia de currículos de potenciais candidatos com base nos cursos e nas habilidades apresentadas por eles e exigidas para cada cargo. Para que a ferramenta de IA seja eficiente, é preciso alimentá-la com grande quantidade de informações, que serão cruzadas com os dados dos candidatos a fim de resultar em uma seleção que seja realmente útil para a empresa. Apesar dessa facilidade, falhas podem ocorrer, uma vez que os candidatos podem supervalorizar o currículo com dados exagerados ou um candidato pode ser muito experiente, mas não detalhar o currículo com todas as suas habilidades, e, portanto, não ser selecionado. A IA oferece recursos que podem ser muito úteis para o recrutamento de pessoal, no entanto, não deve ser a única maneira de selecionar candidatos a vagas de emprego, pois a análise da capacidade profissional de um ser humano pode partir de seu currículo; entretanto, a IA não consegue selecionar as habilidades emocionais necessárias para trabalhar sob pressão, em funções arriscadas, ou em equipe, por exemplo. Nesse sentido, a IA pode complementar o recrutamento, mas não ser o critério principal.

Quer saber mais sobre a profissão de RH? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe nas redes sociais um resumo de sua pesquisa.



SDI PRODUCTIONS/E+/GETTY IMAGES

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Trabalho e juventudes: Você encontrará informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

Análise da resolução: Esta seção tem como objetivos despertar o senso crítico, estimular a investigação e levar a aprender com os erros. São explorados erros comuns e recorrentes cometidos na resolução de problemas matemáticos. Entendemos que uma estratégia para minimizar esses erros é submetê-los a uma análise crítica. Para isso, os estudantes devem apontar e corrigir um erro cometido propositalmente no exercício resolvido. Dessa maneira, estimula-se o levantamento de dúvidas e o posicionamento crítico.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Nesta seção, vamos trabalhar determinados erros cometidos com frequência em alguns tópicos de Matemática. Uma questão resolvida é apresentada, em que um erro é cometido. Você deve indicar esse erro e corrigir a resolução.

Um estudante resolveu o exercício, conforme a reprodução a seguir, mas cometeu um erro. Indique o erro cometido e refaça a resolução, corrigindo-a.

Exercício

Em uma turma do 1º ano do Ensino Médio haverá aulas de recuperação apenas para Língua Portuguesa, Matemática e Física, pois todos os estudantes foram aprovados nas demais disciplinas. Um balanço do número de estudantes que ficaram para recuperação mostrou que, precisamente:

- 8 ficaram em apenas uma disciplina;
- 4 ficaram nas três disciplinas;
- 11 ficaram em Língua Portuguesa;
- 12 ficaram em Matemática;
- 9 ficaram em Física.

Quantos estudantes ficaram para recuperação em pelo menos duas dessas disciplinas?

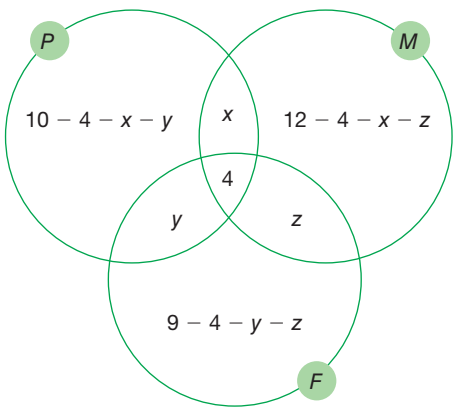


DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Estudantes em sala de aula de uma escola do município de Fortaleza (CE).

Resolução

Indicando por P, M e F os conjuntos dos estudantes que ficaram para recuperação em Língua Portuguesa, Matemática e Física, respectivamente, construímos o diagrama a seguir, que apresenta o número de estudantes nas respectivas regiões.



Como, precisamente, 8 estudantes ficaram para recuperação em apenas uma das disciplinas, temos:

$$10 - 4 - x - y + 12 - 4 - x - z + 9 - 4 - y - z = 8$$

$$20 - 2x - 2y - 2z = 8$$

$$-2x - 2y - 2z = -12 \Rightarrow x + y + z = 6$$

Concluímos, então, que precisamente 6 estudantes ficaram para recuperação em pelo menos duas disciplinas.

O estudante esqueceu de adicionar o número de estudantes que ficaram para recuperação nas três disciplinas, que foram 4. Assim, a resposta correta é dada por:

$$x + y + z + 4 = \\ = 6 + 4 = 10$$

Logo, 10 estudantes ficaram para recuperação em pelo menos duas disciplinas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Este momento propicia o trabalho com o professor de História. A apresentação dos números como resultado da criação humana promove a compreensão do desenvolvimento de conceitos tendo como base a necessidade humana, privilegiando o contexto histórico.

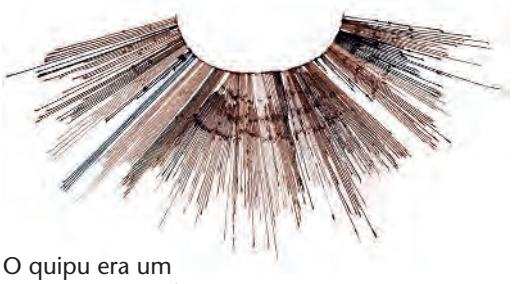
6. Conjuntos numéricos

Uma das grandes criações humanas é, sem dúvida, o **número**. Ele teria surgido da necessidade de contar, há cerca de 50.000 anos, muito antes de qualquer registro histórico, como afirma Howard Eves em sua obra *Introdução à história da Matemática*.



INSTITUTO REAL BELGA DE CIÊNCIAS NATURAIS, BRUXELAS

O osso de Ishango, encontrado em escavações arqueológicas nas proximidades do lago Eduardo, na África Central, traz evidências de que uma civilização que viveu há cerca de 20.000 anos já tinha alguma ideia numérica e um provável registro de contagens.



IANDAGNALL COMPUTING/ALAMY/FOTOARENA

O quipu era um artefato construído com cordas e nós usado pelos incas e outras culturas andinas como método de contagem. Ele foi a base de um complexo sistema por meio do qual os quipucamayocs (especialistas de quipu) registavam tudo o que tivesse importância para o Império.

Outras necessidades, práticas ou teóricas, levaram à criação de outros tipos de número, além dos utilizados em contagens. Em Matemática, é usual classificar os números em categorias, como estudaremos a seguir.

Conjunto dos números naturais

Denominamos **naturais** os números que representam quantidades de elementos de conjuntos finitos, inclusive o vazio.

Indicamos por $\mathbb{N}$ o **conjunto dos números naturais** e por $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais não nulos:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$$

Apresente os números naturais, definindo sucessor, antecessor e enunciando as propriedades, e convencione a notação: $\mathbb{N}^*$. Durante o estudo dos números naturais, sugerimos a representação de um número em outras bases de contagem. Comente o uso da base binária pelos computadores.

Números naturais consecutivos, antecessor e sucessor

Se n é um número natural, então $n + 1$ é um número natural tal que:

- n e $n + 1$ são chamados números naturais **consecutivos**;
- n é o **antecessor** de $n + 1$;
- $n + 1$ é o **sucessor** de n.

Exemplo

Os números naturais 3 e 4 são consecutivos: 3 é o antecessor de 4, e 4 é o sucessor de 3.

Propriedades dos números naturais

P1. Todo número natural tem sucessor.

P2. A soma de dois números naturais quaisquer é um número natural.

P3. O produto de dois números naturais quaisquer é um número natural.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Conjunto dos números inteiros

A imagem representa um extrato da conta bancária de Paulo. As letras C e D que aparecem na coluna "Valor (R$)" indicam crédito e débito, respectivamente.

Observe como é calculado o saldo ao final do dia 6, em reais:

$$\underbrace{600}_{\substack{\text{Saldo}\\ \text{ao final}\\ \text{do dia 5}}} + \underbrace{500}_{\substack{\text{Crédito}\\ \text{do dia 6}}} - \underbrace{350}_{\substack{\text{Débito}\\ \text{do dia 6}}} - \underbrace{48}_{\substack{\text{Débito}\\ \text{do dia 6}}} = \underbrace{702}_{\substack{\text{Saldo}\\ \text{ao final}\\ \text{do dia 6}}}$$

BANCO LEONAM S.A.

Data: 07/10/2023 Autoatendimento Horário: 16:52:44

Extrato de conta-corrente para simples conferência

Agência: 4089-4 Conta: 26.350-6

Cliente: Paulo Laudelino da Costa

Histórico	Documento	Valor (R$)
05/10/2023		
Saldo ao final do dia		600 C
06/10/2023		
Pagamento de título	100501	350 D
Pagamento de conta de gás	100502	48 D
Depósito	943114	500 C
Saldo ao final do dia		702 C
07/10/2023		
Saque	707394	800 D
Saldo ao final do dia		[redacted]

ORAPICART/ARQUIVO DA EDITORA

De maneira análoga, o saldo ao final do dia 7, em reais, é o resultado da expressão:

$$\underbrace{702}_{\substack{\text{Saldo}\\ \text{ao final}\\ \text{do dia 6}}} - \underbrace{800}_{\substack{\text{Débito}\\ \text{do dia 7}}} = \underbrace{?}_{\substack{\text{Saldo}\\ \text{ao final}\\ \text{do dia 7}}}$$

Como o saldo ao final do dia 6 é menor que o débito registrado no dia 7, concluímos que não existe número natural que represente o resultado dessa expressão. Para representar esse resultado, é necessário outro tipo de número, não natural: o número negativo −98. Assim, Paulo ficou devendo 98 reais ao banco; portanto, o saldo registrado no extrato ao final do dia 7 foi "98 D".

Uma parte dos números negativos é formada pelos números −1, −2, −3, −4, ..., chamados de **números inteiros negativos**.

Denominamos **conjunto dos números inteiros** (e indicamos por $\mathbb{Z}$) o conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Apresentamos aqui as notações especiais que usaremos para alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros não nulos.
$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros não negativos.
$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ é o conjunto dos números inteiros positivos.
$\mathbb{Z}_- = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}$ é o conjunto dos números inteiros não positivos.
$\mathbb{Z}_-^* = \{..., -4, -3, -2, -1\}$ é o conjunto dos números inteiros negativos.

Conceitue número inteiro a partir da situação apresentada no exemplo introdutório (extrato bancário). Varie os exemplos: apresente o balancete de um condomínio (fictício), cujas colunas sejam Receita (R), Despesa (D) e Saldo ($S = R - D$), mostrando que, quando $R < D$, não existe um número positivo capaz de representar o valor S. Daí a necessidade de um novo tipo de número. A seguir, apresente os números inteiros, definindo sucessor, antecessor, número par, número ímpar e enunciando as propriedades. Enfatize a relação $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, representando-a em um diagrama de Venn, e convencione as notações: $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$, $\mathbb{Z}_-$ e $\mathbb{Z}_-^*$.

Observações

- Dizer que um número é **não negativo** significa dizer que é um número nulo ou positivo.
- Dizer que um número é **não positivo** significa dizer que é um número nulo ou negativo.

Números inteiros consecutivos, antecessor e sucessor

Se n é um número inteiro, então $n + 1$ é um número inteiro tal que:

- n e $n + 1$ são chamados números inteiros **consecutivos**;
- n é o **antecessor** de $n + 1$;
- $n + 1$ é o **sucessor** de n.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Número par

Um número inteiro é **par** se, e somente se, pode ser representado sob a forma $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Reflexão

O número zero é par? Por quê?

Reflexão: O zero é número par, pois pode ser representado na forma $2k$, com $k \in \mathbb{Z}$ (nesse caso, $k = 0$).

Exemplos

a. O número 6 é par, pois pode ser representado por $2 \cdot 3$, e $3 \in \mathbb{Z}$.

b. O número -8 é par, pois pode ser representado por $2 \cdot (-4)$, e $-4 \in \mathbb{Z}$.

Número ímpar

Um número inteiro é **ímpar** se, e somente se, pode ser representado sob a forma $2n + 1$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplos

a. O número 11 é ímpar, pois pode ser representado por $2 \cdot 5 + 1$, e $5 \in \mathbb{Z}$.

b. O número -15 é ímpar, pois pode ser representado por $2 \cdot (-8) + 1$, e $-8 \in \mathbb{Z}$.

Propriedades dos números inteiros

P1. Sendo P e I os conjuntos dos números inteiros pares e ímpares, respectivamente, temos $P \cup I = \mathbb{Z}$ e $P \cap I = \varnothing$.

P2. Todo número inteiro tem sucessor e antecessor.

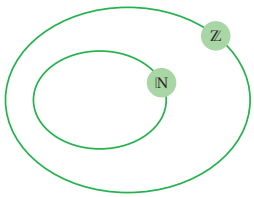
P3. A soma de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

P4. A diferença entre dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

P5. O produto de dois números inteiros quaisquer é um número inteiro.

Nota:

Todo número natural é inteiro, isto é, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Podemos representar $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ pelo diagrama apresentado.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Mentes brilhantes

O que é uma demonstração matemática? Como surgiu? Para que serve?

De modo geral, uma demonstração matemática é uma argumentação lógica da qual se conclui uma propriedade a partir de outra(s) previamente estabelecida(s).

Não se sabe exatamente quando surgiram as demonstrações. Na Antiguidade, os matemáticos egípcios chegaram a trabalhar a ideia de demonstração sem formalismo, mas foi com os gregos daquela época que se intensificou o desenvolvimento da argumentação lógica. Assim, deu-se importância à demonstração de propriedades, o que contribuiu para o desenvolvimento do método axiomático-dedutivo usado em Matemática. Atribui-se ao filósofo grego Tales de Mileto (600 a.C.) a primeira demonstração na história da Matemática.

Muitas propriedades matemáticas têm origem em conjecturas, isto é, em suposições originadas em observações de casos particulares. A demonstração é um recurso que prova, de maneira incontestável, se determinada conjectura é verdadeira ou falsa. Nos exercícios resolvidos a seguir, você verá algumas demonstrações.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7. Demonstre que a soma de dois números pares quaisquer é um número par.

Resolução

Dois números pares quaisquer são da forma $2n$ e $2k$, com n e k números inteiros. Assim, temos:

$$2n + 2k = 2\underbrace{(n + k)}_{\text{inteiro}}$$

Pela propriedade P3 dos números inteiros, a soma $(n + k)$ é um número inteiro e, portanto, $2(n + k)$ é par. Fica, então, demonstrado que a soma de dois números pares quaisquer é um número par.

8. Classifique em verdadeira ou falsa cada sentença a seguir.

Em caso de classificação "verdadeira", descreva todas as maneiras possíveis de leitura da sentença.

a. $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$

b. $x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

Resolução

O símbolo "$\Rightarrow$" indica a relação de implicação entre duas proposições. Dizemos que uma proposição p **implica** uma proposição q quando o fato de p ser verdadeira garante que q também seja verdadeira. Assim, temos:

a. Sentença verdadeira, pois, supondo que $x = 5$ seja verdadeira, concluímos que $x^2 = 25$ também é verdadeira.

A sentença $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$ pode ser lida como:

- se $x = 5$, então $x^2 = 25$;
- $x = 5$ é condição suficiente para $x^2 = 25$;
- $x = 5$ implica $x^2 = 25$;
- $x^2 = 25$ é condição necessária para $x = 5$.

b. Sentença falsa, pois, supondo que $x^2 = 25$ seja verdadeira, **não** podemos concluir que $x = 5$ é verdadeira, pois x pode ser igual a -5. Em outras palavras, a proposição $x^2 = 25$ **não** implica $x = 5$.

9. Demonstre que o quadrado de um número inteiro é par se, e somente se, esse número é par, isto é, x^2 é par $\Leftrightarrow$ x é par, com $x \in \mathbb{Z}$.

Observação

Uma sentença do tipo "$p \Leftrightarrow q$" deve ser lida como: "p se, e somente se, q"; ou "p equivale a q".

Resolução

A proposição "x^2 é par $\Leftrightarrow$ x é par, com $x \in \mathbb{Z}$" pode ser decomposta em duas proposições:

$$\underbrace{x \text{ é par} \Rightarrow x^2 \text{ é par, com } x \in \mathbb{Z}}_{(1)} \quad \text{e}$$

$$\underbrace{x^2 \text{ é par} \Rightarrow x \text{ é par, com } x \in \mathbb{Z}}_{(2)}$$

- Demonstração da proposição (1)

Em um teorema do tipo "$p \Rightarrow q$", a proposição p é chamada de hipótese do teorema e q é chamada de tese. Uma técnica de demonstração desse tipo de teorema, denominada demonstração direta, consiste em deduzir a tese a partir da hipótese.

Pela hipótese, x é par; logo, podemos representar x por $2n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Então:

$$x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2 \cdot \underbrace{2n^2}_{\text{inteiro}}$$

Como, pela propriedade P5 dos números inteiros, $2n^2$ é inteiro, concluímos que $2 \cdot 2n^2$ é par.

Assim, demonstramos que x^2 é par.

- Demonstração da proposição (2)

Faremos essa demonstração por absurdo. Essa é outra técnica de demonstração de teoremas do tipo $p \Rightarrow q$, também chamada de demonstração indireta. Ela consiste em anexar à hipótese p a negação da tese q (essa negação é indicada por $\sim q$) e provar que, ao se admitir p e $(\sim q)$, chega-se a um absurdo, com o que se conclui que $p \Rightarrow q$.

Consideremos que x não seja par, isto é, que ele seja ímpar. Então, podemos representá-lo por $(2n + 1)$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$$x^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2\underbrace{(2n^2 + 2n)}_{\text{inteiro}} + 1$$

Como, pelas propriedades P3 e P5 dos números inteiros, $(2n^2 + 2n)$ é inteiro, concluímos então que $x^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ é ímpar. Mas isso é um **absurdo**, pois, por hipótese, x^2 é par. Como, admitindo x ímpar, chegamos a um absurdo, concluímos que x não pode ser ímpar; portanto, x é par. Assim, está demonstrada a proposição (2).

Pela demonstração de (1) e (2), provamos que: x^2 é par $\Leftrightarrow$ x é par, com $x \in \mathbb{Z}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Conectado **Conectado:** Resposta no final do livro.

Construa um fluxograma que verifica se um número inteiro é par ou ímpar. Em seguida, troque o fluxograma elaborado com um colega e peça-lhe que verifique os passos que são apresentados no fluxograma. Por fim, discutam sobre eles.

Conjunto dos números racionais

Um marceneiro precisa construir uma estrutura de madeira com o formato de losango para um objeto que ele está montando. Para isso, ele cortou uma ripa de 1 m de comprimento em 4 pedaços de mesmo tamanho. Qual é a medida do comprimento, em metro, de cada um dos pedaços de madeira?



G-STOCK STUDIO/SHUTTERSTOCK

Marceneiro fazendo medições em uma ripa de madeira.

A medida, em metro, do comprimento de cada um dos pedaços é o resultado da divisão 1 : 4. Note que não existe número inteiro que represente o resultado dessa divisão, por isso é necessário acrescentar ao nosso estudo um novo tipo de número, diferente dos números inteiros: os **números fracionários**.

Acredita-se que a necessidade de medir comprimentos tenha motivado o surgimento das frações há milhares de anos, no antigo Egito. Matematicamente, dizemos que as frações surgiram de uma insuficiência dos números inteiros, ou seja, nem sempre existe no conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) o quociente de dois números inteiros com divisor não nulo. Por exemplo, não existe um número inteiro que represente o quociente 1 : 4. Essa carência motivou a criação de um novo conjunto de números, chamado de **conjunto dos números racionais**, em que o resultado da divisão 1 : 4 é representado por $\frac{1}{4}$ ou por 0,25.

Observação

O termo "racional" deriva de "razão", no sentido de divisão entre dois números.

Número racional é todo aquele que pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo. Indicamos o conjunto de todos os números racionais por $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Inicie o assunto deste tópico perguntando se os números inteiros são suficientes para representar qualquer medida de comprimento, área, volume, temperatura etc. Com a orientação da discussão, espera-se que os estudantes concluam que há medidas que não podem ser representadas por números inteiros. Por isso, foi necessária a criação de novos números: os racionais, que são números que representam o quociente entre números inteiros, com divisor não nulo.
Comente que, com a criação dos números racionais, acreditava-se que qualquer medida poderia ser representada por meio desses novos números. Abordaremos, mais adiante, que isso não é verdade.

Exemplos

a. Os números $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$ e $\frac{-3}{5}$ são racionais, pois cada um está representado por uma razão entre números inteiros.

b. O número 0,5 é um número racional, pois pode ser representado por uma razão entre dois números inteiros:

$0{,}5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$

c. Os números 3, −5 e 0 (zero) são racionais, pois cada um pode ser representado por uma razão de dois números inteiros:

- $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots$
- $-5 = \frac{-5}{1} = \frac{-10}{2} = \frac{-15}{3} = \ldots$
- $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \ldots$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim como fizemos para o conjunto dos números inteiros, destacamos notações especiais para alguns subconjuntos de $\mathbb{Q}$:

$\mathbb{Q}^*$ é o conjunto dos números racionais não nulos.
$\mathbb{Q}_+$ é o conjunto dos números racionais não negativos.
$\mathbb{Q}_+^*$ é o conjunto dos números racionais positivos.
$\mathbb{Q}_-$ é o conjunto dos números racionais não positivos.
$\mathbb{Q}_-^*$ é o conjunto dos números racionais negativos.

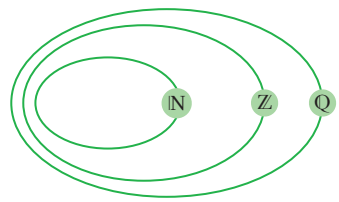
Propriedades dos números racionais

P1. A soma de dois números racionais quaisquer é um número racional.
P2. A diferença de dois números racionais quaisquer é um número racional.
P3. O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.
P4. O quociente de dois números racionais quaisquer, sendo o divisor diferente de zero, é um número racional.

Notas:

1. Todo número inteiro é racional, pois pode ser representado na forma de razão entre dois inteiros.

2. Como todo número natural é inteiro e todo número inteiro é racional, podemos representar os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ pelo diagrama ao lado.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Representação decimal finita e representação decimal infinita

Ao dividir o numerador pelo denominador da fração $\frac{7}{2}$, obtemos 3,5, que é a representação decimal da fração, isto é, $\frac{7}{2} = 3{,}5$. Acrescentando zeros à direita da casa decimal, observe que o número 3,5 não se altera, ou seja:

$$3{,}5 = 3{,}50 = 3{,}500 = 3{,}5000 = \ldots$$

Podemos acrescentar infinitos zeros, mas o número não se altera:

$$3{,}5 = 3{,}5000000000000000000\ldots$$

Desse ponto de vista, todo número decimal pode ser representado com infinitas casas decimais. Porém, precisamos distinguir dois tipos de números decimais: aqueles que **podem** ser representados com um número **finito** de casas decimais (representação decimal finita) e aqueles que **só podem** ser representados com **infinitas** casas decimais (representação decimal infinita). Por exemplo:

- o número $\frac{7}{2}$ admite representação decimal finita, pois $\frac{7}{2} = 3{,}5$;
- o número $\frac{52}{9}$ não admite representação decimal finita, pois, dividindo o numerador pelo denominador, obtemos $\frac{52}{9} = 5{,}777777777777777\ldots$ (o algarismo 7 se repete indefinidamente).

Representação decimal finita

Se, em sua forma decimal, um número *x* **pode** ser representado com um número **finito** de casas decimais, dizemos que *x* é um número com representação decimal finita.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

a. 3 é um número com representação decimal finita, pois pode ser representado por um número finito de casas decimais: $3 = 3{,}0$

b. 3,4502 é um número com representação decimal finita, pois está representado com um número finito de casas decimais.

c. $\frac{7}{1.000}$ é um número com representação decimal finita, pois pode ser representado por um número finito de casas decimais: $\frac{7}{1.000} = 0{,}007$

Observação

Estudaremos, no tópico **Conjunto dos números irracionais**, que as dízimas não periódicas não são números racionais.

Representação decimal infinita

Se, em sua forma decimal, um número y **só pode** ser representado com um número **infinito** de casas decimais, dizemos que y é um número com representação decimal infinita. Nesse caso, dizemos que o número y é uma **dízima**, de modo que:

- se, a partir de determinada casa decimal para a direita, há apenas a repetição de uma mesma sequência finita de algarismos, y é chamado de **dízima periódica**;
- se, de qualquer casa decimal para a direita, não há apenas a repetição de uma mesma sequência finita de algarismos, y é chamado de **dízima não periódica**.

Conectado

Construa um fluxograma que verifica se um número decimal tem representação decimal finita ou infinita. Em seguida, compartilhe o fluxograma elaborado com os colegas.

Exemplos

a. Os números com representação decimal infinita periódica 5,666666... (o dígito 6 se repete consecutiva e infinitamente) e 7,52424242424... (a sequência de dígitos 24 se repete consecutiva e infinitamente) são dízimas periódicas.

b. O número com representação decimal infinita e não periódica 4,010010001000010000001... (a quantidade de zeros que antecede o 1 aumenta infinitamente) é uma dízima não periódica.

Justificaremos a conclusão apresentada a seguir no exercício resolvido 11.

Os números racionais são todos os números com representação decimal finita (podendo ser inteiros), e todas as dízimas periódicas.

Conectado: Resposta no final do livro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10. Se o quociente de um número inteiro p por um número inteiro não nulo q é igual a uma dízima periódica, dizemos que $\frac{p}{q}$ é a fração geratriz dessa dízima periódica. De acordo com essa definição, determine a fração geratriz da dízima periódica 2,555... e construa um fluxograma que permite determinar a fração geratriz de uma dízima periódica a,bbbb..., em que a e b são números inteiros.

Resolução

Para determinar a fração geratriz dessa dízima periódica:

- indicamos por g a dízima periódica, obtendo a igualdade: $g = 2{,}5555...$
- multiplicamos por 10 ambos os membros dessa igualdade: $10g = 25{,}5555...$
- subtraímos, membro a membro, as duas igualdades anteriores:

$10g - g = 25{,}5555... - 2{,}5555... \Rightarrow 9g = 23$

$\therefore g = \frac{23}{9}$

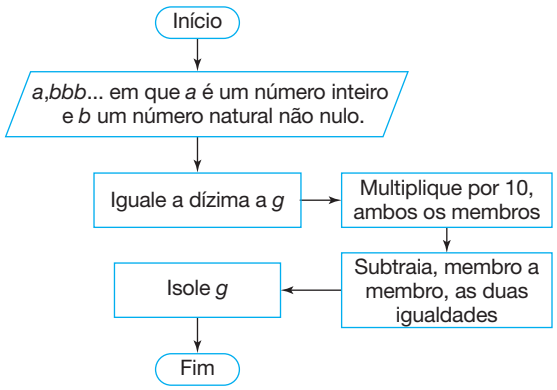
Observação

O símbolo "$\therefore$" representa a conjunção conclusiva "portanto".

Assim, $\frac{23}{9}$ é a fração geratriz da dízima periódica 2,5555...

Agora, vamos construir o fluxograma que permite determinar a fração geratriz de uma dízima periódica $a,bbbb...$, em que a é um número inteiro e b um número natural não nulo.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



11. Justifique a afirmação: "A razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo, é igual a um número decimal com representação finita ou é igual a uma dízima periódica".

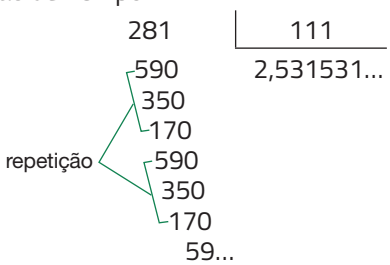
Resolução

Na divisão do número natural a pelo número natural n, com $n \neq 0$, o resto r é tal que $0 \leqslant r < n$.

Se:

- $r = 0$, o quociente é um número com representação decimal finita.
- $0 < r < n$, então r pode assumir no máximo $(n - 1)$ valores: 1, 2, 3, ..., $n - 1$. Assim, no máximo no n-ésimo resto, um dos restos anteriores vai se repetir, provocando uma repetição nas casas decimais do quociente, o que dará origem a uma dízima periódica.

Por exemplo, observe a razão $\frac{281}{111}$, obtida pela divisão de 281 por 111:



Assim: $\frac{281}{111} = 2{,}531531\ldots$

12. Prove que a média aritmética entre dois números racionais, a e b, com $a < b$, é um número maior que a e menor que b.

Resolução

A média aritmética entre a e b é $\frac{a+b}{2}$.

(1) É dado que $a < b$. Adicionando a a ambos os membros dessa desigualdade, temos:

$a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \therefore a < \frac{a+b}{2}$

(2) É dado que $a < b$. Adicionando b a ambos os membros dessa desigualdade, temos:

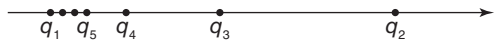
$a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \therefore \frac{a+b}{2} < b$

Por (1) e (2), temos: $a < \frac{a+b}{2} < b$

Nota:

Observe que, como a e b são racionais, então $\frac{a+b}{2}$ também é racional. Assim, acabamos de provar que, entre quaisquer dois números racionais diferentes, sempre existe outro número racional. Portanto, entre quaisquer dois números racionais diferentes existem infinitos outros números racionais, pois:

- sendo q_1 e q_2 números racionais distintos quaisquer, com $q_1 < q_2$, existe um número racional q_3 entre q_1 e q_2;
- como q_1 e q_3 são racionais distintos, existe um racional q_4 entre q_1 e q_3;
- como q_1 e q_4 são racionais distintos, existe um racional q_5 entre q_1 e q_4; e assim por diante.



Como esse procedimento pode ser repetido indefinidamente, concluímos que entre os racionais distintos q_1 e q_2 existem infinitos outros números racionais.

13. Suponha que a produção de uma granja varie de 30.000 a 31.500 ovos por dia. Indicando por x o número de ovos produzidos diariamente nessa granja, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. x pode ser qualquer número racional, com $30.000 \leqslant x \leqslant 31.500$.

b. x pode assumir o valor $\frac{343.200}{11}$.

c. x pode assumir o valor $\frac{62.401}{2}$.

LUCIANA WHITAKER/ PULSAR IMAGENS



Produção de ovos em uma granja localizada em Parnaíba (PI). Foto de 2022.

Resolução

Uma quantidade qualquer de ovos só pode ser representada por um número natural, o que nos leva a concluir que x tem de ser um número natural e $30.000 \leqslant x \leqslant 31.500$. Assim, temos:

a. Afirmação falsa, pois existem números racionais não naturais que satisfazem a condição $30.000 \leqslant x \leqslant 31.500$.

b. Afirmação verdadeira, pois $\frac{343.200}{11} = 31.200$, que é um número natural e $30.000 \leqslant 31.200 \leqslant 31.500$.

c. Afirmação falsa, pois $\frac{62.401}{2} = 31.200{,}5$, que não é um número natural.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

FÁBIO CORTEZ REIS/ARQUIVO DA EDITORA



Representação artística do busto do filósofo e matemático grego Pitágoras, cujas ideias filosóficas e doutrinas semirreligiosas constituem o Pitagorismo.

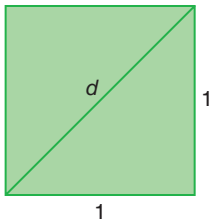
Comente o texto introdutório, que descreve a constatação de que existem números além dos racionais. Essa descoberta é atribuída a Hipaso de Metaponto, um seguidor de Pitágoras.
Defina número irracional, destacando que o exercício resolvido 11 nos permite concluir que um número irracional não pode ser representado pela razão de dois números inteiros.

Conjunto dos números irracionais

Até meados do século VI a.C., auge do Pitagorismo, acreditava-se que os números inteiros positivos e as razões entre eles, hoje chamadas de números racionais positivos, fossem suficientes para resolver qualquer problema que envolvesse medições, tanto na Geometria quanto nas questões práticas e teóricas da vida do ser humano.

No entanto, alguns problemas, provavelmente propostos pelos pitagóricos, puseram por terra essa ideia. Um desses problemas é o seguinte:

"Qual é a medida d da diagonal de um quadrado de lado unitário?"



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$$

Esse problema, que certamente provocou um amplo debate de ideias, alterou paradigmas considerados intocáveis, pois até então eram conhecidos apenas os números hoje chamados de inteiros e suas razões.

Voltando ao problema: sabemos que não existe um número inteiro que, elevado ao quadrado, resulte em 2. Para obter um número que satisfaça essa condição, provavelmente muitos matemáticos fizeram os cálculos a seguir em busca do número d.

Queremos obter um número d tal que $d^2 = 2$.

Inicialmente, sabemos que $1{,}4 < d < 1{,}5$, pois $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ e $(1{,}5)^2 = 2{,}25$.

Tomando um número qualquer entre 1,4 e 1,5 (por exemplo, a média aritmética entre 1,4 e 1,5, que é 1,45), podemos estreitar o intervalo ao qual pertence o número d, observando que:

$$\begin{cases} (1{,}45)^2 = 2{,}1025 \\ 1{,}4 < d < 1{,}45 \end{cases} \Rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}45$$

Analogamente, restringimos mais ainda o intervalo ao qual pertence o número d:

$$\begin{cases} (1{,}425)^2 = 2{,}030625 \\ 1{,}4 < d < 1{,}45 \end{cases} \Rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}425$$

$$\begin{cases} (1{,}4125)^2 = 1{,}99515625 \\ 1{,}4 < d < 1{,}425 \end{cases} \Rightarrow 1{,}4125 < d < 1{,}425$$

Podemos continuar esse processo infinitamente e nunca chegaremos a um número com representação decimal finita ou infinita periódica como valor de d, isto é, d não é um número racional.

Surge, assim, a necessidade de considerar a existência de números que não são racionais, ou seja, que não podem ser representados como a razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo. Em contraposição a "racionais", esses novos números receberam o nome de **irracionais**.

Número irracional é todo número que, em sua forma decimal, é uma dízima não periódica. Indicamos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{Q}'$:

$$\mathbb{Q}' = \{x \mid x \text{ é dízima não periódica}\}$$

Observação

π é lido como "pi".

Exemplos

a. Um dos números irracionais mais conhecidos é o quociente da medida do perímetro de uma circunferência pela medida de seu diâmetro. Esse número é representado pela letra grega π. Como curiosidade, reproduzimos o π com 60 casas decimais:

$\pi \simeq 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494 4$

b. Outro número irracional é a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário, indicada por:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Enuncie as propriedades dos números irracionais com ênfase na propriedade P1, pois a maioria dos irracionais estudados neste livro é da forma $\sqrt[n]{a}$, com $\{n, a\} \subset \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Peça exemplos para cada propriedade.

No exercício resolvido **11**, mostramos que a razão entre dois números inteiros, sendo o segundo não nulo, é um número com representação decimal finita ou com representação decimal infinita periódica. Isso permite concluir que:

Um número irracional não pode ser representado como uma razão entre dois números inteiros.

Se achar conveniente, demonstre a irracionalidade de $\sqrt{2}$. Entendemos que essa demonstração contribui para um melhor entendimento dos conjuntos numéricos. Conclua a apresentação das propriedades dos números irracionais solicitando a participação dos estudantes por meio de exemplos.

Propriedades dos números irracionais

P1. Sejam n e a números naturais, com $n \neq 0$. Se $\sqrt[n]{a}$ não é inteiro, então $\sqrt[n]{a}$ é irracional.

Exemplos

a. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

b. $\sqrt[6]{5} \in \mathbb{Q}'$

c. $\sqrt[5]{3} \in \mathbb{Q}'$

d. $\sqrt[7]{1} \notin \mathbb{Q}'$, pois $\sqrt[7]{1} = 1$, e 1 é inteiro.

e. $\sqrt[3]{8} \notin \mathbb{Q}'$, pois $\sqrt[3]{8} = 2$, e 2 é inteiro.

Reflexões: a. Nem sempre a soma de dois números irracionais é um número irracional; por exemplo, os números $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ são irracionais, e a soma deles é 0 (zero), que é número racional.
b. Nem sempre o produto de dois números irracionais é um número irracional; por exemplo, os números $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[3]{9}$ são irracionais, e o produto deles é 9, que um número racional.
c. Nem sempre o quociente de dois números irracionais é um número irracional; por exemplo, os números $\sqrt{12}$ e $\sqrt{3}$ são irracionais, e o quociente entre eles é 2, que é um número racional.
Oriente os estudantes de modo que eles cheguem à conclusão de que o produto ou o quociente entre dois números irracionais pode ser um número racional, por exemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$ e $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{9} = 3$

P2. A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Exemplo

$$\underbrace{1}_{\text{racional}} + \underbrace{\sqrt{2}}_{\text{irracional}} = 1 + 1{,}414213562... = \underbrace{2{,}414213562...}_{\text{irracional}}$$

P3. A diferença entre um número racional e um número irracional, em qualquer ordem, é um número irracional.

Exemplo

$$\underbrace{2}_{\text{racional}} - \underbrace{\pi}_{\text{irracional}} = 2 - 3{,}14159265... = \underbrace{-1{,}14159265...}_{\text{irracional}}$$

P4. O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

Exemplo

$$\underbrace{2}_{\text{racional}} \cdot \underbrace{\sqrt{3}}_{\text{irracional}} = 2\sqrt{3} = \underbrace{\sqrt{12}}_{\text{irracional}}$$

P5. O quociente de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

Exemplo

$$\underbrace{12}_{\text{racional}} : \underbrace{\sqrt{6}}_{\text{irracional}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6} = \underbrace{\sqrt{24}}_{\text{irracional}}$$

Reflexões

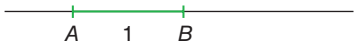
a. A soma de dois números irracionais quaisquer é sempre um número irracional? **a.** Não
b. O produto de dois números irracionais quaisquer é sempre um número irracional? **b.** Não
c. O quociente de dois números irracionais quaisquer é sempre um número irracional? **c.** Não

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Refaça, com a participação dos estudantes, o exercício resolvido 14.
Se achar conveniente, proponha a construção de outros segmentos de reta de medidas irracionais; por exemplo, o segmento de reta de medida $\sqrt{5}$ dm é uma diagonal de um retângulo com 2 dm de base e 1 dm de altura.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

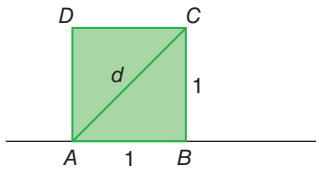
14. Considere o segmento $\overline{AB}$ de comprimento medindo 1 em uma unidade *u*.



Descreva um processo para obter o ponto *E* da semirreta $\overrightarrow{AB}$, tal que o comprimento do segmento $\overline{AE}$ meça $\sqrt{2}$ na unidade *u*.

Resolução

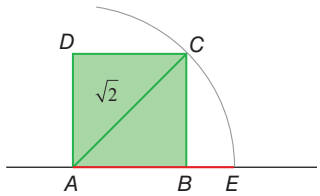
Seja um quadrado em que um dos lados é o segmento $\overline{AB}$.



A medida *d* da diagonal do quadrado é dada por:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Usando um compasso, com a ponta-seca em *A* e raio $\overline{AC}$, desenha-se o arco que intersepta a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto *E*, conforme a figura a seguir.



Assim, o comprimento de $\overline{AE}$ mede $\sqrt{2}$ na unidade *u*.

Caracterize número real como todo aquele que pode ser representado na forma decimal, com número finito ou infinito de casas decimais. Assim, o conjunto V dos números reais é dado por: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$. Represente em um diagrama as relações entre os conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}'$ e $\mathbb{R}$. Faça várias perguntas relativas ao diagrama, para que ele seja perfeitamente compreendido, e convencione as notações: $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-$ e $\mathbb{R}_-^*$.

Conjunto dos números reais

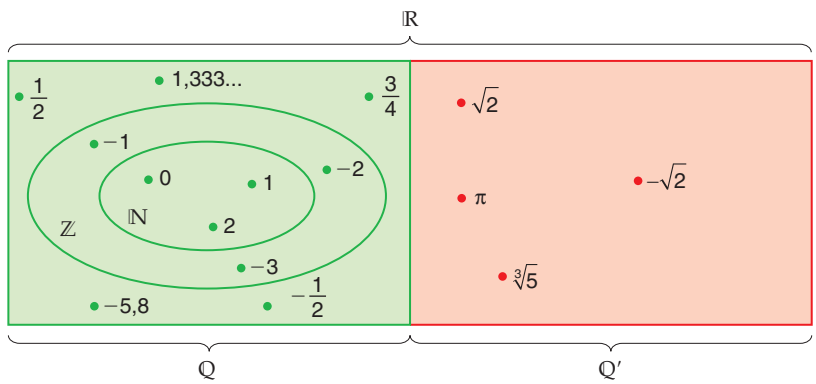
Definimos:

Qualquer número racional ou irracional é chamado de **número real**. Indicamos por $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais:

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é número racional ou irracional}\} \text{ ou } \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Podemos dizer, portanto, que número real é todo número que pode ser representado na forma decimal, com número finito ou infinito de casas decimais.

As relações entre os conjuntos numéricos apresentadas até aqui podem ser resumidas no diagrama a seguir, no qual há alguns elementos de cada conjunto.



Destacamos alguns subconjuntos de $\mathbb{R}$ para os quais adotamos notações especiais:

$\mathbb{R}^*$ é o conjunto dos números reais não nulos.
$\mathbb{R}_+$ é o conjunto dos números reais não negativos.
$\mathbb{R}_+^*$ é o conjunto dos números reais positivos.
$\mathbb{R}_-$ é o conjunto dos números reais não positivos.
$\mathbb{R}_-^*$ é o conjunto dos números reais negativos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedades dos números reais

Enuncie as propriedades dos números reais, solicitando a participação dos estudantes por meio de exemplos.
Ao concluir a apresentação dos conjuntos numéricos, destaque uma particularidade capaz de determinar a classificação de um número. Não é necessária uma definição formal.

P1. A soma de dois números reais quaisquer é um número real.

P2. A diferença entre dois números reais quaisquer é um número real.

P3. O produto de dois números reais quaisquer é um número real.

P4. O quociente de dois números reais quaisquer, sendo o divisor não nulo, é um número real.

P5. Se n é número natural ímpar e a é um número real, temos:

$$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$$

P6. Sendo n um número natural par não nulo e a um número real, temos:

$$\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a \geqslant 0$$

Exemplos

a. Pela propriedade P5 dos números reais, temos:

- $\sqrt[5]{10} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{-8} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{\pi} \in \mathbb{R}$

b. Pela propriedade P6 dos números reais, temos:

- $\sqrt[4]{5} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[6]{0} \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[2]{-1} \notin \mathbb{R}$

30. Resposta pessoal. Você encontrará informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

25. Classifique cada uma das afirmações em verdadeira ou falsa.

a. $5 \in \mathbb{N}$ **25. a.** verdadeira

b. $5 \in \mathbb{Z}$ **25. b.** verdadeira

c. $-3 \in \mathbb{N}$ **25. c.** falsa

d. $-3 \in \mathbb{Z}$ **25. d.** verdadeira

e. $0 \in \mathbb{Z}$ **25. e.** verdadeira

f. $\frac{4}{5} \in \mathbb{Q}$ **25. f.** verdadeira

g. $6{,}5 \notin \mathbb{Q}$ **25. g.** falsa

h. $3 \in \mathbb{Q}$ **25. h.** verdadeira

i. $-3 \notin \mathbb{Q}$ **25. i.** falsa

j. $5{,}6666\ldots \in \mathbb{Q}$ **25. j.** verdadeira

26. Transforme em fração irredutível os números racionais a seguir.

a. 2,5 **26. a.** $\frac{5}{2}$

b. 3,81 **26. b.** $\frac{381}{100}$

c. 0,03 **26. c.** $\frac{3}{100}$

d. 4,222... **26. d.** $\frac{38}{9}$

e. 3,4555... **26. e.** $\frac{311}{90}$

27. Classifique em racional ou irracional o número representado em cada um dos itens.

a. $\sqrt{3}$ **27. a.** irracional

b. $\sqrt{9}$ **27. b.** racional

c. $\sqrt[3]{8}$ **27. c.** racional

d. $\sqrt[3]{5}$ **27. d.** irracional

e. $5 + \sqrt{3}$ **27. e.** irracional

f. $2\sqrt[3]{5}$ **27. f.** irracional

g. $5\sqrt[3]{8}$ **27. g.** racional

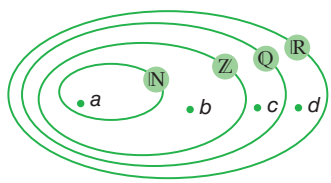
h. $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **27. h.** irracional

i. $\frac{4}{3} - 7\sqrt[3]{5}$ **27. i.** irracional

j. $\pi + \frac{1}{2}$ **27. j.** irracional

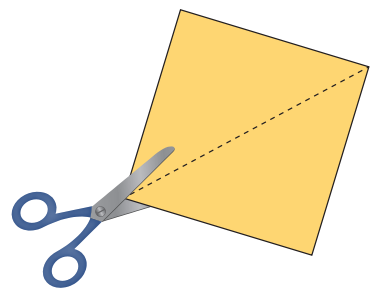
28. Cada uma das letras, a, b, c e d, no diagrama a seguir, representa um único número do conjunto $\left\{\sqrt{7}, -9, 0, \frac{5}{6}\right\}$.

Determine o valor que cada uma dessas letras representa.



28. $a = 0$; $b = -9$; $c = \frac{5}{6}$; $d = \sqrt{7}$

29. Reúna-se com um colega e considerem uma folha quadrada de papel cujo perímetro, em centímetro, seja um número racional. Cortando-se essa folha sobre uma diagonal, são obtidos dois triângulos retângulos.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

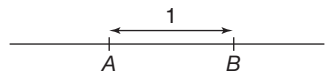
Nessas condições, classifiquem cada uma das afirmações a seguir como V (verdadeira) ou F (falsa), supondo que o corte não cause nenhuma perda de papel.

a. O perímetro, em centímetro, de cada um dos triângulos é um número irracional. **29. a.** V

b. A soma dos perímetros, em centímetro, dos dois triângulos é um número racional. **29. b.** F

c. A área, em centímetro quadrado, de cada um dos triângulos é um número irracional. **29. c.** F

30. Considere o segmento $\overline{AB}$ de comprimento medindo 1 em uma unidade u. Descreva um processo para obter o ponto F da semirreta $\overrightarrow{AB}$ tal que o comprimento do segmento $\overline{AF}$, na unidade u, meça $2\sqrt{2}$.



Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 5 a 12.

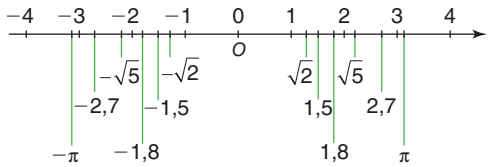
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

7. O eixo real

A cada ponto de uma reta r pode-se associar um único número real, e a cada número real pode-se associar um único ponto dessa reta. Para isso, adotamos os seguintes procedimentos:

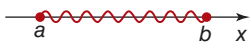
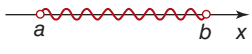
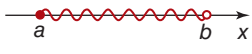
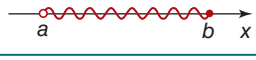
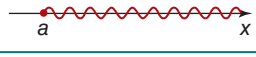
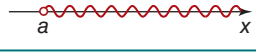
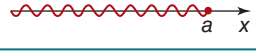
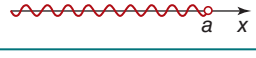
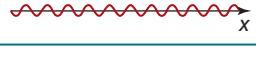
- associamos o número 0 (zero) a um ponto O qualquer de r;
- a cada ponto A de uma das semirretas determinadas por O em r, com A **distinto de** O, associamos um número positivo x, que indica a distância de A até O, em certa unidade u;
- a cada ponto A', simétrico de A em relação a O, associamos o oposto de x.



A esse sistema damos o nome de **eixo real**, cuja origem é o ponto O e o sentido é o que concorda com o crescimento dos valores numéricos.

Intervalos reais

Considerando a e b números reais quaisquer, com $a < b$, os subconjuntos de $\mathbb{R}$ apresentados no quadro a seguir são chamados de **intervalos reais**.

Representação algébrica	Representação no eixo real	Descrição
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ ou $[a, b]$		Intervalo fechado de extremos a e b.
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ ou $]a, b[$		Intervalo aberto de extremos a e b.
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ ou $[a, b[$		Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita de extremos a e b.
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ ou $]a, b]$		Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos a e b.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$ ou $[a, +\infty[$		Intervalo ilimitado fechado à esquerda.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ ou $]a, +\infty[$		Intervalo ilimitado aberto à esquerda.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$ ou $]-\infty, a]$		Intervalo ilimitado fechado à direita.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ ou $]-\infty, a[$		Intervalo ilimitado aberto à direita.
$\mathbb{R}$ ou $]-\infty, +\infty[$		Intervalo ilimitado de menos infinito a mais infinito.

Notas:

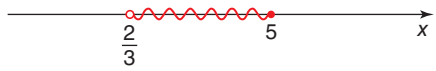
1. O símbolo ∞ significa "infinito".
2. A bolinha cheia (●) em um extremo do intervalo indica que o número associado a esse extremo pertence ao intervalo.
3. A bolinha vazia (○) em um extremo do intervalo indica que o número associado a esse extremo não pertence ao intervalo.
4. O intervalo sempre será aberto nos extremos $+\infty$ e $-\infty$.
5. Os quatro primeiros tipos de intervalo do quadro são chamados de intervalos limitados.
6. Definem-se também intervalos de extremos iguais, por exemplo:
   - o intervalo $[3, 3]$ é o conjunto $\{3\}$;
   - os intervalos $]3, 3[$, $]3, 3]$ e $[3, 3[$ são vazios.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

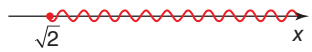
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

a. O conjunto $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x \leqslant 5\right\} = \left]\frac{2}{3}, 5\right]$ é o intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos $\frac{2}{3}$ e 5, cuja representação no eixo real é:



b. O conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \sqrt{2}\} = [\sqrt{2}, +\infty[$ é o intervalo ilimitado fechado à esquerda em $\sqrt{2}$, cuja representação no eixo real é:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

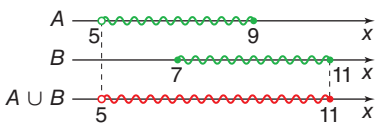
EXERCÍCIO RESOLVIDO

15. Dados os intervalos $A =]5, 9]$, $B = [7, 11]$, $C =]-2, +\infty[$ e $D =]-\infty, 8]$, determine:

a. $A \cup B$ **b.** $A \cap B$ **c.** $C - D$

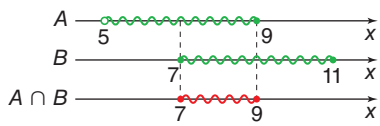
Resolução

a.



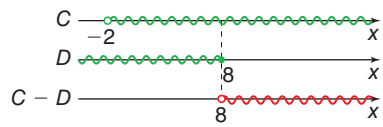
Logo: $A \cup B =]5, 11]$

b.



Logo: $A \cap B = [7, 9]$

c.



Logo: $C - D =]8, +\infty[$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

31. Dados os intervalos $A = [4, 12]$, $B =]9, 19[$, $C =]0, 8]$ e $D =]-\infty, 14]$, determine:

a. $A \cap B$ **31. a.** $]9, 12]$

b. $A \cup B$ **31. b.** $[4, 19[$

c. $B - D$ **31. c.** $]14, 19[$

d. $D - B$ **31. d.** $]-\infty, 9]$

e. $\complement_D^C$ **31. e.** $]-\infty, 0] \cup]8, 14]$

f. $A \cup B \cup C$ **31. f.** $]0, 19[$

g. $A \cap B \cap C$ **31. g.** $\varnothing$

32. No universo $\mathbb{R}$, o conjunto solução do sistema de inequações apresentado a seguir é indicado em uma das alternativas. Qual é essa alternativa? **32.** alternativa **c**

$$\begin{cases} 3x - 9 < 2x + 2 \\ 5x \leqslant 6x + 3 \end{cases}$$

a. $[3, 7[$ **c.** $[-3, 11[$ **e.** $\varnothing$

b. $[3, 7]$ **d.** $[-3, 11]$

(**Lembrete:** o conjunto solução de um sistema de inequações é formado pelas soluções comuns às inequações que o compõem.)

33. Em uma experiência de laboratório, dois tipos A e B de microrganismos foram submetidos a diversas medidas de temperatura. Ao final do experimento constatou-se que o microrganismo A sobrevive apenas às medidas de temperatura do intervalo fechado de –5 °C a 65 °C, e o B sobrevive apenas às medidas de temperatura do intervalo fechado de 4 °C a 70 °C.

De acordo com essas constatações, sob que medidas de temperatura: **33.** Você encontrará informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

a. os tipos A e B sobrevivem?

b. pelo menos um dos dois tipos (A ou B) sobrevive?

c. o microrganismo do tipo A sobrevive e o do tipo B não sobrevive?

d. o microrganismo do tipo B sobrevive e o do tipo A não sobrevive?

e. nenhum dos dois tipos de microrganismos sobrevive?



ANYAVANOVA/ISTOCK/GETTY IMAGES

Cientista analisando um composto em um laboratório.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 13 a 16.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Em uma plantação formada por 876 eucaliptos, há exatamente 650 árvores com pelo menos 12 m de altura e exatamente 480 árvores com, no máximo, 12 m de altura. Quantas dessas árvores têm precisamente 12 m de altura? **1.** 254 árvores.

2. O departamento de Recursos Humanos de uma empresa entrevistou 54 candidatos para algumas vagas existentes no setor de produção. Dessas entrevistas, concluiu-se que 36 candidatos tinham pelo menos 30 anos de idade e 45 candidatos tinham no máximo 34 anos de idade. Quantos dos candidatos entrevistados estavam na faixa etária de 30 a 34 anos? **2.** 27 candidatos.

3. No setor de triagem de um pronto-socorro, foram entrevistadas 88 pessoas com suspeita de ter contraído dengue.



CDC/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

A dengue é transmitida pelo mosquito *Aedes aegypti* infectado pelo vírus.

A cada pessoa foram feitas três perguntas básicas:

(1) Você sente dores no corpo?

(2) Você está com febre?

(3) Você tem manchas avermelhadas no corpo?

Todas as pessoas entrevistadas responderam "sim" a pelo menos uma das perguntas. O quadro a seguir apresenta o número de pessoas que responderam "sim" a cada pergunta.

Quantidade de pessoas que responderam "sim" a cada uma das perguntas

Pergunta sobre os sintomas	Número de pessoas que responderam "sim"
Você sente dores no corpo?	62
Você está com febre?	48
Você tem manchas avermelhadas no corpo?	45

Se, dentre as pessoas entrevistadas, 32 responderam "sim" às perguntas 1 e 2, 35 responderam "sim" às perguntas 1 e 3 e 22 responderam "sim" às perguntas 2 e 3, quantas responderam "sim" às três perguntas? **3.** 22 pessoas.

4. (Enem) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

a. 135. **c.** 118. **e.** 110.

b. 126. **d.** 114. **4.** alternativa **c**

5. Classifique em par ou ímpar cada um dos números apresentados a seguir, considerando que a variável n assume apenas valor inteiro.

a. $2n$ **5. a.** par **c.** $2n-1$ **5. c.** ímpar **e.** $4n+1$ **5. e.** ímpar **g.** $8n+3$ **5. g.** ímpar

b. $2n+1$ **5. b.** ímpar **d.** $4n$ **5. d.** par **f.** $6n+2$ **5. f.** par

6. (Fuvest-SP) Um caixa automático de banco só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um usuário fez um saque de R$ 100,00. **6.** alternativa **c**

Pode-se concluir que entre as notas retiradas:

a. o número de notas de R$ 10,00 é par;

b. o número de notas de R$ 10,00 é ímpar;

c. o número de notas de R$ 5,00 é par;

d. o número de notas de R$ 5,00 é ímpar;

e. o número de notas de R$ 5,00 é par e o número de notas de R$ 10,00 é ímpar.

7. Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. Se p e q são números irracionais, então $\frac{p}{q}$ é irracional. **7. a.** falsa

b. Se p é um número racional e q é um número irracional, então $\frac{p}{q}$ é irracional. **7. b.** falsa

c. Se p é um número racional não nulo e q é um número irracional, então $\frac{p}{q}$ é irracional. **7. c.** verdadeira

d. Existem números irracionais distintos cujo produto é um número racional. **7. d.** verdadeira

e. Se p e q são números irracionais, então $p + q$ é irracional. **7. e.** falsa

f. O inverso de um número irracional é um número irracional. **7. f.** verdadeira

8. Determine o menor número que pertence a cada um dos conjuntos a seguir.

a. $A=\{x\in\mathbb{N} \mid x\geqslant 5\}$ **8. a.** 5 **c.** $C=\{x\in\mathbb{Q} \mid x\geqslant 5\}$ **8. c.** 5

b. $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x>5\}$ **8. b.** 6 **d.** $D=\{x\in\mathbb{Q} \mid x>5\}$ **8. d.** Não existe.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. Para participar de um campeonato de natação no Rio de Janeiro, um clube reservou para seus atletas alguns quartos de um hotel, durante determinada quantidade de dias. Ao final do campeonato, o clube pagou ao hotel R$ 3.840,00 de estadia. Se o preço da diária de cada quarto, em real, foi um mesmo valor inteiro maior que R$ 312,00 e menor que R$ 328,00, podemos afirmar que: **9.** alternativa **d**

a. o clube alugou 3 quartos por 4 dias.

b. o clube alugou 4 quartos por 3 dias.

c. o clube alugou 6 quartos por 2 dias.

d. o preço da diária de cada quarto foi maior que R$ 318,00.

e. o preço da diária de cada quarto foi exatamente R$ 315,00.

10. Obtenha a fração geratriz de cada dízima periódica a seguir.

a. 3,7777777... **10. a.** $\frac{34}{9}$

b. 7,3444444... **10. b.** $\frac{661}{90}$

c. 5,1266666... **10. c.** $\frac{50.754}{9.900}$

d. 12,485485485... **10. d.** $\frac{12.473}{999}$

11. A vazão de uma torneira é de x litros de água por minuto. **11. a.** Resposta possível: 5



YINYANG/E+/ GETTY IMAGES

a. Atribua a x um valor tal que em 1,8 minuto a quantidade de água, em litro, despejada pela torneira possa ser representada por um número inteiro.

b. Atribua a x um valor tal que em três minutos a quantidade de água, em litro, despejada pela torneira possa ser representada por um número racional não inteiro. **11. b.** Resposta possível: 2,5

c. Qualquer que seja o valor racional atribuído a x, pode-se concluir que em 2,3 minutos a quantidade de água, em litro, despejada pela torneira pode ser representada por um número racional? Por quê?

12. Em determinado dia, o soldado responsável pela contagem dos militares em serviço no quartel constatou que estavam presentes apenas soldados, sargentos e tenentes, obedecendo à seguinte relação: para cada 300 soldados, havia exatamente 7 tenentes, e para cada 15 sargentos, havia exatamente 2 tenentes. Qual é o menor número possível de militares em serviço no quartel nesse dia? **12.** 719 militares.

13. Entre as várias fórmulas existentes para estimar o intervalo da medida mínima da altura à medida máxima da altura que uma pessoa pode alcançar na idade adulta, os pediatras costumam utilizar as fórmulas apresentadas a seguir, em que h é a medida final da altura na idade adulta, em centímetro, e x e y são as medidas das alturas, em centímetro, do pai e da mãe, respectivamente.

11. c. Sim, porque o produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

- Para meninos:

$$h \in \left[\frac{x+y+12,5}{2} - 6,25;\ \frac{x+y+12,5}{2} + 6,25\right]$$

- Para meninas:

$$h \in \left[\frac{x+y-12,5}{2} - 6,25;\ \frac{x+y-12,5}{2} + 6,25\right]$$

Pedro e Maria são irmãos, ainda em idade de crescimento. Seu pai tem 180 cm de altura, e sua mãe, 172 cm. De acordo com as fórmulas apresentadas, é possível que Pedro e Maria tenham a mesma medida final de altura na idade adulta? Justifique sua resposta. **13.** Você encontrará informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

14. Em um mesmo dia, dois canais de televisão, A e B, exibiram, sem interrupção, os filmes C e D, respectivamente. No canal A, o filme começou às 14 h e terminou às 16 h 12 min; e, no canal B, o filme começou às 15 h e terminou às 16 h 45 min, sendo cada filme exibido uma única vez nesse dia.

Considerando apenas esses dois canais, represente por um intervalo real, cujos extremos representem o tempo, em hora, os horários desse dia em que:

a. pelo menos um dos filmes estava sendo exibido;

b. os dois filmes estavam sendo exibidos; **14. a.** [14; 16,75]

c. apenas o filme C estava sendo exibido; **14. b.** [15; 16,2]

d. apenas o filme D estava sendo exibido. **14. c.** [14; 15[

14. d.]16,2; 16,75]

15. Em determinado dia, os compradores de três empresas A, B e C dispunham, respectivamente, apenas dos seguintes horários em suas agendas para realizar uma reunião: das 13,5 h às 17,5 h; das 15,5 h às 18 h; e das 13 h às 17 h. Um fornecedor que pretendia ser atendido pelos três compradores naquele dia sabia que conseguiria fazê-lo se dispusesse de pelo menos 2 horas para as três visitas. Seria possível que esse fornecedor fosse atendido pelos três compradores naquele dia? Justifique sua resposta.

15. O fornecedor não vai conseguir visitar os três compradores naquele dia, pois o tempo disponível seria menor que 2 horas.

16. (Enem) Uma empresa de comunicação tem a tarefa de elaborar um material publicitário de um estaleiro para divulgar um novo navio, equipado com um guindaste de 15 m de altura e uma esteira de 90 m de comprimento. No desenho desse navio, a representação do guindaste deve ter sua altura entre 0,5 cm e 1 cm, enquanto a esteira deve apresentar comprimento superior a 4 cm. Todo o desenho deverá ser feito em uma escala 1 : X. Os valores possíveis para X são, apenas: **16.** alternativa **c**

a. $X > 1.500$.

b. $X < 3.000$.

c. $1.500 < X < 2.250$.

d. $1.500 < X < 3.000$.

e. $2.250 < X < 3.000$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 1

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Para avaliar a audiência de três telejornais, *A*, *B* e *C*, que vão ao ar diariamente, foi realizada uma pesquisa com uma amostra de 2.700 pessoas. A análise dos resultados revelou que todas as 2.700 pessoas entrevistadas responderam à pesquisa e que, precisamente:

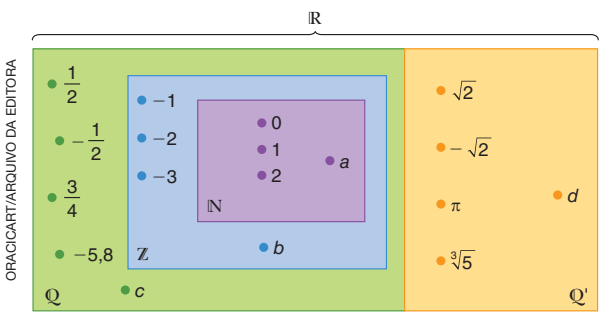
- 200 pessoas não assistiram a nenhum dos telejornais;
- 600 pessoas já assistiram apenas ao telejornal *A*;
- 900 pessoas já assistiram apenas ao telejornal *B*;
- 500 pessoas já assistiram apenas ao telejornal *C*;
- 270 pessoas já assistiram aos telejornais *A* e *B*;
- 320 pessoas já assistiram aos telejornais *A* e *C*;
- 210 pessoas já assistiram aos telejornais *B* e *C*.

O número de telespectadores do telejornal que teve o maior número de telespectadores entre as pessoas entrevistadas é: **1.** alternativa **d**

a. 200. **c.** 1.040. **e.** 2.700.

b. 880. **d.** 1.230.

2. As relações entre os conjuntos numéricos estudados até aqui podem ser resumidas pelo diagrama a seguir, que apresenta, como exemplos, alguns elementos de cada conjunto.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Cada uma das letras *a, b, c, d* representa um, e apenas um, dos números: -9; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2,56 e $\sqrt{36}$. Indique a alternativa correta. **2.** alternativa **c**

a. $a=-9$; $b=\sqrt{36}$; $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ e $d=2{,}56$

b. $a=\sqrt{36}$; $b=2{,}56$; $c=-9$ e $d=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

c. $a=\sqrt{36}$; $b=-9$; $c=2{,}56$ e $d=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

d. $a=-9$; $b=2{,}56$; $c=\sqrt{36}$ e $d=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

e. $a=-9$; $b=\sqrt{36}$; $c=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ e $d=2{,}56$

3. alternativa **d**

3. O comprimento do segmento de reta que representa no eixo real um intervalo limitado (fechado, aberto ou semiaberto) é definido como a diferença entre o maior e o menor extremo do intervalo, nesta ordem. Por exemplo, o segmento de reta que representa o intervalo [4, 9[tem comprimento 5, que é calculado por 9 − 4. O ponto médio *M* de um segmento de reta é aquele que divide o segmento em dois segmentos de mesmo comprimento. O ponto médio *M* do segmento de reta que representa no eixo real qualquer um dos intervalos $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ ou $]a, b]$ tem abscissa:

a. $a+b$ **d.** $\frac{a+b}{2}$

b. $a-b$ **e.** $\frac{a-b}{2}$

c. $\frac{a}{b}$

4. (FMP) Dados dois conjuntos *A* e *B*, o conjunto diferença $A-B$ é definido por:

$A-B=\{x \mid x\in A \text{ e } x\notin b\}$

Sejam $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números reais e o conjunto dos números racionais, respectivamente.

Um número que pertence ao conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ é:

4. alternativa **d**

a. 0 **d.** $\sqrt{2}$

b. −1 **e.** $\sqrt{9}$

c. $-\frac{2}{7}$

5. (Efomm-RJ) Analise as proposições abaixo e assinale a alternativa correta.

I. Se *x* e *y* são números racionais, então x^y pode ser um número irracional.

II. Se *x* e *y* são números irracionais, então o produto *xy* é também irracional.

5. alternativa **a**

III. Para todo *x* real, tem-se que $x \leqslant x^4$.

a. Apenas a proposição I está correta.

b. Apenas a proposição II está correta.

c. Apenas a proposição III está correta.

d. Apenas as proposições I e III estão corretas.

e. Apenas as proposições II e III estão corretas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

6. (Unisc-RS) A empresa WXYZSE Soluções Empreendedoras quer saber quais são os esportes preferidos de seus colaboradores. Para isso contratou uma pesquisa que apresentou o seguinte resultado: 32 jogam futebol, 27 treinam voleibol, 19 praticam golfe, 7 jogam futebol e voleibol, 5 treinam voleibol e golfe, 8 praticam golfe e futebol, 1 joga os três esportes.
Com base nessas informações, quantos colaboradores trabalham nessa empresa? **6.** alternativa **a**

a. 59 **d.** 69

b. 51 **e.** 61

c. 50

7. (UEG-GO) Em uma pesquisa sobre turismo, foi feito o levantamento sobre viagens realizadas em 2021, por motivo de lazer, para cidades do Brasil e do exterior. A tabela a seguir mostra o resultado.

Tipo de viagem	Nº de Entrevistados
Brasil	589
Exterior	260
Brasil e Exterior	57
Não viajaram	14

Quantas pessoas foram entrevistadas nessa pesquisa?

a. 778 **c.** 849 **e.** 920

b. 806 **d.** 863 **7.** alternativa **b**

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno a ficha a seguir, que lhe fornecerá uma visão geral sobre o seu desempenho neste capítulo. Assinale com um X a cada célula se a resposta for "sim".

A ficha de autoavaliação é apresentada neste momento, mas você pode copiá-la e preenchê-la sempre que considerar necessário verificar sua aprendizagem, adequando o número de colunas ao número de exercícios.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Ficha de autoavaliação

Sobre o exercício...	1	2	3	4	5	6	7
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema e consegui resolvê-lo.							
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Pedi ajuda.							
Li, compreendi o texto, identifiquei os dados principais do problema, mas não consegui resolvê-lo sozinho. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.							
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Pedi ajuda.							
Tive dificuldade para compreender o texto do problema e não soube relacionar os dados. Não pedi ajuda. Até agora não sei resolvê-lo.							
Não consegui resolvê-lo.							

MODELO MODELO

CAPÍTULO 2

Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira

Como a inflação é calculada?

Este momento propicia o trabalho com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Você encontrará sugestões para o desenvolvimento da abertura nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Um índice de inflação indica a variação média dos preços de um conjunto de bens e serviços em determinado período. Acompanhe como o IBGE calcula um desses índices, divulgado todo mês.

1 Cesta-padrão de consumo

O IBGE faz pesquisas periódicas para conhecer os produtos e serviços que as famílias mais consomem e, com base nessas pesquisas, monta uma cesta-padrão de consumo para saber quais preços monitorar.

Como os gastos variam de família para família, o IBGE monta diferentes cestas-padrão de consumo para diferentes faixas de renda.



MARCOS DE LIMA/ARQUIVO DA EDITORA

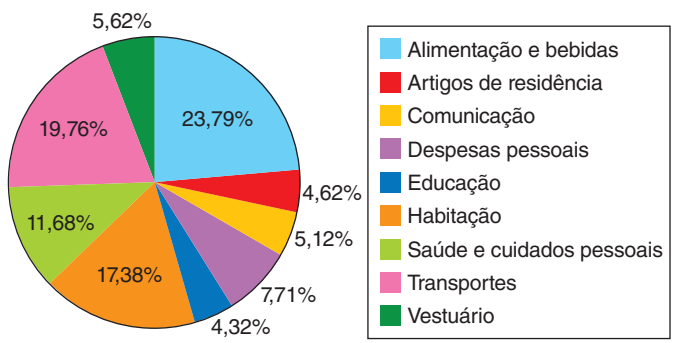
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Grupos de despesa no orçamento das famílias com renda de 1 a 5 salários mínimos em outubro de 2023

Esta é uma cesta-padrão de consumo de famílias assalariadas com renda de 1 a 5 salários mínimos. Ela é usada no cálculo do INPC* e indica que, por exemplo, habitação, alimentação e bebidas respondem por 41,17% das despesas dessas famílias.

Essas mesmas despesas têm importância menor na cesta-padrão de consumo de famílias que ganham até 40 salários mínimos, usada no cálculo do IPCA**. Para essas famílias, habitação, alimentação e bebidas somam apenas 36,27% dos gastos.

Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC)
Peso mensal (%) – Outubro de 2023



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

* Índice Nacional de Preços ao Consumidor
** Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo

Fonte: INPC. IBGE.

MARCOS DE LIMA/ARQUIVO DA EDITORA

2 **Tomada de preços**
Sabendo o que as famílias consomem e a importância de cada grupo no orçamento, os pesquisadores do IBGE fazem a coleta dos preços mensalmente. São 13 áreas urbanas do Brasil de, aproximadamente, 430 mil preços em 30 mil locais.

3 **Calculando as variações**
A coleta de preços dos mesmos produtos e serviços é repetida a cada 30 dias nos mesmos estabelecimentos, o que torna possível saber quanto cada item variou.



4 **Cálculo do INPC**
O INPC é a média aritmética ponderada entre as variações percentuais dos preços dos grupos de produtos e serviços, mostradas no gráfico, com os respectivos pesos, indicados no gráfico anterior (gráfico de setores).

INPC em outubro de 2023 +0,12%

Além da teoria

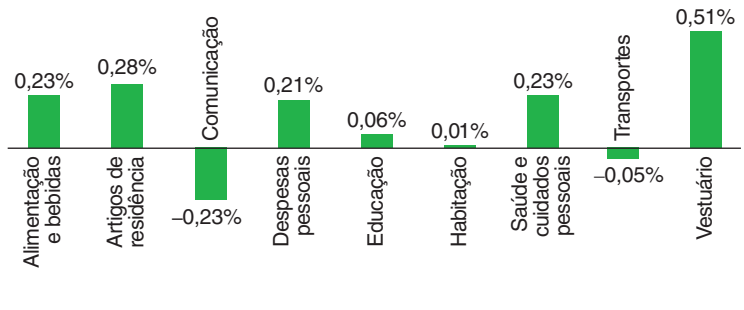
Além da teoria:
1. Resposta pessoal.

1. Você já pensou em como a inflação afeta nossa vida?
2. Na cesta-padrão de consumo de famílias assalariadas com renda de 1 a 5 salários mínimos, a que grupo corresponde a maior despesa?
3. Se a taxa percentual de inflação for positiva e se repetir em dois meses consecutivos, isso significa que não haverá aumento no preço médio de bens e serviços do primeiro para o segundo meses. Escreva um texto explicando como foi essa variação.
4. Pesquise e analise a taxa de inflação dos últimos 12 meses. Escreva um texto explicando como foi essa variação.

2. Ao grupo de alimentação e bebidas.

4. Resposta pessoal.

Variação percentual de preço dos grupos de produtos e serviços de outubro de 2023 em relação a setembro de 2023



Fonte: INPC. IBGE.

Elaborado com base em: IBGE. **Inflação**. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php; IBGE. **SIDRA**: Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC). Disponível em: https://sidra.ibge.gov.br/pesquisa/snipc/inpc/quadros/brasil/outubro-2023. Acesso em: 5 ago. 2024.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Não. Se a taxa percentual de inflação for positiva e se repetir em dois meses consecutivos, isso significa que, em cada um desses meses, esses bens e serviços terão o mesmo aumento percentual médio nos preços em relação ao mês anterior.

O exemplo que introduz o assunto é uma situação-problema em que usamos uma equação polinomial do 1º grau para resolvê-la. Escreva na lousa as condições de pagamento do *notebook* e pergunte qual é o valor da entrada. Oriente os estudantes no cálculo desse valor. Relacione o procedimento adotado para o cálculo da entrada com a equação $x + 12 \cdot 169 = 2.400$. Nesse momento, defina equação polinomial do 1º grau, conjunto universo, raiz da equação e conjunto solução. Apresente as propriedades da igualdade aplicadas na resolução de uma equação desse tipo e peça aos estudantes outros exemplos do cotidiano que exijam a determinação de um valor desconhecido (resolução de equações).

1. Equações polinomiais do 1º grau

Muitas vezes, em nosso dia a dia, resolvemos problemas sem perceber que estamos aplicando conceitos matemáticos importantes. Por exemplo, observe a imagem de um anúncio que foi veiculado em uma loja *on-line*, durante uma promoção de vendas de *notebooks*.



ILUSTRAÇÃO: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA; FOTO: XXMMXX/ISTOCK/GETTY IMAGES

Esse anúncio não explicita o valor da entrada, mas, relacionando as informações conhecidas, é possível determiná-lo:

- multiplicando por 12 o valor 169, obtemos 2.028, que é o total, em real, pago pelas prestações;
- subtraindo 2.028 do preço total do *notebook*, obtemos o valor da entrada:

$$2.400 - 2.028 = 372$$

Concluímos, então, que a entrada é de R$ 372,00.

O que fizemos nesse exemplo foi determinar o valor desconhecido x na sentença matemática:

$$x + 12 \cdot 169 = 2.400$$

Essa sentença é chamada de **equação polinomial do 1º grau** com **incógnita** x. O valor de x que torna a sentença verdadeira é chamado de **raiz da equação**. No exemplo, a raiz da equação é 372.

Equações polinomiais do 1º grau são aquelas que podem ser representadas na forma: $ax + b = 0$, em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$, e x é a incógnita.

Na situação anterior, em que calculamos o valor da entrada na compra do *notebook*, a equação $x + 12 \cdot 169 = 2.400$ é classificada como equação polinomial do 1º grau, pois pode ser representada por $x - 372 = 0$, que é a forma $ax + b = 0$, com $a = 1$ e $b = -372$.

A resolução desse tipo de equação é fundamentada nas **propriedades da igualdade** descritas a seguir.

- Adicionando o mesmo número a ambos os membros de uma igualdade, ou subtraindo o mesmo número de ambos os membros, a igualdade se mantém.
- Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma igualdade pelo mesmo número não nulo, a igualdade se mantém.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Determine o valor de x, tal que: $5x - 8 = 2x + 4$.

Resolução

Adicionamos $-2x$ e 8 a ambos os membros da equação: $5x - 8 = 2x + 4$.

$$5x - 8 - 2x + 8 = 2x + 4 - 2x + 8 \Rightarrow 3x = 12$$

Dividimos por 3 ambos os membros da nova equação, concluindo:

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

2. Em um final de semana, uma parte dos funcionários compareceu para trabalhar em um posto de atendimento. Se nesse período cada um dos funcionários tivesse atendido 50 clientes, 30 teriam ficado sem atendimento. Sabendo que todos os clientes foram atendidos e que cada funcionário fez 51 atendimentos, calcule o número de funcionários que compareceram ao posto nesse fim de semana.

Resolução

Indicando por x o número de funcionários que compareceram ao posto nesse fim de semana, temos:

$$51x = 50x + 30 \Rightarrow 51x - 50x = 30$$

$$\therefore x = 30$$

Concluímos, então, que 30 funcionários compareceram ao posto nesse fim de semana.

Conjunto universo e conjunto solução de uma equação

Pelo contexto do exercício resolvido 2, concluímos que o valor de x na equação só pode ser aceito caso seja um número natural, pois x representa um número de pessoas. Por isso, dizemos que o **conjunto universo** desse problema é o conjunto dos números naturais. Caso encontrássemos um número não natural para o valor de x, o problema não teria solução.

No entanto, uma equação pode ser proposta fora de um contexto que permita a determinação de seu conjunto universo. Quando isso acontece, é usual indicar explicitamente qual é o conjunto universo U. Dessa maneira, serão aceitas como soluções apenas as raízes que pertençam a U. O conjunto formado por essas soluções é chamado de **conjunto solução** (S) ou **conjunto verdade** (V) da equação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Resolva a equação $\frac{2x}{3} + 2x = \frac{7x}{2} - 1$:

a. no universo $\mathbb{Q}$;

b. no universo $\mathbb{Z}$.

Resolução

Para facilitar a resolução, vamos resolver por etapas.

1. Compreender

Inicialmente, vamos identificar o que se pede no problema e quais as informações apresentadas por ele.

Neste caso, o problema apresenta uma equação e pede que a resolva no universo $\mathbb{Q}$.

2. Elaborar um plano

Precisamos pensar e registrar um possível plano para a resolução.

Para esta equação, podemos eliminar os denominadores, multiplicando ambos os membros da equação por um múltiplo comum aos denominadores. Em seguida, aplicar a propriedade distributiva para determinar o valor de x.

3. Executar o plano

Para executar o plano, é necessário determinar um múltiplo comum entre 3 e 2; por exemplo, o menor múltiplo comum: mmc(3, 2) = 6.

$$6 \cdot \left(\frac{2x}{3} + 2x\right) = 6 \cdot \left(\frac{7x}{2} - 1\right)$$

Aplicando a propriedade distributiva, obtemos:

$$4x + 12x = 21x - 6$$

Adicionamos $-21x$ a ambos os membros da equação:

$$4x + 12x - 21x = 21x - 6 - 21x \Rightarrow -5x = -6$$

Dividimos por -5 ambos os membros da nova equação, concluindo:

$$\frac{-5x}{-5} = \frac{-6}{-5} \Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

4. Verificar

Vamos verificar se o valor encontrado para x é solução em cada um dos itens.

a. Como $\frac{6}{5}$ pertence ao conjunto universo $\mathbb{Q}$, o conjunto solução é: $S = \left\{\frac{6}{5}\right\}$.

b. Como $\frac{6}{5}$ não pertence ao conjunto universo $\mathbb{Z}$, concluímos que o conjunto solução é: $S = \varnothing$.

Observação

- $\mathbb{Z}$ é o símbolo do conjunto dos números inteiros.
- $\mathbb{Q}$ é o símbolo do conjunto dos números racionais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

3. alternativa a

Faça os exercícios no caderno.

1. Determine a raiz de cada equação.

a. $10x - 8 = 3x + 6$ **1. a.** 2

b. $5 + 2(3y - 1) = 7y + 6$ **1. b.** –3

c. $4t - (2t - 5) = 3 - 4(2t + 3)$ **1. c.** $-\frac{7}{5}$

2. Considerando como universo o conjunto dos números reais, determine o conjunto solução das equações.

a. $\frac{n}{3} + \frac{n+2}{4} = 4$ **2. a.** $S = \{6\}$

b. $\frac{2k+1}{2} - \frac{k-3}{6} = \frac{1}{3}$ **2. b.** $S = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$

3. (UFRN) Um prêmio em dinheiro estava para ser dividido, em partes iguais, entre 10 ganhadores. Inesperadamente, surgiram mais 2 ganhadores, devendo o prêmio ser dividido, portanto, em 12 partes iguais.

Sabendo que a parcela cabível a cada um dos 10 primeiros ganhadores foi reduzida em R$ 700,00, qual é a opção que corresponde ao valor do prêmio?

a. R$ 42.000,00 **c.** R$ 84.000,00

b. R$ 50.400,00 **d.** R$ 35.000,00

4. (Enem) Em uma cantina, o sucesso de vendas no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola.

Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00, e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30.

Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango.

A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de: **4.** alternativa **e**

a. 1,20. **c.** 0,60. **e.** 0,30.

b. 0,90. **d.** 0,40.

5. (Albert Einstein) Em virtude do aumento dos casos de diferentes tipos de gripe que têm assolado a cidade de São Paulo, preventivamente, alguns prontos-socorros têm distribuído máscaras cirúrgicas àqueles que buscam atendimento. Todas as máscaras de um lote foram distribuídas em quatro dias sucessivos de uma Campanha de Vacinação: no primeiro dia foi distribuído $\frac{1}{8}$ do total; no segundo, $\frac{1}{6}$ do total; no terceiro, o dobro da quantidade distribuída nos dois primeiros dias. Se no último dia tiverem sido distribuídas as 105 máscaras restantes, o total de máscaras de tal lote é um número compreendido entre: **5.** alternativa **a**

a. 700 e 900. **c.** 300 e 500.

b. 500 e 700. **d.** 100 e 300.

6. Ao partir para uma viagem de férias com a família, Luiz completou o tanque de combustível de seu carro. Quando parou em um restaurante na estrada para o almoço, ele observou que $\frac{1}{4}$ do combustível do tanque havia sido consumido. No trecho seguinte da viagem, até o local de destino, foram consumidos 10 L a mais de combustível do que no trecho percorrido antes do almoço. Ao chegar ao destino, Luiz constatou que a medida do volume de combustível restante no tanque equivalia a $\frac{1}{3}$ da medida da capacidade total. Qual é a medida da capacidade desse tanque, em litro? **6.** 60 L

7. Para este exercício, vamos rever o conceito de média aritmética, que você já estudou no Ensino Fundamental.

- A média aritmética de n números x_1, x_2, x_3, ..., x_n, que indicaremos por m_a, é dada por:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

- A média aritmética ponderada de n números x_1, x_2, x_3, ..., x_n, com pesos p_1, p_2, p_3, ..., p_n, respectivamente, que indicaremos por m_{ap}, é dada por:

$$m_{ap} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \ldots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}$$

De acordo com essa revisão, responda aos itens a seguir.

a. Durante 5 dias consecutivos, o preço do dólar americano foi de: R$ 4,78, R$ 4,64, R$ 4,70, R$ 4,80 e R$ 4,78, respectivamente. Qual foi o preço médio diário do dólar americano nesses 5 dias? **7. a.** R$ 4,74

b. Em uma escola, a média final em cada disciplina é calculada como a média aritmética ponderada das 4 avaliações bimestrais, com pesos 1, 2, 2 e 3 para as notas da 1ª, 2ª, 3ª e 4ª avaliações, respectivamente. Se um estudante obteve nessas avaliações de História as notas 7,50; 8,75; 7,50 e 6,00, respectivamente, qual foi a média final desse estudante em História? **7. b.** 7,25

c. Em uma repartição pública onde trabalham 18 funcionários, a média aritmética de idade dos funcionários é 27 anos. Se entre as mulheres dessa repartição a média de idade é 24 anos, e entre os homens a média de idade é 30 anos, quantas mulheres trabalham nessa repartição? **7. c.** 9 mulheres

8. Elabore um problema sobre equação do 1º grau (utilize como modelo os exercícios 3 a 7). Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **8.** Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 e 2.

No exercício **8**, elaborar um problema exige reflexão, criatividade e comunicação por parte dos estudantes, estimulando-os a ser protagonistas do seu processo de aprendizagem.

2. Inequações polinomiais do 1º grau

Em muitas situações do dia a dia, é necessário resolver inequações. Por exemplo, os estudantes de uma turma do Ensino Médio organizaram uma festa para arrecadar fundos para o baile de formatura. Para isso, alugaram um salão de festas por R$ 1.900,00 e contrataram um serviço de bufê que cobra R$ 70,00 por convidado. Se cada pessoa deve pagar R$ 100,00 pelo convite, quantos convites devem ser vendidos para que o evento apresente lucro?

Para que o evento apresente lucro, o total arrecadado deve ser maior que as despesas. Assim, representando por x o número de convites vendidos, temos que o total arrecadado é calculado por $100x$, e as despesas são calculadas por $1.900 + 70x$. Assim, haverá lucro se:

$$100x > 1.900 + 70x$$

Essa sentença é chamada de inequação polinomial do 1º grau na variável x.

Inequação polinomial do 1º grau na variável x é toda desigualdade que pode ser representada na forma: $ax + b > 0$ (ou com as relações $\geqslant$, $<$, $\leqslant$ ou $\neq$), em que a e b são constantes reais, com $a \neq 0$.

Por exemplo, na situação anterior, na qual é pedido o número de convites que devem ser vendidos, a inequação $100x > 1.900 + 70x$ pode ser representada por $30x - 1.900 > 0$, que é a forma $ax + b > 0$, com $a = 30$ e $b = -1.900$. Por isso, ela é classificada como inequação polinomial do 1º grau.

A resolução desse tipo de inequação é fundamentada nas **propriedades das desigualdades** descritas a seguir.

- Adicionando o mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade ou subtraindo o mesmo número de ambos os membros, a desigualdade se mantém.
- Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma desigualdade pelo mesmo número positivo, a desigualdade se mantém.
- Dividindo ou multiplicando pelo mesmo número negativo ambos os membros de uma desigualdade do tipo $>$, $\geqslant$, $<$ ou $\leqslant$, a desigualdade inverte o sentido.

Reflexão: Espera-se que o estudante calcule o valor de x para determinar o número mínimo de convites que precisam ser vendidos. Como x é um número na forma decimal e o número de convites deve ser um número inteiro, então o estudante deve considerar o próximo número inteiro em relação a x. Portanto, para a turma do Ensino Médio obter lucro, deve vender 64 convites, ou mais.

Reflexão

De acordo com a inequação obtida, você sabe dizer qual é o número mínimo de convites que precisam ser vendidos para que os estudantes comecem a ter lucro?

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. Considerando como universo o conjunto dos números naturais, determine o conjunto solução da inequação: $5x - 8 < 3x + 12$.

Resolução

Adicionando 8 a cada membro da inequação e subtraindo $3x$ de cada membro, obtemos:

$$5x - 3x < 12 + 8 \Rightarrow 2x < 20$$

Dividindo ambos os membros da inequação por 2, obtemos: $x < \frac{20}{2} \Rightarrow x < 10$.

No universo considerado ($\mathbb{N}$), o conjunto dos valores de x que satisfazem a inequação é o conjunto solução S, tal que $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(**Nota:** Se o universo considerado fosse o conjunto dos números reais, não seria possível explicitar, um a um, todos os números reais menores que 10. Por isso, o conjunto solução S seria representado simplesmente por: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 10\}$.)

5. Uma transportadora oferece as opções A e B de frete, descritas a seguir, para entregas em todo o Brasil.

- Frete A: taxa fixa de R$ 7,00 mais R$ 0,03 por grama da remessa.
- Frete B: taxa fixa de R$ 5,00 mais R$ 0,04 por grama da remessa.

Acima de quantos gramas da remessa é mais econômica a opção A?

Resolução

Sendo x a medida de massa da remessa, em grama, a opção pelo frete A será mais econômica que pelo frete B se $7 + 0{,}03x < 5 + 0{,}04x$, ou seja,

$$7 - 5 < 0{,}04x - 0{,}03x \Rightarrow 2 < 0{,}01x$$

$$\therefore x > 200$$

Logo, o frete A é mais econômico para mais de 200 g de remessa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

9. Considerando o universo dos números inteiros, determine o conjunto solução das inequações.

a. $9x - 5(3 - 2x) > 7x + 9$

b. $4y - 5 < 2(y + 3) + 5y$

c. $6t - (5t + 8) \leqslant 1 - 2(5 - t)$

9. b. $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

9. a. $S = \{3, 4, 5, 6, ...\}$

9. c. $S = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

10. Resolva as inequações a seguir, no universo $\mathbb{R}$.

a. $\frac{2x}{5} - 1 \geqslant \frac{x}{10} + \frac{3x}{8}$

b. $4k - \frac{3(k+2)}{4} < \frac{1}{2} + 2(1 - 3k)$

c. $2a - \frac{a-4}{2} \neq 1$

10. a. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{40}{3}\right\}$

10. b. $S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid k < \frac{16}{37}\right\}$

10. c. $S = \left\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq -\frac{2}{3}\right\}$

11. Duas agências de locação de automóveis oferecem as seguintes tarifas para veículos de um mesmo modelo:



ORAC/CART/ARQUIVO DA EDITORA

Em que condição é mais vantajoso alugar um carro na agência A do que na agência B?

11. Será mais vantajoso alugar um carro na agência A se o total de quilômetros rodados por dia for superior a 100.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 3.

3. Sistemas de equações polinomiais do 1º grau

Ao equacionar problemas envolvendo mais de uma incógnita, podemos obter uma ou mais equações que as relacionem. Veremos a seguir que isso acontece, por exemplo, ao equacionar as relações entre as variáveis que interferem no custo de produção de um artigo.



KRISTA KRISTA/SHUTTERSTOCK

Fabricação de tinta cor-de-rosa.

O departamento financeiro de uma indústria avaliou que o custo para a fabricação de cada litro de uma nova tinta cor-de-rosa é de R$ 17,10. Essa nova tinta é obtida pela mistura das tintas vermelha e branca, cujos custos de produção por litro são R$ 18,00 e R$ 16,00, respectivamente. Que quantidades de tinta vermelha e branca compõem cada litro da tinta cor-de-rosa?

Podemos resolver esse problema indicando por v e b as frações de litro de tinta vermelha e de tinta branca, respectivamente, que compõem 1 L da tinta cor-de-rosa. Assim, temos:

$$\begin{cases} v + b = 1 \\ 18v + 16b = 17{,}10 \end{cases}$$

Essas duas equações polinomiais do 1º grau, por conterem as mesmas incógnitas, v e b, formam um **sistema de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas**. Dentre os métodos de resolução desse tipo de sistema estudados no Ensino Fundamental, vamos revisar os métodos da adição e da substituição nos exercícios resolvidos 6 e 7, a seguir.

Aplicando qualquer um dos métodos no exemplo anterior, obtêm-se $v = 0{,}55$ e $b = 0{,}45$, ou seja, cada litro de tinta cor-de-rosa contém 0,55 L de tinta vermelha e 0,45 L de branca.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6. Resolva o sistema de equações nas incógnitas a e b.

$$\begin{cases} 3a + 2b = 4 \\ 5a + 7b = 3 \end{cases}$$

Resolução

Aplicando o método da adição, podemos proceder da seguinte maneira:

Multiplicamos os dois membros da primeira equação por 5 e os dois membros da segunda por −3, obtendo, assim, coeficientes opostos na incógnita a:

$$\begin{cases} 15a + 10b = 20 \\ -15a - 21b = -9 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as duas equações do sistema, obtemos:

$$-11b = 11 \Rightarrow b = -1$$

Substituímos b por −1 em qualquer equação do sistema; por exemplo, em $3a + 2b = 4$, temos:

$$3a + 2 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow a = 2$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é: $S = \{(2, -1)\}$.

Observação

A menos que se especifique o contrário, obedeceremos à ordem alfabética das incógnitas no par ordenado que é solução do sistema.

7. Um cliente de um banco fez um saque de R$ 1.200,00 em cédulas de 10 e de 20 reais, num total de 73 cédulas.

Quantas cédulas de 20 reais ele sacou?

Resolução

Indicando por x e y a quantidade de cédulas de 10 e de 20 reais, respectivamente, as informações desse enunciado podem ser representadas pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y = 73 \\ 10x + 20y = 1.200 \end{cases}$$

Aplicando o método da substituição, vamos isolar a incógnita x na primeira equação:

$$\begin{cases} x = 73 - y & (1) \\ 10x + 20y = 1.200 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$10(73 - y) + 20y = 1.200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 730 - 10y + 20y = 1.200$$

$$\therefore 10y = 470 \Rightarrow y = 47$$

Concluímos, então, que o cliente sacou 47 cédulas de 20 reais.

Outro modo para resolver o problema é aplicando o método da comparação. Vamos utilizar o sistema de equações definido anteriormente:

$$\begin{cases} x + y = 73 \\ 10x + 20y = 1.200 \end{cases}$$

Isolamos a mesma variável nas duas equações, por exemplo, vamos isolar a variável x:

$$\begin{cases} x = 73 - y \\ x = 120 - 2y \end{cases}$$

Depois, igualando as expressões $73 - y$ e $120 - 2y$, temos:

$$73 - y = 120 - 2y \Rightarrow y = 47$$

Concluímos, então, que o cliente sacou 47 cédulas de 20 reais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No exercício **12**, os estudantes podem ampliar o repertório de estratégias ao socializarem os métodos utilizados por eles ao resolverem os sistemas de equações de 1º grau.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

12. Em dupla, resolvam os sistemas. Depois, comparem e discutam os métodos que vocês usaram na resolução com os métodos usados pelos colegas.

a. $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$ **12. a.** $S = \{(8, -1)\}$

b. $\begin{cases} 5x + 3y = 11 \\ 6x - y = 4 \end{cases}$ **12. b.** $S = \{(1, 2)\}$

c. $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases}$ **12. c.** $S = \left\{\left(\frac{9}{23}, \frac{2}{23}\right)\right\}$

d. $\begin{cases} 8x - 4y - 2 = 1 - y \\ 3x - 2 = 2y + 6x \end{cases}$ **12. d.** $S = \{(0, -1)\}$

13. (Unama-AM) Dois reservatórios, A e B, contêm juntos 1.100 litros de gasolina. Se fossem acrescentados 100 litros de gasolina ao reservatório A, ele ficaria com a metade da gasolina contida em B. A quantidade de gasolina no reservatório B é: **13.** alternativa **a**

a. 800 L
b. 900 L
c. 600 L
d. 1.000 L
e. 860 L

14. Uma fábrica produz uma marca de café misturando as variedades tupi e catuaí amarelo. O café tupi, depois de torrado e moído, tem o custo de R$ 9,60 por quilograma, e o catuaí amarelo, de R$ 8,80 por quilograma. Se o custo de 1 kg da mistura das duas variedades, após o processamento, é de R$ 9,12, que quantidade de café de cada variedade compõe 1 kg dessa mistura?

14. 0,4 kg de café tupi e 0,6 kg de café catuaí amarelo.



EDUARDO ZAPPIA/PULSAR IMAGENS

Fruto da variedade de café catuaí amarelo.

15. Resposta pessoal.

15. Elabore um problema que seja resolvido por meio de um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas e dê para um colega resolver. Depois, verifique se a resposta dele está correta.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 4 e 5.

4. Equações polinomiais do 2º grau

Em uma promoção do tipo "Leve mais e pague menos", se o consumidor comprar apenas 1 sachê de molho de tomate, o preço é R$ 2,45; comprando 2 sachês, o preço por unidade é R$ 2,40; comprando 3 sachês, o preço unitário é R$ 2,35, e assim por diante, até o limite de 25 unidades por compra. Para cada sachê comprado, além do primeiro, o preço unitário de todos os sachês adquiridos diminui R$ 0,05. Se, dentro do limite da promoção, um consumidor pagou R$ 30,00 em uma única compra desse molho de tomate, quantos sachês ele comprou?

O quadro a seguir nos ajudará a equacionar esse problema.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Relação entre a quantidade de sachês comprados e o valor pago

Número de sachês comprados	Preço (R$)
1	2,45
2	2,45 – 0,05
3	2,45 – 2 · 0,05
4	2,45 – 3 · 0,05
⋮	⋮
x	2,45 – (x – 1) · 0,05

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Multiplicando o número de sachês comprados pelo respectivo preço unitário, obtemos o valor total da compra. Assim, o número x de sachês comprados para que o valor total da compra seja R$ 30,00 é raiz da equação:

$$x \cdot [2{,}45 - (x - 1) \cdot 0{,}05] = 30$$

que é equivalente a:

$$0{,}05x^2 - 2{,}5x + 30 = 0$$

A sentença $0{,}05x^2 - 2{,}5x + 30 = 0$ é uma **equação polinomial do 2º grau** na incógnita x, cuja resolução é apresentada no exercício resolvido 8.

Toda equação que pode ser representada na forma: $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, é chamada de **equação polinomial do 2º grau** na incógnita x.

Se $b = 0$ ou $c = 0$, tem-se uma **equação polinomial do 2º grau incompleta.**
Qualquer equação polinomial do 2º grau pode ser resolvida pela fórmula a seguir.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que: } \Delta = b^2 - 4ac$$

O valor de Δ (lê-se: "delta"), chamado **discriminante** da equação, informa-nos se a equação tem raízes reais e, em caso afirmativo, se são iguais ou diferentes. Assim:

- Quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.
- Quando $\Delta \geqslant 0$, a equação tem duas raízes reais, sendo iguais quando $\Delta = 0$ ou distintas quando $\Delta > 0$.

Se x_1 e x_2 são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, então a soma S e o produto P dessas raízes são:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

No **Conectado**, os estudantes serão estimulados a exercitar o pensamento computacional ao ler um fluxograma que apresenta os passos utilizados para resolver uma equação do 2º grau. Por meio dessa atividade, é esperado que eles percebam que há grupos de problemas que podem ser resolvidos utilizando os mesmos procedimentos.

Conectado

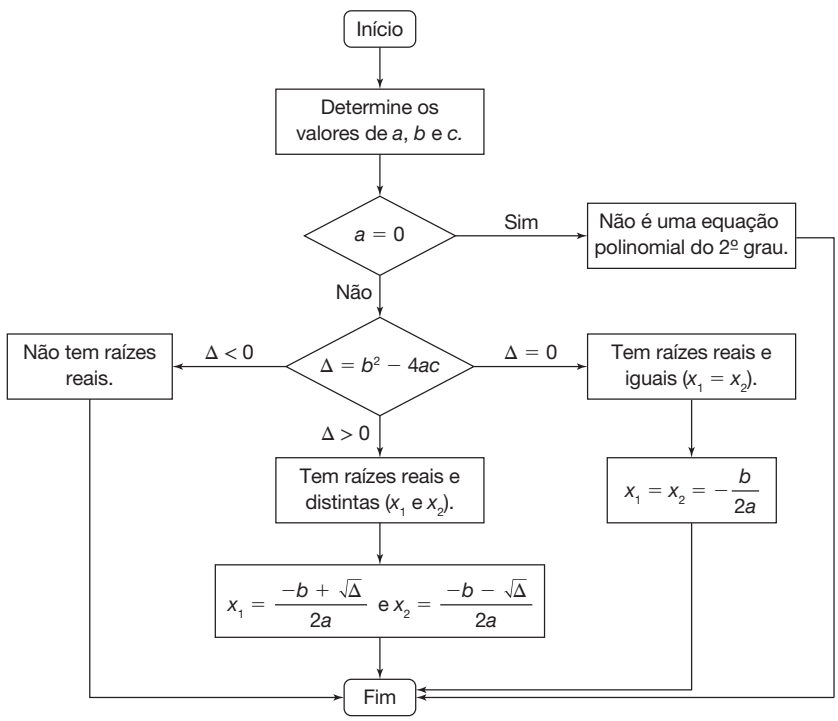
Para resolver uma equação polinomial do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, podemos construir um algoritmo de modo que, dados os números reais para a, b e c, obtemos como resposta as raízes dessa equação.

Há algumas maneiras de construir esse algoritmo, mas em todas elas é necessário considerar a análise dos valores de a, b e c e do discriminante.

Ao lado, é apresentado algoritmo para a resolução de uma equação do 2º grau, por meio de um fluxograma.

Agora é com você!

Com base no fluxograma, escolha quaisquer números reais a, b e c e determine as raízes de uma equação do 2º grau.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Conectado: Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Reflexão: Aplicando a fórmula resolutiva, os estudantes deverão encontrar a mesma solução apresentada no **exercício resolvido 9**.

8. Na situação introdutória deste tópico, que descreve a promoção "Leve mais e pague menos", concluímos que o número de sachês comprados pelo consumidor é raiz da equação $0{,}05x^2 - 2{,}5x + 30 = 0$.

Quantos sachês o consumidor comprou?

Resolução

Comparando a equação $0{,}05x^2 - 2{,}5x + 30 = 0$ com a equação genérica $ax^2 + bx + c = 0$, temos $a = 0{,}05$, $b = -2{,}5$ e $c = 30$.

Portanto:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}05 \cdot 30 = 0{,}25$

$\therefore x = \dfrac{-(-2{,}5) \pm \sqrt{0{,}25}}{2 \cdot 0{,}05} = \dfrac{2{,}5 \pm 0{,}5}{0{,}1} \Rightarrow$

$x = 30$ ou $x = 20$

Como o limite de sachês permitido por compra é de 25 unidades, excluímos a resposta $x = 30$. Concluímos, então, que o consumidor comprou 20 sachês.

9. Considerando o universo dos números reais, resolva as equações do 2º grau incompletas.

a. $4t^2 - 25 = 0$

b. $y^2 + 9 = 0$

c. $x^2 - 3x = 0$

Resolução

a. Isolando o monômio em t no primeiro membro da igualdade, temos:

$$4t^2 = 25 \Rightarrow t^2 = \frac{25}{4} \ \therefore \ t = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} = \pm\frac{5}{2}$$

Logo, o conjunto solução S da equação é:

$$S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$$

b. Isolando o monômio em y no primeiro membro da igualdade, temos: $y^2 = -9$.

Como não existe número real cujo quadrado é negativo, concluímos que o conjunto solução S da equação é o conjunto vazio: $S = \varnothing$.

c. Fatorando o primeiro membro da equação, obtemos: $x(x - 3) = 0$.

Pela **propriedade do produto nulo** (o produto de números reais é igual a zero se, e somente se, pelo menos um dos fatores é igual a zero), temos:

$x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x - 3 = 0$, ou seja:

$$x = 0 \text{ ou } x = 3$$

Logo, o conjunto solução S da equação é: $S = \{0, 3\}$.

Reflexão

Para equações incompletas, também pode ser aplicada a fórmula resolutiva. Resolva no caderno as equações do exercício resolvido 9, aplicando a fórmula resolutiva.

10. Obtenha m, com $m \in \mathbb{R}$, de modo que a equação do 2º grau $3x^2 - 2x + m = 0$ não admita raízes reais.

Resolução

A equação não admite raízes reais se, e somente se, $\Delta < 0$, isto é:

$$(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m < 0 \Rightarrow 4 - 12m < 0$$

$$\therefore -12m < -4 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$$

Assim, a equação não admite raízes reais se, e somente se, $m > \dfrac{1}{3}$.

11. Determine k, com $k \in \mathbb{R}$, sabendo que a soma das raízes da equação do 2º grau $5x^2 + kx - 2 = 0$ é $\dfrac{3}{5}$.

Resolução

A soma S das raízes é dada por $S = -\dfrac{b}{a}$.

Portanto:

$$\frac{3}{5} = -\frac{k}{5}, \text{ ou seja, } k = -3$$

12. Resolva o sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 - 3x = 2 \end{cases}$

Resolução

Isolamos uma das incógnitas na equação do 1º grau:

$$\begin{cases} y = 3 - x & (1) \\ x^2 + y^2 - 3x = 2 & (2) \end{cases}$$

Substituímos na equação (2) o valor resultante da equação (1), obtendo:

$$x^2 + (3 - x)^2 - 3x = 2 \Rightarrow x^2 + 9 - 6x + x^2 - 3x = 2$$

$$\therefore 2x^2 - 9x + 7 = 0$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 25$$

Assim: $x = \dfrac{-(-9) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$ ou $x = 1$

Substituindo $x = \dfrac{7}{2}$ na equação (1), obtemos:

$$y = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$$

Substituindo $x = 1$ na equação (1), obtemos:

$$y = 3 - 1 = 2$$

Portanto, o conjunto solução S do sistema é:

$$S = \left\{\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right); (1, 2)\right\}.$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Fatoração do trinômio do 2º grau

Fatorar um número ou um polinômio significa representá-lo sob a forma de um produto. Por exemplo:

- uma fatoração do número 18 é $2 \cdot 3 \cdot 3$;
- uma fatoração do polinômio $3xy + 3xz$ é $3x(y + z)$;
- uma fatoração do polinômio $a^2 - b^2$ é $(a + b)(a - b)$;
- uma fatoração do polinômio $a^2 + 2ab + b^2$ é $(a + b)(a + b)$.

A seguir, apresentaremos um modo para fatorar um trinômio do 2º grau, isto é, um trinômio do tipo $ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Sendo r_1 e r_2 as raízes do trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$, temos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a} \\ r_1 \cdot r_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Assim, o trinômio pode ser fatorado da seguinte maneira:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a[x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2] =$$
$$= a[x^2 - r_1 x - r_2 x + r_1 r_2] = a[x(x - r_1) - r_2(x - r_1)] = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Temos, então:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Observação

As raízes do trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Exemplo

Para fatorar o trinômio do 2º grau $3x^2 - 2x - 1$, inicialmente determinamos suas raízes:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}$$

Concluindo, temos a fatoração: $3x^2 - 2x - 1 = 3(x - 1)\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

Observação

No universo dos números reais, o trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$ só pode ser fatorado quando $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

16. Considerando o universo dos números reais, resolva as equações polinomiais do 2º grau.

a. $x^2 - 25 = 0$

b. $3t^2 - 48 = 0$

c. $x^2 - 7x = 0$

d. $5y^2 + 2y = 0$

e. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

f. $t^2 - 6t + 9 = 0$

g. $2y^2 - 3y + 2 = 0$

h. $\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{5} = \frac{30 + x}{10}$

17. Os valores reais de k, de modo que a equação polinomial do 2º grau $-2x^2 + 8x + k = 0$ admita raízes reais, são tais que: **17.** alternativa **c**

a. $k > 0$

b. $k > -8$

c. $k \geqslant -8$

d. $k < -8$

e. $0 < k \leqslant -8$

18. Sem resolver as equações a seguir, calcule a soma e o produto de suas raízes. Considerando esses números, determine mentalmente as raízes de cada equação.

a. $x^2 - 5x + 6 = 0$

b. $y^2 - 9y + 20 = 0$

c. $x^2 + 5x + 6 = 0$

d. $t^2 + 2t - 8 = 0$

18. a. soma 5, produto 6 e raízes 2 e 3
18. b. soma 9, produto 20 e raízes 4 e 5
18. c. soma −5, produto 6 e raízes −2 e −3
18. d. soma −2, produto −8 e raízes −4 e 2

19. Em um edifício com x apartamentos, todos ocupados, a conta de água é dividida igualmente entre eles. Uma conta de água desse edifício foi paga com $\frac{x}{2}$ dias de atraso, atingindo o valor de R$ 3.876,00, incluída a multa pelo atraso. Se essa conta tivesse sido paga no vencimento, a parcela destinada a cada apartamento seria de R$ 80,00, porém, com a multa pelos dias de atraso, houve um acréscimo de R$ 2,00 por dia de atraso por apartamento. Qual é o número de apartamentos do edifício?

19. 34 apartamentos

20. Resolva os sistemas.

a. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 + y = 11 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x^2 + x - y = 6 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x^2 - 2y - x = -2 \end{cases}$

20. a. $S = \left\{(3, 1), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)\right\}$
20. b. $S = \{(-5, 14), (2, 0)\}$
20. c. $S = \{(1, 1), (6, 16)\}$

21. Fatore os trinômios do 2º grau.

a. $p^2 - 4p + 3$

b. $2y^2 + 3y - 2$

21. a. $(p - 3)(p - 1)$
21. b. $2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y + 2)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

22. Para $x \neq 2$ e $x \neq 3$, a expressão $E = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6}$ é equivalente a:

a. $E = 1$

b. $E = 0$

c. $E = x$

d. $E = \dfrac{x-3}{x-4}$

e. $E = \dfrac{x-4}{x-2}$

22. alternativa **e**

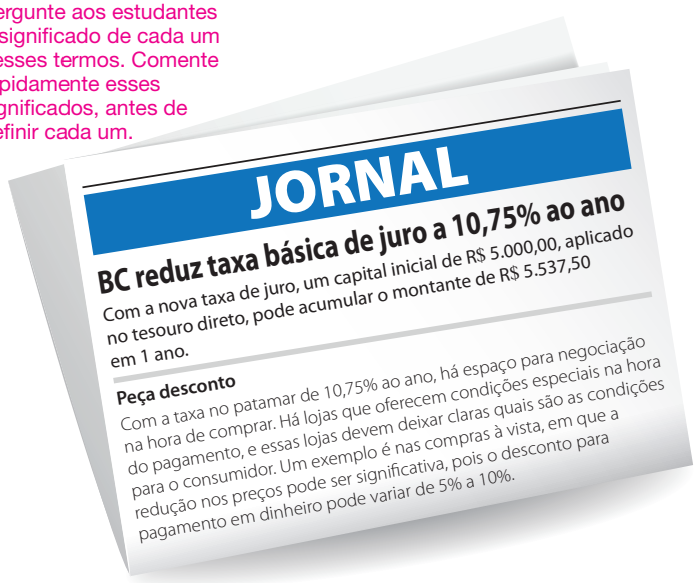
23. Resposta pessoal. Você encontrará informações sobre o método geométrico nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

23. Pesquise na internet um método geométrico para a resolução de equações polinomiais do 2º grau. Escreva um breve texto sobre o que você pesquisou, acompanhado de um exemplo. Apresente o resultado de sua pesquisa ao professor e colegas. Depois, conversem sobre os resultados e os problemas apresentados.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 6.

5. Matemática financeira

A manchete estampada no jornal mostra vários termos utilizados na Matemática financeira. Pergunte aos estudantes o significado de cada um desses termos. Comente rapidamente esses significados, antes de definir cada um.



JORNAL

BC reduz taxa básica de juro a 10,75% ao ano

Com a nova taxa de juro, um capital inicial de R$ 5.000,00, aplicado no tesouro direto, pode acumular o montante de R$ 5.537,50 em 1 ano.

Peça desconto

Com a taxa no patamar de 10,75% ao ano, há espaço para negociação na hora de comprar. Há lojas que oferecem condições especiais na hora do pagamento, e essas lojas devem deixar claras quais são as condições para o consumidor. Um exemplo é nas compras à vista, em que a redução nos preços pode ser significativa, pois o desconto para pagamento em dinheiro pode variar de 5% a 10%.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Frequentemente, deparamos com notícias sobre economia e finanças, como a apresentada na imagem.

Para compreender essas notícias, é necessário conhecer alguns conceitos da **Matemática financeira**, como: porcentagem, capital inicial, juro, taxa de juro, montante e desconto, que serão estudados neste item. Por analisar as relações entre dinheiro, tempo, bens e serviços, a Matemática financeira está presente no dia a dia das pessoas. Ela é usada, por exemplo, no cálculo do valor de um produto comprado em prestações, do rendimento em uma aplicação financeira, da cotação de uma moeda estrangeira etc.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Porcentagem

Iniciamos o assunto com uma situação do cotidiano que trata da taxa de serviço cobrada em diferentes restaurantes brasileiros. Peça aos estudantes que leiam o texto e faça perguntas do tipo: "Qual será a taxa de serviço paga pelo cliente que consumir R$ 180,00?"; "Se a conta de um cliente foi R$ 200,00, incluindo a taxa de serviço, qual foi o preço do consumo?". Após esses questionamentos, explique o que é taxa percentual.

No Brasil, é comum os restaurantes cobrarem uma taxa de serviço no valor de 10% do total consumido pelo cliente. Esse valor corresponde à gorjeta dos garçons. Isso significa que, a cada R$ 100,00 de consumo, o cliente paga R$ 10,00 de serviço. Assim, pelo consumo de R$ 230,00, a taxa de serviço g pode ser calculada pela proporção:

$$\frac{100}{10} = \frac{230}{g} \Rightarrow g = 23$$

Logo, se o consumo for de R$ 230,00, a taxa de serviço será de R$ 23,00.

A expressão $x\%$, que se lê "x por cento", é chamada de **taxa percentual** e representa a razão $\dfrac{x}{100}$, isto é, $x\% = \dfrac{x}{100}$, em que x é um número real qualquer.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

13. Represente, na forma de fração irredutível, cada taxa percentual.

a. 20%

b. 0,5%

Resolução

a. $20\% = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$

b. $0{,}5\% = \dfrac{0{,}5}{100} = \dfrac{5}{1.000} = \dfrac{1}{200}$

14. Represente, na forma de número decimal, cada taxa percentual.

a. 35%

b. 0,2%

Resolução

a. $35\% = \dfrac{35}{100} = 0{,}35$

b. $0{,}2\% = \dfrac{0{,}2}{100} = 0{,}002$

15. Represente, na forma de taxa percentual, cada um dos números na forma decimal.

a. 0,42 **b.** 2,37

Resolução

a. $0{,}42 = \frac{42}{100} = 42\%$ **b.** $2{,}37 = \frac{237}{100} = 237\%$

16. Represente, na forma de taxa percentual, cada uma das frações.

a. $\frac{5}{8}$ **b.** $\frac{29}{5}$

Resolução

a. $\frac{5}{8} = 0{,}625 = \frac{62{,}5}{100} = 62{,}5\%$

b. $\frac{29}{5} = 5{,}8 = \frac{580}{100} = 580\%$

17. Uma pesquisa realizada com 625 estudantes de cursos noturnos indicou que 84% deles trabalham. Dos estudantes entrevistados, quantos trabalham?

Resolução

Devemos calcular 84% de 625. Sabendo que a preposição **de**, nesse caso, indica **multiplicação**, o cálculo é feito do seguinte modo: $84\% \cdot 625 = 0{,}84 \cdot 625 = 525$. Dos estudantes entrevistados, 525 trabalham.

18. O termo **quilombola** é usado para identificar os membros descendentes e remanescentes de comunidades dos quilombos. Presentes em todo o território brasileiro, as comunidades quilombolas ainda preservam uma rica cultura baseada na ancestralidade negra.

De acordo com o Censo 2022 realizado pelo IBGE, a população quilombola é de 1.327.802 pessoas. O Sudeste é a segunda região com maior quantidade de quilombolas, com 13,73% dessa população. Aproximadamente, qual é a população quilombola que vive na Região Sudeste?

Resolução

Devemos calcular 13,73% **de** 1.327.802, ou seja: $13{,}73\% \cdot 1.327.802 = 0{,}1373 \cdot 1.327.802 = 182.307$. Assim, a população quilombola da Região Sudeste é de aproximadamente 182.307 pessoas.

19. Para a confecção de uma peça metálica, foram fundidos 15 kg de cobre, 9,75 kg de zinco e 0,25 kg de estanho. Qual é a porcentagem de cobre dessa peça?

Resolução

A razão da medida da massa de cobre para a medida da massa total da peça é $\frac{15}{25}$. Transformando essa razão em taxa percentual, temos:

$$\frac{15}{25} = 0{,}6 = \frac{0{,}6 \cdot 100}{100} = \frac{60}{100} = 60\%$$

A porcentagem de cobre na peça é 60%.

20. O preço de um produto sofreu um reajuste de 12%, aumentando para R$ 60,48. Qual era o preço desse produto antes do reajuste?

Resolução

Sendo p o preço antes do reajuste, temos:

$$p + 12\% \cdot p = 60{,}48 \Rightarrow p + 0{,}12 \cdot p = 60{,}48$$

$$\therefore 1{,}12 \cdot p = 60{,}48 \Rightarrow p = \frac{60{,}48}{1{,}12} = 54$$

O preço do produto, antes do reajuste, era R$ 54,00.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Reflexão: Espera-se que os estudantes percebam que o erro cometido foi na extração da raiz quadrada de $25\% \cdot x^2$. Observe:

$y^2 = 25\% \cdot x^2$

$y = \sqrt{25\% \cdot x^2}$

$y = \sqrt{25\%} \cdot \sqrt{x^2}$

$y = \sqrt{\frac{25}{100}} \cdot \sqrt{x^2}$

$y = \frac{5}{10} \cdot x = \frac{50}{100} \cdot x$

$\therefore y = 50\% \cdot x$

Concluímos, assim, que a alternativa correta é **a**.

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir, porém um erro foi cometido. Reúna-se com um colega e encontrem qual foi o erro cometido. Em seguida, discutam o que pode ter causado esse erro. Refaçam a resolução no caderno e depois conversem com o professor e outros colegas para expor a estratégia de raciocínio usada por vocês.

Exercício

A medida do lado de um quadrado *ABCD* é x, e a medida do lado de um quadrado *EFGH* é y, em que x e y são expressos na mesma unidade de comprimento, com $x > y$. Se a medida da área do quadrado menor é 25% da medida da área do maior, então:

a. $y = 50\% \cdot x$

b. $y = 5\% \cdot x$

c. $x = 40\% \cdot y$

d. $x = 4\% \cdot y$

e. $y = 20\% \cdot x$

Resolução

Como a medida do lado do quadrado menor é y, temos que:

$$y^2 = 25\% \cdot x^2 \Rightarrow y = \sqrt{25\% \cdot x^2}$$

$$\therefore y = \sqrt{25\%} \cdot \sqrt{x^2} \Rightarrow y = 5\% \cdot x$$

Concluímos, assim, que a alternativa correta é **b**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

28. d. Resposta pessoal. Os estudantes podem comentar os processos históricos e culturais que constituíram a formação do povo brasileiro, a colonização portuguesa, a escravização de pessoas negras e indígenas, entre outros fatores.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

24. Represente:

a. as taxas percentuais 315% e 3% na forma de fração irredutível; **24. a.** $\frac{63}{20}$; $\frac{3}{100}$

b. as taxas percentuais 0,23% e 46% na forma de número decimal; **24. b.** 0,0023; 0,46

c. os números decimais 0,003 e 1,32 na forma de taxa percentual; **24. c.** 0,3%; 132%

d. as frações $\frac{17}{50}$ e $\frac{12}{5}$ na forma de taxa percentual. **24. d.** 34%; 240%

25. Com uma calculadora que realiza apenas as quatro operações, [+], [−], [×] e [÷], entre os números inteiros ou decimais, e não apresenta a tecla [%], explique como você calcularia 15% de 48.

Reúna-se com um colega e discutam as maneiras que vocês encontraram para efetuar esse cálculo. Investiguem se há outro modo além dos que vocês aplicaram. Se encontrarem, citem um.

26. A "gasolina comum", usada atualmente em automóveis no Brasil, na verdade é uma mistura de gasolina e etanol anidro. Em 2024, foi aprovada uma lei que fixava em 27% a porcentagem mínima obrigatória de adição de etanol na gasolina, podendo esta porcentagem variar entre 27% e 35%. Quando a porcentagem de etanol anidro na mistura é de 27%, um motorista que complete o tanque do seu carro com 60 litros dessa mistura, estará abastecendo com quantos litros de etanol anidro? **26.** 16,2 litros de etanol anidro

27. Dos 380.000 habitantes de uma cidade, 12% são imigrantes, dos quais 5% são italianos. Calcule o número de habitantes italianos dessa cidade. **27.** 2.280 italianos

28. Em 2023, havia no Brasil 9,3 milhões de pessoas analfabetas com 15 anos ou mais de idade, o equivalente a uma taxa de analfabetismo de 5,4%. Entre as mulheres, a taxa de analfabetismo era de 5,2%, enquanto a dos homens era de 5,7%. Na análise, chama atenção a magnitude da diferença entre pessoas brancas e pretas ou pardas. Em 2023, 3,2% das pessoas de 15 anos ou mais que se declaravam brancas, residentes no Brasil, eram analfabetas, percentual que se eleva para 7,1% entre pessoas que se autodeclaram pretas ou pardas.

Elaborado com base em: IBGE. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua**: Educação 2023. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv102068_informativo.pdf. Acesso em: 12 ago. 2024.

OBJETO DIGITAL Mapa clicável: Taxas de alfabetização no Brasil

De acordo com o texto, responda aos itens a seguir:

a. A taxa de analfabetismo é calculada pelo IBGE como o percentual de pessoas analfabetas com 15 anos ou mais de idade na população, na mesma faixa etária, residente no Brasil. De acordo com essa conceituação, qual era o número de pessoas com 15 anos ou mais de idade residentes no Brasil em 2023? **28. a.** 172.222.222 aproximadamente.

b. A taxa de analfabetismo dos homens residentes no Brasil é calculada como o percentual de homens analfabetos com 15 anos ou mais de idade na população total de homens, na mesma faixa etária, residentes no Brasil. Analogamente, define-se a taxa de analfabetismo das mulheres. Assim, apenas com os dados fornecidos pelo texto, pode-se concluir que, entre as pessoas na faixa etária de 15 anos ou mais residentes no Brasil em 2023, o número de homens analfabetos era maior do que o número de mulheres analfabetas? Por quê?

c. Na faixa etária de 15 anos ou mais, a taxa de analfabetismo entre pessoas pretas ou pardas equivalia a que percentual da taxa de analfabetismo entre pessoas brancas? **28. c.** aproximadamente 222%

d. Converse com o professor e com os colegas sobre possíveis causas de o analfabetismo ter uma taxa maior entre a população negra comparada à população branca. **28. b.** Não. Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

e. Que tipo de políticas públicas são necessárias para diminuir essa desigualdade?

29. (Enem) Para se obter 1,5 kg do dióxido de urânio puro, matéria-prima para a produção de combustível nuclear, é necessário extrair-se e tratar-se 1,0 tonelada de minério. Assim, o rendimento (dado em % de massa) do tratamento do minério até chegar ao dióxido de urânio puro é de: **29.** alternativa **b**

a. 0,10%.

b. 0,15%.

c. 0,20%.

d. 1,5%.

e. 2,0%.

25. Espera-se que os estudantes percebam que, para calcular 15% de 48, podemos fazer qualquer um dos cálculos apresentados na figura a seguir. Verifique se eles encontraram outro modo e peça que compartilhem com os colegas.

[1] [5] [÷] [1] [0] [0] [×] [4] [8] [=] 7,2

[0] [,] [1] [5] [×] [4] [8] [=] 7,2

[1] [5] [×] [4] [8] [÷] [1] [0] [0] [=] 7,2

30. Um lojista vendeu uma toalha de mesa por R$ 89,60 com um lucro de 40% sobre o preço de custo. Qual foi o preço de custo dessa toalha? **30.** R$ 64,00

31. Um comerciante comprou tabletes de manteiga por R$ 11,00 a unidade. Percebendo que havia comprado mais do que conseguiria vender antes do vencimento do prazo de validade, resolveu vender cada unidade do produto a R$ 9,90 para acelerar as vendas. Calcule o percentual de prejuízo sobre o preço da compra nessa transação. **31.** 10%

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

28. e. Resposta pessoal. Os estudantes podem citar, por exemplo, a importância de cotas sociais em universidades públicas ou o acesso à escolarização para pessoas maiores de 15 anos, como a modalidade EJA (Educação de Jovens e Adultos).

32. Na primeira semana de liquidação, um comerciante concedeu um desconto de 20% sobre o preço de qualquer mercadoria. Na semana seguinte, concedeu 15% de desconto sobre os preços praticados na semana anterior. Qual foi o percentual de desconto acumulado nessas duas semanas? **32.** 32%

33. Em determinado dia, 1 dólar americano valia R$ 5,40. Um mês depois, valia R$ 5,00.

a. Qual foi, nesse mês, o percentual de desvalorização do dólar em relação ao real?

b. Qual foi, nesse mês, o percentual de valorização do real em relação ao dólar? **33. a.** Aproximadamente 7,4%. **33. b.** 8%

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares de 7 a 13.

TRABALHO E JUVENTUDES

O microempreendedor individual

Aproveite esse momento para conversar com os estudantes que, apesar de ser uma política pública de inclusão social que pode ser compreendida como economicamente essencial, há fatores negativos que precisam ser discutidos e considerados. Frequentemente, são noticiadas situações controversas de trabalhadores que são obrigados a se regularizar como MEI, principalmente para que as empresas se distanciem de qualquer reconhecimento de vínculo empregatício.

Podemos entender o empreendedorismo como a habilidade e disposição de identificar em problemas a oportunidade de investir recursos e criar um projeto ou negócio que gere impactos positivos na sociedade e, por vezes, possa ser utilizado como fonte de renda.

No Brasil, a figura do Microempreendedor Individual (MEI) foi formalizada por meio da Lei Complementar 128/2008, destacando o empresário que exerce profissionalmente atividade econômica organizada para a produção ou a circulação de bens ou de serviços.

O MEI como política pública favoreceu que milhões de pessoas que viviam de serviços temporários ou esporádicos saíssem da informalidade e conquistassem direitos básicos como aposentadoria ou benefícios previdenciários em caso de gestação, doença ou acidente. Só em 2022, foram iniciados mais de 3,6 milhões de novos negócios, dos quais cerca de 78% dos empreendimentos estavam concentrados na categoria MEI. **Trabalho e juventudes:** Respostas pessoais.

Os impostos que o MEI precisa pagar são: o INSS, que corresponde a uma taxa mensal de 5% do salário mínimo vigente; o ISS, que é um imposto municipal e, normalmente, varia de 2% a 5% sobre o valor do trabalho realizado; e o ICMS, que é cobrado quando o MEI emite uma nota fiscal para outra pessoa jurídica.

Elaborado com base em: BRASIL. **Lei Complementar nº 128, de 19 de dezembro de 2008.** Altera a Lei Complementar nº 123, de 14 de dezembro de 2006, para instituir o Microempreendedor Individual (MEI), e dá outras providências. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 19 dez. 2008; BARROS, C. J. MEI: da inclusão social ao risco da precarização do trabalho. **UOL**. Disponível em: https://economia.uol.com.br/colunas/carlos-juliano-barros/2021/04/13/mei-da-inclusao-social-ao-risco-da-precarizacao-do-trabalho.htm?cmpid=copiaecola. Acesso em: 12 ago. 2024.

- Você já conhecia as características do "microempreendedor individual"? Conhece alguém que formalizou ou poderia formalizar o trabalho por meio de MEI?
- Pesquise mais o MEI e converse com o professor e colegas sobre tipos de trabalhos que possam ser formalizados como microempreendedor individual, além de destacarem vantagens e desvantagens da formalização do trabalho por meio dessa política pública.

Esta seção favorece o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e do **ODS 8**.

Oriente os estudantes a consultarem as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.



KIKOSTOCK/SHUTTERSTOCK

Algumas vantagens de ser MEI é poder formalizar seu negócio e ter garantias constitucionais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Juro simples

As duas situações descritas a seguir esclarecem o significado de alguns conceitos envolvidos em transações que abrangem aplicações financeiras.

Situação I

Luís tomou um empréstimo de R$ 1.800,00 por um mês. Ao final desse período, Luís devolveu os R$ 1.800,00 ao credor e, além disso, pagou R$ 90,00 pelo empréstimo.

Esse pagamento pelo empréstimo é chamado de **juro** (J); a quantia emprestada é chamada de **capital inicial** (C); a soma do capital inicial com o juro é chamada de **montante** (M); a razão entre o juro e o capital inicial, nessa ordem, é chamada de **taxa de juro** (i).

Assim, nessa transação entre o credor e o Luís, temos:

$C = \text{R\$ } 1.800,00$

$J = \text{R\$ } 90,00$

$M = \text{R\$ } 1.800,00 + \text{R\$ } 90,00 = \text{R\$ } 1.890,00$

$i = \frac{90}{1.800} = 0,05 = 5\%$ (taxa mensal)

Situação II

Luís tomou um empréstimo de R$ 1.800,00 por 10 meses. Durante esse período, Luís pagou mensalmente pelo empréstimo 5% da quantia emprestada e, ao final dos 10 meses, devolveu os R$ 1.800,00 ao credor. Nessa situação, temos:

$C = \text{R\$ } 1.800,00$

$J = 10 \cdot 0,05 \cdot \text{R\$ } 1.800,00 = \text{R\$ } 900,00$

$M = \text{R\$ } 1.800,00 + \text{R\$ } 900,00 = \text{R\$ } 2.700,00$

$i = \frac{90}{1.800} = 0,05 = 5\%$ (taxa mensal)

De modo geral, podemos dizer que:

Quando um capital C é aplicado durante t unidades de tempo, e, nesse contexto, a taxa i de juro por unidade de tempo incide apenas sobre o capital inicial, o juro J é chamado de **juro simples**. Esse juro, ao final da aplicação, é calculado por:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Reflexão: Sim, pois, para um capital inicial C aplicado em regime de juro simples durante t unidades de tempo a uma taxa fixa i por unidade de tempo, tem-se que o juro J produzido é dado por: $J = C \cdot i \cdot t$
Daí, concluímos que: $\frac{J}{t} = C \cdot i$
Como C e i são constantes, temos que a razão $\frac{J}{t}$, com $t > 0$, é constante; logo, o juro é diretamente proporcional ao tempo.

Reflexão

O juro simples a uma taxa fixa é diretamente proporcional ao tempo de aplicação?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

34. Um capital de R$ 340,00 foi aplicado a juro simples, à taxa de 3% ao mês, por um período de 20 meses.

a. Qual foi o juro simples produzido nesse período?

b. Qual foi o montante acumulado nesse período?

34. a. R$ 204,00 **34. b.** R$ 544,00

35. Faça o que se pede.

a. Uma dívida de R$ 4.000,00 foi contraída a juro simples e paga em 9 meses. Sabendo que os juros foram de R$ 540,00, qual foi a taxa de juro mensal?

35. a. 1,5%

b. Um capital de R$ 8.300,00 esteve aplicado em regime de juro simples à taxa de 2% ao mês, rendendo R$ 2.490,00 de juro ao final do período da aplicação. Durante quanto tempo esse capital esteve aplicado?

35. b. 15 meses

c. Renato pagou o boleto do curso de informática no valor de R$ 320,00 com 6 dias de atraso e, por isso, foi aplicada uma multa de 0,8% por dia de atraso, em regime de juro simples. Qual foi o valor pago por Renato?

35. c. R$ 335,36

36. Um capital foi aplicado durante 8 meses em regime de juro simples à taxa de 2% ao mês. O montante acumulado nesse período foi reaplicado durante os 10 meses seguintes em regime de juro simples à taxa de 2,5% ao mês, resultando no montante de R$ 7.250,00. Qual foi o capital inicial da primeira aplicação?

36. R$ 5.000,00

37. Joana comprou um liquidificador cujo preço era R$ 120,00, valor a ser pago em duas parcelas de R$ 60,00, sendo a primeira no ato da compra e a segunda um mês depois. Como comprou à vista, Joana teve um desconto de 10% sobre o preço. Qual taxa mensal de juro ela pagaria se optasse pelo pagamento em duas vezes?

37. 25%

38. (Enem) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (Certificado de Depósito

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (Imposto de renda)
Poupança	0,560	ISENTO
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é: **38.** alternativa **d**

39. Resposta pessoal.

a. a poupança, pois totalizará um montante de R$ 502,80.

b. a poupança, pois totalizará um montante de R$ 500,56.

c. o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,38.

d. o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.

e. o CDB, pois totalizará um montante de R$ 500,87.

39. Elabore um problema que envolva juro simples. Depois, troque seu problema com o de um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Conversem sobre as resoluções apresentadas.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 14.

Juro composto

O rendimento em aplicações financeiras é determinado por uma composição de sucessivos juros simples e, por isso, é chamado de **juro composto**, também conhecido, popularmente, como **juro sobre juro**. Por exemplo, considere que um capital de R$ 1.000,00 seja aplicado durante 3 meses em um fundo de investimentos, rendendo juro de 2% no primeiro mês, 5% no segundo e 3% no terceiro. O cálculo do rendimento no trimestre é feito do seguinte modo:

- Calcula-se o juro produzido pelo capital inicial de R$ 1.000,00 à taxa de 2% no primeiro mês, o que resulta no montante de R$ 1.020,00. Esse montante é o capital inicial para o cálculo do juro do mês seguinte.
- Calcula-se o juro produzido pelo capital inicial de R$ 1.020,00 à taxa de 5% no segundo mês, o que resulta no montante de R$ 1.071,00. Esse montante é o capital inicial para o cálculo do juro do mês seguinte.
- Calcula-se o juro produzido pelo capital inicial de R$ 1.071,00 à taxa de 3% no terceiro mês, o que resulta no montante de R$ 1.103,13.

Sintetizando essas informações em um quadro, temos uma visão mais ampla do procedimento:

Mês	Capital (R$)	Taxa mensal	Juro (R$)	Montante (R$)
1º	1.000,00	2% = 0,02	0,02 · 1.000,00 = 20,00	1.020,00
2º	1.020,00	5% = 0,05	0,05 · 1.020,00 = 51,00	1.071,00
3º	1.071,00	3% = 0,03	0,03 · 1.071,00 = 32,13	1.103,13

Assim, o juro produzido no trimestre é R$ 103,13, e, portanto, o montante é R$ 1.103,13. Esse tipo de juro é chamado de juro composto.

Observe que, em cada mês, a taxa de juro incide sobre o montante do mês anterior, o que diferencia o juro composto do simples, pois no juro simples a taxa incide apenas sobre o capital inicial.

De maneira geral, o cálculo do juro composto é efetuado do seguinte modo:

- Ao final da primeira unidade de tempo considerada na aplicação, a taxa de juro incide sobre o capital inicial.
- A partir da segunda unidade de tempo, a taxa de juro incide sobre o montante acumulado na unidade de tempo anterior.

O juro composto é a modalidade de capitalização predominante no sistema financeiro e também no comércio. Por exemplo, ao vender um produto a prazo, os comerciantes embutem juros compostos nas prestações.

Conceitue juro composto por meio da situação introdutória. Construa o quadro com a participação dos estudantes. Solicite a eles que façam os cálculos para cada linha. Destaque que a taxa de juro, a partir do 2º mês, incide sobre o montante acumulado no mês anterior, e não apenas sobre o capital inicial, como é feito em juro simples. Esse fato é o que caracteriza o regime de juro composto. Comente que o juro composto é a modalidade de capitalização predominante no sistema financeiro e também no comércio. Por exemplo, ao vender um produto a prazo, os comerciantes embutem juros compostos nas prestações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No ***Podcast*: Financiamentos,** são abordadas diferentes formas de compra a prazo, como financiamentos e o uso do cartão de crédito. Esse recurso é acompanhado de sua transcrição, com o objetivo de atender estudantes e professores com deficiências auditivas. Se considerar adequado, após o uso desse recurso, converse com os estudantes sobre as formas apresentadas e sobre o cuidado que devemos tomar com endividamentos.

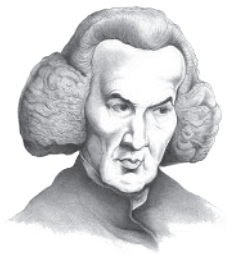
OBJETO DIGITAL *Podcast*: Financiamentos

O sistema Price

O sistema Price é um método usado em empréstimos a juro composto, nos financiamentos de automóveis e em alguns modelos de financiamento residencial, cuja principal característica é apresentar prestações iguais. O método foi publicado em 1771 por Richard Price, em sua obra *Observações sobre pagamentos remissivos*.

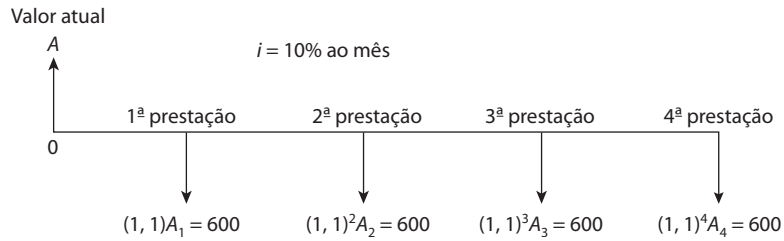
Vamos entender o método de Price. Considerando que um refrigerador foi comprado, sem entrada, em 4 prestações mensais iguais de R$ 600,00, a juro composto de 10% ao mês, qual teria sido o preço à vista desse refrigerador?

Para responder a essa questão, partimos do esquema a seguir, em que o valor atual A é o preço à vista do refrigerador, isto é, o preço sem juro, e os valores A_1, A_2, A_3 e A_4 são as parcelas (sem juro) do valor atual A que serão pagas a cada prestação. Assim, cada prestação é calculada pela fórmula $A_n \cdot (1 + 0{,}1)^n$, em que n é o número da prestação.



FÁBIO CORTEZ REIS/ARQUIVO DA EDITORA

Richard Price (1723-1791), filósofo inglês.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Nesta seção, exploramos textos sobre aplicações práticas do assunto desenvolvido no capítulo. O conteúdo tem dois objetivos: contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais e despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Nesse caso, exploramos um estudo sobre o sistema Price. Oriente os estudantes a ler o texto e a resolver, em grupos, as atividades propostas.

Assim, os valores A_1, A_2, A_3 e A_4 são:

$$A_1 = \frac{600}{1{,}1};\ A_2 = \frac{600}{(1{,}1)^2};\ A_3 = \frac{600}{(1{,}1)^3};\ A_4 = \frac{600}{(1{,}1)^4}$$

A soma desses valores é igual ao preço à vista do refrigerador, ou seja:

$$A = \frac{600}{1{,}1} + \frac{600}{(1{,}1)^2} + \frac{600}{(1{,}1)^3} + \frac{600}{(1{,}1)^4}$$

Usando uma calculadora, obtemos:

$A \approx 545{,}45 + 495{,}87 + 450{,}79 + 409{,}81 \Rightarrow A \approx 1.901{,}92$

Logo, o preço à vista do refrigerador é, aproximadamente, R$ 1.901,92.

Nota:

No caso em que o número de prestações é muito grande, como na compra de um imóvel, a soma A é calculada por uma fórmula que aparece no estudo das progressões geométricas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Aplique o sistema Price para resolver os problemas a seguir.

1. Uma *smart* TV pode ser comprada sem entrada, em 3 prestações mensais iguais de R$ 500,00, a juro composto de 8% ao mês. Qual é o preço à vista dessa *smart* TV?

Matemática sem fronteiras:
1. R$ 1.288,55, aproximadamente

2. O preço à vista de um fogão é R$ 1.000,00. Se esse fogão for vendido sem entrada, em 4 prestações mensais e iguais, a juro composto de 5% ao mês, qual será o valor de cada prestação?

2. R$ 282,50, aproximadamente

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Fórmulas para o cálculo do montante com juro composto

Vamos estudar duas fórmulas para o cálculo do montante com juro composto: a primeira para uma taxa variável por unidade de tempo e a segunda para uma taxa constante.

- Para obter a primeira fórmula, vamos considerar um capital inicial C aplicado em regime de juro composto, durante t unidades de tempo (dia, mês, ano etc.), às taxas i_1, i_2, i_3, ..., i_t, referentes às unidades de tempo 1, 2, 3, ..., t, respectivamente.
  O quadro a seguir mostra a evolução do montante M durante o período de aplicação.

Unidades de tempo	Capital (R$)	Taxa	Juro (R$)	Montante (R$)
1	C	i_1	$C \cdot i_1$	$C + C \cdot i_1 = C(1 + i_1)$
2	$C(1 + i_1)$	i_2	$C(1 + i_1) \cdot i_2$	$C(1 + i_1) + C(1 + i_1) \cdot i_2 = C(1 + i_1)(1 + i_2)$
3	$C(1 + i_1)(1 + i_2)$	i_3	$C(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot i_3$	$C(1 + i_1)(1 + i_2) + C(1 + i_1)(1 + i_2) \cdot i_3 = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

A última coluna do quadro nos conduz à hipótese de que, em t unidades de tempo, o montante M seja dado por:

$$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_t)$$

De fato, demonstra-se que, se um capital inicial C é aplicado em regime de juro composto durante t unidades de tempo, 1, 2, 3, ..., t, às taxas i_1, i_2, i_3, ..., i_t, respectivamente, então o montante M acumulado nesse período é calculado por:

$$\boxed{M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_t)}$$

A segunda fórmula é obtida a partir da primeira, fazendo todas as taxas iguais a i, isto é, $i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_t = i$:

$$M = C \underbrace{(1 + i)(1 + i)(1 + i) \cdot \ldots \cdot (1 + i)}_{t \text{ fatores}}$$

Logo, se um capital inicial C é aplicado em regime de juro composto durante t unidades de tempo, à taxa constante i por unidade de tempo, então o montante M acumulado nesse período é dado por:

$$\boxed{M = C(1 + i)^t}$$

Observação

Para aplicar as fórmulas do montante acumulado a juro composto, as variáveis i e t devem estar relacionadas à mesma unidade de tempo.

Notas:

1. Na primeira fórmula, as taxas i_n que corresponderem a lucro (ou aumento) serão positivas, e as que corresponderem a prejuízo (ou desconto) serão negativas.
2. Na indução que fizemos para apresentar a fórmula $M = C(1 + i)^t$, atribuímos ao tempo t apenas valores naturais não nulos; porém, essa fórmula pode ser aplicada para qualquer valor real de t, com $t \geqslant 0$.
3. Para o cálculo do montante M após t reduções sucessivas (desconto ou prejuízo) de um capital C, a uma taxa constante, aplicamos a fórmula $M = C(1 + i)^t$ com **taxa negativa**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Conectado: Se julgar oportuno, após realizar os 6 passos para calcular o montante, comente com os estudantes que é possível realizar o cálculo do montante aplicando diretamente a fórmula $M = C \cdot (1 + i)^t$. Dessa maneira, o passo (3) deixa de existir, e, no passo (4), digite **=6000*(1+0,012)^A3** na célula C3, como apresentado a seguir. Questione os estudantes sobre a função dos parênteses e do circunflexo.

Conectado

É comum utilizar a planilha eletrônica para auxiliar nos cálculos envolvendo juro, simular investimentos, determinar parcelas de financiamentos etc. Podemos utilizar o LibreOffice Calc, um *software* gratuito de planilhas que pode ser instalado no computador. O LibreOffice Calc está disponível no *site* https://pt-br.libreoffice.org/ (acesso em: 11 ago. 2024).

Uma planilha eletrônica é dividida em linhas e colunas. Cada linha é identificada por um número, e cada coluna, por uma letra. O cruzamento entre elas é denominado célula. É possível inserir fórmulas nas células seguindo algumas regras; uma delas é iniciar com o símbolo de igualdade (=).

Vamos utilizar uma planilha eletrônica para resolver um problema envolvendo juro composto.

Um capital inicial de R$ 6.000,00 foi aplicado a juro composto durante 12 meses, à taxa de 1,2% ao mês. Utilizando uma planilha eletrônica, determine o valor do montante acumulado ao final desses 12 meses.

(1) Na planilha eletrônica, organize as colunas com os títulos "Tempo (mês)", "Juro (R$)" e "Montante (R$)", como apresentado a seguir.

	A	B	C
1	Tempo (mês)	Juro (R$)	Montante (R$)
2			
3			

(2) Na coluna Tempo (mês), preencha com os números de 0 a 12, que representam os meses de aplicação. A linha 2 indica o início da aplicação, e, por isso, na célula B2 é digitado 0, pois ainda não gerou juro, e na célula B3, digitado 6.000, que é o valor do capital inicial.

	A	B	C
1	Tempo (mês)	Juro (R$)	Montante (R$)
2	0	0	6.000,00
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		
13	11		
14	12		
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

(3) Para calcular o juro do primeiro mês, digite **=0,012*C2** na célula B3 e tecle ***enter***. (O símbolo * representa o sinal de multiplicação.)

(4) Para calcular o montante do primeiro mês, digite **=C2+B3** na célula C3 e tecle ***enter***.

(5) Para obter o juro e o montante gerados nos demais meses, selecione as células B3 e C3 e, em seguida, clique no quadrinho localizado na parte inferior direita das células selecionadas e arraste até a linha 14 (correspondente ao 12º mês).

(6) Ainda com as células selecionadas, clique na opção de diminuir casas decimais para deixar os valores com apenas duas casas decimais.

	A	B	C
1	Tempo (mês)	Juro (R$)	Montante (R$)
2	0	0	6.000,00
3	1	72,00	6.072,00
4	2	72,86	6.144,86
5	3	73,74	6.218,60
6	4	74,62	6.293,23
7	5	75,52	6.368,74
8	6	76,42	6.445,17
9	7	77,34	6.522,51
10	8	78,27	6.600,78
11	9	79,21	6.679,99
12	10	80,16	6.760,15
13	11	81,12	6.841,27
14	12	82,10	6.923,37
15			
16			
17			
18			
19			
20			
21			

Portanto, o valor do montante acumulado ao fim dos 12 meses de aplicação foi R$ 6.923,37.

Agora é com você!

1. Na situação apresentada, em qual célula foi digitado o valor do capital inicial? Em qual célula foi calculado o valor do montante obtido ao final da aplicação? **1.** C2; C14

2. De acordo com a planilha, qual foi o valor do juro produzido ao final dos 12 meses? **2.** R$ 82,10

3. Utilizando uma planilha eletrônica, considere um capital inicial de R$ 13.000,00, aplicado a uma taxa de juro composto de 0,7% ao mês. Determine o valor do montante acumulado ao final de 10 meses.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. R$ 13.939,21

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

21. Um capital inicial de R$ 5.000,00 foi aplicado a juro composto durante 7 meses, à taxa de 2% ao mês. Dado $(1{,}02)^7 \approx 1{,}15$, calcule:

a. o montante acumulado ao fim dos 7 meses de aplicação;

b. o juro produzido durante o período em que durou a aplicação.

Resolução

a. Esquematizando os dados do enunciado, temos:

$C = \text{R\$ } 5.000{,}00$

$i = 2\% = 0{,}02$ (taxa mensal)

$t = 7$ meses

$M = ?$

Como a taxa é constante, ou seja, é a mesma todo mês, devemos aplicar a fórmula $M = C(1 + i)^t$. Assim, temos:

$$M = 5.000 \cdot (1 + 0{,}02)^7 =$$
$$= 5.000 \cdot (1{,}02)^7 \approx 5.000 \cdot 1{,}15$$
$$\therefore M \approx 5.750$$

Logo, o montante foi de cerca de R$ 5.750,00.

Note que esse valor é aproximado, pois foi usado um valor aproximado para a potência $(1{,}02)^7$.

b. O montante M é a soma do capital inicial C com o juro produzido J. Assim, temos:

$$M = C + J \Rightarrow 5.750 \approx 5.000 + J$$
$$\therefore J \approx 750$$

Logo, o juro produzido durante o período da aplicação foi de, aproximadamente, R$ 750,00.

22. Uma máquina industrial comprada por R$ 40.000,00 sofreu, em cada ano de uso, desvalorização de 10%. Calcule seu valor, em real, depois de 3 anos de uso.

Resolução

Esquematizando os dados do enunciado, temos:

$C = \text{R\$ } 40.000{,}00$

$i = -10\% = -0{,}1$ (taxa anual)

$t = 3$ anos

$M = ?$

Aplicando a fórmula $M = C(1 + i)^t$, temos:

$$M = 40.000 \cdot (1 - 0{,}1)^3 =$$
$$= 40.000 \cdot (0{,}9)^3 = 40.000 \cdot 0{,}729$$
$$\therefore M = 29.160$$

Logo, após 3 anos de uso, o valor da máquina industrial é R$ 29.160,00.

Reflexão

O juro composto a uma taxa fixa é diretamente proporcional ao tempo de aplicação?

23. Após uma onda histórica de hiperinflação, em 1994 a taxa de inflação no Brasil era cerca de 23% ao mês. Qual era a taxa de inflação anual no Brasil em 1994? Considere $(1{,}23)^{12} = 11{,}99$.

Resolução

Para calcular a inflação daquela época, vamos obter o juro composto produzido por um capital C aplicado durante 12 meses à taxa de 23% ao mês.

$$M = C(1 + 0{,}23)^{12} = C(1{,}23)^{12} \Rightarrow M = 11{,}99C$$

Assim, o juro J produzido no período de 12 meses é:

$$J = 11{,}99C - C = 10{,}99C$$

A razão $\frac{J}{C}$ é a taxa de juro nesse período de 12 meses:

$$\frac{J}{C} = \frac{10{,}99C}{C} = 10{,}99 = 1.099\%$$

Logo, a taxa anual de inflação no Brasil, em 1994, era cerca de 1.099%.

24. Apliquei R$ 2.000,00 em um fundo de ações durante 3 anos e não fiz nenhuma retirada nesse período. No primeiro ano, o rendimento foi de 20%; no segundo, 4%; e, no terceiro, caiu 10%. Calcule o montante acumulado no final da aplicação.

Resolução

Como a taxa é variável (não é a mesma todo mês), devemos aplicar a fórmula:

$$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_t)$$

Assim:

$$M = 2.000(1 + 0{,}2)(1 + 0{,}04)(1 - 0{,}1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = 2.000 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}9$$
$$\therefore M = 2.246{,}40$$

Logo, o montante acumulado foi R$ 2.246,40.

25. Uma motocicleta zero-quilômetro foi comprada por R$ 12.000,00. No primeiro ano de uso, a moto se desvalorizou 20%; no segundo ano, desvalorizou-se 10% em relação ao valor do ano anterior; e, no terceiro ano, desvalorizou-se 5% em relação ao valor do ano anterior. Calcule o valor da moto ao final de 3 anos de uso.

Resolução

Esse é um problema de prejuízos sucessivos com taxa variável. Portanto, devemos aplicar a fórmula:

$$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_t),$$

em que $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_t$ são taxas negativas.

Assim:

$$M = 12.000(1 - 0{,}2)(1 - 0{,}1)(1 - 0{,}05) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = 12.000 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}95$$
$$\therefore M = 8.208$$

Logo, o valor da motocicleta após 3 anos de uso era de R$ 8.208,00.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

40. Um capital de R$ 5.000,00 foi aplicado durante 6 meses à taxa de juro composto de 2% ao mês. Considerando a aproximação $(1{,}02)^6 \approx 1{,}13$, calcule:

a. o montante acumulado no final da aplicação;

b. o juro produzido por essa aplicação.

40. a. R$ 5.650,00 **40. b.** R$ 650,00

41. Qual é o tempo necessário para um capital C, aplicado a juro composto de 5% ao ano, produzir um montante igual a $2C$?

Dado: $(1{,}05)^{14{,}5} \approx 2$. **41.** 14,2 anos, aproximadamente

42. Calcule o capital inicial que, aplicado a juro composto com taxa de 9% ao ano, acumula no fim de 7 anos o montante de R$ 36.400,00.

Dado: $(1{,}09)^7 \approx 1{,}82$. **42.** R$ 20.000,00, aproximadamente

43. Tomei um empréstimo de R$ 1.400,00, que devo pagar ao final de 8 meses à taxa de juro composto de 1,2% ao mês. Qual será o montante da dívida ao final desse período, e qual será o juro que terei de pagar? Utilize a aproximação $(1{,}012)^8 \approx 1{,}1$. **43.** R$ 1.540,00; R$ 140,00

44. Camila está juntando dinheiro para viajar. Ela irá aplicar seu dinheiro em uma instituição financeira cuja a taxa, em juro composto, é de 1,68% ao mês. Sabendo que a viagem custará R$ 5.400,00, que ela tem R$ 1.000,00 para começar a investir e que ao final de cada mês conseguirá depositar R$ 500,00, quanto tempo Camila levará para ter a quantia suficiente para viajar? (Utilize uma planilha eletrônica para resolver o exercício.)

45. Apliquei R$ 10.000,00 durante 3 anos em um fundo de investimento em regime de juro composto. No primeiro ano, a taxa anual de juro foi de 6%; no segundo, foi de 8% ao ano e, no terceiro, foi de 10% ao ano.

a. Qual foi o montante acumulado ao final dos 3 anos?

b. Qual foi o juro produzido ao final dos 3 anos de investimento?

45. a. R$ 12.592,80 **45. b.** R$ 2.592,80

46. Ana fez dois tipos de investimento ao mesmo tempo, ambos com juro composto, durante um ano. No investimento A, ela pretende aplicar R$ 4.000,00 a uma taxa de 0,9% ao mês. No investimento B, ela pretende aplicar R$ 3.500,00 a uma taxa de 1% ao mês. Considere as aproximações $(1{,}009)^{12} \approx 1{,}11$ e $(1{,}01)^{12} \approx 1{,}13$.

a. Qual foi o montante total dos investimentos no final desse período? **46. a.** R$ 8.395,00

b. Qual dos investimentos teve maior rendimento maior? **46. b.** Investimento B

c. Na sua opinião, Ana deveria aplicar todo o seu dinheiro em apenas um tipo de investimento? Justifique sua resposta. **46. c.** Resposta pessoal.

47. Para acabar com o estoque, um comerciante deu 12% de desconto sobre o preço p de um produto, que passou a custar p_1. Por falta de compradores, ele então descontou 5% do preço p_1, e o novo preço passou a ser p_2. Depois, ainda descontou 3% do preço p_2.

a. Qual foi o preço final do produto após esses três descontos sucessivos? **47. a.** $0{,}81092p$

b. Qual foi o percentual de desconto sobre o preço inicial p após os três descontos sucessivos?

47. b. 18,908%

44. 9 meses

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares de 15 a 19.

Mentes brilhantes

Mentes brilhantes: Nesta seção, exploramos os conhecimentos matemáticos desenvolvidos em práticas laborais, no caso, de feirantes. Desse modo, valorizamos a diversidade dos saberes trabalhando com temas relacionados à Etnomatemática. Você encontrará mais informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

A Matemática na feira livre

Você já deve ter visitado alguma feira livre ou sabe como é a dinâmica dela, mas já parou para pensar onde a Matemática se aplica em uma feira?

A Matemática está presente na relação de compra e venda dos produtos, seja no estabelecimento dos preços ou na definição da quantidade a ser vendida. É comum encontrarmos a venda de produtos por quantidades, como dúzia ou meia dúzia. Mas, em alguns casos, como a venda de produtos em grãos, essa relação não é possível. Neste caso é comum que feirantes façam uso de unidades de medidas não padronizadas, como a venda por "bacia" ou "litro", desse modo, consideram a quantidade do produto que caiba dentro de um recipiente. Outra relação com a Matemática está no cálculo do lucro. Acompanhe a seguir o exemplo de relato de dois feirantes de Juazeiro do Norte que participaram de uma pesquisa de campo.

[...] Dos cinco feirantes entrevistados, três tinham barracas e vendiam diversos produtos e os outros dois vendiam feijão-verde em uma calçada. Ao se depararem com a pergunta de como fazem para calcular a expectativa de lucro, todos tiveram dificuldade de verbalizar, mas mostraram nas suas falas uma larga experiência intuitiva fruto da prática cotidiana e uma facilidade de operacionalizar a matemática realizando cálculos mentais com rapidez e segurança. Numa das entrevistas, o vendedor José (nome fictício) nos respondeu como fazia a conversão do feijão-verde que comprava na vagem e repassava para o consumidor já debulhado: "eu compro um saco de feijão a vinte e cinco reais na vagem. Depois que eu debulho o saco inteiro, consigo fazer de vinte a vinte e cinco litros. Aí eu vendo o litro a dois reais cada. Então eu tiro mais ou menos de quarenta a cinquenta reais, quer dizer que eu ganho de quinze a vinte e cinco reais num saco"

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Respondendo sobre a venda do coentro, um outro vendedor nos informou que compra os molhos grandes por um custo de seis reais cada. Feito isto, ele desmembra o molho grande em aproximadamente vinte e oito molhos pequenos, os quais são vendidos a um preço de cinquenta centavos por unidade, o que dá um total de quatorze reais e um lucro de oito reais. Perguntamos se ele não considerava alto esse lucro, uma vez que em cada molho grande vendido o lucro era mais que um molho completo, o mesmo então respondeu que se vendesse muito e não houvesse imprevistos, a margem de lucro realmente seria elevada, mas a venda diária é pequena e ainda há o risco de sobra, e considerando que o coentro é muito perecível, às vezes é necessário baixar o preço no fim do dia para reduzir a perda. [...]

ALENCAR, A. C.; OLIVEIRA, F. L. S.; PEREIRA, M. R. B. **Etnomatemática na feira**: estimando o lucro com unidades de medidas locais. *In*: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2320. Acesso em: 15 ago. 2024.

Outros feirantes que participaram da pesquisa também mostraram praticidade e criatividade na hora de vender seus produtos sem usar uma medida padronizada, e isso mostra como o saber matemático pode ser aplicado em diferentes maneiras de se vender um produto, transmitindo na prática a experiência adquirida ao longo do tempo e que muitas vezes atravessa gerações. Se possível, faça uma visita em uma feira livre próxima de sua residência e pesquise sobre os instrumentos usados para determinar a massa ou a capacidade dos produtos vendidos. Compartilhe com os colegas e o professor sua experiência.

3. 191 ingressos **2.** 11.200 sacas **5.** Faltam dados para determinar a quantia que cada um tinha ao iniciar as compras.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Desde o instante em que inicia a entrada em um túnel até o instante em que sai inteiramente dele, um trem percorre 780 m. Sabendo que o comprimento do túnel tem 260 m a mais que o triplo do comprimento do trem, calcule o comprimento do trem. **1.** 130 m

2. Um fazendeiro colheu milho, feijão e café, em um total de 14.400 sacas. A quantidade de sacas de café colhidas foi o quádruplo da quantidade de sacas de milho. Se tivesse colhido mais 2.400 sacas de feijão, o total de sacas de feijão atingiria exatamente o total de sacas de milho. Calcule o total de sacas de café colhidas.

3. Para um espetáculo teatral, foram vendidos 260 ingressos, distribuídos em apenas dois tipos, A e B, a preços de R$ 40,00 e R$ 20,00, respectivamente. Sabendo que o total arrecadado com essa venda superou R$ 9.000,00, qual é o menor número possível de ingressos do tipo A que podem ter sido vendidos?

4. Uma indústria de fertilizantes está testando um novo composto, e um de seus componentes é o nitrogênio. Para produzir esse composto, são necessários 2.000 L de solução aquosa de nitrogênio a 10%. A indústria tem dois reservatórios, A e B, com solução aquosa de nitrogênio; porém, no reservatório A a concentração de nitrogênio é de 8%, e, em B, de 16%. Quantos litros do conteúdo de cada reservatório deverá ter a mistura para obter os 2.000 L de solução aquosa de nitrogênio a 10%?

Nota: Uma solução aquosa de nitrogênio a x% é uma solução de água e nitrogênio da qual o nitrogênio representa x%.

5. Paula e Marcelo fazem sempre compras pagando em dinheiro. Certo dia, a quantia de dinheiro de Paula era a mesma de Marcelo quando ambos iniciaram suas compras em um supermercado. Ao final das compras, Marcelo gastou 60 reais a mais que Paula, e a quantia remanescente de dinheiro de Paula era o dobro da quantia remanescente de Marcelo. Qual era a quantia inicial de cada um quando iniciaram as compras?

6. Acompanhe um procedimento para determinar a medida da massa de um boi.

Coloque o animal em um local plano e horizontal e passe uma fita métrica em torno do seu peito (perímetro torácico), cuidando para que a fita não esteja torcida, nem frouxa ou apertada. Agora é só multiplicar a medida obtida, em centímetro, por 2,8 e você terá, em quilograma, a massa aproximada do animal.

Como uma arroba equivale a 15 quilogramas, para obter a massa do animal em arroba basta dividir o valor encontrado no método descrito anteriormente por 15. Contudo, em geral, os frigoríficos não pagam pela massa total do animal vivo, mas por cerca de metade dessa massa, pois é necessário considerar perdas no processo de produção dos cortes.

Gabriel aplicou esse método, vendendo dois lotes de cabeças de gado ao frigorífico, o maior lote com 3 cabeças a mais que o menor. O perímetro torácico médio dos animais do maior lote era 10 cm maior que o perímetro torácico médio dos animais do menor lote. Pelo maior lote, Gabriel recebeu R$ 88.200,00, e, pelo menor, recebeu R$ 67.200,00. Qual era o número de animais de cada lote, sabendo que foram vendidas menos de 100 cabeças ao frigorífico, que pagou R$ 300,00 por arroba?

4. 1.500 L do conteúdo do reservatório A e 500 L do conteúdo do reservatório B **6.** Um lote tinha 12, e o outro, 15 animais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No exercício **8**, promova um trabalho de conscientização e disseminação de informação em parceria com os professores das áreas de Linguagens e de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para a produção de folhetos sobre prevenção da violência, canais de denúncias para as vítimas, direitos, segurança, acolhimento e assistência à mulher.

7. A balança comercial de um país, em determinado período, é a diferença entre o valor monetário total das exportações e o das importações, nessa ordem. Considere as informações do quadro a seguir e determine os valores de x e y da balança comercial de certo país em 2022 e 2023, respectivamente.

7. $x = 44{,}20$; $y = 57{,}46$

Balança comercial (valores em bilhões de dólares)			
Ano	**Exportações**	**Importações**	**Balança comercial**
2022	135,40	91,20	x
2023	152,28	94,82	y

Fonte: dados fictícios.

Qual foi a taxa percentual de crescimento da balança comercial desse país de 2022 para 2023? **7.** 30%

8. O Fórum Brasileiro de Segurança Pública, em parceria com o Instituto de Pesquisas Datafolha, lançou em 2023 a 4ª edição do estudo "Visível e Invisível: A Vitimização de Mulheres no Brasil", com a finalidade de coletar dados e informações que possam orientar a formulação e implementação de ações públicas e privadas de enfrentamento à violência contra a mulher.



PREFEITURA MUNICIPAL DE PORTO, PIAUÍ

O objetivo da pesquisa era quantificar o número de violência ou agressões sofridas por mulheres brasileiras maiores de 16 anos de idade nos últimos 12 meses anteriores à pesquisa. Extrapolados os resultados da pesquisa para o universo de toda a população de mulheres brasileiras nessa faixa etária, concluiu-se que, em média, 18,6 milhões (ou 28,9%) de mulheres sofreram algum tipo de violência ou agressão.

Elaborado com base em: Fórum Brasileiro de Segurança Pública. **Visível e Invisível**: A Vitimização de Mulheres no Brasil, 4. ed., 2023. Disponível em: https://forumseguranca.org.br/wp-content/uploads/2023/03/visiveleinvisivel-2023-relatorio.pdf. Acesso em: 13 ago. 2024.

Agora, responda. **8. a.** 64.359.861 mulheres brasileiras.

a. De acordo com esse levantamento, aproximadamente, qual era o número total de mulheres brasileiras na época da pesquisa?

b. Em sua opinião, qual é a importância desse tipo de pesquisa? **8. b.** Resposta pessoal.

c. Vocês conhecem alguma política pública (municipal, estadual ou federal), projetos ou programas que possam ajudar no enfrentamento da violência contra mulheres? **8. c.** Resposta pessoal.

9. De acordo com o Censo 2022 realizado pelo IBGE, as populações indígenas que vivem no Brasil somam 1.693.535 pessoas, sendo que 867,9 mil delas vivem na Amazônia Legal. Qual é a porcentagem aproximada de indígenas que vivem na Amazônia Legal? **9.** 51,2%

10. Aline elaborou, em uma planilha eletrônica, um simulador de juro simples, como mostrado a seguir.

	A	B	C	D	E
1	Juro simples				
2	Capital inicial			Juro	
3	Taxa			Montante	
4	Período				
5					
6					
7					
8					
9					

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

10. a. juro: R$ 56,40; montante: R$ 996,40

O juro é calculado como $J = C \cdot i \cdot t$, e, por isso, ela digitou **=B2*B3*B4** na célula E2. Da mesma maneira, para calcular o montante ($C + J$) ela digitou **=B2+E2** na célula E3. Agora, faça o que se pede.

a. Reproduza o simulador em uma planilha eletrônica e calcule o juro simples e o montante para o capital inicial de R$ 940,00 a uma taxa de juro de 1,2% ao ano no período de 5 anos.

b. Usando o mesmo simulador de juro simples, calcule o juro e o montante para um capital inicial de R$ 1.750,00 a uma taxa de juro de 0,78% ao mês durante 24 meses.

10. b. juro: R$ 327,60; montante: R$ 2.077,60

c. Com base no simulador de juro simples, crie um simulador de juro composto para calcular o juro e o montante. Em seguida, usando o simulador que você criou, calcule o juro e o montante usando os parâmetros dos itens **a** e **b**. Qual é a diferença encontrada em cada caso? **10. c.** Resposta no final do livro.

11. Em 10 de novembro de 2023, 1 peso argentino comprava 0,0141 real (brasileiro), e no dia 20 de novembro de 2023, 1 peso argentino comprava 0,0138 real (brasileiro).

Fonte: Banco Central do Brasil. **Conversor de Moedas**. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/conversao. Acesso em: 13 ago. 2024.

11. a. 2,128%, aproximadamente

a. Qual foi, percentualmente, a desvalorização do peso argentino, em relação ao real, nesse período?

b. Qual foi, percentualmente, a valorização do real, em relação ao peso argentino, nesse período?

11. b. 2,174%, aproximadamente

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

OBJETO DIGITAL ***Podcast:*** **Consumo e moda**

12. Alex adora estar por dentro da moda e frequentemente compra roupas novas usando seu cartão de crédito. No último mês, a fatura do seu cartão foi de R$ 1.500,00 sendo que R$ 900,00 foi gasto em vestuário. Para não comprometer sua renda, Alex pagou o valor mínimo permitido, gerando uma dívida na fatura do mês seguinte. Sabendo que a bandeira do cartão cobra uma taxa de 10% ao mês, sobre o saldo devedor, e que o valor mínimo a ser pago é 5% do valor total da fatura, responda. **12. a.** R$ 1.711,75

a. Se Alex não usar o cartão de crédito durante 3 meses e continuar pagando apenas o valor mínimo permitido, qual será o valor da fatura ao final desse período?

b. Quais são as consequências de pagar o valor mínimo do cartão de crédito?

c. O que Alex poderia ter feito para evitar o endividamento no cartão? **12. d.** Resposta pessoal.

12. b. Resposta pessoal.

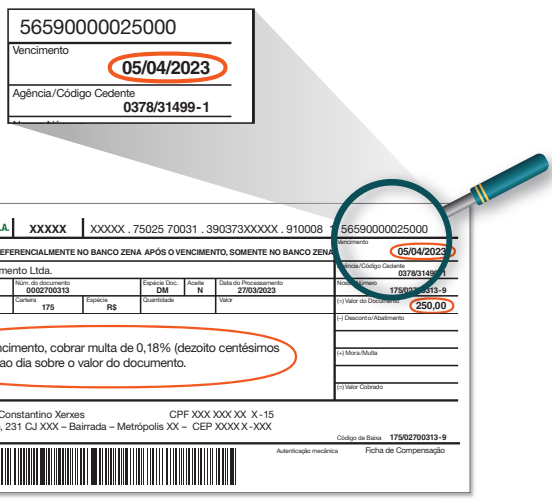
d. Você sabe a diferença entre consumo e consumismo?

e. Em sua opinião, a publicidade influencia nos nossos hábitos de consumo? **12. e.** Resposta pessoal.

f. Antes de comprar algum produto, você já se perguntou se realmente precisa do produto ou se está comprando por impulso? **12. f.** Resposta pessoal.

13. As quantias pagas pelo atraso de pagamento de algumas contas são calculadas em regime de juro simples, isto é, a taxa de juro incide apenas sobre o capital inicial, que é o valor do documento impresso no boleto. Por exemplo, a seguir temos a reprodução de um boleto bancário cujo atraso do pagamento, em relação à data do vencimento, implicaria uma multa, calculada em regime de juro simples. Se esse boleto foi pago no dia 14/4/2023, qual foi o valor da multa?

13. R$ 4,05



17. Raquel possuía R$ 115.000,00, e Iraci possuía R$ 100.000,00.

14. Com uma medida de área de aproximadamente 8,52 milhões de quilômetros quadrados, o Brasil, é o quinto país em extensão territorial. Para se ter uma ideia, sem levar em conta os países transcontinentais europeus, todos os demais países europeus juntos somam uma medida de área de 6,31 milhões de km^2, que caberiam dentro do Brasil, e ainda sobraria espaço! A medida de área do nosso país corresponde a 1,67% de toda a superfície terrestre no planeta, ocupando 21,23% da medida de área do continente americano e 48,1% da América do Sul, em valores aproximados.

14. b. Aproximadamente 40,13 milhões de quilômetros quadrados.

Considerando essas estimativas, calcule, aproximadamente: **14. a.** Aproximadamente 510,2 milhões de km^2.

a. a medida de área da superfície da Terra;

b. a medida de área do continente americano;

c. a medida de área da América do Sul;

14. c. Aproximadamente 17,71 milhões de km^2.

d. o percentual que a medida de área da Europa, sem a porção transcontinental europeia, representa em relação à área do Brasil. **14. d.** Aproximadamente 74,06% da medida de área do Brasil.

15. Valéria trocou de carro. O pagamento dessa troca será realizado da seguinte maneira: entrada de R$ 40.000,00 mais 24 prestações mensais fixas de R$ 1.850,00, com juro composto de 2,3% ao mês. Qual é o preço desse carro? (Use a planilha eletrônica para ajudar nos cálculos do sistema Price.) **15.** R$ 73.830,19

16. O montante acumulado, em real, durante 2 anos de aplicação de um capital de R$ 12.000,00, em regime de juro composto, à taxa de 3% ao mês, será:

a. $12.000(1,3)^2$

b. $12.000(1,03)^2$

c. $12.000(1,3)^{24}$

d. $12.000(1,03)^{24}$

e. $12.000(1,003)^2$

16. alternativa **d**

17. Inicialmente, Raquel e Iraci possuíam juntas R$ 215.000,00. Raquel aplicou a sua parte do dinheiro por 1 ano e 3 meses à taxa de juro simples de 12% ao ano, e Iraci aplicou a sua parte por 2 anos à taxa de juro composto de 15% ao ano. Sabendo que os montantes resgatados por elas foram iguais, calcule a quantia que cada uma possuía inicialmente.

18. Para reformar sua casa, Ricardo tomou um empréstimo bancário, por alguns meses, à taxa de juro composto de 5% ao mês. Ele não amortizou a dívida até o dia do vencimento do empréstimo, quando a quitou, pagando ao banco a quantia de R$ 13.230,00. Caso Ricardo tivesse quitado a sua dívida dois meses antes do vencimento, quanto ele teria pago ao banco?

18. R$ 12.000,00

19. O preço p de um produto sofreu dois aumentos sucessivos: o primeiro de 5%, e o segundo de 3%. Depois, o preço do produto sofreu um desconto de 4%. Após esse desconto, o preço do produto é: **19.** alternativa **c**

a. $p \cdot 1,5 \cdot 1,3 \cdot 0,06$

b. $p \cdot 1,5 \cdot 1,3 \cdot 0,96$

c. $p \cdot 1,05 \cdot 1,03 \cdot 0,96$

d. $p \cdot 0,5 \cdot 0,3 \cdot 0,4$

e. $p \cdot 0,05 \cdot 0,03 \cdot 0,04$

20. R$ 53.352,00

20. Um automóvel, comprado por R$ 78.000,00, teve uma desvalorização de 20% no primeiro ano de uso; outra de 10% no segundo ano, em relação ao ano anterior; e outra de 5% no terceiro ano, em relação ao ano anterior. Qual era o valor do automóvel ao final desses 3 anos?

12. c. Poderia usar o cartão de maneira consciente e evitando compras por impulso, pagar a fatura integral e criar um orçamento pessoal para não comprometer demais despesas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Inicie a seção contextualizando os estudantes sobre o aumento das fraudes financeiras, como em jogos de azar *on-line*, utilizando dados atuais para destacar a vulnerabilidade da população.
Apresente o tema por meio de uma discussão sobre confiança em investimentos, incentivando os estudantes a refletirem sobre o que já sabem a respeito de golpes financeiros. Nesse momento, algumas perguntas podem ser feitas: "Por que tantas pessoas são facilmente enganadas por promessas de altos retornos?"; "Quais são os sinais que podem indicar um golpe?".
Em seguida, apresente casos reais de golpes de investimento e discuta os principais sinais de alerta, como promessas de ganhos elevados com baixo risco, pressão para tomar decisões rápidas e falta de informações claras. A análise dessas situações ajuda a estimular o pensamento crítico dos estudantes, além de desenvolver habilidades essenciais para identificar fraudes e tomar decisões mais seguras.
Por fim, promova uma reflexão sobre a importância da Educação financeira como ferramenta preventiva contra fraudes. Peça aos estudantes que compartilhem suas conclusões e debatam como esse conhecimento pode ser aplicado em situações do cotidiano, reforçando a importância de estarem informados para evitar armadilhas financeiras. O tema proposto favorece o desenvolvimento das **competências gerais 4**, **5**, e **7**.

Golpes em ambiente virtual

Quase metade das pessoas cairia em golpe de investimento, aponta iniciativa educacional para alertar população

Uma iniciativa educacional nossa [a Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais (ANBIMA)] em parceria com a CVM (Comissão de Valores Mobiliários) mostrou que quase metade das pessoas cairia em um golpe de investimento.

Um *site* de uma empresa fictícia simulando a oferta de fundos de ações e garantindo lucros altos teve 884.949 visitas nos quatro meses em que ficou no ar, entre novembro de 2022 e fevereiro deste ano. Desse total, 48,8% clicaram em um dos botões da página inicial que indicavam a intenção de investir nos produtos.

Ao fazer isso, os visitantes eram levados a uma página educativa, com o alerta de que poderiam ter caído em um golpe e com orientações para não entrar em ciladas ao se deparar com sites realmente fraudulentos.

"É muito importante destacar que riscos existem e são diversos, como aspectos políticos e econômicos, riscos específicos envolvendo um setor ou companhia, dentre outros. Entretanto, existem riscos que são fraudes financeiras e que podem ser evitados pelo investidor. É fundamental sempre estar atento aos sinais: desconfie de promessas de rendimentos altos, cuidado com supostos especialistas em fóruns de internet e redes sociais, cuidado com ofertas na internet de fontes desconhecidas e verifique sempre o ofertante/intermediário. A iniciativa com a ANBIMA mostrou na prática que o risco existe e que a atenção e o cuidado são primordiais para não cair no golpe", comentou Andréa Coelho, Chefe da Divisão de Educação Financeira e Superintendente Interina de Proteção e Orientação aos Investidores da CVM.



TREETY/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A divulgação dos resultados dessa iniciativa ocorre na semana da Global Money Week, uma campanha mundial de conscientização sobre a importância da educação financeira.

"Os resultados mostram que as pessoas ainda estão vulneráveis a ofertas enganosas e golpes já conhecidos e que sempre têm as mesmas características. A primeira linha de defesa é sempre buscar informações isentas sobre produtos financeiros e cultivar um ceticismo saudável quando nos deparamos com ofertas que parecem ser muito boas para serem verdade. Geralmente não são mesmo", afirma Marcelo Billi, nosso superintendente de Educação.

[...]

ORAGICART/ARQUIVO DA EDITORA

DICAS PARA O INVESTIDOR EVITAR CAIR EM GOLPES

Promessas de lucros altos: sempre desconfie de promessas financeiras milagrosas com ganhos gigantes em curto prazo.

Informações distorcidas ou insuficientes: pouca informação sobre a empresa ofertante, o produto, o serviço, o suposto negócio ou o investimento é sinal de cilada. Fique de olhos bem abertos e atento ao CNPJ das empresas, procurando informações sobre a sua atuação no mercado.

Ofertas com alto senso de urgência: a insistência para que o investidor feche um negócio e não perca a suposta oportunidade pode indicar um golpe. Investimentos realmente bons não precisam procurar desesperadamente por investidores.

[...]

Fonte: ANBIMA – Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiro e de Capitais. Quase metade das pessoas cairia em golpe de investimento, aponta iniciativa educacional para alertar população. **ANBIMA em Ação**. 22 mar. 2023. Disponível em: https://www.anbima.com.br/pt_br/noticias/quase-metade-das-pessoas-cairia-em-golpe-de-investimento-aponta-iniciativa-educacional-para-alertar-populacao.htm. Acesso em: 13 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Educação midiática: 1. Resposta pessoal.

1. Qual é a importância de alertas como esse realizados por entidades como a ANBIMA e a CVM?

2. Você já foi exposto a algum tipo de oferta ou anúncio enganoso na internet? Se sim, quais mecanismos utilizou para identificar uma possível fraude?

2. Respostas pessoais.

3. O título da notícia está em concordância com a porcentagem apresentada no texto? Por quê? Calcule o número de cliques em um dos botões da página inicial que indicavam a intenção de investir nos produtos durante o período da iniciativa.

3. Respostas pessoais; aproximadamente 431.855.

4. Organizem-se em grupos e façam uma pesquisa em mídias diversas sobre casos de tentativas de golpes e fraudes envolvendo o contexto financeiro. Com base nessa pesquisa, elaborem coletivamente uma página educativa com orientações para a segurança financeira dentro e fora da *web*. Decidam um meio adequado de divulgação da página (folheto impresso, página na internet etc.) na escola.

4. Resposta pessoal.

A linha da pobreza



Os países signatários da ONU estabeleceram como meta reduzir pela metade a proporção de pessoas que vivem na pobreza extrema até 2030. Existem diferentes definições do que é pobreza, e uma das mais conhecidas é a de linha da pobreza, desenvolvida pelo Banco Mundial. Segundo essa definição, as pessoas que vivem com menos de US$ 1,90 diário são consideradas em situação de pobreza extrema. Em valores reais, pode-se considerar em situação de pobreza extrema as pessoas que vivem com cerca de R$ 300,00 mensais. A ONU considera essas definições, mas ressalta que outros indicadores são importantes de serem avaliados, como as mudanças climáticas, os conflitos, a fome, a discriminação e a exclusão social.

Elaborado com base em: POBREZA extrema aumenta pela primeira vez em 20 anos, diz Banco Mundial. **ONU News**. 7 out. 2020. Disponível em: https://news.un.org/pt/story/2020/10/1728962#:~:text=Esse%20ritmo%20diminuiu%20para%20menos,semelhante%20ao%20registrado%20em%202017; OS OBJETIVOS de Desenvolvimento Sustentável no Brasil – Erradicação da pobreza. **Nações Unidas Brasil**. Disponível em: https://brasil.un.org/pt-br/sdgs/1. Acesso em: 14 ago. 2024.

Esta seção permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, favorecendo o trabalho com a habilidade **EM13CHS502**, além de abordar aspectos dos **ODS 1** e **2** e do **TCT Educação em direitos humanos**.

Discuta o texto com a turma e incentive os estudantes a refletirem sobre algumas causas e consequências da relação entre fome e pobreza, fome e crises humanitárias, fome e crescimento econômico de um país, entre outros temas que eles mesmos podem sugerir.

Insegurança alimentar atinge 820 milhões de pessoas

O crescimento desordenado da população mundial e da extração e consumo excessivos de matérias-primas resulta em desequilíbrio do ecossistema global. Da urgência das economias capitalistas em crescer sempre, e cada vez mais, decorre a escassez de recursos naturais dos mais variados tipos, entre eles, os alimentícios. Atualmente mais de 820 milhões de pessoas passam fome em todo o mundo.

Denomina-se insegurança alimentar a condição em que uma comunidade, ou parte dela, não tem garantido acesso regular e permanente a alimentos de qualidade, em quantidade suficiente, sem comprometer o acesso a outras necessidades essenciais, tendo como base práticas alimentares promotoras de saúde, que respeitem a diversidade cultural e que sejam ambiental, econômica e socialmente sustentáveis.

Um dos dados mais surpreendentes sobre a fome no mundo é que 30% dos 4 bilhões de toneladas de alimentos produzidos anualmente vão para o lixo. Conscientes de que o desperdício é um dos principais vilões desse contexto, líderes de Estado desenvolvem campanhas de conscientização para minimizá-lo e economizar aproximadamente US$ 1 trilhão por ano.

Explique que não é um problema de fácil solução, mas pode ser amenizado com ações governamentais e a diminuição do desperdício alimentar. Mostre alguns números implícitos no texto, por exemplo: "30% dos 4 bilhões de toneladas de alimentos produzidos anualmente vão para o lixo", ou seja, 1,2 bilhão de toneladas de alimento vai para o lixo todo ano. Se dividirmos essa quantidade de alimento pelas 820 milhões de pessoas que passam fome, obteremos mais de 1 tonelada de alimento por ano para cada pessoa; em outras palavras, cada uma das 820 milhões de pessoas que passam fome teria, aproximadamente, 4 quilogramas de alimento por dia.



JOA_SOUZA/ISTOCK/GETTY IMAGES

Estima-se que cerca de 1 bilhão e 200 milhões de toneladas de alimento acabam no lixo todos os anos. Na imagem, descarte de alimentos na feira de São Joaquim, em Salvador (BA). Foto de 2022.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Na atividade **2** e de acordo com o desenvolvimento dos estudantes, auxilie-os a definir uma ação que seja viável e relevante para o contexto deles. Organizar uma feira de produtos de agricultura familiar, por exemplo, possibilita compreender como esse tipo de economia local favorece as pessoas de determinada região, geralmente, disponibilizando alimentos mais saudáveis e empregando pessoas da comunidade. Campanhas de arrecadação de alimentos, por exemplo, também podem ser realizadas, mas destaque que o importante é trabalhar a conscientização das pessoas, e, por isso, a campanha não pode ser reduzida à arrecadação de produtos, mas deve envolver a disseminação das informações. Para tanto, os estudantes podem, por exemplo, compor folhetos informativos para entregarem após conversar com as pessoas, publicar uma página na internet sobre a ação e disponibilizar frequentemente novas informações sobre o tema etc. Caso seja possível, convide os professores da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para um trabalho interdisciplinar.

Outras boas ideias sobre o combate à fome no mundo já haviam surgido, mas, infelizmente, não prosperaram. Uma das mais extraordinárias foi sugerida pelo economista estadunidense James Tobin, ganhador do prêmio Nobel de Economia em 1981, que propôs, em 1972, uma taxação de 0,1% sobre as transações financeiras especulativas internacionais. O dinheiro assim recolhido serviria para criar um fundo internacional para ajudar no combate à fome e à pobreza. Esse imposto ficou conhecido como Taxa Tobin.

Vez ou outra, artistas e esportistas de projeção promovem campanhas de arrecadação de recursos para o combate à fome e à pobreza, mas isso é pouco. É preciso uma ação efetiva dos governos internacionais que dê condições à população carente de se inserir no mercado de trabalho e prover, com dignidade, o sustento de sua família.

A Matemática pode ajudar a chegar a uma solução por meio de modelos que incorporem o maior número possível de variáveis e que demonstrem que a contribuição de cada cidadão não é um dispêndio, mas um investimento para um mundo melhor.

Elaborado com base em: MUNDO está longe de cumprir metas dos ODSs relacionadas a alimentos e agricultura. **ONU News**. Disponível em: https://news.un.org/pt/story/2019/07/1680491; BEZERRA, T. A.; OLINDA, R. A.; PEDRAZA, D. F. Insegurança alimentar no Brasil segundo diferentes cenários sociodemográficos. **Ciência & Saúde Coletiva**, 2017, v. 22, n. 2, p. 637-651; DESPERDÍCIO de comida custa quase US$ 1 trilhão por ano em todo o mundo. **ONU News**. Disponível em: https://news.un.org/pt/story/2019/10/1689492#:~:text5Desperd%C3%AD. Acesso em: 14 ago. 2024.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Respostas pessoais.

1. Junte-se a alguns colegas e, com base nas informações dos textos, conversem sobre as questões:

a. Vocês consideram possível erradicar a pobreza no mundo? Por quê?

b. Quantas pessoas vocês acreditam que vivem em situação de pobreza ou de extrema pobreza no Brasil?

c. E vocês consideram possível acabar com a fome e a insegurança alimentar no mundo? Expliquem.

d. Vocês conhecem alguma política pública (municipal, estadual ou federal) que possa ser associada à meta da ONU de diminuir a quantidade de pessoas que vivem em situação de extrema pobreza?

e. E vocês conhecem alguma política pública (municipal, estadual ou federal) que possa ser associada à meta da ONU de acabar com a fome e alcançar a segurança alimentar, como políticas que fortalecem a alimentação escolar e apoiam pequenos grupos de produtores agrícolas, de pecuária ou de pesca?

2. Elaborem uma ação de conscientização sobre o desperdício de alimentos e sobre a quantidade de pessoas que vivem em situação de insegurança alimentar. Para isso, orientem-se com base nas dicas a seguir. **2.** Resposta pessoal.

a. Façam estudos mais aprofundados sobre os tópicos que pretendem ampliar e divulgar. A turma pode se organizar em grupos, e cada grupo pode pesquisar determinado aspecto.

b. Registrem de diferentes maneiras os momentos de estudo e as conclusões a que chegarem. Vocês podem filmar, fotografar, compor cartazes com esquemas indicando dados numéricos e outras informações.

c. Planejem uma ação que seja viável. Por exemplo: se possível, organizar e divulgar uma feira de produtos de agricultura familiar, realizar uma campanha de arrecadação de alimentos ou uma atividade com fins beneficentes.

d. Apresentem os materiais elaborados aos colegas da turma antes de divulgá-los. Dessa maneira, vocês podem treinar a apresentação e ajustar ou complementar as informações que pretendem transmitir.

e. Durante a efetivação da ação, promovam a divulgação das informações que visem à conscientização das pessoas que participarem. Os resultados também podem ser veiculados em diferentes meios, como em murais (da escola ou do bairro) e em páginas da internet (como blogues pessoais ou outras redes sociais).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Na atividade **1**, oriente os estudantes a discutirem o tema tendo como base as perguntas de cada item. Essas perguntas podem ser retomadas no decorrer do desenvolvimento do projeto; dessa maneira, após discutirem livremente, incentive-os a pesquisar informações em diferentes fontes a fim de obter respostas mais precisas para as perguntas.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 2

Alem do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $x(x+2) - 4x = 2x + 5$.

a. $S = \{5\}$
b. $S = \{4, -1\}$
c. $S = \{-5, 1\}$
d. $S = \{-1\}$
e. $S = \{5, -1\}$

1. alternativa **e**

2. Determine os números reais x e y tais que:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$$

a. $x = 3$ e $y = 1$
b. $x = -1$ e $y = 3$
c. $x = 1$ e $y = 3$
d. $x = 3$ e $y = -1$
e. $x = -1$ e $y = -3$

2. alternativa **c**

3. Resolva a inequação $4(5 + 2x) - x > 5 - 3(x + 1)$ no universo $\mathbb{R}$. 3. alternativa **d**

a. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{8}{5} \right\}$
b. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{9} \right\}$
c. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{8}{5} \right\}$
d. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{9}{5} \right\}$
e. $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{9} \right\}$

4. Uma escultura foi moldada com a fusão de cobre, zinco e estanho. Calcule a massa total da escultura, em kg, sabendo que a massa de cobre que a compõe é de 37,7 kg e equivale a 58% da massa total.

a. 65,00 kg
b. 75,40 kg
c. 28,87 kg
d. 153,85 kg
e. 62,83 kg

4. alternativa **a**

5. Durante quanto tempo um capital de R$ 600,00 aplicado à taxa de 1,8% ao mês produz juro simples de R$ 54,00? 5. alternativa **b**

a. 4 meses
b. 5 meses
c. 6 meses
d. 7 meses
e. 8 meses

6. Devido a melhorias no bairro, prevê-se que, durante os próximos três anos, um imóvel terá uma valorização de 20% ao ano. Se hoje o valor do imóvel é R$ 300.000,00, qual será seu valor daqui a três anos? 6. alternativa **d**

a. R$ 480.000,00
b. R$ 318.362,40
c. R$ 918.000,00
d. R$ 518.400,00
e. R$ 373.719,28

Nesta seção, exploramos um conjunto de atividades que pode ser utilizado para a autoavaliação ou como uma avaliação formativa relativa aos conteúdos trabalhados no capítulo. Além disso, a ferramenta de estudo, disponibilizada ao final da seção, pode ser utilizada como uma maneira de possibilitar a autoavaliação dos estudantes em relação aos conteúdos do capítulo.

Ferramenta de estudo

Um resumo é uma ferramenta de estudo que retoma o que foi estudado podendo destacar conteúdos nos quais ainda apresenta dificuldades ou que não compreendeu.

Para elaborar um resumo, você pode seguir algumas dicas, como as sugeridas a seguir.

1. A cada conteúdo estudado, faça anotações detalhadas com tudo o que você aprendeu.
2. Ao finalizar o estudo dos tópicos do capítulo, retome suas anotações e elabore um texto resumindo-as.
3. Para fazer o resumo, você também pode retomar os tópicos deste capítulo a fim de verificar ou relembrar conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.
4. Organize em tópicos a sequência das informações que você pretende apresentar no resumo antes de escrevê-lo.

Agora, elabore um resumo utilizando o que você aprendeu neste capítulo. Compartilhe seu resumo com outros colegas e leia o resumo deles também, a fim de aprimorar seu registro.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 3

Geometria plana: triângulos e proporcionalidade

Comente que Euclides explorou em sua obra a Geometria plana e a Geometria espacial, além da teoria dos números. Neste volume, estudaremos apenas a Geometria plana, deixando a Geometria espacial para outro momento.

Sugira aos estudantes que assistam ao vídeo indicado a seguir: Vida Matemática 1, Egito, O Berço dos Números. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Xflj6vBB7TY. Acesso em: 7 ago. 2024.

O tema possibilita o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, abordando a formação da civilização egípcia e o desenvolvimento de sua cultura, comércio, artes militares etc.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Altura da pirâmide de Quéops

Tales de Mileto (624 a.C.-548 a.C.) é considerado o primeiro filósofo grego e é também a pessoa a quem se credita as primeiras deduções sistemáticas em Geometria – embora, antes dele, a humanidade já tivesse acumulado conhecimento matemático. Além das descobertas matemáticas, os estudos de Tales contribuíram para diversas outras áreas do conhecimento, como Filosofia e Astronomia, tornando-o um dos sete sábios da Antiguidade.

Em um de seus estudos, Tales se deparou com um problema matemático: calcular a medida da altura da pirâmide de Quéops. Para esse cálculo, ele usou seus conhecimentos sobre a incidência dos raios solares que chegavam à Terra. Ele considerou que os raios solares incidiam de maneira inclinada e eram paralelos, e que havia uma proporcionalidade entre as medidas do comprimento da sombra dos objetos e da altura deles.



LUKAS BISCHOFF PHOTOGRAPH/SHUTTERSTOCK

Pirâmides de Quéops, Quéfren e Miquerinos, em Cairo, Egito. Foto de 2022.

Existem duas versões sobre como Tales calculou a altura da pirâmide de Quéops por meio da sombra. A primeira versão conta que Tales mediu o comprimento da sombra da pirâmide quando sua sombra e sua altura tinham a mesma medida. Com isso, ele obteve a altura da pirâmide. A outra versão conta que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos.

Elaborado com base em: EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

Além da teoria

Além da teoria: Respostas pessoais.

1. Assim como outros grandes nomes da Antiguidade, Tales teria sistematizado alguns conhecimentos matemáticos de sua época. Comente como você considera que o desenvolvimento científico pode ser beneficiado, atualmente, com a cooperação entre os membros da comunidade científica.
2. Supostamente, Tales pode ter resolvido o problema de calcular a altura da pirâmide de duas maneiras. Você já se deparou com um problema que tinha mais de uma maneira de ser resolvido? Comente com os colegas.
3. Pesquise a respeito de outras civilizações que utilizaram pirâmides na arquitetura. Depois, compartilhe os resultados com os colegas a fim de identificarem quais os usos sociais dessa arquitetura em cada civilização pesquisada.

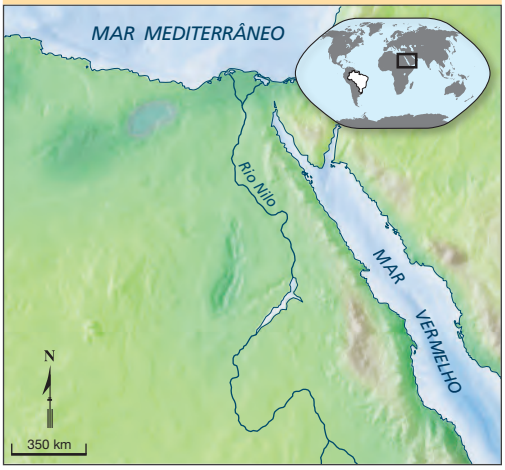
1. As origens da Geometria

No antigo Egito, o rio Nilo transbordava todos os anos, no período de chuvas. O alagamento dos campos danificava as demarcações de limites das propriedades. Então, quando as águas voltavam ao leito do rio, era necessário remarcar esses limites. Esse trabalho era feito por agrimensores com uma corda esticada, que reproduzia um triângulo retângulo e auxiliava na delimitação dos terrenos.

Para o historiador grego Heródoto (século V a.C.), essa atividade teria dado origem, há aproximadamente 5 mil anos, à ciência das formas e medidas, que viria a ser chamada de Geometria (do grego *geo*, "terra", e *metria*, "medida").

No entanto, o ser humano pré-histórico já utilizava noções de Geometria quando se preocupava em representar a natureza por meio de desenhos ou em dar forma aos objetos, construindo vasos ou esculpindo, em pedra, as pontas de suas lanças. Assim, se considerarmos a Geometria a ciência das formas e medidas, sua origem é anterior à civilização egípcia.

Rio Nilo



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: SIMIELLI, M. H. **Geoatlas**. São Paulo: Ática, 2012.

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

BRIDGEMAN IMAGES/KEYSTONE BRASIL



Pintura rupestre representando animais, cerca de 15000 a.C. Caverna de Altamira, Espanha.



ALINARI/TOPFOTO/AGB PHOTO LIBRARY - MUSEU ARQUEOLÓGICO DE FINALE LIGURE, ITÁLIA

Vaso de cerâmica do período Neolítico, cerca de 6500 a.C. Encontrado na caverna de Áquila, Itália.



BIBLIOTECA BRITÂNICA, LONDRES

Reprodução da capa da primeira versão em inglês do livro *Os elementos*, de 1570. Dos treze volumes em que se subdivide a obra, os seis primeiros tratam da Geometria plana, os quatro seguintes, da teoria dos números e os três últimos, da Geometria do espaço.

A origem da Geometria é imprecisa, pois, como afirmava o matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813): "Logo que houve homens na sociedade, propriedades, trocas e partilhas, é natural que se tenha procurado medir a extensão dos campos e determinar seu contorno".

Em contraponto a essas dúvidas, há uma certeza: um marco histórico na construção da Geometria ocorreu no século III a.C., quando o matemático grego Euclides de Alexandria organizou todo o conhecimento geométrico então disponível – grande parte de sua própria criação – em uma obra de treze volumes, imortalizada com o nome de *Os elementos*. Neste capítulo, vamos estudar uma parte da **Geometria euclidiana**.

2. Polígonos

Consideremos, em um plano, uma linha *L* formada por segmentos de reta tais que:

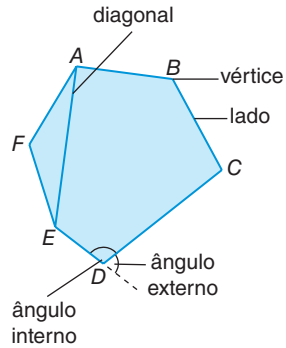
- cada extremidade de qualquer um deles é extremidade de dois e apenas dois deles;
- dois segmentos consecutivos quaisquer, entre eles, não são colineares;
- dois segmentos não consecutivos quaisquer, entre eles, não têm ponto comum.

Essa linha *L* separa o plano em duas regiões, das quais uma é limitada. A reunião da linha *L* com essa região limitada é chamada de **polígono** (do grego *polús*, "muitos", e *gonos*, "ângulos").

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Notas:

1. Dois lados de um polígono são consecutivos quando têm um extremo em comum. Por exemplo, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são lados consecutivos no polígono representado ao lado.
2. Vértices consecutivos de um polígono são extremos de um mesmo lado desse polígono, como os pontos C e D.
3. Diagonal de um polígono é qualquer segmento de reta com extremos em dois vértices não consecutivos do polígono. Por exemplo, $\overline{AE}$ é diagonal desse polígono.
4. Ângulos consecutivos de um polígono são ângulos de vértices consecutivos desse polígono.
5. Pode-se definir polígono simplesmente como a linha L, porém optamos por defini-lo como uma superfície plana em vez de uma linha.



Nomenclatura

Aos polígonos que têm de três a vinte lados daremos os nomes apresentados no quadro a seguir.

Nomenclatura de polígonos

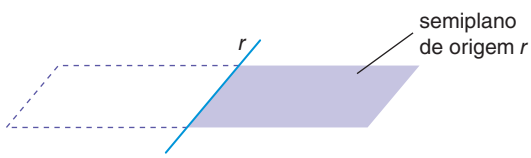
Número de lados (número de vértices)	Nome do polígono	Número de lados (número de vértices)	Nome do polígono
3	triângulo ou trilátero	12	dodecágono
4	quadrilátero	13	tridecágono
5	pentágono	14	tetradecágono
6	hexágono	15	pentadecágono
7	heptágono	16	hexadecágono
8	octógono ou octágono	17	heptadecágono
9	eneágono	18	octadecágono
10	decágono	19	eneadecágono
11	undecágono	20	icoságono

Apresente a nomenclatura dos polígonos de até 20 lados (ou 20 vértices). Comente que há uma terminologia para caracterizar o número de lados de qualquer polígono; porém, nesta obra, adotaremos a terminologia somente até 20 lados; a partir daí explicitaremos o número de lados. Por curiosidade, um octacoságono é um polígono de 28 lados.

Vamos nos referir aos polígonos com mais de 20 lados mencionando apenas seu número de lados, não lhes dando nomes especiais. Porém, é interessante saber que para eles também existe uma nomenclatura; por exemplo, um octacoságono é um polígono de 28 lados, e um hexacontágono é um polígono de 60 lados.

Polígonos convexos

Em um plano, a reunião de uma reta r com qualquer uma das duas regiões separadas por ela é chamada de semiplano de origem r.



Reflexão

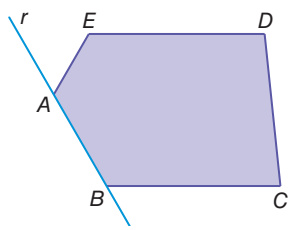
A reta origem de um semiplano faz parte do semiplano?

Reflexão: Uma reta r de um plano separa-o em duas regiões. A reunião da reta r com cada uma dessas regiões é um semiplano de origem r. Logo, a reta origem faz parte do semiplano.

Um polígono é **convexo** se, e somente se, a reta r que contém qualquer um de seus lados deixa o polígono contido em um mesmo semiplano de origem r.

Exemplo

Neste polígono $ABCDE$, a reta r que contém o lado $\overline{AB}$ deixa o polígono contido em um mesmo semiplano de origem r. O mesmo acontece com a reta que contém qualquer um dos outros lados. Por isso, dizemos que esse polígono é **convexo**.

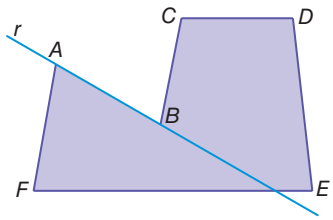


Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Contraexemplo (polígono não convexo)

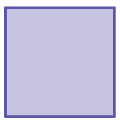
Este polígono *ABCDEF* **não é convexo**, pois a reta *r* que contém o lado $\overline{AB}$ não deixa o polígono contido em um mesmo semiplano de origem *r*.

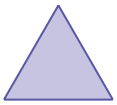


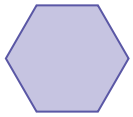
Polígono regular

Um polígono convexo que tem todos os lados congruentes entre si e todos os ângulos internos congruentes entre si é chamado de **polígono regular**.

Exemplos


quadrilátero regular (quadrado)


triângulo regular (triângulo equilátero)


hexágono regular

Observação

Dois segmentos de reta, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, são congruentes quando têm a mesma medida de comprimento. Indica-se essa congruência por: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Observação

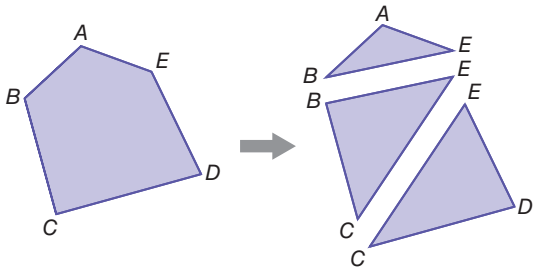
Dois ângulos, $A\hat{O}B$ e $M\hat{P}Q$, são congruentes quando têm a mesma medida. Indica-se essa congruência por: $A\hat{O}B \cong M\hat{P}Q$.

Reflexão

Todo polígono convexo que tenha os lados congruentes entre si é regular?

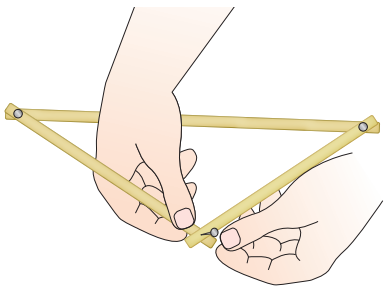
3. Triângulos

Podemos dizer que o triângulo é o polígono fundamental, pois qualquer outro polígono pode ser considerado uma composição de triângulos dispostos lado a lado. Por exemplo, o pentágono *ABCDE* é formado pelos triângulos *ABE*, *BCE* e *CDE*.



Por esse motivo, o triângulo merece um estudo mais detalhado que qualquer outro polígono.

Com três palitos de madeira, construa uma estrutura triangular, fixando um pequeno percevejo em cada vértice, conforme mostra a figura. Depois, tente movimentar os palitos, modificando o formato do triângulo. Você perceberá que não é possível. Por causa dessa rigidez, o formato triangular é muito usado na construção civil. Por exemplo, ele pode ser observado na estrutura da ponte Golden Gate (ou "portão dourado", em tradução livre) e nas estruturas de telhados.



(Manuseie os percevejos com cuidado.)

Reflexão: Oriente os estudantes a construir um losango (não quadrado). Com isso, espera-se que concluam que existe polígono não regular cujos lados são congruentes entre si.



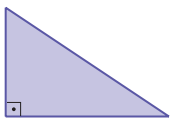
Ponte Golden Gate, em São Francisco, Califórnia, Estados Unidos. Foto de 2023. Detalhe da imagem com ampliação de 316%.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA
JIM_BROWN_PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

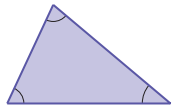
Classificação dos triângulos

Podemos classificar os triângulos quanto às medidas de seus ângulos internos ou às medidas de seus lados.

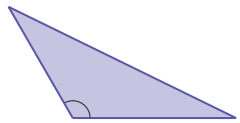
• Quanto às medidas de seus ângulos internos, um triângulo pode ser classificado em:



Triângulo retângulo: tem um ângulo interno reto.



Triângulo acutângulo: tem os três ângulos internos agudos.

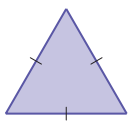


Triângulo obtusângulo: tem um ângulo interno obtuso.

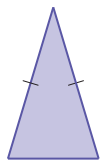
Observação

Ângulo reto, simbolizado por ⌞, é todo aquele de medida 90°. **Ângulo agudo** é todo aquele de medida menor que 90° e maior que 0°. **Ângulo obtuso** é todo aquele de medida maior que 90° e menor que 180°.

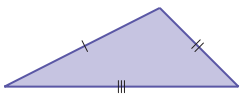
• Quanto às medidas dos lados, um triângulo pode ser classificado em:



Triângulo equilátero: tem os três lados congruentes entre si.



Triângulo isósceles: tem dois lados congruentes entre si.



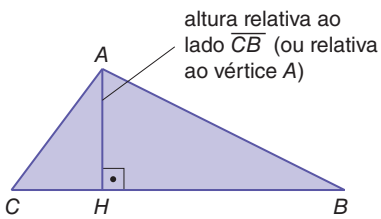
Triângulo escaleno: tem os três lados com medidas diferentes entre si.

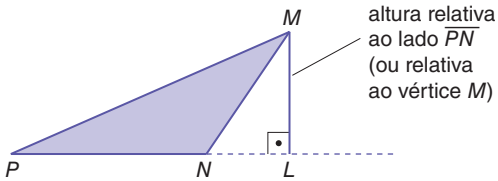
Observação

Note que o triângulo equilátero também é isósceles, pois tem dois lados congruentes entre si.

Elementos de um triângulo

Altura de um triângulo é o segmento de reta que liga, perpendicularmente, um vértice à reta que contém o lado oposto a esse vértice.





Observação

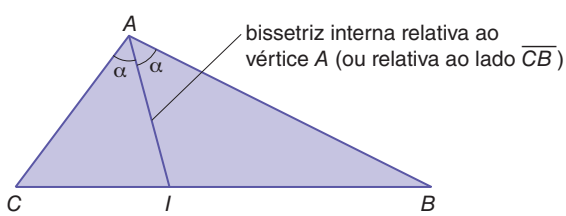
Nesta coleção, para simplificar a escrita, ao nos referirmos à medida de uma grandeza, utilizaremos apenas a grandeza. Assim, ao mencionarmos "o comprimento é 30 cm", nos referimos a uma medida de comprimento ou ao indicarmos que "os ângulos são menores do que 90°" nos referimos a medidas de ângulos menores do que 90°.

Propriedade

As retas suporte das três alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto chamado de **ortocentro**.

O simétrico do ortocentro em relação a qualquer um dos lados do triângulo ou em relação ao ponto médio de qualquer um dos lados pertence à circunferência que passa pelos três vértices desse triângulo (circunferência circunscrita ao triângulo).

Bissetriz interna de um triângulo é o segmento de reta que está contido na bissetriz de um ângulo interno e liga um vértice ao lado oposto.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedade

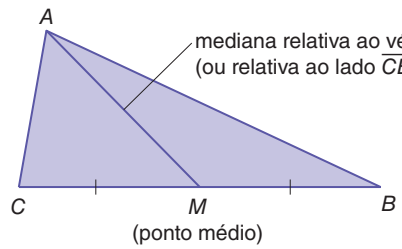
As três bissetrizes internas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto chamado **incentro**.

O incentro é o centro da circunferência tangente aos três lados desse triângulo (circunferência inscrita no triângulo).

Mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.

Observação

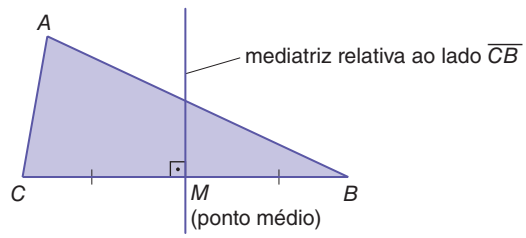
Ponto médio de um segmento é aquele que divide o segmento em duas partes congruentes.



As três medianas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto chamado **baricentro**.

O baricentro divide cada mediana, a partir do vértice do triângulo, na razão $\frac{2}{1}$.

Mediatriz em um triângulo é a reta perpendicular a um dos lados pelo ponto médio desse lado.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

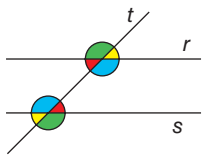
Propriedade

As retas suporte das três mediatrizes de um triângulo concorrem em um mesmo ponto chamado **circuncentro**.

O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Observação

Na figura a seguir, dois ângulos de mesma cor são alternos (internos quando estão entre *r* e *s*, ou externos quando não estão).



Se *r* // *s*, então os ângulos alternos são congruentes.

Ângulos em um triângulo

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Consideremos um triângulo qualquer *ABC*, cujos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ têm medidas α, β e θ, respectivamente (figura 1).

Traçando por *B* a reta $\overleftrightarrow{DE}$, paralela a $\overleftrightarrow{AC}$, determinamos ângulos alternos internos, que são congruentes (figura 2).

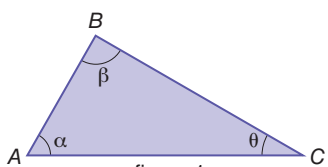


figura 1

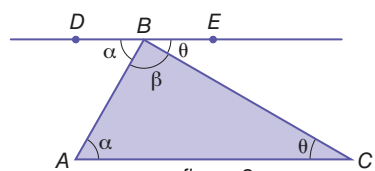


figura 2

Como o ângulo $D\hat{B}E$ é raso, concluímos que: $\alpha + \beta + \theta = 180°$

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°.

Observação

Ângulo raso é todo aquele cujos lados são semirretas opostas. Logo, sua medida é 180°.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule a medida de cada ângulo interno de um triângulo equilátero.

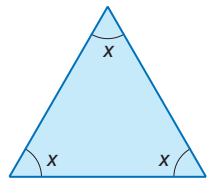
Resolução

Os três ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes entre si. Indicando por x a medida de cada um, temos:

$$x + x + x = 180° \Rightarrow 3x = 180°$$

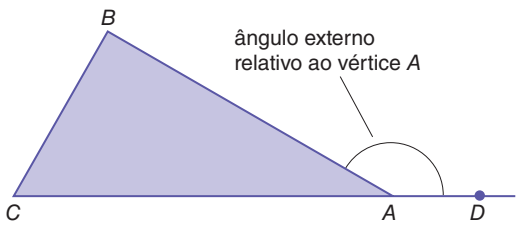
$$\therefore x = 60°$$

Logo, cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60°.

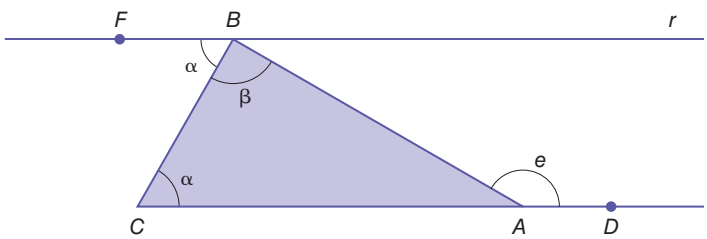


Teorema do ângulo externo de um triângulo

Na figura a seguir, o ângulo $B\hat{A}D$ é adjacente e suplementar de um ângulo interno do triângulo ABC; por isso, $B\hat{A}D$ é chamado de **ângulo externo** desse triângulo.



Há uma importante relação entre a medida de um ângulo externo e as medidas dos ângulos internos de um triângulo. Para obtê-la, vamos traçar por B a reta r paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ e indicar por α e β as medidas dos ângulos internos $\hat{C}$ e $\hat{B}$, respectivamente, e por e a medida do ângulo externo relativo ao vértice A.



Os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{B}F$ têm medidas iguais, por serem alternos internos formados por duas retas paralelas e uma transversal. Pelo mesmo motivo, os ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}F$ também têm medidas iguais, isto é:

$$m(B\hat{A}D) = m(A\hat{B}F) \Rightarrow e = \alpha + \beta$$

Demonstramos, assim, o teorema:

> A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Observação

Considerando um ângulo uma superfície plana, e não uma linha, dizemos que dois ângulos são adjacentes quando têm apenas um lado em comum.
Se a soma das medidas de dois ângulos é 180° eles são chamados ângulos suplementares.

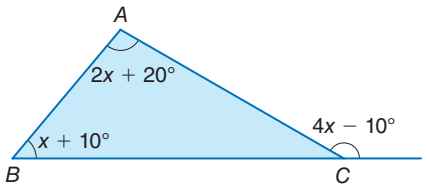
Observação

$m(B\hat{A}D)$ é lido como "medida do ângulo $B\hat{A}D$".

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. No triângulo ABC, as expressões indicadas em cada ângulo designam a medida, em grau, do respectivo ângulo. Determine a medida do ângulo externo relativo ao vértice C.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Pelo teorema do ângulo externo, temos:

$$4x - 10° = 2x + 20° + x + 10° \Rightarrow x = 40°$$

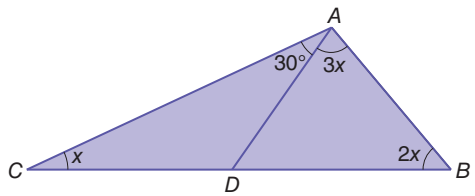
Logo, a medida do ângulo externo relativo ao vértice C é $4 \cdot 40° - 10°$, ou seja, 150°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

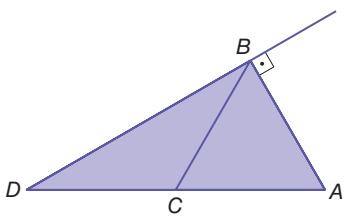
Faça os exercícios no caderno.

1. Faça o que se pede.

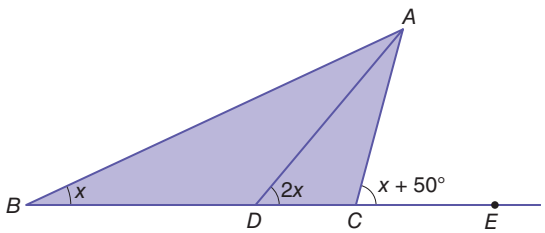
a. Na figura, em que x representa uma medida em grau, determine a medida do ângulo $A\hat{D}C$. **1. a.** 125°



b. Calcule a medida do ângulo $C\hat{D}B$, dado que o triângulo ABC é equilátero. **1. b.** 30°



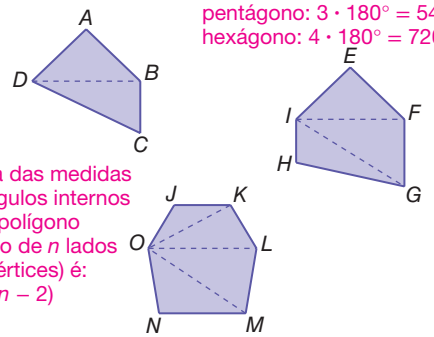
2. Na figura a seguir, $\overline{AD}$ é bissetriz interna relativa ao vértice A do triângulo ABC. Determine a medida do ângulo $A\hat{C}E$. **2.** 75°



3. Aprendemos que o triângulo é considerado o polígono fundamental, pois qualquer outro polígono pode ser visto como uma composição de triângulos dispostos lado a lado. Um quadrilátero convexo, por exemplo, é composto de dois triângulos, um pentágono convexo é composto de três triângulos, e um hexágono convexo é composto de quatro triângulos.

a. Sabemos que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. Considerando essa informação, reúna-se com um colega e calculem a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero, do pentágono e do hexágono convexos representados a seguir.

3. a. Quadrilátero: $2 \cdot 180° = 360°$; pentágono: $3 \cdot 180° = 540°$; hexágono: $4 \cdot 180° = 720°$

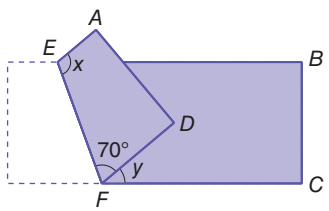


3. b. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados (ou n vértices) é: $180° \cdot (n - 2)$

b. Agora, escrevam a expressão que representa a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.

4. Uma folha retangular de cartolina, $ABCD$, foi dobrada conforme a figura. Calcule as medidas x e y, em grau, dos ângulos $A\hat{E}F$ e $D\hat{F}C$, respectivamente.

4. $x = 110°$ e $y = 40°$



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 1.

Conectado

Para construir o ortocentro de um triângulo, siga os passos a seguir utilizando um *software* de Geometria dinâmica.

Passo 1: Utilizando a ferramenta do *software* que constrói um polígono, construa um triângulo *ABC* qualquer.

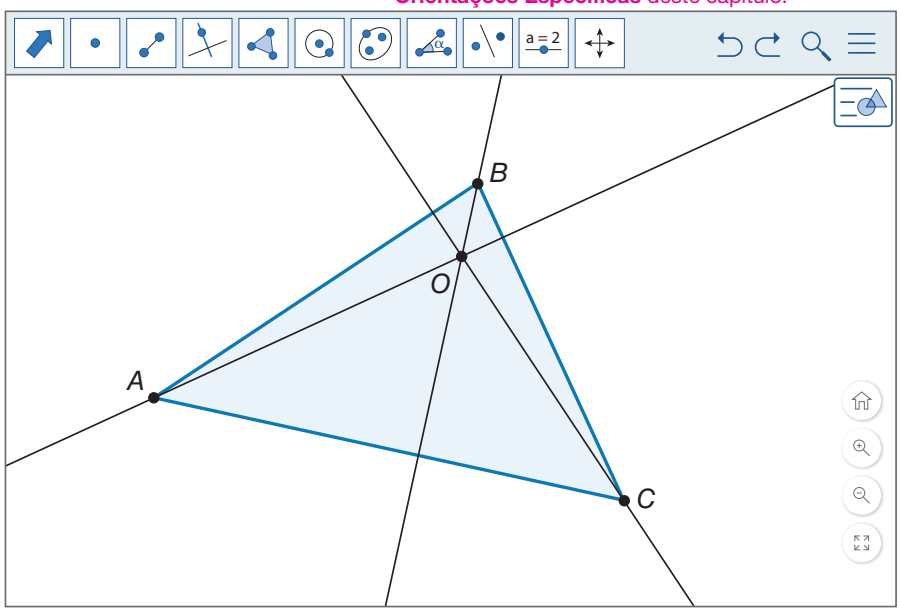
Passo 2: Trace um segmento de reta perpendicular ao lado $\overline{AB}$ com uma extremidade em *C*. Para isso, utilize a ferramenta do *software* que constrói uma reta perpendicular. Esse segmento de reta será a altura relativa ao vértice *C* do triângulo.

Passo 3: Trace um segmento de reta perpendicular ao lado $\overline{BC}$ com uma extremidade em *A*. Para isso, utilize a ferramenta do *software* que constrói uma reta perpendicular. Esse segmento de reta será a altura relativa ao vértice *A* do triângulo.

Passo 4: Trace um segmento de reta perpendicular ao lado $\overline{AC}$ com uma extremidade em *B*. Para isso, utilize a ferramenta do *software* que constrói uma reta perpendicular. Esse segmento de reta será a altura relativa ao vértice *B* do triângulo.

Passo 5: Marque o ponto de encontro das três alturas do triângulo. Esse ponto será o ortocentro do triângulo *ABC*.

Conectado: Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Exemplo de construção do ortocentro de um triângulo em um *software* de Geometria dinâmica.

Agora é com você!

1. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, desenhe três triângulos: um acutângulo, um obtusângulo e um retângulo. Depois, trace em cada um deles as respectivas alturas, as bissetrizes internas, as medianas e as mediatrizes.
2. Nas figuras construídas no item anterior, obtenha o ortocentro, o incentro, o baricentro e o circuncentro.

Reflexões

a. Qual é a medida de cada ângulo interno de um hexágono regular?

b. Qual é a medida de cada ângulo interno de um polígono regular de *n* vértices?

Reflexões:

a. As diagonais que partem de um mesmo vértice de um hexágono convexo o dividem em 4 triângulos; logo, a soma *S* dos ângulos internos de um hexágono convexo é dada por: $S = 180° \cdot 4 = 720°$.

Se o hexágono for regular, todos os seus ângulos internos terão a mesma medida α, calculada por: $\alpha = \frac{720°}{6} = 120°$.

b. As diagonais que partem de um mesmo vértice de um polígono convexo de n vértices o dividem em $n - 2$ triângulos; logo, a soma S dos ângulos internos de um polígono convexo de *n* vértices é dada por: $S = 180° \cdot (n - 2)$.
Se o polígono for regular, todos os seus ângulos internos terão a mesma medida α, calculada por: $S = \frac{180° \cdot (n - 2)}{n}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Propriedades dos triângulos

Triângulo isósceles

Aprendemos que **triângulo isósceles** é todo triângulo que tem dois lados congruentes entre si. O extremo comum a esses lados é chamado de **vértice** do triângulo isósceles, e o lado oposto a esse vértice é a **base** do triângulo isósceles.

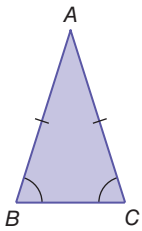
Propriedades

P1. Se um triângulo apresenta dois lados com medidas iguais, então os ângulos internos opostos a esses lados têm medidas iguais.

P2. Se um triângulo apresenta dois ângulos internos com medidas iguais, então os lados opostos a esses ângulos têm medidas iguais.

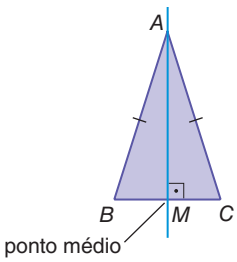
Observação

A medida de um segmento de reta $\overline{AB}$ é indicada por AB (sem o traço).



Pelas propriedades P1 e P2, temos: $AB = AC \Leftrightarrow \hat{B} \cong \hat{C}$

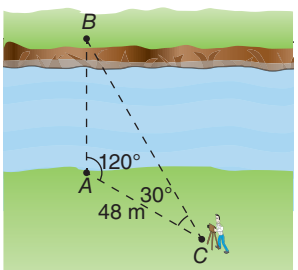
P3. A mediana, a bissetriz e a altura relativas à base do triângulo isósceles são segmentos coincidentes e estão contidas na mediatriz relativa a essa base.



Se $AB = AC$ e M é ponto médio de $\overline{BC}$, então o segmento $\overline{AM}$ é mediana, bissetriz e altura relativas ao vértice A, e a reta $\overleftrightarrow{AM}$ é mediatriz relativa à base $\overline{BC}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Uma ponte deve ligar, em linha reta, dois pontos A e B das margens opostas de um rio. Para calcular a distância AB, um engenheiro, localizado no ponto A, fixou um ponto C na margem em que estava, com $AC = 48$ m, e mediu os ângulos $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$, obtendo 120° e 30°, respectivamente. Relacionando essas medidas, ele calculou a distância entre os pontos A e B. Qual é essa distância?



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Resolução

Indicando por α a medida, em grau, do ângulo $A\hat{B}C$, temos:

$$\alpha + 120° + 30° = 180° \Rightarrow \alpha = 30°$$

Como os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ têm medidas iguais, deduzimos que o triângulo ABC é isósceles, com $AB = AC = 48$ m.

Concluímos, então, que a distância entre os pontos A e B é 48 m.

Triângulo equilátero

Enfatize que um triângulo equilátero também é isósceles. Assim, todas as propriedades válidas para o triângulo isósceles também valem para o equilátero.

Triângulo equilátero é todo triângulo que tem os três lados congruentes entre si. Assim, todo triângulo equilátero também é isósceles, pois tem dois lados congruentes entre si.

Propriedade

Cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60°.

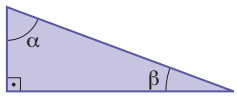
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Triângulo retângulo

Triângulo retângulo é todo triângulo que tem um ângulo interno reto. Os lados do triângulo que formam esse ângulo reto são chamados de **catetos**, e o terceiro lado é a **hipotenusa**.

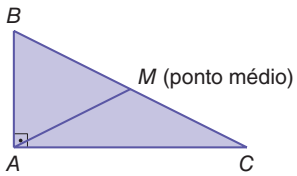
Propriedades

P1. Os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.



$\alpha + \beta = 90°$

P2. Em todo triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa mede metade da hipotenusa.

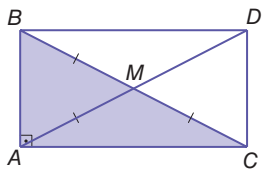


$AM = \frac{BC}{2}$

Observação

Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90°.

Para justificar a propriedade P2, consideremos o retângulo *ABDC* a seguir.



As diagonais de um retângulo são congruentes, e o ponto comum às duas é ponto médio de cada uma. Logo, *M* é ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$ do triângulo *ABC*.

Como $AM = \frac{AD}{2}$ e $AD = BC$, concluímos que $AM = \frac{BC}{2}$.

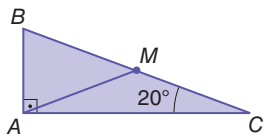
Portanto, a mediana $\overline{AM}$ divide o triângulo retângulo *ABC* em dois triângulos isósceles.

Observação

Retângulo é todo quadrilátero plano cujos ângulos internos são todos retos. Uma das propriedades do retângulo é que suas diagonais são congruentes.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

4. No triângulo retângulo *ABC*, em que *M* é o ponto médio da hipotenusa, determine as medidas dos ângulos internos do triângulo *AMB*.



Resolução

Como o triângulo *AMC* é isósceles de base $\overline{AC}$, então o ângulo $M\hat{A}C$ mede 20°.

$B\hat{M}A$ é externo do $\triangle AMC$; logo: $m(B\hat{M}A) = 20° + m(M\hat{A}C)$ (1)

Substituindo a medida do ângulo $M\hat{A}C$ em (1), obtemos: $m(B\hat{M}A) = 20° + 20° = 40°$

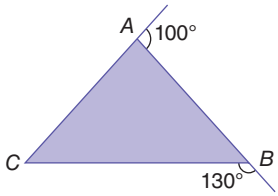
O $\triangle AMB$ é isósceles de base $\overline{AB}$ e $m(B\hat{M}A) = 40°$; então: $m(M\hat{A}B) = m(M\hat{B}A) = 70°$

Portanto, os ângulos internos do triângulo *AMB* medem 70°, 40° e 70°.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

5. Em um triângulo *ABC*, as medidas dos ângulos externos relativos aos vértices *A* e *B* são 100° e 130°, respectivamente, conforme mostra a figura.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



De acordo com esses dados, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações.

a. O triângulo *ABC* é equilátero. **5. a.** falsa

b. O triângulo *ABC* é obtusângulo. **5. b.** falsa

c. O triângulo *ABC* é isósceles. **5. c.** verdadeira

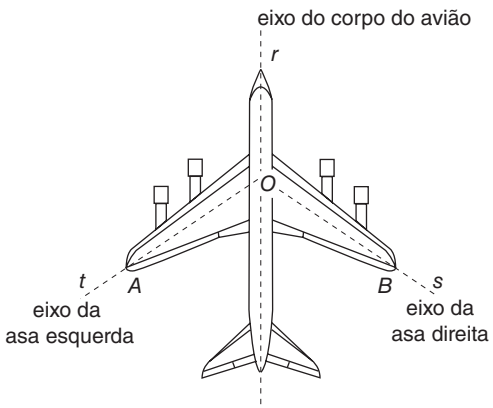
d. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ **5. d.** verdadeira

e. $\overline{BC} \cong \overline{AC}$ **5. e.** falsa

f. $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$ **5. f.** falsa

6. No projeto de um avião, um engenheiro desenhou três eixos, *r*, *s* e *t*, que denominou eixo do corpo do avião e eixos das asas, conforme a figura a seguir.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Cada um dos ângulos obtusos que *r* forma com *s* ou *t* mede 30° a mais que a medida do ângulo $A\hat{O}B$. Sabendo que as asas têm comprimentos iguais, a medida do ângulo $O\hat{B}A$ é: **6.** alternativa **a**

a. 40°
b. 50°
c. 56°
d. 58°
e. 60°

7. Há milhares de anos, um meteorito com mais de um milhão de toneladas se chocou com o solo no Arizona, Estados Unidos, formando a chamada Cratera de Barringer. Para medir o diâmetro dessa cratera, um geólogo fixou dois pontos, *A* e *B*, extremos de um diâmetro da cratera, e caminhou 1.260 m a partir do ponto *A*, perpendicularmente a $\overline{AB}$, até um ponto *C* tal que $m(A\hat{C}B) = 45°$.

Qual é a medida do diâmetro $\overline{AB}$? **7.** 1.260 m

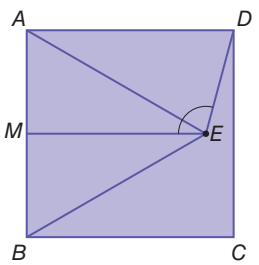


MAN HANG KWAN/ALAMY/FOTOARENA

Cratera formada por um meteoro no Arizona, Estados Unidos. Foto de 2023.

8. Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado, *ABE* é um triângulo equilátero e *M* é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. A medida do ângulo $M\hat{E}D$ é: **8.** alternativa **c**

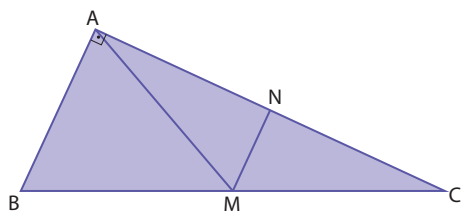
a. 95°
b. 100°
c. 105°
d. 110°
e. 115°



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

9. Em um triângulo isósceles *ABC*, a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é 100°. Calcule a medida de um ângulo agudo formado pela mediana $\overline{AM}$ e a bissetriz $\overline{BS}$ desse triângulo. **9.** 70°

10. No triângulo retângulo *ABC* a seguir, *M* é ponto médio da hipotenusa $\overline{BC}$, e *N* é ponto médio do cateto $\overline{AC}$.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Classifiquem em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

a. $AM = BM = CM$ **10. a.** verdadeira

b. $\overline{MN}$ é a altura do triângulo *AMC*, relativa ao lado $\overline{AC}$. **10. b.** verdadeira

c. $CM = CN$ **10. c.** falsa

d. Os ângulos $A\hat{M}N$ e $C\hat{M}N$ têm medidas iguais. **10. d.** verdadeira

e. Os ângulos $B\hat{A}M$ e $A\hat{B}M$ têm medidas diferentes. **10. e.** falsa

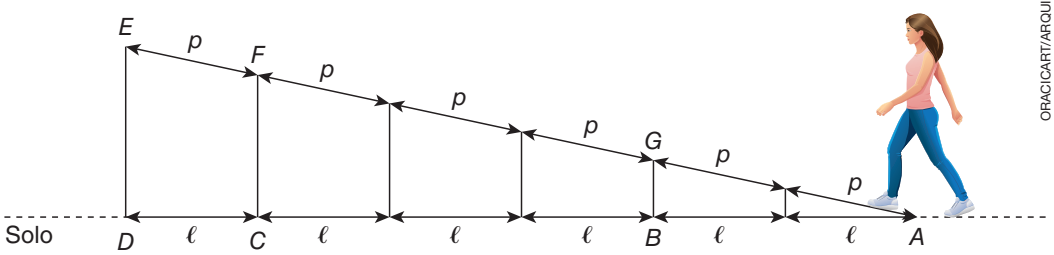
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 2 e 3.

5. Proporcionalidade entre segmentos de reta

A figura a seguir representa uma pessoa subindo, em linha reta, uma rampa $\overline{AE}$, de inclinação constante, com passos de mesmo comprimento p. Se no primeiro passo ela percorre a distância ℓ na horizontal, é intuitivo que a cada passo seguinte ela percorrerá a mesma distância ℓ na horizontal. Consequentemente, a razão de qualquer distância percorrida sobre a rampa para a correspondente distância percorrida na horizontal é constante; por exemplo:

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{GE}{BD} = \frac{p}{\ell}$$



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Explore a intuição dos estudantes durante a discussão da situação introdutória. Faça perguntas do tipo: "Se a pessoa der 5 passos, subindo a rampa, que distância ela terá percorrido na horizontal?"; "Se, ao subir a rampa, a pessoa percorrer o comprimento 7ℓ, na horizontal, quantos passos ela terá dado?". Comente que o teorema de Tales trata desse tipo de proporcionalidade.

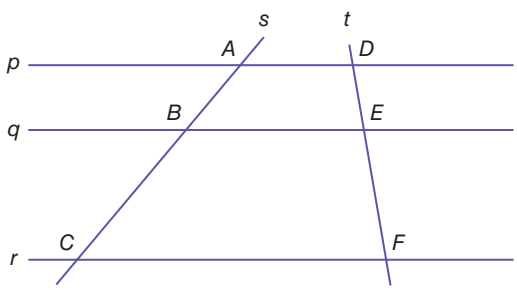
O estudo desse tipo de proporcionalidade é o objetivo do importante teorema que vamos estudar a seguir.

Teorema de Tales

Para que os estudantes não errem na montagem da proporção, estabeleça um critério: a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes na outra transversal. Assimilado esse critério, os próprios estudantes perceberão que há outras maneiras de montar a proporção, bastando aplicar as transformações permitidas na proporção.

Um dos teoremas associados ao nome de Tales de Mileto trata da proporção entre segmentos de reta, conforme enunciado a seguir.

Consideremos três retas paralelas, p, q, r, "cortadas" por duas transversais, s e t.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



FÁBIO CORTEZ REIS/ARQUIVO DA EDITORA

Ilustração representando Tales de Mileto (624 a.C.-548 a.C.).

Dizemos que dois segmentos das transversais s e t são **correspondentes** quando seus extremos pertencem às mesmas paralelas. Por exemplo, $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são correspondentes, pois seus extremos pertencem às mesmas paralelas p e q; de modo análogo, são correspondentes $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$, $\overline{CB}$ e $\overline{FE}$.

Tales demonstrou que a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes na outra transversal, isto é:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF};\ \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF};\ \frac{CB}{CA} = \frac{FE}{FD}$$

Esse teorema pode ser generalizado para mais de três paralelas, como segue.

> Se três ou mais retas paralelas concorrem com duas retas transversais, então a razão entre dois segmentos de uma mesma transversal é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra transversal.

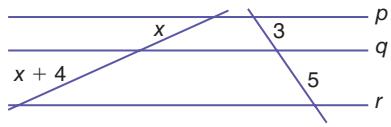
Observação

A razão entre dois segmentos de reta é igual ao quociente entre os números que expressam as medidas desses segmentos, considerados em uma mesma unidade, com divisor não nulo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5. As retas p, q e r representadas a seguir são paralelas. Determine a medida x.



Resolução

Pelo teorema de Tales, temos: $\frac{x}{x+4} = \frac{3}{5}$

Logo: $5x = 3x + 12 \Rightarrow 2x = 12$

$\therefore x = 6$

Reflexão

Neste exercício resolvido, é possível montar a proporção de outra maneira?

Reflexão: Aplicando as propriedades das proporções, podemos montar a proporção de várias maneiras, por exemplo: $\frac{x}{3} = \frac{x+4}{5}$

Observação

Quando as medidas de segmentos de reta estão indicadas apenas por números ou expressões algébricas, sem a unidade de medida, como nesse exercício, fica subentendido que todas essas medidas estão expressas em uma mesma unidade.

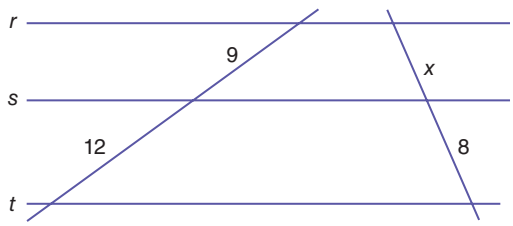
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

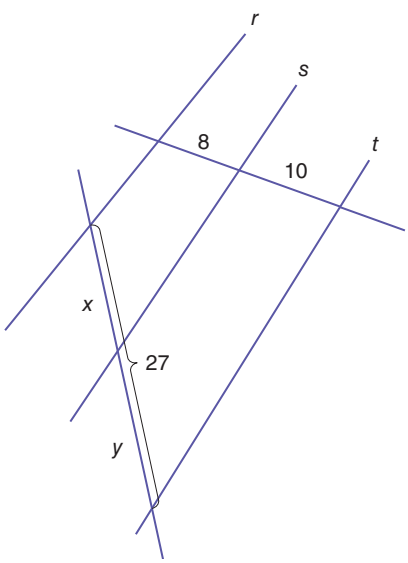
Faça os exercícios no caderno.

11. Faça o que é pedido em cada item.

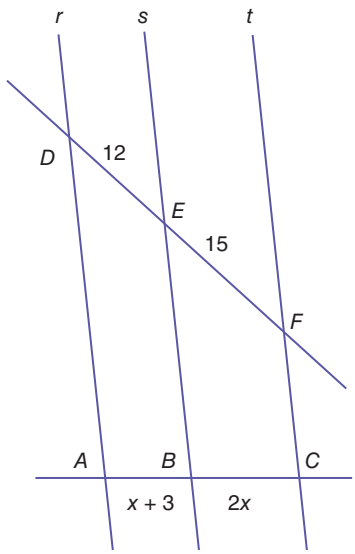
a. Sendo $r \parallel s \parallel t$, determine a medida x. **11. a.** 6



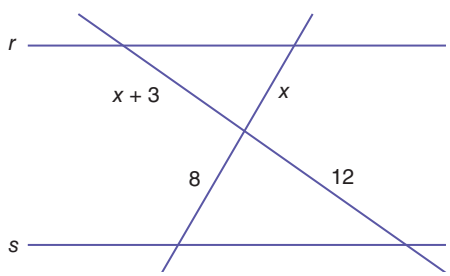
b. Sendo $r \parallel s \parallel t$, determine as medidas x e y.
11. b. $x = 12$; $y = 15$



c. Sendo $r \parallel s \parallel t$, determine a medida AC. **11. c.** 18



d. Sendo $r \parallel s$, determine a medida x. **11. d.** $x = 6$

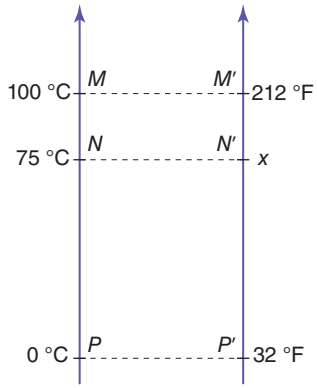


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

12. Uma escala termométrica é uma sequência de valores numéricos em que é associada uma temperatura para cada valor. A escala Celsius adota, sob pressão normal, ao nível do mar, o valor 0 para a temperatura de congelamento da água e o valor 100 para a temperatura na qual a água entra em ebulição. Na escala Fahrenheit, são atribuídos os valores 32 e 212 a essas temperaturas, respectivamente. No esquema as três retas representadas pelos tracejados são paralelas e concorrem com as duas transversais, que simbolizam as escalas Celsius e Fahrenheit.



Aplicando o teorema de Tales, determinem a temperatura em graus Fahrenheit (°F) correspondente a 75 graus Celsius (°C). **12.** 167 °F

13. Elaborem um problema sobre o teorema de Tales que envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

13. Resposta pessoal.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 4.

6. Semelhança de figuras planas

O efeito *zoom* no computador aumenta ou diminui uma imagem na tela, sem alterar o seu formato. Por exemplo, as ilustrações a seguir mostram o mesmo monitor exibindo a mesma imagem com tamanhos diferentes. Por terem o mesmo formato, as figuras mostradas na tela são chamadas de **figuras semelhantes**.



Tela com imagem em tamanho original.



Tela com imagem ampliada em aproximadamente 33%.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

É importante destacar que o conceito de semelhança entre figuras planas considera apenas o formato das figuras comparadas, e não o tamanho. Intuitivamente, duas figuras planas são semelhantes quando têm o mesmo formato, **não importando se têm ou não o mesmo tamanho.**

Peça exemplos de figuras planas semelhantes no cotidiano. Podem ser citados: um mapa e a região representada; ampliação ou redução de fotografias; as superfícies circulares de duas moedas de quaisquer valores etc.
Comente que o conceito de semelhança se estende, também, para figuras não planas. Por exemplo, a maquete de um prédio e o prédio construído são figuras não planas semelhantes.
Apresente o conceito intuitivo de figuras congruentes: duas figuras A e B são congruentes quando podem ser sobrepostas de modo que cada ponto de A coincida com um ponto de B, e cada ponto de B coincida com um ponto de A. Enfatize que a congruência de figuras é um caso particular de semelhança.

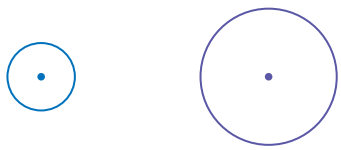
Exemplos

a. Dois quadrados quaisquer são figuras semelhantes.

Se os quadrados têm o mesmo tamanho, então são congruentes. A **congruência** é um caso particular da semelhança. Indica-se a semelhança de duas figuras A e B por $A \sim B$, e a congruência entre duas figuras C e D por $C \cong D$.



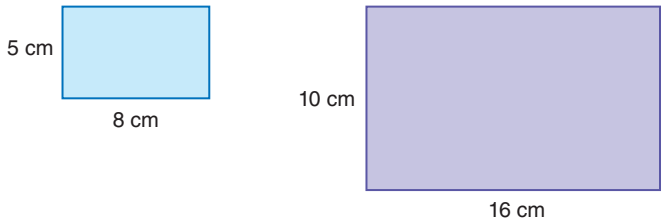
b. Duas circunferências quaisquer são figuras semelhantes.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c. Dois retângulos são semelhantes somente quando os lados de um deles são proporcionais aos do outro.



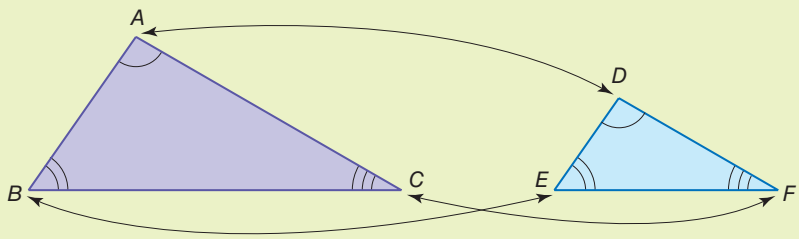
$$\frac{5}{10} = \frac{8}{16}$$

7. Semelhança de triângulos

O conceito intuitivo de semelhança é muito importante; porém, devemos formalizá-lo. Para isso, adotamos a definição a seguir.

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, existe uma correspondência biunívoca que associa os três vértices de um dos triângulos aos três vértices do outro, de modo que:

- ângulos com vértices correspondentes são congruentes;
- lados opostos a vértices correspondentes são proporcionais.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \text{ e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases}$$

Observação

Uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos não vazios A e B associa cada elemento de A a um único elemento de B e cada elemento de B a um único elemento de A.

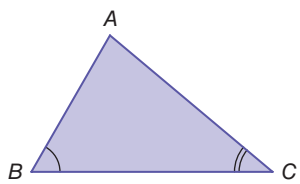
Pergunte aos estudantes: "A definição apresentada exige que sejam obedecidas quantas condições para se concluir que dois triângulos sejam semelhantes? (Seis condições: 3 congruências entre lados e 3 congruências entre ângulos.)". Comente que, na verdade, algumas dessas condições são consequências das outras. Por exemplo, se dois ângulos internos de um triângulo são, respectivamente, congruentes a dois ângulos internos de outro, isto já é suficiente para concluir que os triângulos são semelhantes, isto é, se essas duas condições são obedecidas, então as outras quatro também o são. Enfatize que qualquer conjunto formado por uma quantidade mínima de condições capazes de garantir a semelhança de dois triângulos é chamado de caso de semelhança. Por exemplo, o caso que acabamos de comentar é conhecido como caso A.A. (ângulo-ângulo).

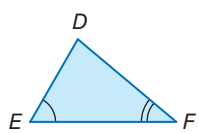
Casos de semelhança de triângulos

Pela definição de semelhança de triângulos, é necessário que sejam obedecidas seis condições: três congruências e três proporcionalidades. No entanto, escolhendo adequadamente algumas dessas seis condições, percebemos que, se elas forem obedecidas, as outras também o serão. Qualquer conjunto formado por uma quantidade mínima de condições capazes de garantir a semelhança de dois triângulos é chamado de **caso de semelhança**. A seguir, apresentamos os casos principais.

Caso A.A. (ângulo-ângulo)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos, respectivamente, congruentes.





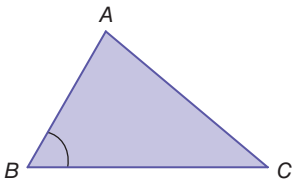
$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{E} \\ \text{e} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

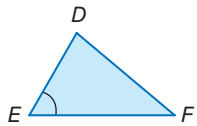
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Caso L.A.L. (lado-ângulo-lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois lados, respectivamente, proporcionais; e se os ângulos formados por esses lados forem congruentes.

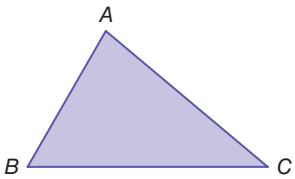


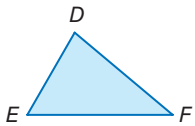


$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} \\ \text{e} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Caso L.L.L. (lado-lado-lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os três lados, respectivamente, proporcionais.





$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Observação

Ao indicar a semelhança de dois triângulos por $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, estamos afirmando que os vértices *A*, *B* e *C* são, respectivamente, os correspondentes dos vértices *D*, *E* e *F*.

Razão de semelhança

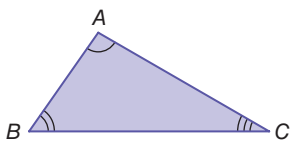
A razão entre dois lados correspondentes é chamada de **razão de semelhança**. A razão de semelhança também pode ser obtida pela razão entre dois comprimentos correspondentes quaisquer: alturas, medianas, bissetrizes etc., conforme a demonstração a seguir, em relação às alturas.

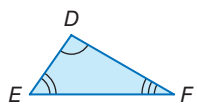
Observação

Lados opostos a ângulos correspondentes são chamados de **lados correspondentes**.

Demonstração

Consideremos que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

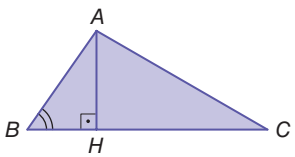


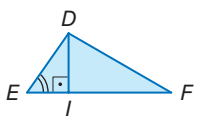


A razão de semelhança do triângulo *ABC* para *DEF* é o número *k*, tal que:

$$k = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \quad (1)$$

Traçando as alturas correspondentes $\overline{AH}$ e $\overline{DI}$, concluímos, pelo caso A.A., que os triângulos *ABH* e *DEI* são semelhantes.





Logo, temos:

$$\frac{AH}{DI} = \frac{AB}{DE} \quad (2)$$

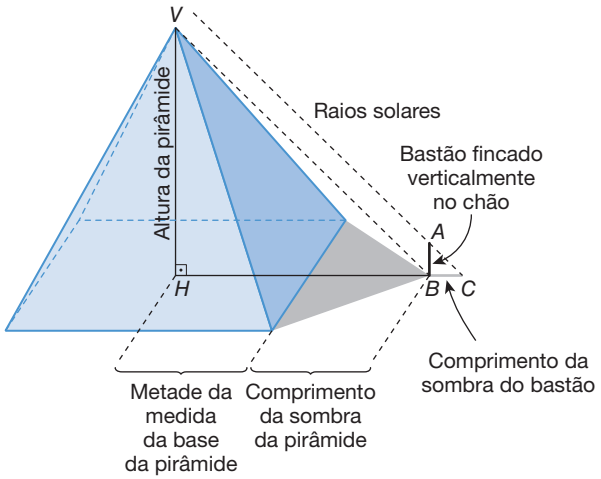
Em (1), observamos que $\frac{AB}{DE} = k$; então, de (2), podemos concluir que $\frac{AH}{DI} = k$, ou seja, a razão entre as alturas correspondentes $\overline{AH}$ e $\overline{DI}$ é a razão de semelhança entre os triângulos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

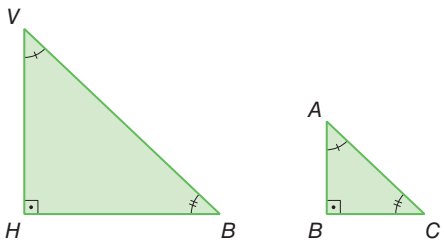
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

6. Considerando as informações do esquema sem escala, a seguir, determine a medida *VH* da altura da pirâmide em função da medida *AB* da altura do bastão, da medida *BC* do comprimento da sombra do bastão e da distância *HB* do centro da pirâmide até o bastão.



Resolução

Utilizando os pontos *V*, *H*, *A*, *B* e *C*, podemos formar dois triângulos representados sem escala a seguir.



Observe:

Como os dois triângulos têm dois ângulos, respectivamente, congruentes ($\hat{V} \cong \hat{A}$ e $\hat{B} \cong \hat{C}$), esses triângulos são semelhantes pelo caso A.A.

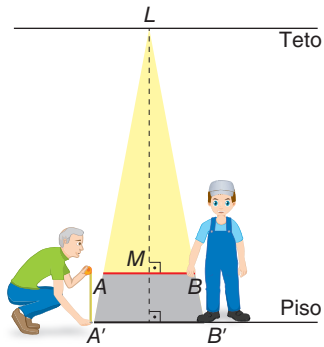
Da semelhança entre os triângulos *VHB* e *ABC*, temos:

$$\frac{VH}{AB} = \frac{HB}{BC}$$

Assim, a medida da altura da pirâmide é dada por:

$$VH = \frac{AB \cdot HB}{BC}$$

7. Para fazer o orçamento da pintura de um salão, um pintor precisava medir a altura do cômodo com piso e teto planos e horizontais. Como não havia no local uma escada suficientemente alta para realizar essa medição, ele optou por fazer um cálculo indireto. Para isso, pediu a seu ajudante que segurasse uma vareta reta $\overline{AB}$, paralelamente ao piso, tal que o ponto médio *M* da vareta e o ponto *L* do teto, onde estava instalada uma lâmpada, estivessem na mesma reta vertical. Em seguida, mediu o comprimento da vareta, obtendo 1,5 m; a distância da vareta ao piso, obtendo 0,8 m; e a sombra $\overline{A'B'}$ projetada pela vareta no piso, quando iluminada pela luz da lâmpada, obtendo 1,8 m. Assim, o pintor calculou a altura do salão. Qual é essa altura, em metro?



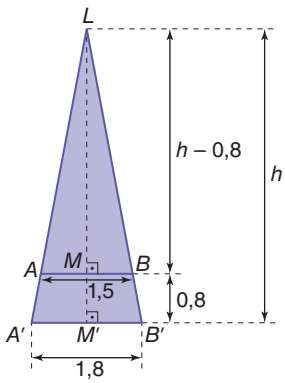
(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Resolução

Indicando por *h* a altura do salão, em metro, esquematizamos que:

$\triangle LAB \sim \triangle LA'B'$

Como a razão de semelhança é a razão entre dois comprimentos correspondentes quaisquer desses triângulos, temos:



$$\frac{LM'}{LM} = \frac{A'B'}{AB} \Rightarrow \frac{h}{h-0,8} = \frac{1,8}{1,5}$$

$$\therefore 1,8h - 1,44 = 1,5h \Rightarrow 0,3h = 1,44$$

$$\therefore h = 4,8$$

Concluímos, então, que a altura do salão é 4,8 m.

Assista ao vídeo proposto a seguir e observe como o arquiteto grego Eupalinos planejou a construção de um aqueduto por dentro de uma montanha, utilizando principalmente Geometria básica. Depois, converse com os colegas sobre o procedimento utilizado por Eupalinos na construção do aqueduto.

Entrando pelo túnel

Antonio Miguel e Samuel Rocha de Oliveira. Vídeo, 10 min 57 s. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1096. Acesso em: 13 ago. 2024.

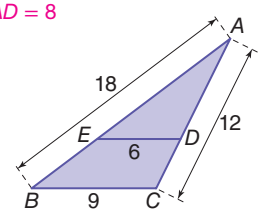
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

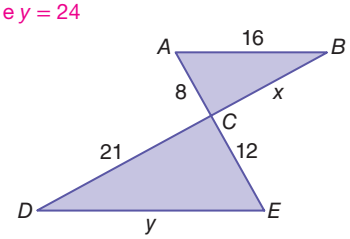
14. No triângulo ABC, o segmento $\overline{ED}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Determine as medidas $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$.

14. $AE = 12$ e $AD = 8$



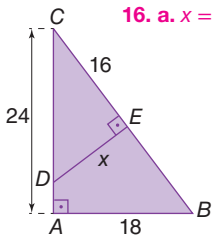
15. Na figura, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$. Determine as medidas x e y.

15. $x = 14$ e $y = 24$

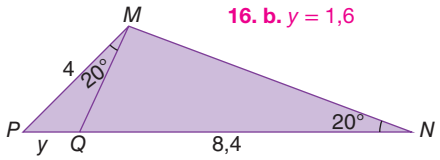


16. Nas figuras a seguir, determine as medidas x e y.

a. **16. a.** $x = 12$

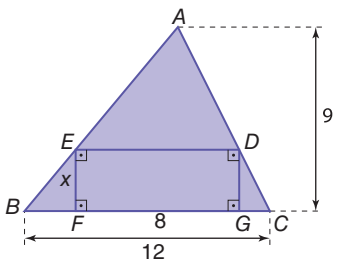


b. **16. b.** $y = 1,6$



17. No triângulo ABC, o lado $\overline{BC}$ mede 12 cm e a altura relativa a esse lado mede 9 cm. No retângulo $DEFG$, a medida do lado $\overline{FG}$ é 8 cm. Calcule a medida x do lado $\overline{EF}$ desse retângulo.

17. $x = 3$ cm



18. (Enem) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente, ao caminhar sobre a rampa, percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.

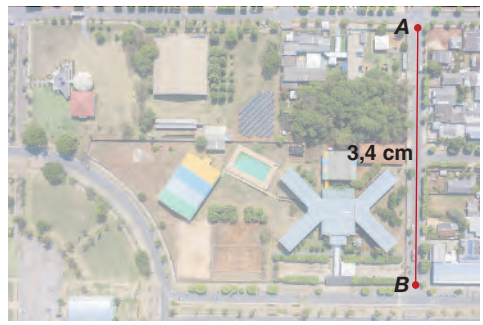
A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

a. 1,16 metro.
b. 3,0 metros.
c. 5,4 metros.
d. 5,6 metros.
e. 7,04 metros.

18. alternativa **d**

19. Um mapa como o indicado a seguir é uma representação plana de uma região. A razão de semelhança entre o mapa e a região representada, nessa ordem, é chamada de **escala cartográfica**. Supondo que o mapa a seguir tenha sido construído na escala 1 : 5.500, qual é a distância real, em metro, entre os pontos correspondentes a A e B na região representada?

19. 187 m



MARIO FRIEDLANDER/PULSAR IMAGENS

20. (Enem) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um aluno precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola, que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250.

Que medidas de comprimento e largura, em cm, o aluno utilizará na construção da maquete? **20.** alternativa **c**

a. 4,8 e 11,2
b. 7,0 e 3,0
c. 11,2 e 4,8
d. 28,0 e 12,0
e. 30,0 e 70,0

21. Marcelo mudou-se para um novo apartamento, onde pretende instalar uma televisão de modo que, ao posicionar sua cadeira de rodas, ele tenha o ângulo de visão da tela com a mesma medida do ângulo correspondente no antigo apartamento. Após algumas medições, Marcelo decidiu trocar de televisão, pois a distância em que o aparelho será instalado na parede, em relação ao ponto P' do qual assistirá à televisão, é 2,5 m, enquanto a distância correspondente no antigo apartamento era de 2 m. Em ambas as situações, a tela das televisões deve ser considerada vertical com os lados de maior medida (comprimento) na posição horizontal, e o segmento de reta com extremos no ponto de observação, P ou P', e no centro da tela, C ou C', é horizontal e perpendicular à tela. A figura 1 mostra a configuração da sala em que Marcelo assistia à televisão no antigo apartamento, e a figura 2 mostra a disposição análoga no novo apartamento. Os pontos médios dos lados menores da tela são A e B, na figura 1, e A' e B', na figura 2. Como o comprimento da tela do aparelho que será substituído é de 92 cm, qual deve ser o "tamanho" da nova televisão, entre as disponíveis do quadro a seguir, para que a medida α do ângulo de visão desse comprimento, a partir de P', seja a mais próxima possível da medida do ângulo correspondente no antigo apartamento? **21.** 46"

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Medidas de televisões

Tamanho da televisão (em polegada)	Medidas das dimensões (em centímetro)
32	80 × 53
37	92 × 60
40	99 × 64
42	103 × 67
46	113 × 71
52	126 × 83
55	131 × 84
58	144 × 84
60	146 × 92
65	160 × 99

Nota: O "tamanho" da televisão corresponde à medida da diagonal, em polegada.

Figura 1

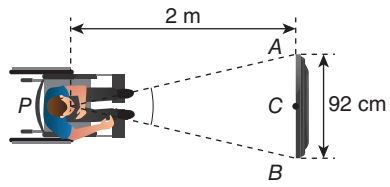
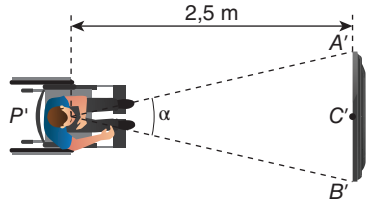


Figura 2



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

22. Elabore um problema sobre semelhança de triângulos que envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **22.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 5 a 9.

Trabalho e juventudes: Resposta pessoal. Pode-se aprofundar o assunto, propondo aos estudantes que citem algumas habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar arquiteto ou biomédico, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

TRABALHO E JUVENTUDES

Arquiteto e biomédico

O conceito de semelhança de figuras é usado em diferentes profissões, seja na elaboração de plantas baixas e maquetes por arquitetos, seja para estabelecer proporções entre os microrganismos e suas representações por biomédicos.

Os arquitetos são responsáveis por planejar e projetar as ocupações do espaço, considerando diferentes elementos, como iluminação, segurança e funcionalidade. Ao projetar uma casa, por exemplo, o arquiteto irá, entre outras demandas, representar a planta baixa da casa seguindo as proporções reais que terá a futura construção.

Já os biomédicos são profissionais da área da saúde que se dedicam à pesquisa e diagnóstico de doenças. Usando a microscopia, por exemplo, podem determinar as medidas de microrganismos tomando como base o aumento utilizado na visualização pelo microscópio.

Quer saber mais sobre essas profissões? Faça uma pesquisa na internet e depois compartilhe pelas redes sociais um resumo de seus achados.



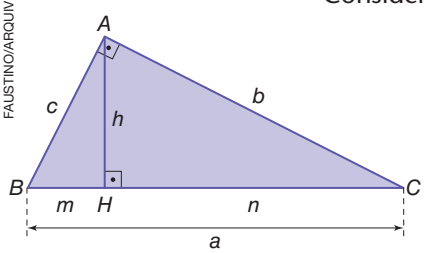
FG TRADE/E+/GETTY IMAGES

De acordo com o Conselho de Arquitetura e Urbanismo do Brasil, há cerca de 202 mil arquitetos e urbanistas no país.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8. Relações métricas no triângulo retângulo

Considerando o triângulo retângulo *ABC* a seguir, temos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

- *b* e *c* são as medidas dos catetos;
- *a* é a medida da hipotenusa;
- *h* é a medida da altura relativa à hipotenusa;
- *m* é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa;
- *n* é a medida da projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Reflexão: O conceito matemático é o teorema de Pitágoras. Ao compartilhar os seus saberes, trazendo conhecimentos prévios, experiências vividas no cotidiano e de como lidar e aplicar no dia a dia, os pedreiros estão utilizando a Etnomatemática. Para obter mais informações sobre o método prático adotado pelos pedreiros, indicamos a seguinte leitura: SCHWANTES, Vilson *et al*. Uma reflexão sobre a etnomatemática do pedreiro e a matemática escolar. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento,** ano 4, ed. 7, v. 14, p. 87-106, jul. 2019. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/etnomatematica-matematica-escolar. Acesso em: 12 set. 2024.

Vamos demonstrar as seguintes relações métricas:

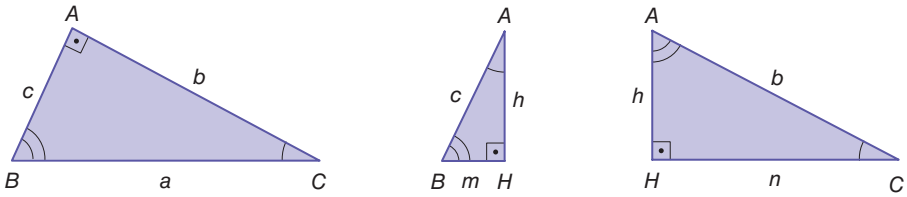
$ah = bc$ $\quad ch = bm$

$c^2 = am$ $\quad bh = cn$ $\quad a^2 = b^2 + c^2$ (teorema de Pitágoras)

$b^2 = an$ $\quad h^2 = mn$

Demonstrações

No triângulo retângulo *ABC* da página anterior, podem ser observados três triângulos semelhantes entre si.



Assim, temos:

- $\triangle ABC \sim \triangle HBA \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{m}$

  Logo, $ah = bc$, $c^2 = am$ e $ch = bm$.

- $\triangle ABC \sim \triangle HAC \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} = \frac{c}{h}$

  Logo, $b^2 = an$, $ah = bc$ e $bh = cn$.

- $\triangle HBA \sim \triangle HAC \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{n} = \frac{m}{h}$

  Logo, $bh = cn$, $ch = bm$ e $h^2 = mn$.

- Para demonstrar o teorema de Pitágoras, basta adicionar, membro a membro, as relações $b^2 = an$ e $c^2 = am$, obtendo:

$$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n + m)$$

Como $n + m = a$, concluímos que $b^2 + c^2 = a^2$.

Mentes brilhantes

OBJETO DIGITAL Vídeo: Pitágoras

Uma das demonstrações do teorema de Pitágoras

Não há outra proposição matemática que tenha tantas demonstrações quanto o teorema de Pitágoras. Em 1940, o professor estadunidense Elisha Scott Loomis publicou, em seu livro *The Pythagorean Proposition*, 367 demonstrações diferentes desse teorema. Uma delas é apresentada a seguir.

Consideremos quatro triângulos retângulos congruentes entre si, cuja hipotenusa tem medida a, e os catetos têm medidas b e c:



Dispondo esses triângulos conforme a figura 1, observamos que as hipotenusas são lados de um quadrado inscrito no quadrado cujos lados são formados por catetos.

Observando que a área do quadrado de lado medindo $(b + c)$ é igual à soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado de lado medindo a, podemos escrever:

$$(b + c)^2 = 4 \cdot \frac{bc}{2} + a^2$$

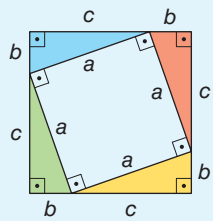


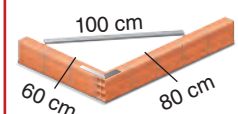
figura 1

Assim, concluímos que:

$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Reflexão

Para alinhar corretamente duas paredes ou uma parede e o piso, formando um ângulo reto, os operários da construção civil aplicam um conceito matemático de maneira intuitiva: eles sabem que se for possível representar um triângulo com lados medindo 60 cm, 80 cm e 100 cm, como indicado a seguir, as paredes formam um ângulo de 90° entre si.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Que conceito matemático está sendo aplicado no método prático adotado pelos pedreiros para tirar o esquadro?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8. Em um retângulo $ABCD$, tem-se $AB = 8$ cm e $BC = 6$ cm. Calcule:

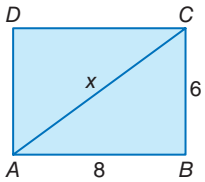
a. a medida da diagonal $\overline{AC}$;

b. a distância do ponto B à diagonal $\overline{AC}$;

c. a medida da projeção ortogonal do lado $\overline{AB}$ sobre a diagonal $\overline{AC}$.

Resolução

a. Traçando a diagonal $\overline{AC}$ no retângulo $ABCD$, obtemos o triângulo retângulo ABC.



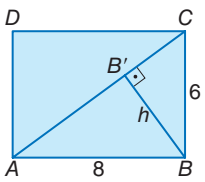
Indicando por x a medida, em cm, dessa diagonal, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 100$$

$$\therefore\ x = +10 \text{ ou } x = -10$$

Excluímos o valor -10, porque x é necessariamente positivo; logo, a medida da diagonal $\overline{AC}$ é 10 cm.

b. A distância de B à diagonal $\overline{AC}$ é a medida h da altura $\overline{BB'}$ relativa à hipotenusa do triângulo retângulo ABC.



Uma das relações métricas no triângulo retângulo afirma que o produto das medidas da hipotenusa e de sua altura relativa é igual ao produto das medidas dos catetos. Assim, no triângulo ABC, temos:

$$10h = 8 \cdot 6\ \therefore\ h = 4{,}8$$

Concluímos, então, que B dista 4,8 cm da diagonal $\overline{AC}$.

c. Observando a figura apresentada no item **b**, vemos que a projeção ortogonal do lado $\overline{AB}$ sobre a diagonal $\overline{AC}$ é o segmento $\overline{AB'}$.

Uma relação métrica no triângulo retângulo garante que o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da projeção desse cateto.

Indicando por y a medida da projeção $\overline{AB'}$ do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{AC}$, temos:

$$8^2 = 10y\ \therefore\ y = 6{,}4$$

Concluímos, então, que AB' é igual a 6,4 cm.

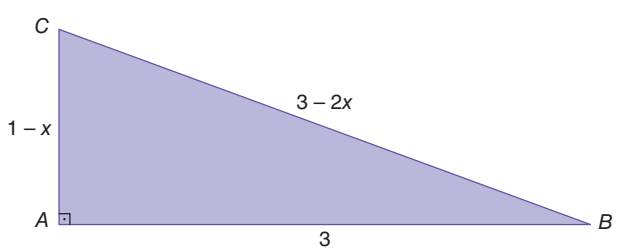
ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Faça o exercício no caderno.

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Indiquem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

No triângulo retângulo ABC a seguir, as expressões indicadas sobre os lados representam medidas na mesma unidade de comprimento.
Determine o número real x.



Resolução

$(3 - 2x)^2 = (1 - x)^2 + 3^2$

$9 - 12x + 4x^2 = 1 - 2x + x^2 + 9$

$4x^2 - 12x + 9 = x^2 - 2x + 10$

$3x^2 - 10x - 1 = 0$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 112$

$x = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{112}}{2 \cdot 3}$

$x = \dfrac{10 \pm 4\sqrt{7}}{6}$ $\quad x' = \dfrac{10 + 4\sqrt{7}}{6}$ $\quad x'' = \dfrac{10 - 4\sqrt{7}}{6}$

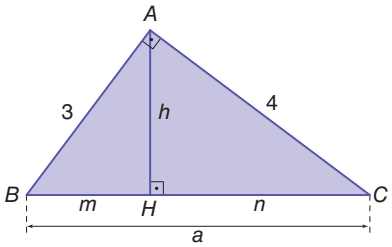
Logo: $x = \dfrac{5 + 2\sqrt{7}}{3}$ ou $x = \dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$

Análise da resolução: Embora os cálculos estejam corretos, a conclusão não está, pois o estudante não observou a condição de que as medidas dos lados de um triângulo devem ser representadas por números reais positivos. Testando cada valor de x encontrado, o único que satisfaz essa condição é: $\dfrac{5 - 2\sqrt{7}}{3}$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

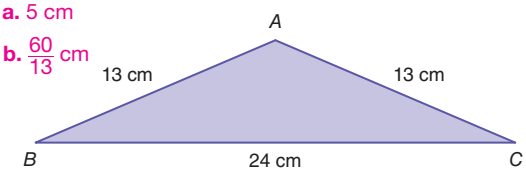
23. Determine as medidas a, h, m e n no triângulo retângulo ABC. **23.** $a = 5$; $h = 2{,}4$; $m = 1{,}8$ e $n = 3{,}2$



24. Em relação ao triângulo isósceles ABC, faça o que se pede.

24. a. 5 cm

24. b. $\frac{60}{13}$ cm

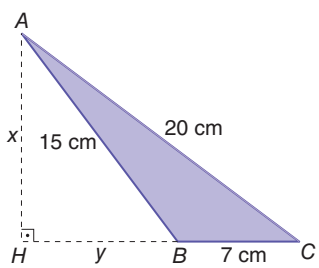


a. Calcule a medida da altura $\overline{AM}$ relativa à base $\overline{BC}$.

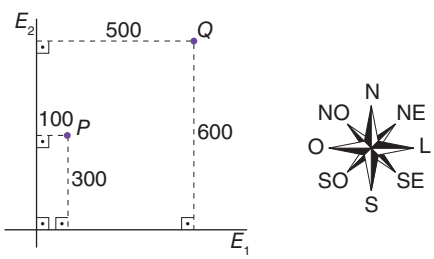
b. Calcule a distância entre o ponto M e o lado $\overline{AC}$.

c. Calcule a medida da projeção ortogonal da altura $\overline{AM}$ sobre o lado $\overline{AC}$. **24. c.** $\frac{25}{13}$ cm

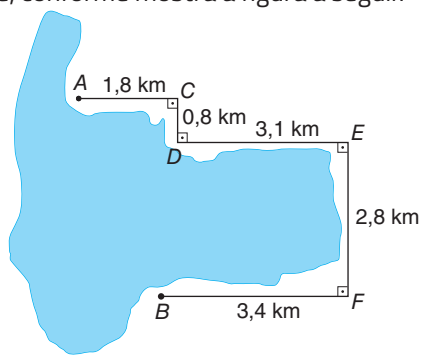
25. No triângulo ABC, os segmentos $\overline{AH}$ e $\overline{BH}$ são, respectivamente, a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e a projeção ortogonal do lado $\overline{AB}$ sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$. Determine as medidas x e y, em centímetro. **25.** $x = 12$ cm e $y = 9$ cm



26. Em uma planície, duas estradas retas E_1 e E_2 se cruzam perpendicularmente, conforme mostra a figura. Ao norte de E_1 e leste de E_2 encontram-se dois hotéis P e Q. O hotel P dista 300 m da estrada E_1 e 100 m de E_2, e Q dista 600 m de E_1 e 500 m de E_2. Calcule a distância entre esses hotéis. **26.** 500 m



27. O governo do estado planeja construir uma ponte interligando, em linha reta, duas cidades, A e B, localizadas à margem de uma grande lagoa. Para calcular o comprimento da ponte, os engenheiros efetuaram medições, contornando uma parte da lagoa com segmentos de reta horizontais, unindo os pontos que serão extremos da ponte, conforme mostra a figura a seguir.

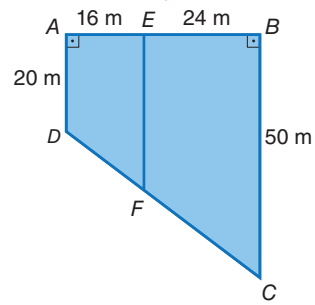


O comprimento da ponte será de: **27.** alternativa **a**

a. 3,9 km **c.** 4,3 km **e.** 10 km

b. 4,2 km **d.** 5,1 km

28. Um terreno com o formato de um trapézio retângulo $ABCD$ foi dividido em dois lotes por um segmento de reta $\overline{EF}$ paralelo às bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, conforme as medidas indicadas na figura a seguir. Calculem o perímetro de cada lote, em metro. **28.** perímetro de $AEFD$: 88 m e perímetro de $EBCF$: 136 m



29. Em uma tábua retangular $ABCD$, o comprimento AB tem 10 cm a mais que a largura BC. Um marceneiro observou que é possível serrar essa tábua sobre as linhas retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BF}$, em que E e F são pontos dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$, respectivamente, tal que o quadrilátero $DEBF$ seja um losango de perímetro 68 cm. Qual é o perímetro da tábua $ABCD$? (Considere que não haja perda de madeira durante o corte.) **29.** 80 cm

30. Elabore um problema sobre o teorema de Pitágoras que envolva uma situação do cotidiano e os números 30, 40 e 50. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, discutam como foi pensado o problema e quais foram as estratégias utilizadas em suas resoluções. **30.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 10 a 12.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

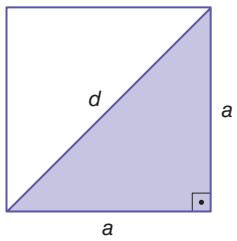
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Proponha como exercício complementar o cálculo da medida da diagonal de um quadrado em função da medida *a* do lado. Após a resolução, faça perguntas do tipo: "Qual é a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede $10\sqrt{2}$ dm? (10 dm)"; "Qual é a medida do lado de um quadrado cuja diagonal mede $\sqrt{18}$ m? (3 m)". Em seguida, proponha como outro exercício complementar o cálculo da medida da altura de um triângulo equilátero em função da medida *a* do lado. Após a resolução, faça perguntas do tipo: "Qual é a medida da altura de um triângulo equilátero com 6 cm de lado? ($3\sqrt{3}$ cm)"; "Qual é a medida do lado de um triângulo equilátero cuja altura mede $4\sqrt{3}$ dm? (8 dm)"; "Qual é a medida do lado de um triângulo equilátero cuja altura mede $\sqrt{27}$ m? (6 m)".

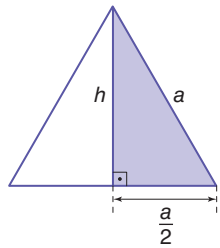
Cálculo da medida da diagonal de um quadrado e da medida da altura de um triângulo equilátero

A medida *d* da diagonal de um quadrado cujo lado mede *a* pode ser calculada pelo teorema de Pitágoras. Acompanhe:



$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2$$
$$\therefore d = \sqrt{2a^2} \Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{2}}$$

De modo análogo, a medida *h* da altura de um triângulo equilátero cujo lado mede *a* pode ser calculada pelo teorema de Pitágoras. Acompanhe:



$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4}$$
$$\therefore h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

Exemplos

a. A diagonal de um quadrado de lado medindo 5 cm mede $5\sqrt{2}$ cm.

b. A diagonal de um quadrado de lado medindo $\sqrt{2}$ m mede $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ m, ou seja, 2 m.

c. A altura de um triângulo equilátero de lado medindo 7 cm mede $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ cm.

d. A altura de um triângulo equilátero de lado medindo $\sqrt{3}$ cm mede $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm, ou seja, $\frac{3}{2}$ cm.

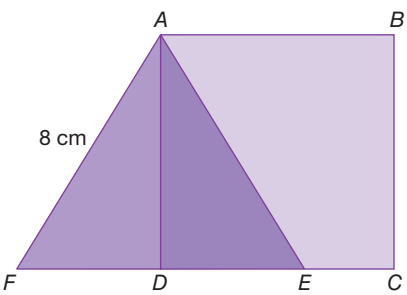
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

31. Na figura, *ABCD* é um quadrado, e *AEF* é um triângulo equilátero com 8 cm de lado.

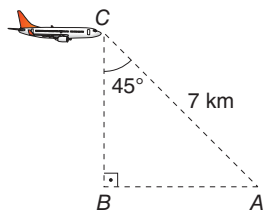


Calcule:

a. a medida do lado do quadrado; **31. a.** $4\sqrt{3}$ cm

b. a medida da diagonal do quadrado. **31. b.** $4\sqrt{6}$ cm

32. De um ponto *C*, o piloto de um avião avista um ponto *A* na cabeceira da pista de um aeroporto, a 7 km de distância, sob um ângulo de 45° com a vertical $\overline{CB}$, conforme mostra a figura a seguir. A que altura, em relação à pista do aeroporto, encontra-se o avião?



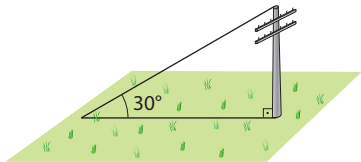
(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

32. $3{,}5\sqrt{2}$ km ou, aproximadamente, 4,9 km

33. Um cabo de aço de 10 m de comprimento foi esticado do topo de um poste vertical a um ponto de um terreno plano e horizontal, de modo que o ângulo entre o cabo e o solo medisse 30°. **33.** 5 m

Calculem a medida da altura do poste.

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)



Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 3.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

A teoria da pavimentação

Certamente, você já observou um piso plano recoberto por ladrilhos.



ESTALON INDUSTRIES/SHUTTERSTOCK



PROMMANONT/SHUTTERSTOCK

Pavimentação com ladrilhos hexagonais (à esquerda) e com ladrilhos quadrados e octogonais (à direita).

Você sabia que existe uma teoria matemática sobre o recobrimento de um plano com qualquer tipo de figura plana? Por exemplo, polígonos? Esse estudo é chamado de teoria da pavimentação.

Em relação ao recobrimento de um plano com polígonos, a definição matemática desse conceito é a seguinte:

Um conjunto *A* de polígonos é uma pavimentação (ou um recobrimento ou um ladrilhamento) de um plano α se, e somente se:

- a reunião de todos os polígonos do conjunto *A* é o plano α;
- a intersecção de dois polígonos distintos quaisquer do conjunto *A* é um segmento de reta ou é um ponto ou é vazia.

Em outras palavras, ao cobrir um plano com polígonos que não se sobrepõem e de modo que não fique região descoberta, temos uma pavimentação.

Os primeiros trabalhos sobre esse assunto foram realizados pelo matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630), que os publicou em 1619 no livro *Harmonices Mundi*. Um dos teoremas de Kepler afirma que:

Utilizando apenas polígonos regulares, existem exatamente 11 maneiras de pavimentar um plano, obedecendo às condições:

(1) Se 2 polígonos regulares têm intersecção não vazia, então essa intersecção é um lado ou um vértice comum;

(2) A distribuição dos polígonos regulares ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

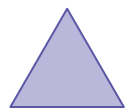
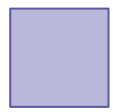
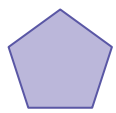
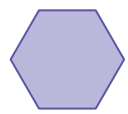
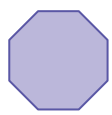
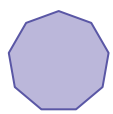
As figuras apresentadas anteriormente mostram duas maneiras de ladrilhar o plano com polígonos regulares, de acordo com essas condições.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Analise o quadro a seguir.

Relação entre alguns polígonos e as medidas de seus ângulos internos

Nome	Figura	Medida do ângulo interno
Triângulo		60°
Quadrado		90°
Pentágono		108°
Hexágono		120°
Octógono		135°
Eneágono		140°

Matemática sem fronteiras: 1. Octógono.

Obedecendo às condições do teorema de Kepler, um arquiteto deseja recobrir uma superfície plana com dois tipos diferentes de ladrilhos do quadro, sendo um deles quadrado. Qual deve ser o outro tipo de ladrilho escolhido?

2. Faça uma pesquisa sobre tesselação na arte e no artesanato. Depois, realize uma produção artística por meio da técnica de tesselação. Você pode, por exemplo, se inspirar nos trabalhos do artista gráfico holandês M. C. Escher (1898-1972) ou verificar se há alguma exposição cultural perto de onde você mora a fim de visitá-la.

2. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

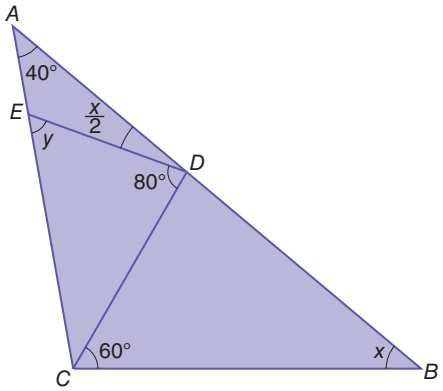
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

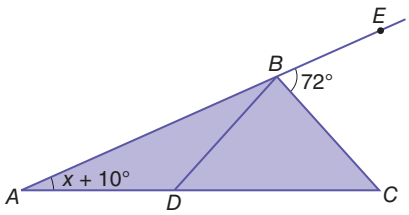
Faça os exercícios no caderno.

1. No triângulo *ABC*, determine as medidas *x* e *y*, em grau.

1. $x = 40°$ e $y = 60°$



2. Na figura, tem-se que $\overline{AD} \cong \overline{DB} \cong \overline{BC}$. Calcule a medida *x*, em grau. **2.** $x = 14°$



3. Em um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 50°.

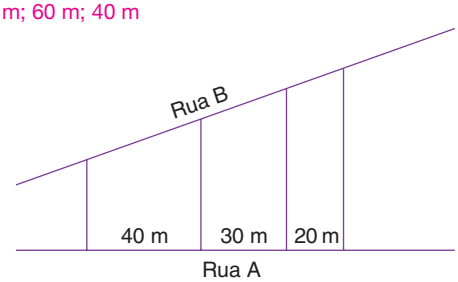
a. Calcule a medida de um ângulo agudo formado pela altura relativa à hipotenusa e pela bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$. **3. a.** 70°

b. Calcule a medida de um ângulo obtuso formado pela reta suporte da altura relativa à hipotenusa e pela mediatriz relativa ao lado $\overline{AC}$. (*Lembrete*: A reta suporte da altura é a reta que contém a altura.) **3. b.** 140°

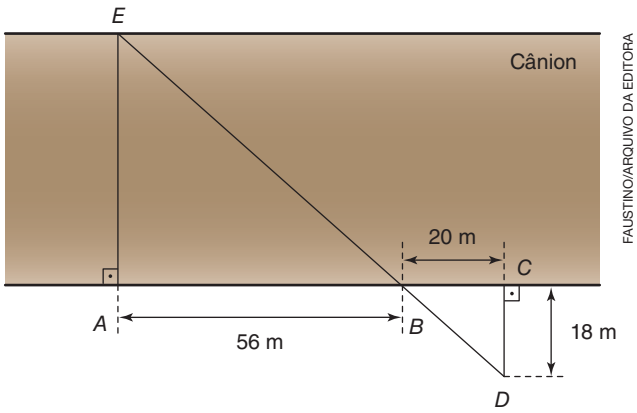
c. Calcule a medida de um ângulo agudo formado pela mediana e pela altura, ambas relativas à hipotenusa. **3. c.** 10°

4. Três terrenos têm frente para a rua A e para a rua B, como mostra o esquema a seguir. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Calcule a medida da frente de cada terreno para a rua B, sabendo que a frente total dos três juntos para essa rua é 180 m.

4. 80 m; 60 m; 40 m



5. Para calcular a largura de um cânion, em um trecho de margens paralelas, um turista fixou três pontos, *A*, *B* e *C*, sobre a linha reta da margem em que se encontrava, com $AB = 56$ m e $BC = 20$ m, e um ponto *D*, distante 18 m da margem, com $\overline{DC} \perp \overline{CB}$. Em seguida, estabeleceu como referência um ponto *E* da margem oposta, com $\overline{AE} \perp \overline{AB}$, conforme o esquema a seguir. Finalmente, calculou a largura *AE* do cânion naquele trecho. Qual é essa largura? **5.** 50,4 m



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

6. Em uma noite de lua cheia, Paulo e Renata realizaram a seguinte experiência: Paulo fechou um dos olhos, e Renata segurou uma moeda de 2,5 cm de diâmetro entre a Lua e o olho aberto de Paulo, de modo que o jovem visse a moeda coincidindo com a imagem do disco lunar. Depois, obtiveram a distância entre a moeda e o olho aberto de Paulo, 290 cm. Sabendo que a distância da Terra à Lua é aproximadamente $4 \cdot 10^5$ km, os jovens estimaram a medida do diâmetro da Lua. Com esses dados, que medida, em quilômetro, se obtém para o diâmetro da Lua? **6.** Aproximadamente 3.450 km.



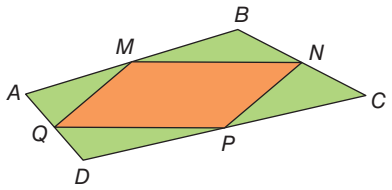
BRUNO MOTA/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

7. Unindo os pontos médios dos lados do quadrilátero *ABCD*, obtém-se o quadrilátero *MNPQ*. Sabendo que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ medem 20 cm e 18 cm, respectivamente, o perímetro do quadrilátero *MNPQ* é:



a. 30 cm

b. 33 cm

c. 36 cm

d. 38 cm

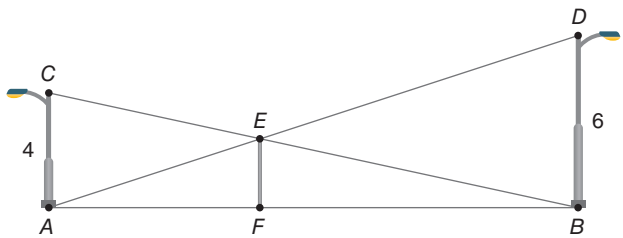
e. 40 cm

8. (Enem) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, e a haste é representada pelo segmento $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.

Qual deve ser o valor do comprimento da haste $\overline{EF}$?

8. alternativa **c**

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



a. 1 m **c.** 2,4 m **e.** $2\sqrt{6}$ m

b. 2 m **d.** 3 m

9. A distância entre a Terra e o Sol é 150.000.000 km, e a distância entre a Terra e a Lua é 384.000 km. Para visualizar melhor a relação entre essas distâncias, convém convertê-las para uma escala menor, isto é, representar uma das grandezas por uma unidade com a qual estamos habituados e, por meio de proporções, comparar as medidas reais na escala adotada. Por exemplo, se representarmos por um segmento de reta de 1 m a distância entre a Terra e o Sol, o comprimento do segmento de reta que representará a distância entre a Terra e a Lua será: **9.** alternativa **c**

a. menor que 1 mm.

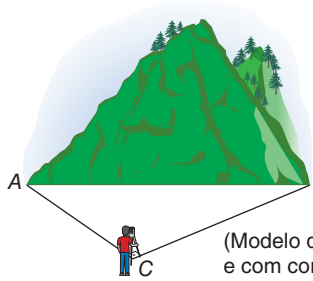
b. maior que 1 mm e menor que 2 mm.

c. maior que 2 mm e menor que 3 mm.

d. maior que 3 mm e menor que 4 mm.

e. maior que 4 mm.

10. Para calcular o comprimento de um túnel que será construído em linha reta, ligando dois pontos, *A* e *B*, da base de uma montanha, um topógrafo posicionou seu teodolito em um ponto *C* tal que $m(A\hat{C}B) = 90°$. Depois, mediu as distâncias *AC* e *BC*, obtendo 60 m e 80 m, respectivamente. **10.** alternativa **b**



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

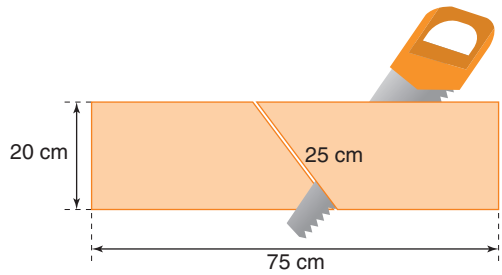
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

O comprimento do túnel, em metro, será:

a. 120 **c.** 110 **e.** 92

b. 100 **d.** 80

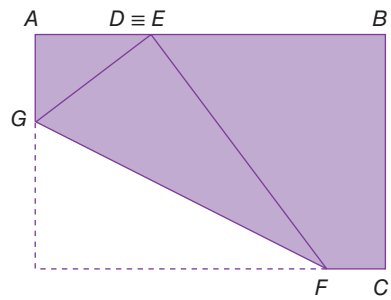
11. Um marceneiro cortou uma tábua retangular de 75 cm de comprimento por 20 cm de largura, separando-a em dois trapézios congruentes.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que o comprimento do corte foi de 25 cm, calcule a medida da base menor de um dos trapézios. **11.** 30 cm

12. Em um cartão retangular *ABCD*, com $AB = 12$ cm e $BC = 8$ cm, marca-se um ponto *E* sobre o lado $\overline{AB}$, com $AE = 4$ cm. Em seguida, dobra-se o cartão, formando um vinco $\overline{GF}$ de modo que o vértice *D* coincida com o ponto *E*, conforme mostra a figura. Calculem o comprimento *GF*. **12.** $5\sqrt{5}$ cm



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

13. A medida do lado de um triângulo equilátero é igual à medida do lado de um quadrado. Calcule a razão entre as medidas da altura do triângulo e da diagonal do quadrado, nessa ordem, com aproximação de cinco casas decimais. **13.** 0,61238

7. Alternativa **d**. Aproveite este exercício para comentar que os pontos médios de qualquer quadrilátero plano são vértices de um paralelogramo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Espera-se que os estudantes identifiquem as informações, como a representação do campo de futebol no centro da aldeia, a disposição das ocas em círculo, a representação dos rios e da vegetação, da pista de pouso, onde o Sol nasce e onde se põe, entre outras informações.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Etnocartografia

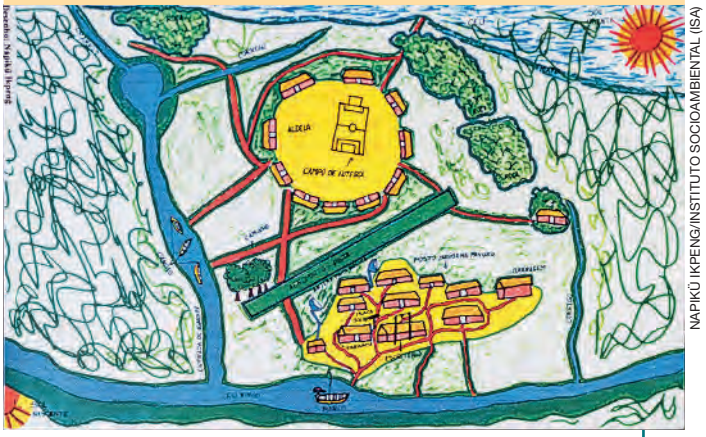
Matemática sem fronteiras: Você encontrará mais informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

A representação espacial produzida por povos tradicionais, como indígenas, quilombolas, seringueiros e outras comunidades é conhecida por cartografia social ou etnocartografia.

Em muitos mapas sociais são registrados um pouco da tradição e da vida dos povos tradicionais para as próximas gerações. Em algumas dessas representações, estão presentes, por exemplo, conhecimentos construídos ao longo das gerações em relação ao espaço vivido, como melhores áreas para caça, para exploração de recursos florestais ou caminhos em meio ao território ocupado.

Desenho de Napikü Ikpeng, da aldeia Ikpeng. O povo indígena Ikpeng reside no Parque Indígena do Xingu (PIX), mais especificamente na aldeia Moygu.

Mapa da aldeia feita por Napikü Ikpeng



NAPIKÜ IKPENG/INSTITUTO SOCIOAMBIENTAL (ISA)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

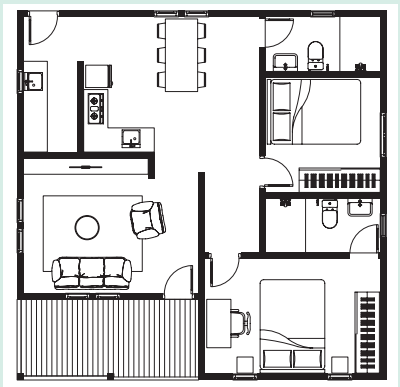
Atividades

5. Espera-se que os estudantes indiquem os ambientes representados, a indicação de portas e janelas, entre outros elementos. A escala utilizada é de 1 para 120; isso significa que cada centímetro corresponde a 120 cm na realidade.

Faça as atividades no caderno.

1. Que informações você identifica no mapa apresentado?
2. Essa representação cartográfica foi elaborada com o uso de alguma escala? Essa informação é importante para a leitura deste mapa?
3. Em duplas, realizem uma pesquisa na internet sobre mapas produzidos por povos tradicionais, como os indígenas. Depois, façam uma apresentação, destacando as informações presentes nos mapas pesquisados e sobre a importância dessas informações para a comunidade. **3.** Resposta pessoal.
4. Inspirando-se nos resultados da pesquisa, elaborem um mapa social representando algum local do município em que moram. Não se preocupem com convenções cartográficas, como o uso de escala, apenas representem a região escolhida e identifiquem as informações importantes por meio de legendas. **4.** Resposta pessoal.
5. A escala usada na cartografia corresponde à razão de semelhança entre o mapa e a região representada, nessa ordem. No mapa social que foi apresentado não foi feito o uso da representação em escala, mas há representações cartográficas que o uso da escala se faz necessário, como a representação de plantas baixas.

   Observe a planta baixa a seguir. Que informações estão presentes nesta representação? Qual foi a escala utilizada?



FR.HUNIAN/SHUTTERSTOCK

Escala: 1 : 120

6. Resposta pessoal.

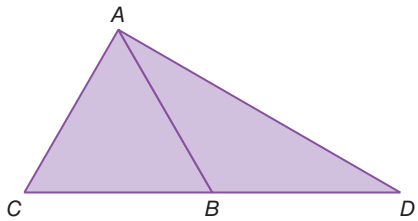
6. Agora, em grupo, façam o que se pede.
   a. Escolham um local da escola para fazer a representação de sua planta baixa. Considerem que as informações serão usadas por profissionais para uma possível reforma.
   b. Meçam, com equipamentos adequados, as dimensões do local escolhido, como comprimento, largura e altura. Também não esqueçam de verificar as medidas de portas e janelas, se houver.
   c. Escolham uma escala adequada e representem todas essas informações. Para ajudá-los na representação, procurem na internet exemplos de plantas baixas.
   d. Apresentem aos colegas e professor as plantas baixas confeccionadas e reflitam se as informações necessárias foram representadas.

2. A representação não está em escala. Espera-se que os estudantes percebam que, neste caso, a representação em escala não é importante para a compreensão da disposição dos elementos.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 3

Para aperfeiçoar os estudos, você pode retomar os exercícios propostos no decorrer deste capítulo, rever suas resoluções ou utilizar os exercícios complementares para estudar com os colegas. Você também pode utilizar as questões propostas a seguir para verificar sua aprendizagem.

1. Na figura a seguir, o ponto B pertence a $\overline{CD}$, o triângulo ABC é equilátero e $AB = BD$.



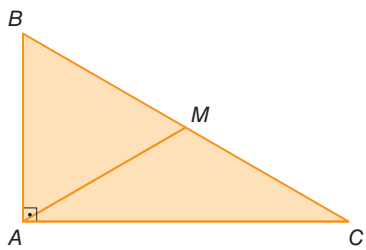
A medida de um ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{D}A$ é:

a. 15° **c.** 45° **e.** 75°

b. 30° **d.** 60°

1. alternativa **b**

2. No triângulo retângulo ABC, M é ponto médio de $\overline{BC}$, $m(M\hat{A}C) = 30°$ e $CM = 3$ cm.



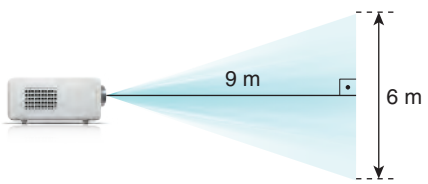
O perímetro do triângulo ABM é:

a. 3 cm **c.** 9 cm **e.** 15 cm

b. 6 cm **d.** 12 cm

2. alternativa **c**

3. Um projetor de *slide*, colocado a 9 m de distância de uma tela, projeta uma imagem de 6 m de altura, conforme mostra a figura a seguir.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

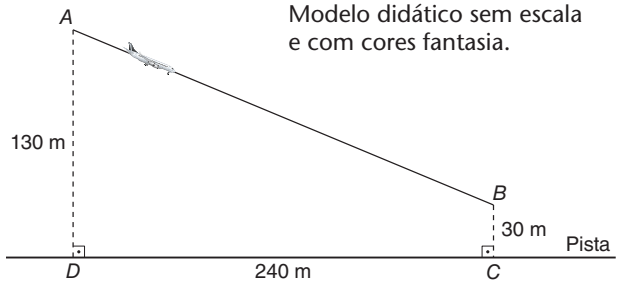
A que distância da tela deve ser colocado o projetor para que a imagem projetada tenha 2 m de altura?

a. 1 m **c.** 5 m **e.** 9 m

b. 3 m **d.** 7 m

3. alternativa **b**

4. Durante o procedimento de descida, em linha reta, um avião passou por dois pontos, A e B, localizados, respectivamente, a 130 m e a 30 m acima de dois pontos, D e C, da pista plana e horizontal, com $DC = 240$ m, conforme mostra a figura a seguir.



Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

Qual foi a distância percorrida pelo avião no trajeto de A até B?

a. 30 m **c.** 130 m **e.** 260 m

b. 100 m **d.** 240 m

4. alternativa **e**

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos.

A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

1. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.
2. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais que serão utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.
3. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

CAPÍTULO 4

Circunferência, círculo e área de figuras planas

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

OBJETO DIGITAL Infográfico clicável: Sistema de irrigação por pivô central fixo

Sistema de irrigação de pivô central

O pivô central é uma tecnologia de irrigação que consiste em uma torre central que sustenta uma estrutura, apoiada por torres metálicas móveis, que gira em torno do seu próprio eixo, **aspergindo** água ou fertilizantes sobre a plantação por meio de tubulações. A estrutura tem rodas e motor fazendo movimentos concêntricos ao redor da torre central.

Aspergir: molhar(-se) com pequenas gotas de qualquer líquido; borrifar(-se), orvalhar(-se), respingar(-se).



CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

A técnica de irrigação por pivô central é essencial para a agricultura, principalmente quando se trata de produções em grandes escalas.

O sistema de pivô central baseia-se em três etapas: a captação de água, seu transporte para a torre central e sua distribuição por aspersão na lavoura. Para isso, é fundamental realizar cálculos envolvendo o comprimento da haste do pivô, bem como da área circular.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Algumas das vantagens do sistema de irrigação por pivô central são: eficiência no uso de água e energia; simplicidade na operação e baixo custo com mão de obra; e possibilidade de irrigar longas distâncias e grandes áreas, cobrindo áreas circulares de até 300 metros de raio.

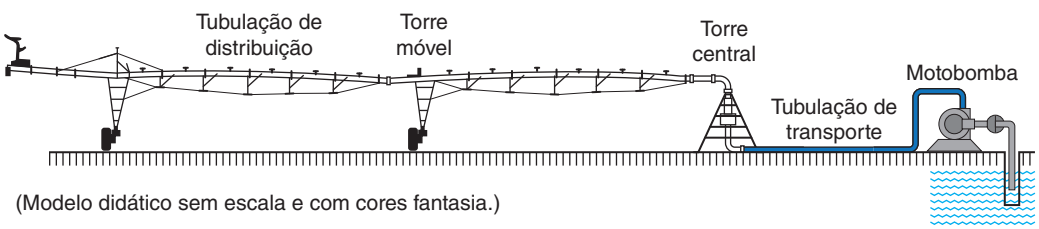
Elaborado com base em: PIVÔ central: saiba como funciona e indicações de uso. **Blog para Profissionais do Agronegócio e Veterinária**, [*s. l.*], 17 maio 2021. Disponível em: https://www.cptcursospresenciais.com.br/blog/vantagens-do-pivo-central/; PENNACCHI, J. P. Pivô central: entenda tudo sobre esse sistema de irrigação (+ planilha grátis). **Blog Aegro**. Porto Alegre, 25 maio 2023. Disponível em: https://blog.aegro.com.br/pivo-central/. Acesso em: 12 ago. 2024.

RICARDO JUNQUEIRA/MOMENT RF/GETTY IMAGES



Sistema de irrigação em funcionamento. Detalhe das torres móveis e a água aspergindo da tubulação de distribuição.

Observe um esquema ilustrativo das partes do sistema de pivô central.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Elaborado com base em: TESTEZLAF, R.; MATSURA, E. E. **Engenharia de irrigação:** tubos e acessórios. Campinas: Unicamp, 2015.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

A proposta desta abertura permite um trabalho com os professores de Biologia e Geografia. Aproveite este momento para conversar com os estudantes sobre o que eles estudaram acerca de práticas sustentáveis na agropecuária e do uso de diferentes sistemas de irrigação nas plantações. Caso algum estudante tenha conhecimento na prática com essas temáticas, solicite que ele compartilhe essa experiência com os demais colegas. Aproveite também para propor aos estudantes que pesquisem sobre a Agroecologia e proponha que assistam ao vídeo **O que é agroecologia?**, do canal Educa Periferia, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=QFrNNj9RM5o. Acesso em: 20 set. 2024.

Além da teoria

1. O raio r de irrigação de um pivô central é a maior distância possível entre o pivô e um ponto irrigado. Com a teoria deste capítulo podemos concluir que a área A irrigada é, aproximadamente, $A = 3{,}14\ r^2$. De acordo com essa informação, a área irrigada é diretamente proporcional ao raio de irrigação de um pivô central? Por quê? **1.** Resposta no final deste livro.

2. Em sua opinião, quais medidas podem ser adotadas em um sistema de irrigação de pivô central para que ele seja um método de irrigação sustentável?

3. Resposta pessoal.

3. Pesquise outras formas de irrigação no Brasil indicando quais delas apresentam medidas sustentáveis.

Para saber mais sobre o sistema de irrigação por pivôs centrais no Brasil, acesse o *site* da Embrapa disponível em: https://www.embrapa.br/busca-de-noticias/-/noticia/59843654/area-irrigada-por-pivos-centrais-no-brasil-atinge-16-milhao-de-hectares. Acesso em: 18 set. 2024.

2. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante sugira práticas como captação de água da chuva para o reservatório de água, utilização de painéis fotovoltaicos para geração de energia elétrica, entre outros.



WASSILY KANDINSKY – MUSEU DE ARTE DA FILADÉLFIA, ESTADOS UNIDOS

KANDINSKY, Wassily. **Círculos em um círculo**, 1923. Óleo sobre tela, 98,7 × 95,6 cm.

1. Circunferência e círculo

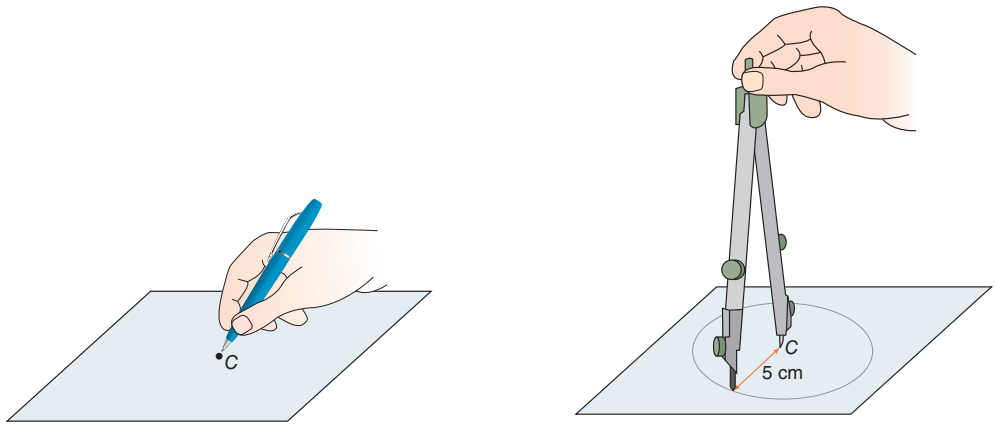
As representações circulares têm papel importante em diferentes áreas, como a arte. Essas figuras já foram usadas como um símbolo de unidade e eternidade, representando a ideia de que tudo está interligado. Na arte indígena, por exemplo, os círculos são usados em padrões e rituais, expressando a relação dos seres humanos com a natureza e o universo. Já na arte ocidental, artistas como Wassily Kandinsky incorporaram figuras circulares em suas obras, utilizando-as para transmitir emoções e ideias.

Para compreender as definições de circunferência e círculo, vamos traçar uma circunferência. Para isso, podemos seguir os passos:

Marque um ponto *C* em uma folha avulsa. Como você faria para desenhar todos os pontos dessa folha que distam 5 cm de *C*?

Para desenhar esses pontos, podemos usar um compasso com uma abertura em que a distância entre a ponta de grafite e a ponta-seca seja 5 cm. Ao fixar a ponta-seca no ponto *C* e desenhar na folha uma linha com a ponta de grafite, fazendo-a girar uma volta completa em torno do ponto *C*, estamos marcando todos os pontos da folha que distam 5 cm de *C*. Essa linha é chamada de **circunferência de centro *C* e raio 5 cm**.

Proponha aos estudantes que pesquisem outras obras de arte que usam figuras circulares e, depois, que compartilhem o resultado com os colegas.



(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca. Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

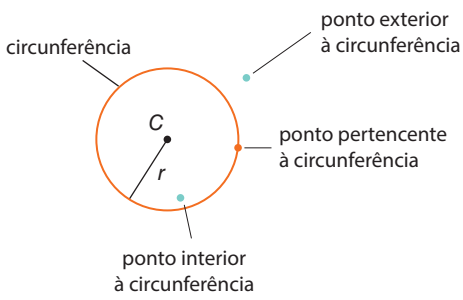
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se considerar adequado, apresente o traçado de uma circunferência a partir de uma situação do cotidiano. Por exemplo, um gesseiro precisa fazer cortes circulares para instalar *spots* de luz. Peça aos estudantes que descrevam um procedimento possível adotado pelo gesseiro para fazer esses cortes. Após dar um tempo para que reflitam sobre o assunto, explique que é possível amarrar dois marcadores nas pontas de um barbante, cujo comprimento corresponda à medida do raio da circunferência. Depois, esse fio e os marcadores são usados como um compasso, de modo que um dos marcadores fique fixo no centro da circunferência e o outro usado para traçar a linha da circunferência, considerando que o fio permaneça bem esticado durante todo o traçado.

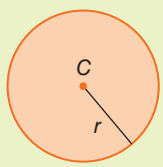
Sendo *C* um ponto de um plano e *r* uma distância não nula, chama-se **circunferência** de centro *C* e raio *r* o conjunto dos pontos desse plano cujas distâncias ao ponto *C* são iguais a *r*.

Um ponto *P* do plano que contém uma circunferência de centro *C* e raio *r* é interior a ela quando a distância *PC* é menor que o raio, e é exterior quando a distância *PC* é maior que o raio, conforme mostra a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

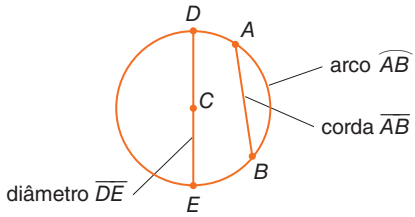
A reunião de uma circunferência com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de **círculo**.

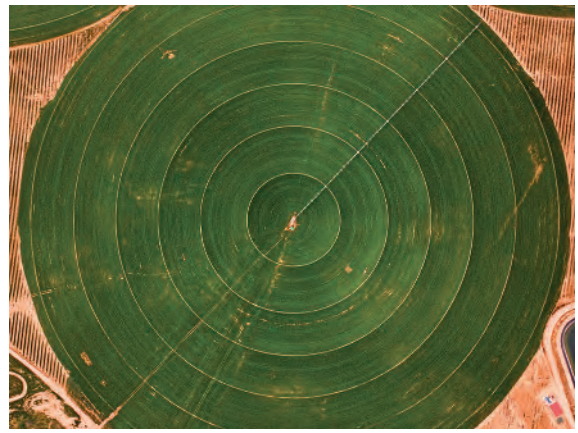


O círculo é uma superfície plana cujo contorno é uma circunferência.

Arcos e cordas

Dois pontos, A e B, de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas **arcos**. O segmento de reta $\overline{AB}$ é chamado de **corda**. Uma corda que passa pelo centro C da circunferência é chamada de **diâmetro** e tem medida 2r.



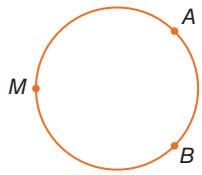


TODOR NIKOLOV/ISTOCK/GETTY IMAGES

No sistema de irrigação de pivô central, a ponta da tubulação de distribuição percorre toda a circunferência de raio maior.

Notas:

1. Como os pontos A e B dividem a circunferência em dois arcos distintos, a notação $\overset{\frown}{AB}$ é ambígua, pois não determina qual dos dois arcos está sendo representado. Para eliminar essa ambiguidade, podemos considerar, além de A e B, um terceiro ponto M do arco considerado e representá-lo por $\overset{\frown}{AMB}$.

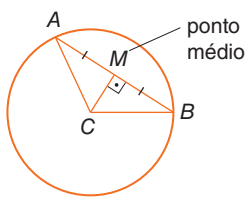


A notação $\overset{\frown}{AMB}$ indica o arco que passa por M e tem extremos A e B.

2. Se os pontos A e B coincidem, temos um arco nulo e um arco de uma volta completa.
3. Qualquer diâmetro $\overline{AB}$ de uma circunferência de raio r divide-a em duas partes chamadas semicircunferências de raio r e diâmetro $\overline{AB}$.

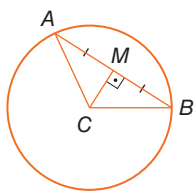
Propriedades das cordas

P1. Em uma circunferência, o segmento de reta que liga o centro C ao ponto médio M de uma corda é perpendicular a essa corda.



Para justificar a propriedade P1, temos que, em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base coincide com a altura. Como $\overline{CM}$ é mediana do triângulo ABC, isósceles de base $\overline{AB}$, concluímos que $\overline{CM}$ também é altura; portanto, o ângulo $C\hat{M}B$ é reto.

P2. Em uma circunferência, o segmento de reta que liga o centro C a uma corda, perpendicularmente, encontra essa corda no ponto médio.

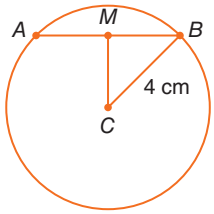


Para justificar a propriedade P2, temos que, em todo triângulo isósceles, a altura relativa à base coincide com a mediana. Como $\overline{CM}$ é altura do triângulo ABC, isósceles de base $\overline{AB}$, concluímos que $\overline{CM}$ também é mediana; portanto, M é ponto médio de $\overline{AB}$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

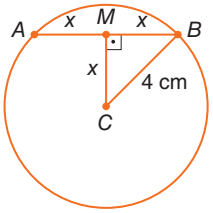
EXERCÍCIO RESOLVIDO



1. Na circunferência de centro C e raio 4 cm, o ponto M da corda $\overline{AB}$ é tal que $AM = BM = CM$. Calcule a medida da corda $\overline{AB}$.

Resolução

Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, pois $AM = BM$, temos que $\overline{CM} \perp \overline{AB}$ (o símbolo $\perp$ deve ser lido: "é perpendicular a"). Indicando por x a medida, em centímetro, de cada um dos segmentos $\overline{AM}$, $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$, obtemos a figura representada.



Pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 + x^2 = 4^2 \Rightarrow 2x^2 = 16 \therefore\ x^2 = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$$

Assim:

$$AB = x + x \Rightarrow AB = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \therefore\ AB = 4\sqrt{2}$$

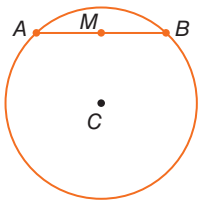
Logo, a medida da corda $\overline{AB}$ é $4\sqrt{2}$ cm.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

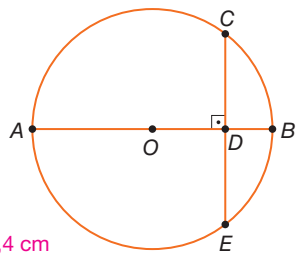
Faça os exercícios no caderno.

1. Na figura, a circunferência de centro C tem raio 13 cm, M é ponto médio da corda $\overline{AB}$ e $CM = 12$ cm. Calcule a medida da corda $\overline{AB}$.



1. 10 cm

2. Na figura, o ponto O é o centro da circunferência, $DB = 2$ cm e $CE = 8$ cm. Calcule:



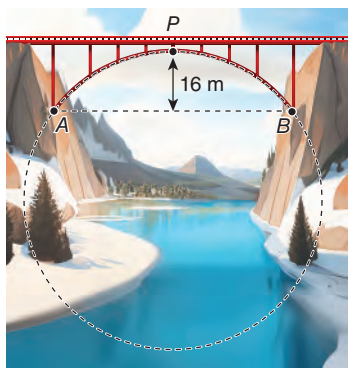
a. A medida do raio da circunferência. **2. a.** 5 cm

b. A medida da corda $\overline{AC}$. **2. b.** $4\sqrt{5}$ cm

c. A distância do ponto D ao segmento $\overline{OC}$. **2. c.** 2,4 cm

3. Uma ponte sobre um rio é sustentada por um arco circular $\overset{\frown}{AB}$, cuja corda $\overline{AB}$ horizontal mede 64 m. O ponto P, localizado na posição mais elevada do arco $\overset{\frown}{AB}$, está a 16 m de altura em relação à corda $\overline{AB}$, conforme mostra a figura. Calculem a medida do raio da circunferência que contém o arco $\overset{\frown}{AB}$.

3. 40 m



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

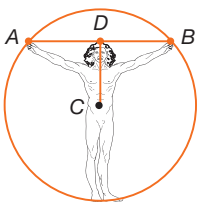
4. O *Homem Vitruviano* é um famoso desenho de Leonardo da Vinci, datado do final do século XV, que representa um estudo sobre as proporções ideais do corpo humano. Uma dessas proporções afirma que a altura do corpo humano é 8 vezes a altura da cabeça.



LEONARDO DA VINCI – GALERIA DA ACADEMIA, VENEZA

DA VINCI, Leonardo. **Homem Vitruviano**, 1490. Tinta sobre papel, 34,3 × 24,5 cm.

Obedecendo às proporções desse desenho de Da Vinci, Rogério esboçou o esquema a seguir.



(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Dado que o ponto C é o centro da circunferência, D ponto médio da corda $\overline{AB}$, $AB = 12$ cm e $CD = 8$ cm, calcule considerando o desenho de Rogério:

a. o raio da circunferência. **4. a.** 10 cm

b. a medida da altura da cabeça. **4. b.** 2,25 cm

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

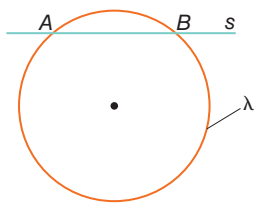
Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 1.

2. Posições relativas envolvendo a circunferência

Posições relativas entre reta e circunferência

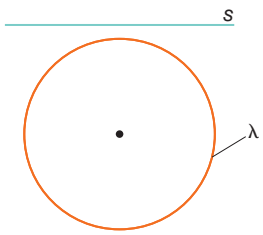
Uma reta s e uma circunferência λ, contidas em um mesmo plano, admitem as posições relativas descritas a seguir.

- s é **secante** a λ quando s e λ têm dois pontos distintos em comum.



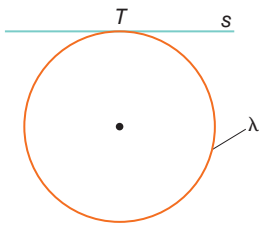
$s \cap \lambda = \{A, B\}$

- s é **exterior** a λ quando s e λ não têm ponto em comum.



$s \cap \lambda = \varnothing$

- s é **tangente** a λ quando s e λ têm um único ponto em comum.

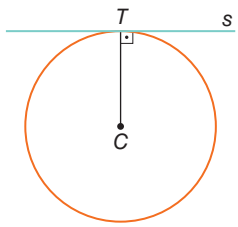


$s \cap \lambda = \{T\}$

Lembre com os estudantes que a distância entre um ponto P e uma reta r é a menor distância possível entre P e um ponto de r. Depois, pergunte como desenhar um segmento de reta que represente essa distância. Estimule a discussão. Espera-se que os estudantes deduzam que se trata do segmento PQ, perpendicular à r, com $Q \in r$. Logo, toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, pois a menor distância entre o centro C da circunferência e essa reta é a medida do raio dessa circunferência.

Propriedade

> Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.



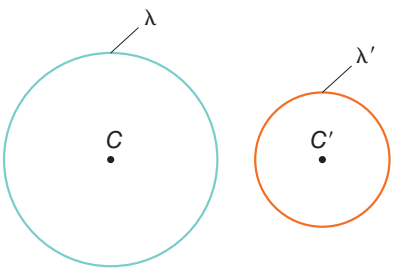
$\overline{CT} \perp s$

Para justificar essa propriedade, temos que a menor distância entre o centro C e a reta tangente s é a medida do raio da circunferência. Como a menor distância entre um ponto e uma reta corresponde à medida do segmento que liga o ponto à reta, perpendicularmente, concluímos que $\overline{CT}$ é perpendicular a s e T o ponto de tangência.

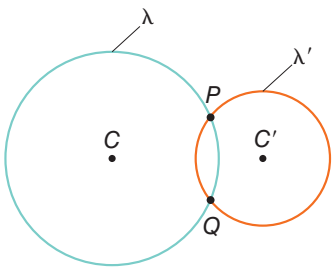
Posições relativas entre duas circunferências

Duas circunferências λ e λ', contidas em um mesmo plano, admitem as posições relativas descritas a seguir.

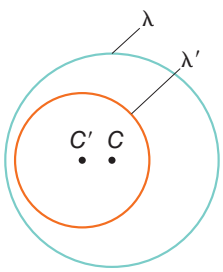
- **Externas**: quando todos os pontos de qualquer uma delas são externos à outra.



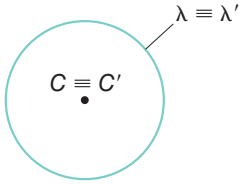
- **Secantes**: quando têm exatamente dois pontos distintos em comum.



- **Uma interna à outra**: quando todos os pontos de uma delas são internos à outra.



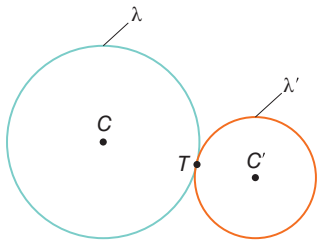
- **Coincidentes**: quando possuem todos os seus pontos em comum.



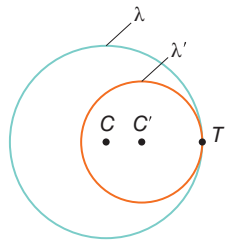
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

• **Tangentes**: quando têm um único ponto em comum.



tangentes exteriormente



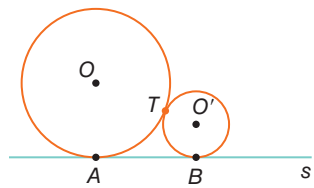
tangentes interiormente

Propriedade

Em duas circunferências tangentes, os centros C e C' e o ponto de tangência T são colineares.

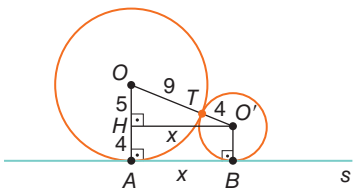
EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Duas circunferências, de centros O e O' e raios 9 cm e 4 cm, respectivamente, são tangentes entre si exteriormente no ponto T e tangenciam uma reta s nos pontos A e B, conforme mostra a figura.
Determine a medida do segmento $\overline{AB}$.



Resolução

O trapézio $OABO'$ é retângulo em A e B, pois os raios $\overline{OA}$ e $\overline{O'B}$ são perpendiculares à reta tangente s.



Traçando a altura $\overline{O'H}$ desse trapézio e lembrando que o ponto de tangência T e os centros são colineares, temos:

$$x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 144$$

$$\therefore x = 12$$

Logo, a medida do segmento $\overline{AB}$ é 12 cm.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

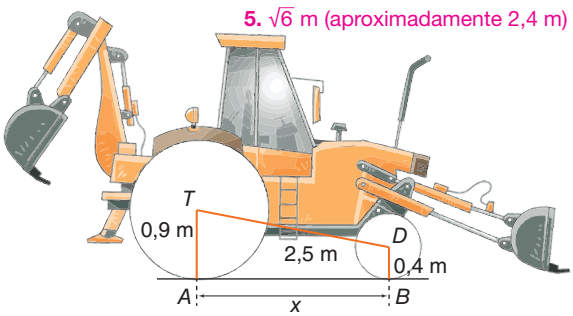
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

5. Cada pneu traseiro de um trator tem raio de 0,9 m, e cada pneu dianteiro tem raio de 0,4 m. Sabendo que a distância entre os centros T e D dos pneus é 2,5 m, conforme mostra a figura, calculem a distância x entre os pontos A e B, onde esses pneus tocam o solo plano.

SERRALHEIRO/ARQUIVO DA EDITORA



5. $\sqrt{6}$ m (aproximadamente 2,4 m)

6. (Enem) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

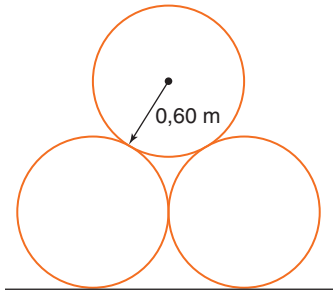
Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

DANIEL SCOLA/ARQUIVO DO FOTÓGRAFO



Disponível em: www.caminhoes-e-carretas.com. Acesso em: 21 maio 2012 (adaptado).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão? **6.** alternativa **d**

a. 2,82 **b.** 3,52 **c.** 3,70 **d.** 4,02 **e.** 4,20

7. Em dupla com um colega, elaborem individualmente um problema sobre reta tangente a uma circunferência. Troquem os problemas elaborados por vocês e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

7. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 2.

3. Ângulos na circunferência

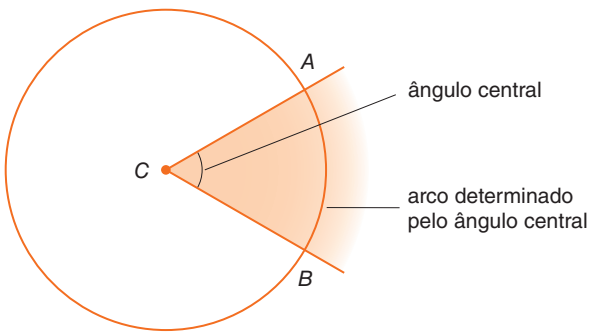
Quando cada lado de um ângulo está contido em uma reta secante ou tangente a uma circunferência, é possível relacionar a medida desse ângulo com as medidas dos arcos que seus lados determinam na circunferência. A seguir estudaremos essas relações.

Observação

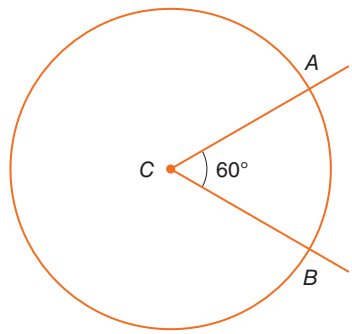
Adotamos o conceito "lado de um ângulo" como uma das semirretas que determinam uma abertura angular.

Ângulo central de uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é chamado de **ângulo central** dessa circunferência.



Define-se a medida, em grau, de um arco de circunferência como a medida do ângulo central que o determina. Por exemplo:



$m(A\hat{C}B) = 60° \Leftrightarrow m(\overset{\frown}{AB}) = 60°$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

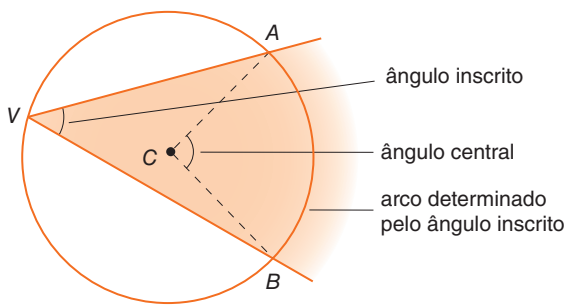
Ângulo inscrito em uma circunferência

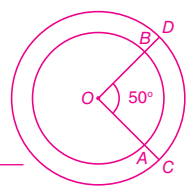
Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e cujos lados estão contidos em retas secantes à circunferência é chamado de **ângulo inscrito** nessa circunferência.

Observação

$m(A\hat{C}B)$ é lido como "medida do ângulo $A\hat{C}B$" e $m(\overset{\frown}{AB})$ é lido como "medida do arco $\overset{\frown}{AB}$".

Reflexão. Sim, arcos circulares de comprimentos diferentes podem ter a mesma medida em grau. Por exemplo, nas circunferências de centro O, a seguir, os arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ têm comprimentos diferentes, mas a mesma medida em grau: 50°.





FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão

Arcos circulares de comprimentos diferentes podem ter a mesma medida em grau?

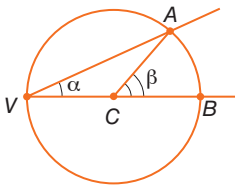
Um ângulo inscrito e um ângulo central que determinam o mesmo arco de uma circunferência são chamados de **ângulos correspondentes** nessa circunferência.

Propriedade

A medida de um ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente.

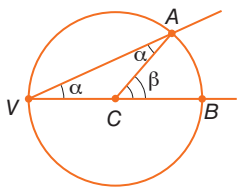
Demonstração

Faremos a demonstração do caso fundamental, em que um dos lados do ângulo inscrito passa pelo centro da circunferência.



$m(A\hat{V}B) = \alpha$ (medida do ângulo inscrito)
$m(A\hat{C}B) = \beta$ (medida do ângulo central)

O triângulo VCA é isósceles, pois $\overline{CV} \cong \overline{CA}$.
Logo: $C\hat{V}A \cong C\hat{A}V$



Como β é medida do ângulo externo $A\hat{C}B$ do triângulo ACV, temos:

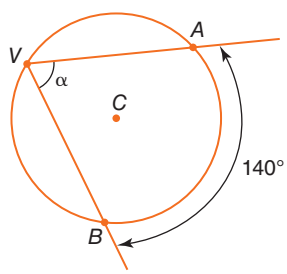
$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{2}$$

Ou seja, a medida do ângulo inscrito α é metade da medida do ângulo central β.

Exemplo

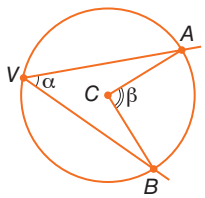
Na figura a seguir, a medida do ângulo central $A\hat{C}B$ é igual à medida do arco que ele determina na circunferência, isto é, 140°.
Como a medida α do ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente, concluímos que:

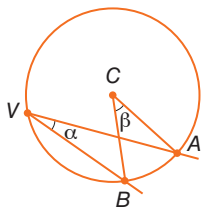
$$\alpha = \frac{140^\circ}{2} \therefore \alpha = 70^\circ$$



Observação

Para a demonstração dos casos em que o centro da circunferência é interior ou exterior ao ângulo inscrito, basta traçar um diâmetro auxiliar a partir do vértice do ângulo e aplicar duas vezes o caso fundamental.





Conectado

Podemos construir um algoritmo para a determinação da medida do ângulo inscrito a partir da medida do ângulo central. Como a medida do ângulo central (β) é o dobro da medida do ângulo inscrito (α) que intercepta o mesmo arco, podemos escrever: $\beta = 2\alpha$

Assim, dada a medida do ângulo inscrito em graus, podemos escrever o algoritmo do quadro:

Agora, dada a medida do ângulo central em graus, escreva o algoritmo que permite determinar a medida do ângulo inscrito.

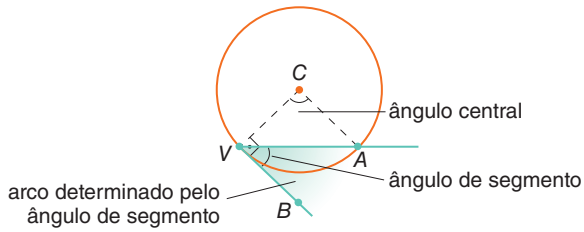
Início	
Identificação das variáveis:	α, β
Entrada dos dados:	"escreva um valor para α"
Processamento:	leia α faça $\beta = 2\alpha$
Saída:	β
Fim	

Conectado:
Apresentamos, neste momento, uma proposta de atividade na qual os estudantes deverão organizar o pensamento de resolução de um problema em etapas que constituem um algoritmo. Neste momento, não nos preocupamos com o rigor de uma linguagem de programação, mas com a estruturação do raciocínio.
Resposta:
Início
Identificação das variáveis: α, β
Entrada dos dados: "escreva um valor para β"
Processamento: leia β
faça $\alpha = \beta/2$
Saída: α
Fim

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Ângulo de segmento

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência, um lado é tangente e o outro é secante à circunferência é chamado de **ângulo de segmento**.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Um ângulo de segmento e um ângulo central que determinam o mesmo arco são chamados de **ângulos correspondentes** a essa circunferência.

Propriedade

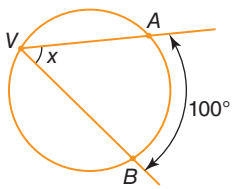
A medida de um ângulo de segmento é metade da medida do ângulo central correspondente.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

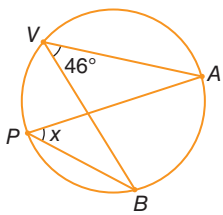
Faça os exercícios no caderno.

8. Determine a medida x, em grau, de cada um dos ângulos nas circunferências.

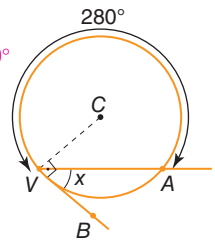
a. **8. a.** 50°



b. **8. b.** 46°



c. **8. c.** 40°



9. Em um parque florestal, há um posto de informações P equidistante das quatro entradas do parque, A, B, C e D, consideradas como vértices de um quadrilátero convexo cujo plano passa por P, conforme o esquema a seguir. Sabendo que $m(B\hat{A}D) = 45°$ e que $BD = 200$ m, a distância do posto P a cada uma dessas entradas é: **9.** alternativa **e**

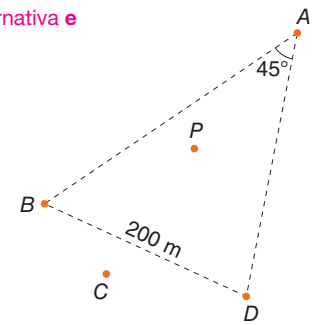
a. 100 m

b. $50\sqrt{2}$ m

c. $50\sqrt{5}$ m

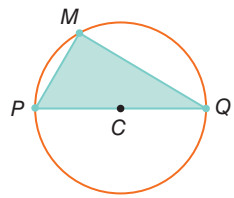
d. $100\sqrt{5}$ m

e. $100\sqrt{2}$ m



10. Um triângulo é inscrito em uma semicircunferência quando seus três vértices pertencem a ela e um de seus lados passa pelo centro da semicircunferência.

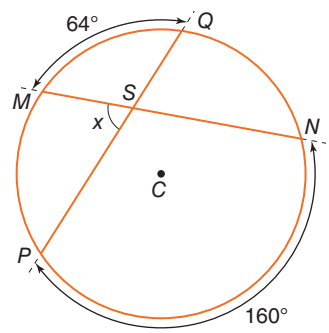
a. Calcule a medida do ângulo $P\hat{M}Q$ no triângulo inscrito na semicircunferência seguinte. **10. a.** 90°



(C é o centro da circunferência.)

b. Quanto aos ângulos, como podemos classificar todo triângulo inscrito em uma semicircunferência? **10. b.** Triângulo retângulo

11. Na circunferência de centro C, a seguir, determine a medida x, em grau, do ângulo $P\hat{S}M$. **11.** $x = 68°$

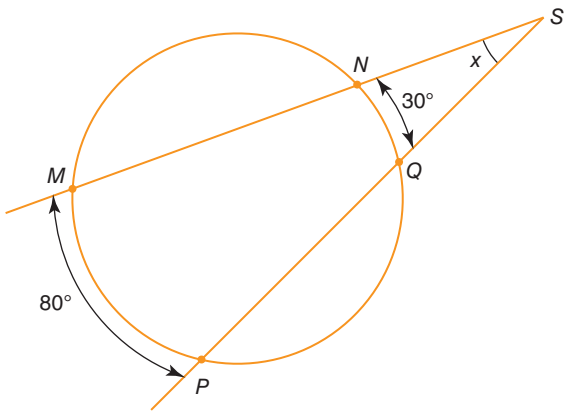


(*Sugestão*: Trace o segmento $\overline{PM}$ e observe os ângulos inscritos $P\hat{M}N$ e $M\hat{P}Q$.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

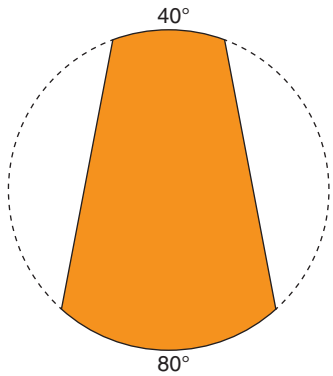
12. Determine a medida x, em grau, do ângulo $P\hat{S}M$ na figura. **12.** 25°



(*Sugestão*: Trace o segmento $\overline{PN}$ e observe os ângulos inscritos $P\hat{N}M$ e $N\hat{P}Q$.)

13. Para a confecção do encosto de uma cadeira, um marceneiro fez dois cortes em linha reta em um círculo de madeira e descartou duas partes congruentes do círculo. No pedaço remanescente, que será o encosto, ficaram dois arcos de circunferência de medidas 80° e 40°, conforme mostra a figura. Calculem a medida do ângulo formado pelas direções dos cortes realizados.

13. 20°



4. Perímetro da circunferência

Faça a seguinte experiência: com uma fita métrica, meça o diâmetro e o comprimento das circunferências de dois objetos circulares de tamanhos diferentes. Depois, compare o comprimento de cada circunferência com o respectivo diâmetro. Você verá que o comprimento de cada uma equivale a, aproximadamente, 3,1 vezes seu próprio diâmetro, ou seja, dividindo o comprimento de qualquer uma das circunferências pela medida de seu diâmetro, obtém-se o mesmo resultado: aproximadamente 3,1.

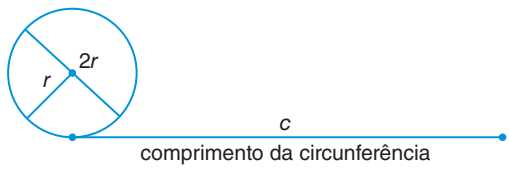


ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

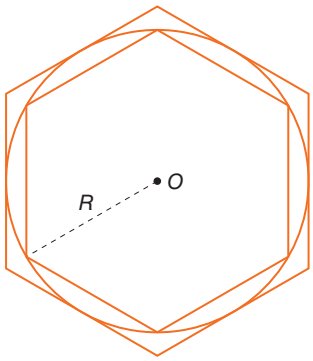
Isso acontece porque duas circunferências quaisquer são figuras semelhantes; portanto, em qualquer circunferência, a razão entre seu comprimento c e a medida $2r$ de seu diâmetro é constante. Costuma-se indicar essa constante pela letra grega π (pi).



$$\frac{c}{2r} = \pi$$

O matemático grego Arquimedes de Siracusa (c. 287-212 a.C.) elaborou o primeiro método eficiente para obter sequências de números que se aproximam indefinidamente da constante π.

Em uma circunferência, ele construiu pares de polígonos regulares, com o mesmo número de lados, sendo um inscrito e outro circunscrito, e dividiu o perímetro de cada um pelo diâmetro da circunferência. Por exemplo, em uma circunferência de raio R, o hexágono regular inscrito tem perímetro $6R$ e o circunscrito tem perímetro $6{,}928R$, aproximadamente. Como o perímetro c da circunferência é maior que o perímetro do hexágono regular inscrito e menor que o perímetro do hexágono regular circunscrito, Arquimedes explicitou que $6R < c < 6{,}928R$. Dividindo por $2R$ cada membro dessa desigualdade, ele obteve um intervalo limitado que contém π. Observe:



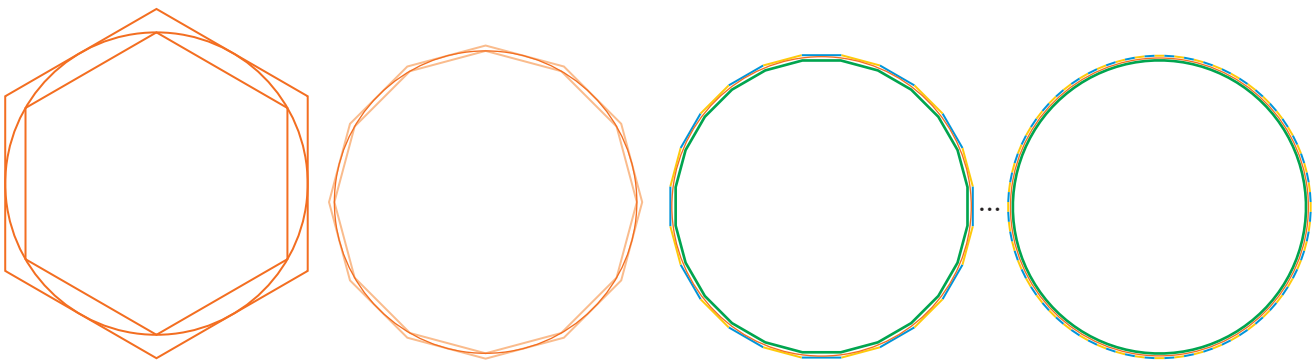
$$\frac{6R}{2R} < \frac{c}{2R} < \frac{6{,}928R}{2R} \Rightarrow 3{,}000 < \pi < 3{,}464$$



BIBLIOTECA NACIONAL DA FRANÇA, PARIS

Gravura do século XVII representando Arquimedes de Siracusa (c. 287-212 a.C.) (colorizada posteriormente).

Arquimedes iniciou seus cálculos com hexágonos regulares e foi dobrando o número de lados até chegar a 96 lados para os polígonos inscrito e circunscrito, obtendo intervalos cada vez menores que contêm π. Observe que, quanto maior é o número de lados, mais próximos do perímetro da circunferência são os perímetros desses polígonos:



Polígonos de 6 lados
$3{,}000 < \pi < 3{,}464$

Polígonos de 12 lados
$3{,}105 < \pi < 3{,}216$

Polígonos de 24 lados
$3{,}132 < \pi < 3{,}159$

...

Polígonos de 96 lados
$3{,}140 < \pi < 3{,}142$

A última figura mostra que, para polígonos de 96 lados, os cálculos de Arquimedes garantem o valor de π até a segunda casa decimal. Assim, a melhor aproximação de π com duas casas decimais é:

$$\pi \approx 3{,}14$$

Atualmente, sabe-se que a constante π é um número irracional e, com a ajuda de computadores, é possível calcular aproximações com bilhões de casas decimais. Como curiosidade, observe a aproximação para o número π com 30 casas decimais:

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338327 9$$

Podemos escrever que a razão entre o comprimento c de uma circunferência e a medida $2r$ do diâmetro é igual a π:

$$\frac{c}{2r} = \pi$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão: Sim. Medir o comprimento da circunferência contornando-a com uma fita métrica vai fornecer certeza da medida até determinada casa decimal, pois a próxima casa é avaliada subjetivamente por quem efetua a medição. No método de Arquimedes, no entanto, pode-se ter certeza até qualquer casa decimal, desde que se aumente progressivamente o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito na circunferência.

Reflexão

Para medir o comprimento de uma circunferência, podemos, simplesmente, contorná-la com uma fita métrica, em vez de inscrever e circunscrever polígonos à circunferência, como fez Arquimedes?

Isolando c nessa igualdade, obtemos a seguinte fórmula para o cálculo do comprimento de uma circunferência de raio r:

$$c = 2\pi r$$

Exemplo

O comprimento c de uma circunferência de raio 5 cm é:

$$c = 2\pi \cdot 5 \text{ cm} \Rightarrow c = 10\pi \text{ cm}$$

Para obter uma aproximação de c, podemos substituir π por 3,14:

$$c \approx 10 \cdot 3{,}14 \text{ cm} \Rightarrow c \approx 31{,}4 \text{ cm}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

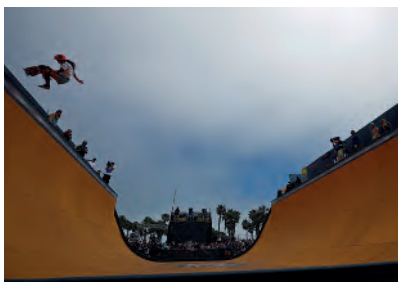
14. Uma costureira pretende aplicar uma tira de renda em todo o contorno de uma toalha circular com 4 m de diâmetro. Quantos metros de renda serão necessários?

14. 4π m $\approx$ 12,56 m

15. O *skate* é uma das modalidades esportivas das práticas corporais de aventura urbana que mais representa o espírito da juventude contemporânea. Existem diversas modalidades de prática do *skate*, mas, certamente, as mais conhecidas são *street* (que pode ser, literalmente, na rua ou em circuitos com obstáculos), *park* (composto por várias pistas da modalidade *bowl*) e *halfpipe* (pistas em formato de "U").

A modalidade *halfpipe* tem um formato de pista que permite voos mais altos, e os *skatistas* conseguem fazer manobras em rotação, *flips* e aéreas. Apesar de empolgante, essa modalidade não fez parte dos Jogos Olímpicos de Paris, em 2024.

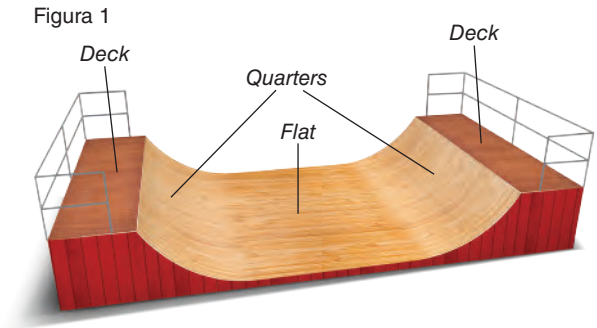
RONALD MARTINEZ/GETTY IMAGES



Australiana Arisa Trew em competição na Califórnia, Estados Unidos. Foto de 2024.

A Figura 1, a seguir, representa uma pista *halfpipe* (meio tubo), formada por uma parte plana horizontal (*flat*) e duas partes curvas (*quarters*). As partes planas horizontais mais elevadas são os *decks*, não fazem parte da pista e estão à mesma altura em relação ao *flat*.

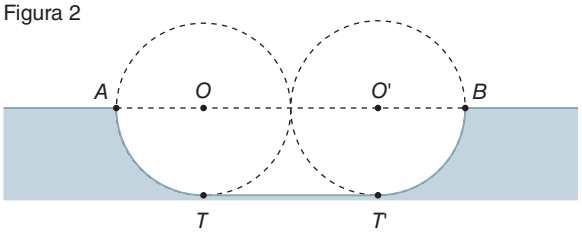
Figura 1



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

A Figura 2 representa uma vista frontal da pista, em que as circunferências de centros O e O' são congruentes, tangentes entre si e tangentes, em T e T', à linha reta e horizontal contida na parte plana da pista. **15.** 2 m

Figura 2



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado com base em: PISTA de *Skate*: seus tipos e características. **Overall Engenharia Esportiva**, São Paulo, 2 maio 2024. Disponível em: https://overallengenharia.com.br/2024/05/pista-de-skate-seus-tipos-e-caracteristicas/. Acesso em: 17 jul. 2024.

Se a menor distância que um *skatista* pode percorrer sobre a pista, indo de A até B, é $(2\pi + 4)$ m, calcule a medida R do raio das circunferências (esse é o raio dos *quarters*).

16. A circunferência máxima contida na superfície terrestre, que divide o planeta nos hemisférios Norte e Sul, é chamada de **linha do Equador**. Seu raio é 6.378 km.

a. Adotando $\pi = 3{,}14$, calculem o comprimento da linha do Equador, em quilômetro. **16. a.** $\approx$ 40.053,84 km

b. Um navio percorreu um arco de 10° sobre a linha do Equador. Calculem o comprimento, em quilômetro, do trecho percorrido pelo navio. **16. b.** $\approx$ 1.112,61 km



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 3 e 4.

Confira um relato detalhado sobre a experiência realizada por Eratóstenes para o cálculo do comprimento da circunferência máxima da Terra, assistindo ao vídeo **As aventuras do Geodetetive 1**: a circunferência da Terra, disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1102. Acesso em: 19 set. 2024.

Conectado

Conectado: Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Usando um aplicativo gratuito de Matemática dinâmica, faça o que se pede.

a. Assinale três pontos quaisquer, *A*, *B* e *C*, não colineares. Em seguida, assinale o ponto *O*, equidistante de *A*, *B* e *C*.

b. Desenhe um polígono regular qualquer e assinale seu centro *O*. Em seguida, desenhe:

- a circunferência circunscrita a esse polígono, isto é, a circunferência que passa por todos os vértices do polígono;
- a circunferência inscrita nesse polígono, isto é, a circunferência que tangencia todos os lados do polígono.

Mentes brilhantes

A partícula de Deus

"[...] Qual é a diferença entre você e um raio de luz? 'Nenhuma' seria a resposta há 13,7 bilhões de anos, no instante em que o Universo nasceu. Nesse estágio embrionário do Cosmos, a grandeza física a que chamamos massa ainda não existia. Nada tinha peso. A matéria que forma o seu corpo hoje era só uma coleção de partículas subatômicas se movendo à velocidade da luz. [...] Certas partículas, os bósons de Higgs [mais conhecidos por partículas de Deus], estavam espalhadas por cada milímetro do Universo. Uma hora elas se uniram e, num processo similar ao vapor-d'água se transformando em água líquida, formaram um 'oceano' invisível [...]."

REZENDE, R. A partícula de Deus. **Superinteressante**, São Paulo, p. 19-20, fev. 2012.

Essa teoria do britânico Peter Higgs, prêmio Nobel de Física em 2013, dá sinais de que talvez possa ser comprovada. Para isso, a ideia é acelerar partículas subatômicas, com velocidades próximas à da luz, gerando colisões frontais entre elas. O objetivo dessas colisões é, em um espaço limitado, provocar intensas explosões, tentando simular o *Big Bang*. Essas explosões provocariam a união de algumas partículas, constituindo assim a massa.

Mas como seria possível estudar essas partículas a altíssimas velocidades em um espaço limitado? Basta fazê-las girar em círculo! E foi isso mesmo que foi feito! Construiu-se o *Large Hadron Collider* (LHC), o maior acelerador de partículas do mundo, na forma de uma circunferência de raio 4,3 km.

Esse trabalho teve contribuições de diferentes cientistas, entre os quais destacamos Fabiola Gianotti, que é uma renomada física italiana que se destacou por sua contribuição significativa à ciência moderna. Em 2016, tornou-se a primeira mulher a chefiar o CERN (Organização Europeia para Pesquisa Nuclear), o centro de pesquisa mais prestigiado do mundo dedicado à física de partículas. Sua liderança foi crucial para a continuidade dos estudos sobre o bóson de Higgs, uma partícula fundamental cuja descoberta em 2012 representou um marco na compreensão das forças fundamentais do universo.

CAIRES, L. Maior acelerador de partículas do mundo passa por um *upgrade*. O que vem por aí? **Jornal da USP**, São Paulo, 26 ago. 2019. Disponível em: https://jornal.usp.br/ciencias/ciencias-exatas-e-da-terra/maior-acelerador-de-particulas-do-mundo-passa-por-um-upgrade-o-que-vem-por-ai/.

GIANOTTI, F. CERN. Disponível em: https://home.cern/about/who-we-are/our-people/biographies/fabiola-gianotti. Acesso em: 19 set. 2024.

Mentes brilhantes: Embora os aspectos teóricos envolvidos no funcionamento de um acelerador de partículas vão além do conteúdo geralmente explorado em Física, é interessante destacar a simplicidade do *design* desse equipamento. A distância que uma partícula deve percorrer no interior de um acelerador até alcançar velocidades próximas à da luz torna impraticável a construção de aceleradores de partículas lineares. A solução encontrada foi a adoção de um percurso circular, no qual as partículas podem percorrer inúmeras voltas até atingir a velocidade pretendida.
Essa abordagem evidencia aspectos centrais do conhecimento científico, como o uso de modelos e teorias para a elaboração de hipóteses e a construção de equipamentos que aprofundam nossa capacidade de investigar a natureza.
Para saber mais sobre a partícula de Deus, sugerimos a leitura do artigo **Entenda, de uma vez, a (revolucionária) partícula de Deus**, disponível em: https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/entenda-de-uma-vez-a-particula-de-deus-e-por-que-ela-podera-ser-tao-revolucionaria/. Acesso em: 20 set. 2024.



LESTER COHEN/GETTY IMAGES

Fabiola foi a diretora do Atlas, um dos experimentos-detectores da existência do bóson de Higgs.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



5. Cálculo de áreas

Todo atributo que pode ser medido é uma grandeza. Comprimento, área, volume, massa, temperatura, pressão e velocidade são exemplos de grandezas. Para o cálculo da medida de qualquer grandeza, adota-se uma parte dessa grandeza como unidade de medida *u* e avalia-se quantas vezes essa parte cabe na grandeza que se quer medir. O número de vezes é a medida da grandeza na unidade *u*.

Para medir a superfície do tampo de uma mesa, por exemplo, podemos adotar como unidade *u* um quadrado recortado em papelão e verificar quantas vezes esse quadrado cabe na superfície do tampo da mesa. O número de vezes é a área da superfície do tampo na unidade *u* adotada.

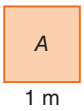
Embora seja possível usar qualquer unidade de medida, é conveniente adotar as unidades padronizadas, o que facilita a comunicação entre as pessoas. Neste item estudaremos as unidades padronizadas de área.

Observação

Nesta coleção, para simplificar a escrita, ao nos referirmos à medida de uma grandeza, utilizaremos apenas a grandeza. Assim, quando mencionarmos "a área é de 30 cm", estaremos nos referindo a uma medida de área.

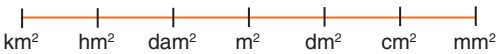
Unidades de área

A unidade fundamental de área é o metro quadrado, simbolizado por m^2, que é uma superfície quadrada com 1 m de lado.



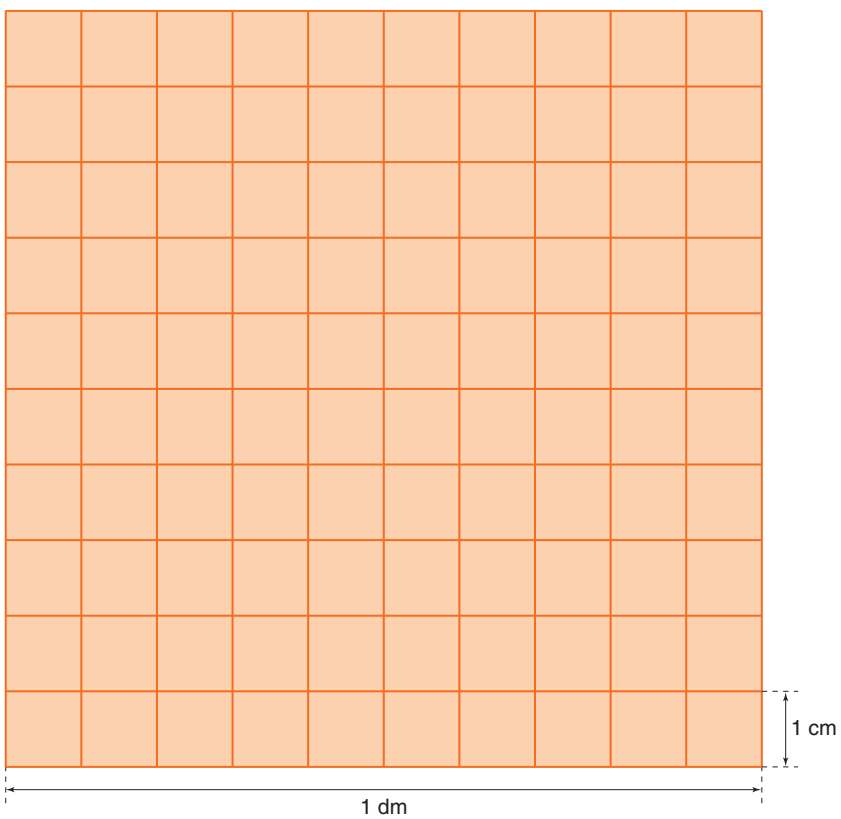
$A = 1\ m^2$

Analogamente, definem-se 1 km^2, 1 hm^2, 1 dam^2, 1 dm^2, 1 cm^2 e 1 mm^2 como sendo quadrados com lados de 1 km, 1 hm, 1 dam, 1 dm, 1 cm e 1 mm, respectivamente. Essas unidades de área podem ser apresentadas conforme a escala a seguir.



Cada unidade dessa escala vale quantas vezes a unidade imediatamente à direita?

Para responder a essa pergunta, vamos dividir um quadrado de 1 dm de lado em quadradinhos de 1 cm de lado:



Note que dividimos o decímetro quadrado em 100 centímetros quadrados. Concluímos, então, que:

$1\ dm^2 = 100\ cm^2$

Raciocinando de maneira análoga, concluímos também que:

$1\ km^2 = 100\ hm^2$

$1\ hm^2 = 100\ dam^2$

$1\ dam^2 = 100\ m^2$

$1\ m^2 = 100\ dm^2$

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$

Isto é, na escala de **unidades de área**, cada unidade vale 100 vezes a unidade imediatamente à direita.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

6. Cálculo da área de algumas figuras planas

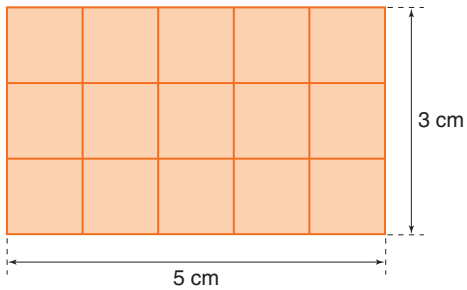
Embora este item trate do cálculo das áreas de algumas figuras planas, é importante ressaltar que as ideias apresentadas aqui podem ser extrapoladas para o cálculo de áreas de outras figuras. Por exemplo, qualquer polígono pode ser dividido em triângulos; logo, sua área pode ser calculada como a soma das áreas dos triângulos.

Área do retângulo

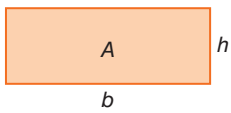
Consideremos um retângulo cuja base mede 5 cm e cuja altura mede 3 cm. Para calcular a área do retângulo, em centímetro quadrado, vamos dividi-lo em quadradinhos de lado 1 cm:

Obtivemos 5 colunas com 3 quadradinhos em cada uma; logo, o número de quadradinhos é $5 \cdot 3$. Assim, a área A do retângulo é:

$$A = 15 \text{ cm}^2$$



Generalizando, se a base e a altura de um retângulo têm, respectivamente, medidas b e h em uma mesma unidade de comprimento, então a área A desse retângulo é dada pelo produto $b \cdot h$.



$$A = b \cdot h$$

Observação

O produto das medidas da base e da altura do retângulo pode não ser um número natural. Por exemplo, se adotássemos o decímetro como unidade de comprimento, as medidas da base e da altura desse retângulo seriam representadas por 0,5 dm e 0,3 dm, respectivamente, e, portanto, a área seria representada por 0,15 dm^2.

Exemplo

Ao olhar para uma imagem digital, você não percebe, mas está olhando para centenas, milhares ou até mesmo milhões de quadrinhos. Cada um deles é chamado de *pixel*, que é a menor unidade que compõe uma imagem digital. Um múltiplo do *pixel* é o *megapixel*, que equivale a 10^6 *pixels*. A resolução de uma imagem é definida pela quantidade de *pixels* utilizados em cada unidade de área. Quanto maior a resolução, mais nítida é a imagem. Assim, se uma imagem digital com 1,92 *megapixel* tem o formato de um retângulo com 15 cm de comprimento por 10 cm de largura, então a resolução dessa imagem, em *pixel* por centímetro quadrado, é dada pela razão:

$$\frac{\text{Quantidade de } pixel}{\text{Área da imagem}} = \frac{1{,}92 \cdot 10^6}{15 \cdot 10} = 12.800$$

Logo, a resolução dessa imagem é de 12.800 *pixels* por centímetro quadrado.





BERNARD BARROSO/SHUTTERSTOCK

BERNARD BARROSO/SHUTTERSTOCK

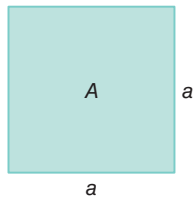
Teatro Amazonas, Manaus, AM. Foto de 2022. A mesma foto com resoluções diferentes. Observe que, na de menor resolução (foto à direita), os *pixels* se destacam, formando contornos serrilhados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Área do quadrado

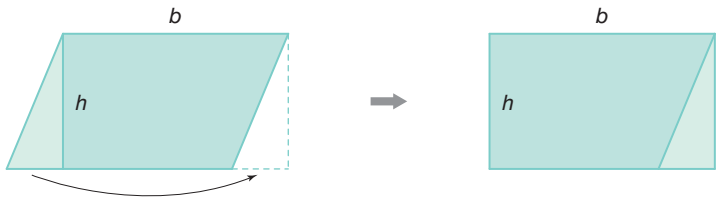
O quadrado é um retângulo; logo, sua área A é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$A = a^2$$

Área do paralelogramo

A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual à área de um retângulo de base b e altura h. Observe:

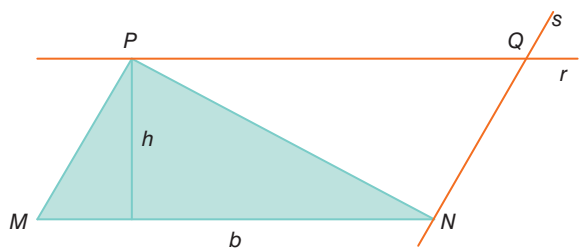


O triângulo em destaque mais claro no paralelogramo é congruente ao triângulo tracejado; assim, se o colocarmos no lugar tracejado, obteremos um retângulo de base b e altura h. Logo, a área A do paralelogramo é o produto da medida da base pela medida da altura.

$$A = b \cdot h$$

Área do triângulo

Consideremos um triângulo NMP, cuja base $\overline{MN}$ mede b, e a altura relativa a essa base mede h. Traçando por P a reta r paralela à base e por N a reta s paralela ao lado $\overline{MP}$, obtemos o paralelogramo $NMPQ$.



Como $\overline{PN}$, corresponde à diagonal do paralelogramo, temos que a área A do triângulo NMP é a metade da área do paralelogramo. Logo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ou seja, a área do triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura.

Observação

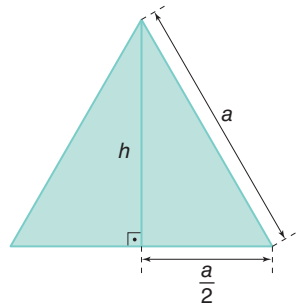
Para triângulos isósceles ou equiláteros, você pode calcular a altura usando o teorema de Pitágoras, especialmente se você conhece o comprimento dos lados. No caso dos equiláteros, existe uma fórmula específica para a área que usa apenas o comprimento do lado ℓ, $A = \frac{\ell\sqrt{3}}{4}$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

3. Calcule a área do triângulo equilátero de lado a.



Resolução

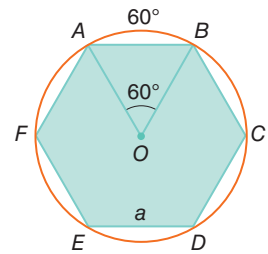
Usando o teorema de Pitágoras, encontramos a medida h da altura do triângulo equilátero.

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Logo, a área A desse triângulo é: $A = \dfrac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

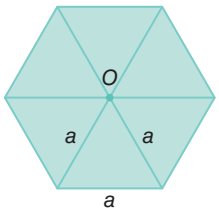
Área do hexágono regular



Os vértices de um hexágono regular dividem a circunferência circunscrita a ele em seis arcos congruentes; logo, cada um desses arcos mede 60°. Assim, o ângulo central correspondente a cada um dos arcos também mede 60°.

Considere o hexágono $ABCDEF$ inscrito na circunferência de centro O.

Note que $OA = OB$ e $m(A\hat{O}B) = 60°$, temos $m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = 60°$; portanto, o triângulo AOB é equilátero. Assim, a área A de um hexágono regular de lado a é seis vezes a área de um triângulo equilátero de lado a, pois as diagonais que passam pelo centro O desse hexágono dividem-no em seis triângulos equiláteros de lado a:



$$A = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \boxed{A = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}$$

Observação

Dizemos que uma circunferência é circunscrita a um polígono quando passa por todos os vértices do polígono. E uma circunferência é inscrita em um polígono quando tangencia todos os lados do polígono.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

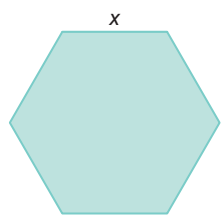
4. Um tipo de lajota no formato de hexágono regular é vendido em caixas de 20 peças de mesmo tamanho, totalizando 0,51 m². Calcule a medida do lado de cada peça, em centímetro. (Adote: $\sqrt{3} = 1{,}7$.)

Resolução

Como 0,51 m² = 5.100 cm², temos que a área A de cada peça hexagonal é:

$$A = \frac{5.100}{20}\ \text{cm}^2 = 255\ \text{cm}^2$$

Indicando por x a medida, em centímetro, do lado de cada peça, temos que a área A pode ser expressa por: $A = \dfrac{3x^2\sqrt{3}}{2}$.



Assim, devemos ter:

$$\frac{3x^2\sqrt{3}}{2} = 255 \Rightarrow \frac{3x^2 \cdot 1{,}7}{2} = 255 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5{,}1x^2}{2} = 255 \Rightarrow 5{,}1x^2 = 510 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 \therefore x = 10$$

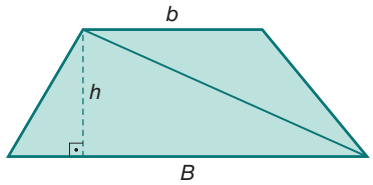
Concluímos, então, que o lado de cada peça mede 10 cm.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Área do trapézio

Traçando uma diagonal de um trapézio de altura h e bases b e B, nós o dividimos em dois triângulos de altura h em relação às bases de medidas b e B. Observe a figura a seguir.



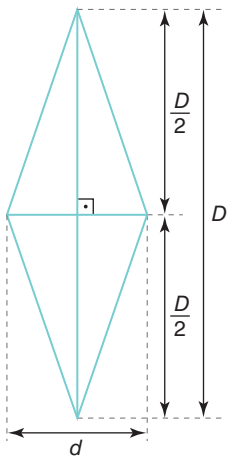
A área A do trapézio é a soma das áreas desses dois triângulos:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{B \cdot h + b \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

Ou seja, a área A do trapézio é igual à metade do produto da medida da altura pela soma das medidas das bases.

Área do losango

As diagonais de um losango cruzam-se perpendicularmente no ponto médio de cada uma delas. Logo, sendo D e d as medidas dessas diagonais, a área A do losango é o dobro da área de um triângulo de base d e altura $\frac{D}{2}$:



$$A = 2 \cdot \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{d \cdot D}{2}}$$

Ou seja, a área A do losango é a metade do produto das medidas das diagonais.

Observação

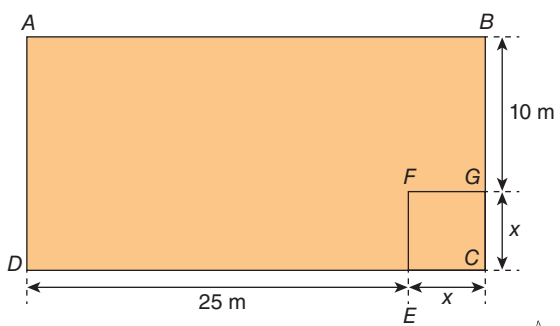
O losango também é um paralelogramo; logo, sua área pode ser calculada como a área de um paralelogramo, isto é, o produto das medidas da base e da altura.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

17. Um arquiteto estimou que uma parede retangular pode ser revestida com exatamente 600 azulejos retangulares de 20 cm de comprimento por 10 cm de largura, sem precisar cortar nenhuma peça. Como a proprietária prefere azulejos quadrados, o arquiteto sugeriu azulejos quadrados com 25 cm de lado, pois, assim, também não será preciso cortar nenhuma peça. Quantos desses azulejos quadrados são necessários para revestir a parede? **17.** 192 azulejos

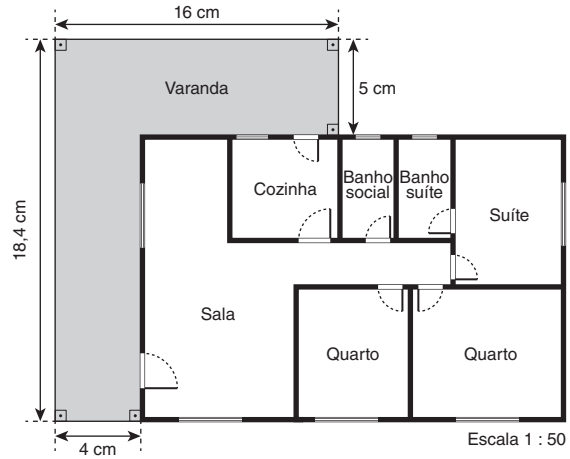
18. Na construção de uma casa em um terreno retangular $ABCD$ com 450 m² de área, foi reservada uma região quadrada $CEFG$ para a churrasqueira, conforme a figura. Qual é a medida x, em metro, do lado do quadrado reservado à churrasqueira? **18.** 5 m



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

19. (Enem) Uma empresa de engenharia projetou uma casa com a forma de um retângulo para um de seus clientes. Esse cliente solicitou a inclusão de uma varanda em forma de L. A figura apresenta a planta baixa desenhada pela empresa, já com a varanda incluída, cujas medidas, indicadas em centímetro, representam os valores das dimensões da varanda na escala de 1 : 50.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

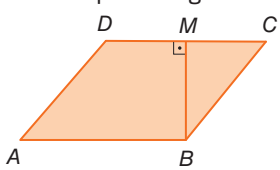


A medida real da área da varanda, em metro quadrado, é **19.** alternativa **a**

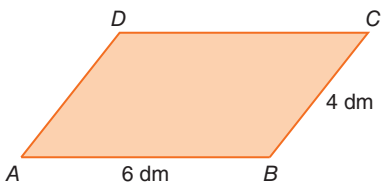
a. 33,40 **c.** 89,24 **e.** 534,40

b. 66,80 **d.** 133,60

20. O paralelogramo *ABCD*, a seguir, tem perímetro 22 cm; *M* é o ponto médio de $\overline{DC}$, e $\overline{AD}$ tem 2 cm a mais que $\overline{DM}$. Calcule a área desse paralelogramo. **20.** 24 cm²



21. A medida da altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do paralelogramo a seguir é 3 dm.

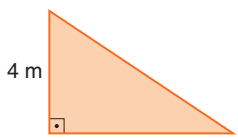


21. 4,5 dm

Qual é a medida da altura relativa ao lado $\overline{BC}$?

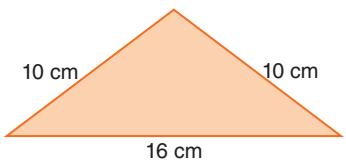
22. Calcule a área de cada um dos triângulos a seguir.

a.



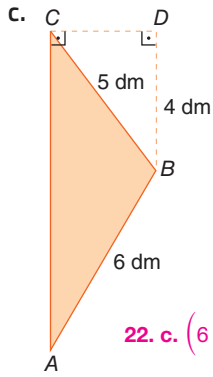
22. a. 12 m²

b.



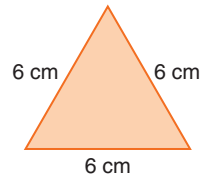
22. b. 48 m²

c.



22. c. $\left(6+\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ dm²

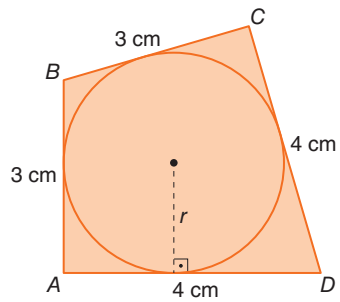
d.



22. d. $9\sqrt{3}$ cm²

23. A figura apresenta uma circunferência inscrita em um quadrilátero *ABCD* de área igual a 12 cm².

Determine a medida *r*, em centímetro, do raio dessa circunferência. **23.** $r = \frac{12}{7}$ cm



24. Para medir a área do terreno representado na Figura 1, um perito circunscreveu um retângulo *ABDF* ao terreno, conforme mostra a Figura 2. Quanto mede a área desse terreno? **24.** 142 m²

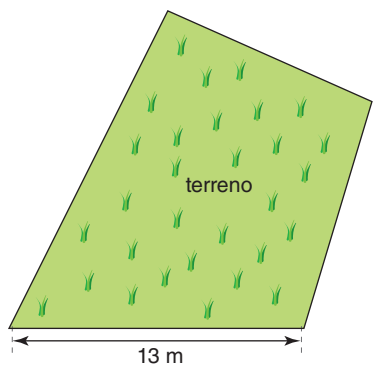


Figura 1

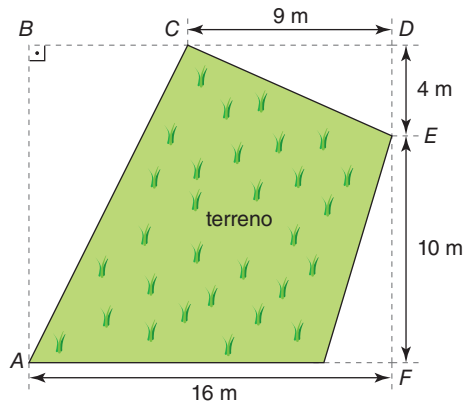


Figura 2

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

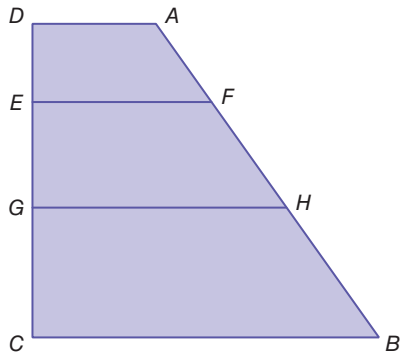
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

25. Um terreno com a forma de um trapézio *ABCD*, retângulo em *D* e *C* e bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, foi dividido em três lotes por meio dos segmentos de reta $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, paralelos às bases, conforme mostra a figura a seguir. Dado que $AB = 60$ m, $BC = 56$ m, $CD = 48$ m, $DA = 20$ m, $DE = 12$ m e $EG = 16$ m, calcule:

25. a. 15 m, 20 m e 25 m, respectivamente.

a. a medida, em metro, de $\overline{AF}$, $\overline{FH}$ e $\overline{HB}$;

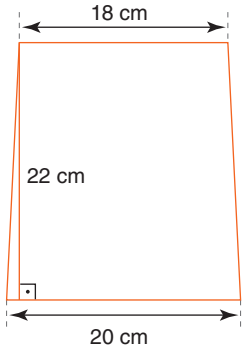
b. a medida, em m², da área do lote *ADEF*. **25. b.** 294 m²



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

26. Um fabricante de embalagens recebeu uma encomenda de caixas para panetone. Cada caixa deve ter quatro faces em forma de trapézio, com as dimensões indicadas a seguir, e duas faces quadradas e paralelas (tampa e fundo).





ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

26. 2.396 cm²

Antes de comprar o papelão necessário para a confecção das caixas, o fabricante precisará saber a medida da área da embalagem de uma caixa. Quanto mede essa área?

27. A obra *Selva Mãe do Rio Menino* (fotografia a seguir) rendeu a Daiara Tukano, em setembro de 2020, o título de autora do maior mural de arte urbana feito por uma artista indígena no mundo. A arte mural, na lateral de um edifício, foi realizada para a 5ª edição do Circuito Urbano de Arte (Cura), e tem cerca de 48 metros de altura e 28 metros de largura. Daiara Hori Figueroa Sampaio é artista, ativista dos direitos indígenas e comunicadora, e pertence ao povo indígena Yepá Mahsã, mais conhecido como Tukano, do Alto do Rio Negro, na Amazônia. "Sobre o mural *Selva Mãe do Rio Menino*, localizado no centro de Belo Horizonte (MG), Daiara explicou que uniu elementos de diversas etnias indígenas do estado na obra. 'A mãe tem uma pintura no rosto Krenak, uma roupa Pataxó, uma pintura Xacriabá e segura uma criança que é o Rio Menino, porque eu aprendi com os Krenak que o Rio Doce era o avô deles'", disse a artista em entrevista à TV Cultura.

Elaborado com base em: https://abra.com.br/artigos/daiara-tukano-autora-do-maior-mural-de-um-artista-indigena-no-mundo/; https://cultura.uol.com.br/entretenimento/noticias/2021/10/26/2245_daiara-tukano-fala-sobre-mural-selva-mae-do-rio-menino-maior-do-mundo-feito-por-um-indigena.html. Acesso em: 19 set. 2024.



© DAIARA TUKANO. FOTO: BRUNO FIGUEIREDO - CURA - CIRCUITO URBANO DE ARTE

TUKANO, Daiara. *Selva Mãe do Rio Menino*, Belo Horizonte (MG), 2020. Acrílica em alvenaria, 48 x 28 m. Cura – Circuito Urbano de Arte 2020.

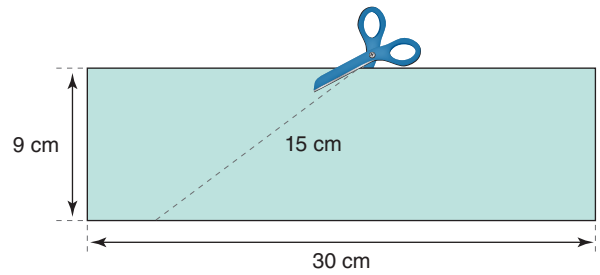
Durante as celebrações do Abril Indígena em 2025, uma escola deseja reproduzir o painel de Daiara Tukano para promover discussões acerca de temas como culturas e tradições dos povos indígenas, preservação ambiental e artes. Para a confecção do painel, a escola obteve o desenho com vetores em um programa de desenho digital, com base em imagem fotográfica retangular da obra *Selva Mãe do Rio Menino*. Uma gráfica digital ampliou o desenho imprimindo-o em *plotters* de recorte, que são adesivos com grande dimensão. Todos os adesivos foram aplicados sobre um mural no pátio da escola, cobrindo uma área retangular de 53,76 m², com a base horizontal e menor que a altura. **27.** 9,6 m

Dado que o desenho digital executado obtido pela escola é um retângulo com 336 cm² de área e 14 cm de base, sendo esta menor que a altura do desenho digital, calcule a altura, em metro, do painel em exposição na escola.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

28. Uma folha retangular de cartolina com 30 cm de comprimento por 9 cm de largura foi separada em dois trapézios por meio de um corte de 15 cm feito com uma tesoura, conforme mostra a figura a seguir. Dado que a área de um dos trapézios é o dobro da área do outro, calcule as medidas das bases do trapézio de maior área.

28. 26 cm e 14 cm



29. Em um losango, cada lado mede $3\sqrt{5}$ cm, e as medidas das diagonais estão na razão 1 : 2. Calcule a área desse losango. **29.** 36 cm²

30. (Enem) O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da Figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas Figuras 2 e 3.

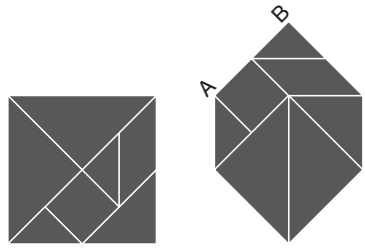


Figura 1 Figura 2 Figura 3

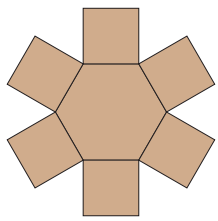
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Se o lado *AB* do hexágono mostrado na Figura 2 mede 2 cm, então a área da Figura 3, que representa uma "casinha", é igual a **30.** alternativa **b**

a. 4 cm²
b. 8 cm²
c. 12 cm²
d. 14 cm²
e. 16 cm²

31. $150(\sqrt{3}+4)$ cm²

31. Para construir uma caixa de fundo hexagonal e sem tampa, um artesão recortou em papelão a figura representada, formada por um hexágono regular de lado 10 cm e seis quadrados. Qual é a área dessa figura?



32. Represente, em uma folha, a planta baixa de um espaço da escola e indique a escala. Depois, peça a um colega que determine a área desse espaço. Destroquem para corrigi-los. **32.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 5 a 9.

TRABALHO E JUVENTUDES

Grafiteiro

OBJETO DIGITAL Carrossel de imagens: A arte do grafite

O grafite surgiu como uma expressão artística que ocorre em espaços públicos, ganhando grande impulso nos anos 1970 em Nova York, onde jovens da periferia, começaram a popularizar essa forma de arte nas ruas e becos da cidade, usando em manifestações e lutas sociais.

Como uma arte marginalizada, no início, o grafite foi tratado como vandalismo e associado à criminalidade. Esse preconceito resultou em sua exclusão das galerias de arte e teve tratamento legal severo em muitos lugares. Com o tempo, ganhou reconhecimento, sendo valorizado como uma forma legítima de expressão artística, refletindo uma mudança positiva na percepção pública e institucional.



VIKTOR_GLADKOV/ISTOCK/GETTY IMAGES

Grafiteira criando uma arte visual. Foto de 2023.

O trabalho de um grafiteiro envolve criar arte visual em espaços públicos e privados, frequentemente utilizando *sprays*, pincéis e estênceis para desenvolver murais e *tags* (assinaturas ou logos). Esses profissionais são responsáveis por conceituar e planejar suas obras, que podem variar desde letras estilizadas até imagens abstratas. É preciso obter permissões para atuar em espaços públicos e garantir que suas criações estejam em conformidade com as leis locais.

A profissão de grafiteiro beneficia a sociedade ao promover a expressão cultural e identidade, revitalizar áreas urbanas degradadas e engajar a comunidade em projetos colaborativos. Além disso, o grafite serve como uma ferramenta educativa, abordando questões sociais e políticas e estimulando discussões importantes.

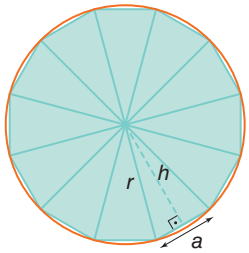
Agora, faça uma pesquisa sobre grafites e grafiteiros, e inspirado pela pesquisa crie em uma folha de papel ou em um papelão um grafite com um tema geométrico. Compartilhe sua produção com os colegas.

Trabalho e juventudes: Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Área do círculo



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Considere um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio r.

As diagonais que passam pelo centro do polígono dividem-no em n triângulos isósceles de base a e altura h; logo, a área desse polígono é:

$$n \cdot \frac{ah}{2} = (na) \cdot \frac{h}{2}$$

(na: perímetro do polígono)

Essa área é menor que a área do círculo; porém, fazendo o número n de lados aumentar indefinidamente (n tender para o infinito), verificamos que:

- o perímetro (na) do polígono tende a se igualar ao perímetro da circunferência ($2\pi r$);
- a altura h de cada triângulo tende a se igualar ao raio r da circunferência;
- a área desse polígono tende a se igualar à área A do círculo.

Assim, a expressão $(na) \cdot \left(\frac{h}{2}\right)$ tende a $2\pi r \cdot \frac{r}{2}$, que é a área A do círculo, isto é:

$$A = \pi r^2$$

Exemplo

O círculo central de um campo de futebol tem 9 m de raio; assim, sua área A é dada por:

$$A = \pi \cdot 9^2 \text{ m}^2 \Rightarrow A = 81\pi \text{ m}^2$$

Para obter uma aproximação dessa área, podemos substituir π por 3,14:

$$A \approx 81 \cdot 3{,}14 \text{ m}^2 \Rightarrow A \approx 254{,}34 \text{ m}^2$$

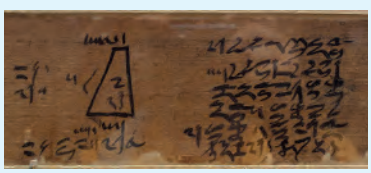
Mentes brilhantes

Mentes brilhantes: Aproveite para discutir com os estudantes as explicações para essa fórmula. Consulte a fonte dessa seção e encontre alternativas interessantes. O trabalho com a História da Matemática Egípcia permite um ponto de partida para discussões críticas sobre como o conhecimento é produzido. Aproveite para mostrar aos estudantes que o conhecimento matemático é diverso e que várias culturas ao redor do mundo contribuíram para o seu desenvolvimento.

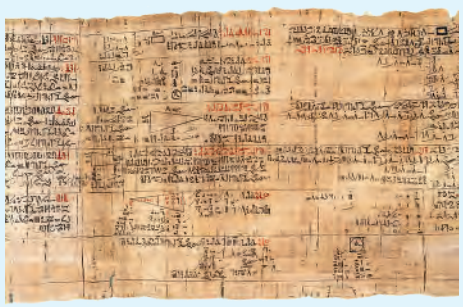
A área do círculo no Antigo Egito

O conhecimento que temos hoje da matemática egípcia provém de cinco papiros, dos quais os mais importantes são o papiro Rhind e o papiro Moscou. Esses dois documentos datam provavelmente do século XVIII a.C., mas seu conteúdo trata de documentos ainda mais antigos.

O papiro Rhind foi descoberto por volta de 1850 pelo arqueólogo Alexander Henry Rhind e levado por ele para o Templo de Luxor, no Antigo Egito. Após a morte de Rhind, o papiro foi comprado pelo Museu Britânico em 1865. Hoje ele é formado por um rolo contendo 14 folhas de papiros com cerca de 40 cm de largura e 23 cm de altura, coladas em um de seus lados, perfazendo 513 cm de comprimento e contendo 87 problemas matemáticos e suas soluções.


HERITAGE IMAGES/HULTON ARCHIVE/GETTY IMAGES

Papiro Moscou.


THE TRUSTEES OF THE BRITISH MUSEUM/SCALA, FLORENÇA - MUSEU BRITÂNICO, LONDRES

Papiro Rhind.

Esse papiro é também conhecido como papiro Ahmose ou papiro Ahmes em razão de ter sido copiado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmose, segundo o qual é a cópia de trabalhos mais antigos – provavelmente se trata de um registro dos conhecimentos de Imhotep, físico e arquiteto da época do faraó Djozer da 3ª Dinastia.

Problemas de medidas sobre volumes e áreas das figuras planas e dos sólidos mais familiares foram, em sua maioria, trabalhados nos papiros egípcios. Um método para calcular a área do círculo, por exemplo, era uma necessidade prática para determinar o volume de um cilindro circular reto, problema relativo ao cálculo de capacidades de celeiros cilíndricos utilizados pelos egípcios. Esse método aparece nos problemas 41, 42, 43, 48 e 50 do papiro Rhind.

Os problemas 48 e 50 são muito interessantes do ponto de vista matemático e podem dar uma pista de como os egípcios chegaram à fórmula para o cálculo da área do círculo. Vejamos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Problema 48: "Compare a área do círculo com a do quadrado circunscrito".

Este é o único entre os 87 problemas do papiro Rhind em que a solução contém uma ilustração geométrica.

Problema 50: "Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?".

A solução apresentada no papiro é: "Subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado. Esta é sua área". Isto é, considerando d o diâmetro do círculo (corpo redondo), a área do círculo é calculada por:

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

Considerando a fórmula para o cálculo da área, como conhecemos hoje – $A = \pi r^2$ e o raio r do círculo é a metade do seu diâmetro d –, a fórmula egípcia oferece uma boa aproximação para π:

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \Rightarrow \pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3{,}160493$$

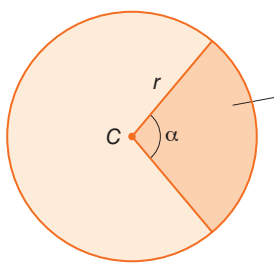
Observe que, como $\pi = 3{,}141592\ldots$, o erro é de apenas 0,0189.

Portanto, embora a solução apresentada no problema 50 seja dada para um valor particular do diâmetro d do círculo, a partir desta solução, foi possível chegar a uma fórmula geral para o cálculo (aproximado) da área de um círculo que independe de qual seja o valor de d.

Elaborado com base em: GASPAR, M. T.; MAURO, S. Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais** [...]. Recife: SBEM, 2004. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/files/viii/arquivos/GR07MC.htm. Acesso em: 9 set. 2024.

Área do setor circular

Em um círculo, a região limitada pelos lados de um ângulo central é chamada de **setor circular**.

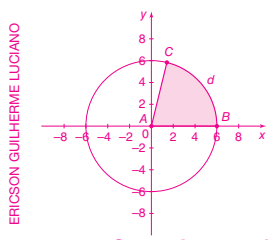


setor circular de raio r e ângulo central de medida α

A área A_{setor} desse setor pode ser calculada por meio da seguinte regra de três:

Ângulo central		Área
$360°$	———	πr^2
α	———	A_{setor}

Reflexão: Sim, por meio de uma regra de três podemos calcular a área de um setor circular a partir dos comprimentos do raio e do arco do setor. Por exemplo, consideremos um setor circular com 6 cm de raio e 8 cm de arco:



ERICSON GUILHERME LUCIANO

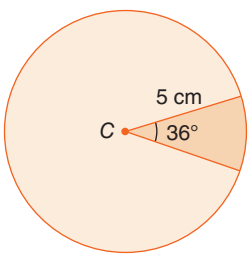
Resolvendo a regra de três a seguir, obtemos a área A_{setor} do setor circular AOB:

Comprimento do arco (cm)		Área (cm²)
$2 \cdot \pi \cdot 6$	———	$\pi \cdot 6^2$
8	———	A_{setor}

Concluímos, então, que: $A_{setor} = 24\ cm^2$.

Exemplo

A área A_{setor} do setor circular de raio 5 cm e ângulo central de 36° é dada por:



Ângulo central (grau)		Área (cm²)
360	———	$\pi \cdot 5^2$
36	———	A_{setor}

$$A_{setor} = \frac{36° \cdot 25\pi}{360°}\ cm^2 = \frac{5\pi}{2}\ cm^2$$

Reflexão

Conhecendo os comprimentos do raio e do arco de um setor circular, é possível calcular a área desse setor?

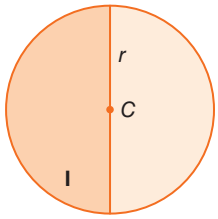
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

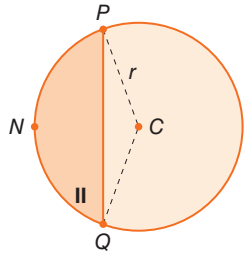
Área do segmento circular

Toda corda de um círculo divide-o em duas partes, chamadas de **segmentos circulares**.

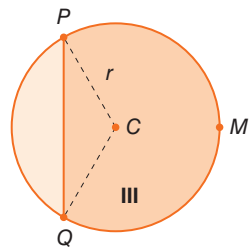
A área de um segmento circular de raio r pode ser igual, maior ou menor que a área do semicírculo de raio r. Observe os três casos:



$A_{seg.\ I} = \frac{\pi r^2}{2}$



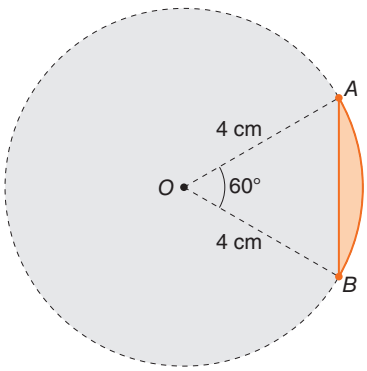
$A_{seg.\ II} = A_{(setor\ CPNQ)} - A_{(triângulo\ CPQ)}$



$A_{seg.\ III} = A_{(setor\ CPMQ)} + A_{(triângulo\ CPQ)}$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

5. Calcule a área do segmento circular laranja no círculo de centro O a seguir.



Resolução

O cálculo da área do setor circular OAB é dado por:

Ângulo central (grau)		**Área** (cm^2)
360	———	$\pi \cdot 4^2$
60	———	A_{setor}

Portanto:

$$A_{setor} = \frac{60° \cdot 16\pi}{360°}\ cm^2 = \frac{8\pi}{3}\ cm^2$$

Como $OA = OB$ e $m(A\hat{O}B) = 60°$, temos $m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = 60°$; portanto, o triângulo AOB é equilátero.

Sabemos que a área de um triângulo equilátero com lados de medida a é dada por:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Assim, indicando por A_T a área do triângulo AOB, temos:

$$A_T = \frac{4^2\sqrt{3}}{4}\ cm^2 \Rightarrow A_T = 4\sqrt{3}\ cm^2$$

Concluímos, então, que a área A_{seg} do segmento circular laranja na figura é dada por:

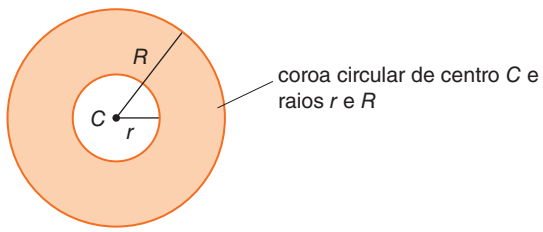
$$A_{seg} = A_{setor} - A_T = \left(\frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}\right) cm^2$$

Ou, ainda,

$$A_{seg} = \frac{4(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}\ cm^2$$

Área da coroa circular

A região do plano limitada por duas circunferências concêntricas (de mesmo centro) é chamada de **coroa circular**.

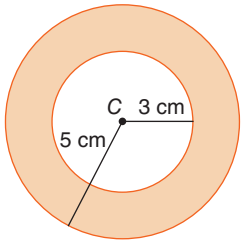


ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para entender o cálculo da área da coroa circular, imagine um círculo de cartolina de centro C e raio R, do qual você retira uma parte circular de mesmo centro C e raio r. A área A da coroa assim obtida é a diferença entre a área do círculo original e a área do círculo retirado, isto é, $A = \pi R^2 - \pi r^2$ ou, ainda:

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Exemplo



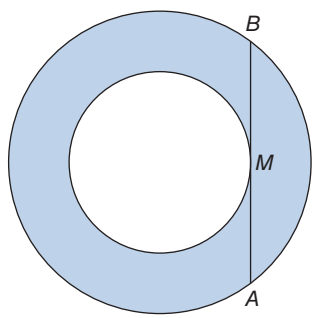
A área A da coroa circular na figura é:
$A = (\pi \cdot 5^2 - \pi \cdot 3^2)\ \text{cm}^2 \Rightarrow A = 16\pi\ \text{cm}^2$

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Aponte o erro e refaça a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Em uma coroa circular, uma corda $\overline{AB}$ de 8 cm da circunferência externa tangencia a circunferência interna em um ponto M, conforme a figura.



Análise da resolução: A resolução do item **a** está correta, porém a do item **b** está incorreta, pois, embora os valores R e r sejam indeterminados, é possível calcular a área A da coroa circular; observe:

$$\begin{cases} R^2 = r^2 + 16 & \text{(I)} \\ A = \pi(R^2 - r^2) & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$A = \pi(r^2 + 16 - r^2) \Rightarrow A = 16\pi$$

Logo, a área da coroa circular mede $16\pi\ \text{cm}^2$.

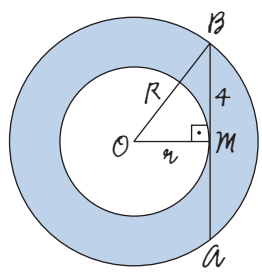
a. Indicando por r e R as medidas, em centímetro, dos raios interno e externo da coroa circular, respectivamente, é possível determinar essas medidas?

b. Calcule a área dessa coroa circular.

Resolução

a) Sendo O o centro da coroa circular, temos:
Aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo OMB:

$$R^2 = r^2 + 4^2$$



Essa equação é indeterminada, pois existem infinitos pares de valores R e r que a satisfazem, por exemplo:

$R = 5$ e $r = 3$; $R = 6$ e $r = 2\sqrt{5}$; $R = 8$ e $r = 4\sqrt{3}$.

b) Pelo item (a) concluímos que não é possível determinar as medidas R e r. Logo, não é possível calcular a área da coroa circular.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

Este momento propicia o trabalho com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Uma técnica da Cartografia

Em Cartografia, várias técnicas podem ser aplicadas para o cálculo da área de uma região com base na área de um mapa. Veja uma delas a seguir.



TCLY/ISTOCK/GETTY IMAGES

Profissional de cartografia medindo um mapa. Foto de 2018.

Há diversos métodos para a confecção de mapas. Neste exemplo, consideramos mapas resultantes de projeções equivalentes, isto é, projeções que mantêm uma razão constante entre a área de qualquer região no mapa e sua correspondente na superfície terrestre. Dizemos que esse tipo de mapa conserva a área. Para medir a área de uma região nesse tipo de mapa, pode-se usar papel transparente quadriculado, com um ponto no centro de cada quadrado. Coloca-se o papel sobre o mapa, em posições aleatórias, e contam-se, em cada uma delas, os pontos centrais dos quadrados que ficaram no interior ou no contorno do mapa. A seguir, calcula-se a média aritmética entre os números de pontos obtidos nessas contagens.

Multiplicando essa média aritmética pela área de um quadrado, obtém-se uma boa aproximação da área do mapa.

Por exemplo, a Figura I é um mapa do estado de Minas Gerais na escala 1 : 39.400.000. A Figura II representa um papel transparente quadriculado, com quadrados de 0,36 cm de lado, sobreposto ao mapa da Figura I. E a Figura III representa outra posição do papel sobreposto ao mesmo mapa.

Observe, na Figura II, que 29 pontos ficaram no interior ou no contorno do mapa, e na Figura III ficaram 28 pontos. Como a média aritmética entre esses números é 28,5 e a área de cada quadradinho é um valor próximo de 0,13 cm², concluímos que a área do mapa é aproximadamente:

$$(28{,}5 \cdot 0{,}13)\ \text{cm}^2 = 3{,}705\ \text{cm}^2$$

Com base na área do mapa e na escala usada em sua construção, pode-se calcular a área da região representada. Para isso, aplicamos o seguinte teorema:

> A razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

No exemplo, escolhemos um mapa construído na escala 1 : 39.400.000, e, portanto, cada comprimento de 1 cm nesse mapa equivale a 39.400.000 cm do estado mineiro. Assim, para calcular a área A desse estado, recorremos à razão entre as áreas de duas figuras semelhantes, que é igual ao quadrado da razão de semelhança. Ou seja:

$$\frac{3{,}705}{A} = \left(\frac{1}{39.400.000}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \approx 5{,}75149 \cdot 10^{15}\ \text{cm}^2$$

$$\therefore A \approx 575.149\ \text{km}^2$$

Comparando esse número com a medida oficial da área do território mineiro, que é 586.519,727 km², temos uma ideia da precisão desse método.

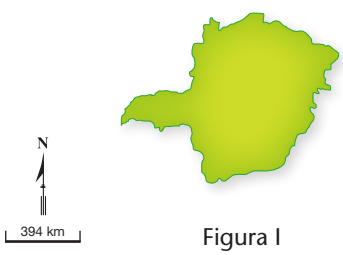


Figura I

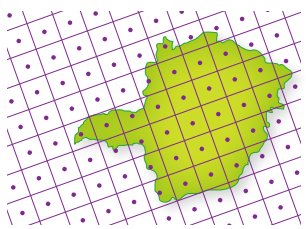


Figura II

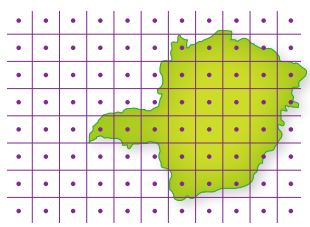


Figura III

Atividade

Faça a atividade no caderno.

Escolha um estado brasileiro de sua preferência, com exceção de Minas Gerais, que já foi usado como exemplo, e, com base em um mapa de um atlas que contenha a escala, calculem a área desse estado. Depois, consultem no *site* do IBGE a medida oficial do território desse estado.

Matemática sem fronteiras: 1. A resposta dependerá do estado escolhido.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

33. Calcule:

a. a área do círculo inscrito em um quadrado de lado 6 cm; **33. a.** 9π cm²

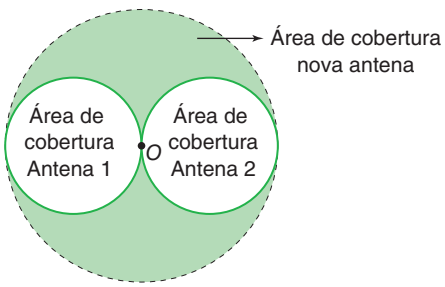
b. a área do círculo circunscrito a um quadrado de lado 6 cm. **33. b.** 18π cm²

34. Uma fábrica de conservas lançou no mercado *pizzas* congeladas em dois tamanhos: a pequena, que tem a forma de um círculo com raio de 8 cm, e a grande, que tem a forma de um círculo com raio de 12 cm. Os preços de venda aos distribuidores foram estabelecidos proporcionalmente às áreas das *pizzas*. Se a menor delas custa R$ 20,00 ao distribuidor, o preço da maior é:

a. R$ 45,00
b. R$ 40,00
c. R$ 36,00
d. R$ 30,00
e. R$ 39,00

34. alternativa **a**

35. (Enem) Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto *O*, como representado na figura.



O ponto *O* indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

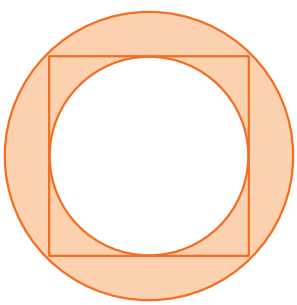
Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

a. 8π
b. 12π
c. 16π
d. 32π
e. 64π

35. alternativa **a**

36. Calcule a área da coroa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita a um quadrado de lado 4 cm.

36. 4π cm²

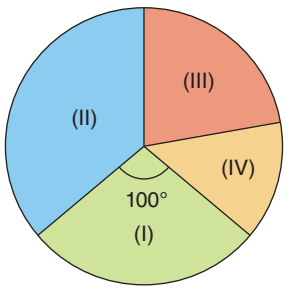


37. Uma toalha circular com 1,6 m de diâmetro é colocada sobre uma mesa circular de maneira que o centro da toalha coincida com o centro da mesa. A área da parte da toalha que descai ao redor da mesa é $0{,}39\pi$ m². Qual é o raio da mesa? **37.** 0,5 m



URFINGUSS/ISTOCK/GETTY IMAGES

38. Um círculo de raio 6 cm foi dividido em setores circulares para ser usado como um gráfico estatístico, conforme a figura.



a. Calcule a área A_I do setor I. **38. a.** 10π cm²

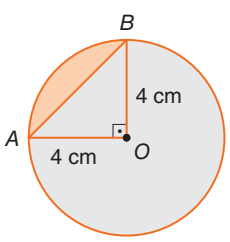
b. Sabendo que a área do setor III é 8π cm², calcule a medida α do ângulo central desse setor. **38. b.** $\alpha = 80°$

c. Sabendo que o comprimento do arco do setor II é $\frac{13\pi}{3}$ cm, calcule a medida β do ângulo central desse setor. **38. c.** $\beta = 130°$

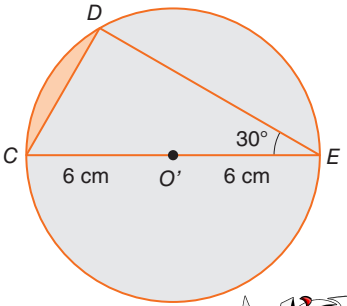
d. De acordo com as informações dos itens anteriores, calcule a área do setor IV. **38. d.** 5π cm²

39. Os círculos de centros *O* e *O'*, representados a seguir, têm raios de 4 cm e 6 cm, respectivamente. Calcule, em cada item, a área do segmento circular alaranjado.

a. **39. a.** $4(\pi - 2)$ cm²



b. **39. b.** $3(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm²



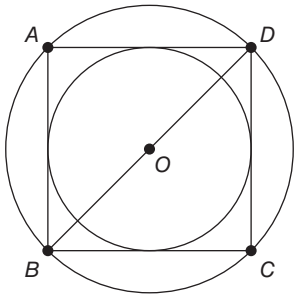
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

40. (Enem 2022 Reaplicação/PPL) Uma empresa de publicidade está criando um logotipo que tem o formato indicado na figura. O círculo menor está inscrito no quadrado *ABCD*, e o círculo maior circunscreve o mesmo quadrado. Considere *S*1 a área do círculo menor e *S*2 a área do círculo maior.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



A razão da área do círculo maior para o círculo menor é igual a **40.** alternativa **c**

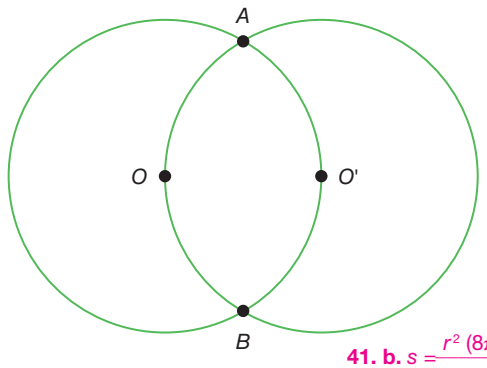
a. $\sqrt{2}$ **c.** 2 **e.** 16

b. $\frac{1}{2}$ **d.** 8

41. Duas circunferências de centros *O* e *O'*, contidas em um mesmo plano e com raios de mesma medida *r*, estão dispostas de modo que cada uma passa pelo centro da outra e interceptam-se nos pontos *A* e *B*, conforme mostra a figura. Calcule:

a. a medida do ângulo $A\hat{O}B$ em grau. **41. a.** 120°

b. a área da região comum aos círculos limitados por essas circunferências. (Dê a resposta em função de *r*.)



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

41. b. $s = \frac{r^2(8\pi - 6\sqrt{3})}{12}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 10 a 12.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. $20.000\sqrt{2}$ km

1. A órbita de um satélite artificial é uma circunferência de raio 30.000 km, concêntrica com a Terra. Um asteroide cruzou essa órbita, determinando uma corda de 20.000 km. Nessa trajetória, calcule:

a. a menor distância entre o asteroide e o centro da Terra;

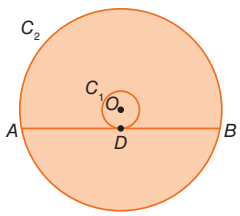
b. a menor distância entre o asteroide e a superfície da Terra, sabendo que o raio do nosso planeta mede 6.370 km. (Considere: $\sqrt{2} = 1{,}4$.)

JPL-CALTECH/NASA



Representação artística do satélite *Orbiting Carbon Observatory*, destinado a medir a presença de carbono na atmosfera terrestre. **1. b.** 21.630 km

2. As circunferências C_1, de raio 5 cm, e C_2, de raio 13 cm, são concêntricas, isto é, têm o mesmo centro *O*. O segmento $\overline{AB}$ é tangente a C_1 no ponto *D*.



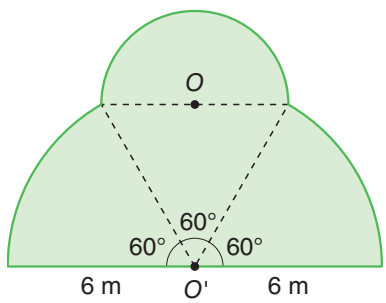
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

A medida do segmento $\overline{AB}$ é:

a. 21 cm **c.** 19 cm **e.** 24 cm

b. 18 cm **d.** 25 cm **2.** alternativa **e**

3. A figura a seguir representa o projeto de um jardim cujo contorno é formado por um segmento de reta e por arcos de circunferência de centros *O* e *O'*.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com as medidas indicadas na figura, conclui-se que o perímetro do jardim terá: **3.** alternativa **d**

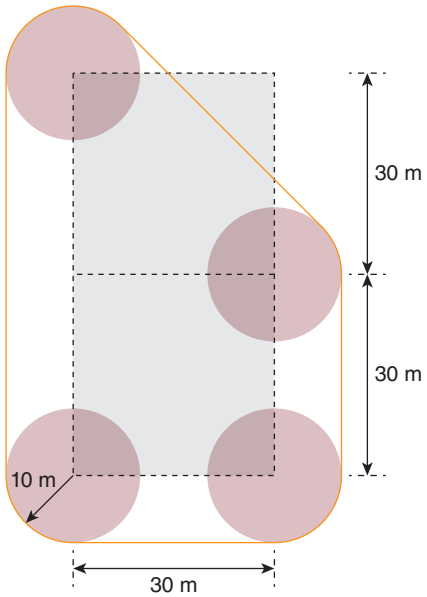
a. $(6 + 10\pi)$ m **c.** 7π m **e.** $(6 + 15\pi)$ m

b. $(15 + 5\pi)$ m **d.** $(12 + 7\pi)$ m

4. (Fuvest-SP 2022) Quatro tanques cilíndricos são vistos de cima (em planta baixa), conforme a figura. Todos têm 10 m de raio e seus centros se posicionam em vértices dos dois quadrados tracejados adjacentes, ambos com 30 m de lado. Uma fita de isolamento, esticada e paralela ao solo, envolve os 4 tanques, dando uma volta completa (linha em laranja na figura).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

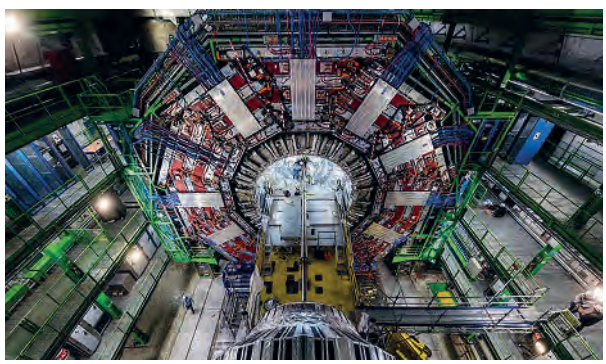


O comprimento da fita, em metros, é: **4.** alternativa **b**

a. $20\pi + 30(3 + \sqrt{2})$
b. $20\pi + 30(4 + \sqrt{2})$
c. $25\pi + 15(4 + \sqrt{2})$
d. $25\pi + 30(4 + \sqrt{2})$
e. $25\pi + 30(4 + 2\sqrt{2})$

5. O *Large Hadron Collider* (LHC), localizado na fronteira franco-suíça, a mais de 100 m abaixo do nível do solo, é o maior acelerador de partículas e o de maior energia existente no mundo. Tem a forma de um anel circular com 4,3 km de raio, formado por uma sucessão de tubos, no interior dos quais partículas giram próximas à velocidade da luz. Seu principal objetivo é obter dados sobre colisões de feixes de partículas subatômicas. Os cientistas afirmam que com essas colisões seria possível reproduzir o *Big Bang* em uma escala reduzida.

SAMUEL JOSEPH HERTZOG/CERN



Large Hadron Collider (LHC), em Genebra (Suíça). Foto de 2018.

Supondo que um próton gire, em um mesmo sentido, no interior desse acelerador à velocidade de 230.000 km/s:

a. calcule a distância percorrida por essa partícula, em quilômetro, em 1 hora (Dê a resposta em notação científica.); **5. a.** $8{,}28 \cdot 10^8$

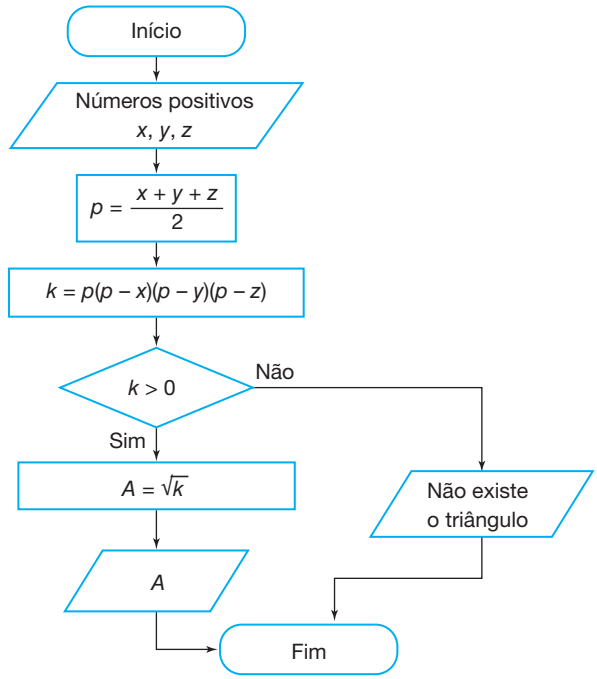
5. b. 30.646.605

b. considerando a aproximação com cinco casas decimais para o número π, calcule o número de voltas completas que a partícula gira no anel em 1 hora.

6. Calcule a área de um paralelogramo *ABCD* cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 12 cm, respectivamente, e $m(A\hat{B}C) = 135°$. **6.** $48\sqrt{2}$ cm²

7. c. $A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, em que $p = \dfrac{x+y+z}{2}$

7. Usando o fluxograma a seguir, calculamos a área *A* de um triângulo cujos lados, em uma mesma unidade de comprimento, medem *x*, *y* e *z*. De acordo com esse fluxograma, responda aos itens seguintes.



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

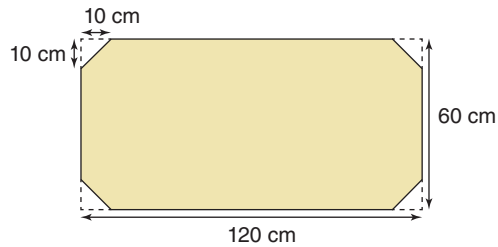
7. a. $A = 10\sqrt{2}$

a. Calcule o valor de *A* para $x = 5$, $y = 6$ e $z = 9$.

b. A que conclusão nos conduz o fluxograma para $x = 2$, $y = 4$ e $z = 8$? **7. b.** Não existe o triângulo.

c. Obtenha a fórmula que expresse a área *A* de um triângulo em função do semiperímetro *p* e das medidas *x*, *y* e *z* de seus lados, expressos em uma mesma unidade de comprimento. (Essa fórmula é conhecida como teorema de Herão, em homenagem ao matemático grego Herão de Alexandria (10 d.C.-80 d.C.), seu criador.)

8. Para a confecção do tampo octogonal de uma mesa de centro, um marceneiro usou uma tábua retangular com 120 cm de comprimento por 60 cm de largura. Desse retângulo, ele retirou quatro triângulos retângulos isósceles com catetos de 10 cm, conforme a figura. A parte remanescente da tábua é o tampo da mesa.



a. Qual é a área do tampo da mesa? **8. a.** 7.000 cm²

b. Qual é o perímetro do tampo da mesa?

8. b. $40(7 + \sqrt{2})$ cm

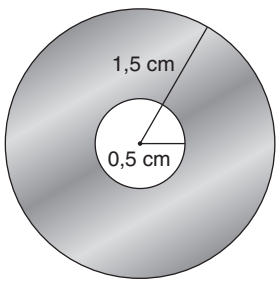
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. Um hexágono regular e um quadrado têm o mesmo perímetro. Sabendo que a diagonal do quadrado mede $3\sqrt{2}$ m, calcule a área do hexágono. **9.** $6\sqrt{3}$ m²

10. Um terreno tem a forma de um trapézio $ABCD$, retângulo em A e D, cuja base menor $\overline{AB}$ mede 31 m, e os lados $\overline{DA}$ e $\overline{BC}$ medem 10 m e 26 m, respectivamente. Calcule a área desse terreno em metro quadrado.

10. 430 m²

11. Uma placa retangular de aço tem 60 cm de comprimento por 30 cm de largura. Dessa placa será retirado o maior número possível de arruelas com 1,5 cm de raio externo e 0,5 cm de raio interno.

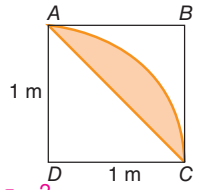


ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

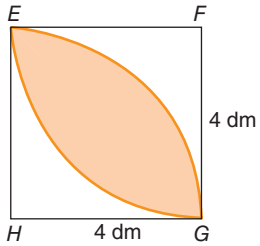
Que área, em centímetro quadrado, dessa placa será utilizada para a fabricação das arruelas? **11.** 400π cm²

12. Nas figuras a seguir, os quadriláteros são quadrados e os arcos são circulares, com centro e raio descritos em cada item. Calcule a área da região laranja em cada figura.

a. Centro D e raio 1 m.



b. Centros F e H e raios 4 dm.



12. a. $\frac{\pi - 2}{4}$ m²

12. b. $8(\pi - 2)$ dm²

13. Em uma região plana de determinado município, delimitada por um triângulo equilátero com $225\sqrt{3}$ km² de área, uma nova emissora de rádio pretende instalar pontos de transmissão que alcancem todos os pontos do município. Para isso, será fixada uma antena em cada um dos três vértices do triângulo equilátero, que contém em seu interior todo o município. Suponha que as três antenas tenham o mesmo alcance em todas as direções e desconsidere a altura de cada uma. Qual deve ser o raio mínimo de alcance de cada antena, para que se tenha a garantia de que todos os pontos do município sejam alcançados pelas transmissões?

13. $10\sqrt{3}$ km

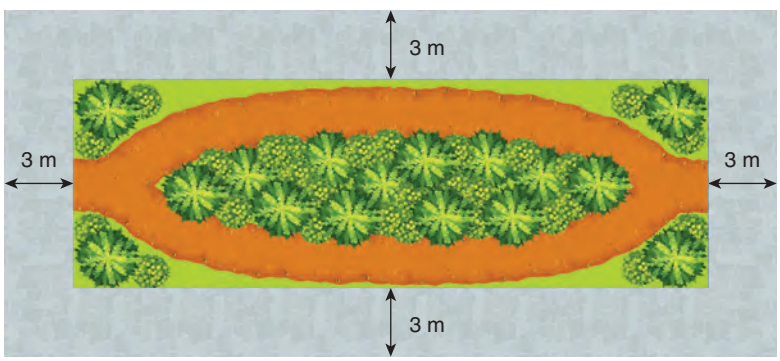
VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 4

1. Em uma estrada de ferro, a distância entre duas estações, A e B, é 12,56 km. Quantas voltas dá cada roda de um trem para ir de A até B se cada uma tem 0,5 m de raio? (Adote: $\pi = 3{,}14$.)

a. 4
b. 4.000
c. 8.000
d. 12.560
e. 16.000

1. alternativa **b**

2. Um jardim retangular é contornado por uma calçada com 3 m de largura constante, conforme mostra a figura a seguir. Dado que o comprimento do jardim é 20 m maior que a largura e que a calçada e o jardim, juntos, ocupam uma área de 576 m², o comprimento e a largura do jardim são, respectivamente:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

a. 36 m e 16 m
b. 40 m e 10 m
c. 42 m e 22 m
d. 30 m e 20 m
e. 30 m e 10 m

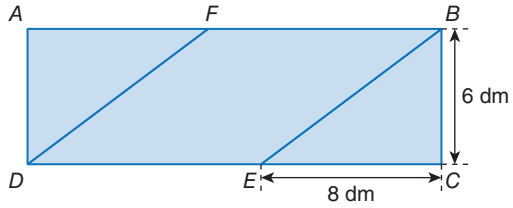
2. alternativa **e**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. (Unir-RO) Na figura abaixo, *ABCD* é um retângulo e *FBED* é um losango.
A área desse losango é:

a. 30 dm²
b. 54 dm²
c. 56 dm²
d. 60 dm²
e. 64 dm²

3. alternativa **d**



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

4. Em uma coroa circular de área de 16π cm², o raio externo mede o triplo do raio interno. Calcule a medida do raio externo, em centímetro. 4. alternativa **c**

a. $\sqrt{2}$ **b.** $2\sqrt{2}$ **c.** $3\sqrt{2}$ **d.** $4\sqrt{2}$ **e.** $5\sqrt{2}$

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, você poderá avaliar seu aprendizado e organizar seu conhecimento sobre os conceitos que foram abordados ao longo do capítulo. Para isso, responda às questões a seguir.

a. Qual é a diferença entre circunferência e círculo?
Ferramenta de estudo: a. Chama-se circunferência de centro *C* e raio *r* o conjunto dos pontos desse plano cujas distâncias ao ponto *C* são iguais a *r*. A reunião de uma circunferência com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de círculo.

b. Desenhe uma circunferência e indique no desenho os elementos relativos a pontos e linhas em uma circunferência estudados no capítulo.
b. O estudante deve seguir o modelo apresentado na página 112.

c. Em uma circunferência de centro C, considere uma corda $\overline{AB}$, que não passa por C, e o ponto médio *M* de $\overline{AB}$. Qual é a medida do ângulo $C\hat{M}A$? **c.** 90°, conforme a propriedade P1.

d. Quais são as possíveis posições relativas entre uma reta e uma circunferência? E entre duas circunferências?
d. Reta: secante, exterior e tangente; duas circunferências: externas, secantes, uma interna à outra, coincidentes e tangentes.

e. Em uma circunferência, quais são as relações entre as medidas de: um ângulo central e o arco correspondente; um ângulo central e o ângulo inscrito correspondente; e um ângulo central e o ângulo de segmento correspondente?
e. A medida, em grau, de um arco de circunferência é definida como a medida do ângulo central que o determina. A medida de um ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente. A medida de um ângulo de segmento é metade da medida do ângulo central correspondente.

f. Como você explicaria para um colega os procedimentos de Arquimedes para o cálculo do número π?
f. O estudante deve tomar como base o conteúdo exposto na página 121 para elaborar o próprio texto.

g. Obtenha expressões para o cálculo do comprimento *C* de uma circunferência e para o cálculo da área *A* de um círculo que envolvam a medida *d* do diâmetro.

h. Copie o quadro no caderno. Depois, utilize-o para converter 3 km² em cm².

g. $C = \pi \cdot d$; $A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2$

Relação entre as unidades de medida de área

km²	hm²	dam²	m²	dm²	cm²	mm²
3						

h. 30 hm²; 300 dam²; 3.000 m²; 30.000 dm²; 300.000 cm²; 3.000.000 mm².

MODELO MODELO

i. Elabore problemas, do cotidiano ou não, envolvendo área do círculo, área do setor circular, área do segmento circular e área da coroa circular.
i. Resposta pessoal.

Questões como essas, que envolvem verificação de seus conhecimentos teóricos, podem ser elaboradas por você sempre que considerar necessário sistematizar seu aprendizado sobre um conteúdo estudado. Considere abranger ao máximo conceitos relevantes e relacioná-los entre si, sempre que for possível. O uso de exemplos também auxilia no processo de fixação das ideias.

Se você teve dificuldade ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 5

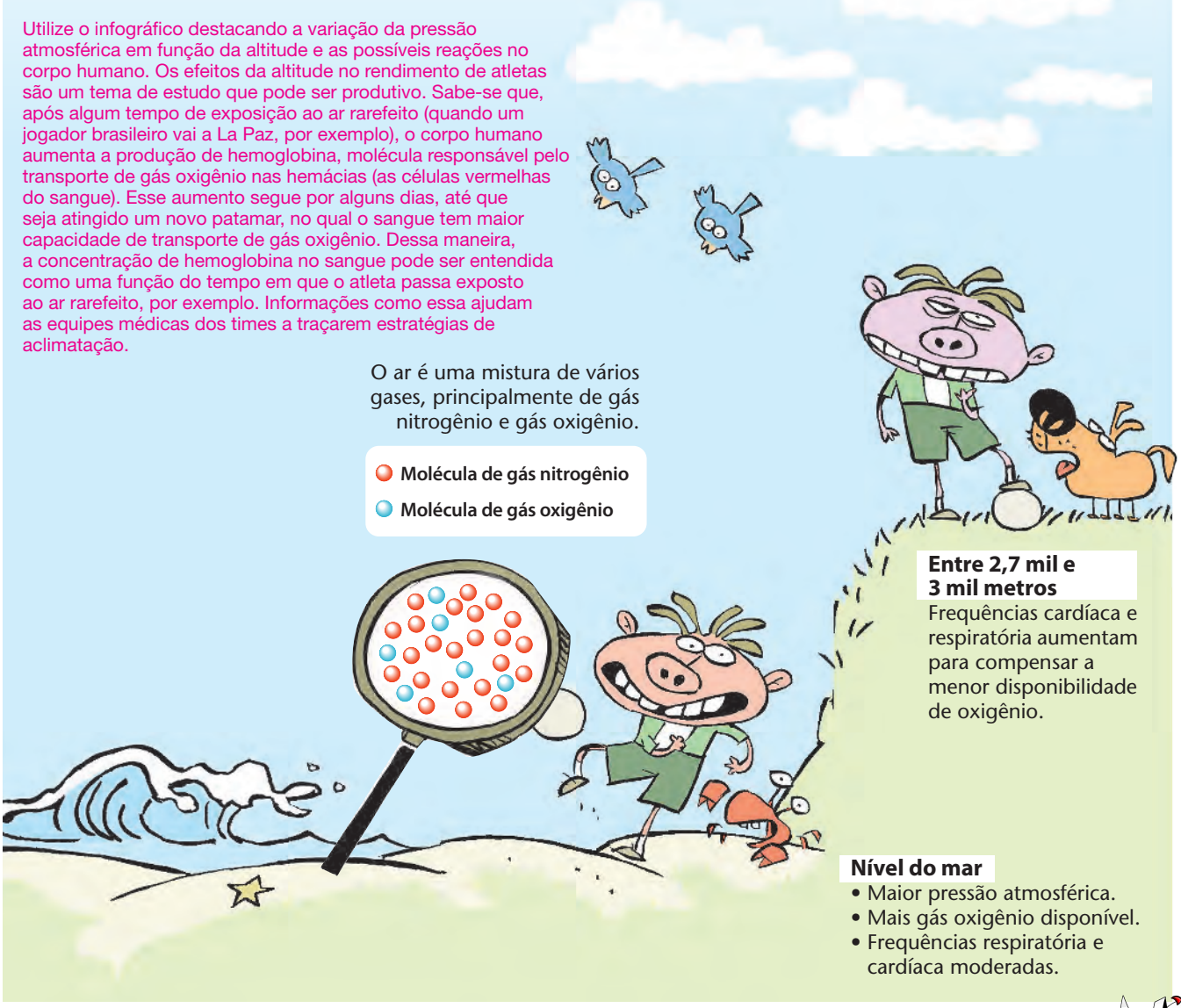
A linguagem das funções

Dando um gás

A pressão atmosférica varia em função da altitude. Quanto maior a altitude, menor a pressão e menor a disponibilidade de ar; portanto, de gás oxigênio. Por isso é tão complicado para brasileiros, acostumados a altitudes médias de 500 metros, jogar futebol, por exemplo, na capital boliviana, La Paz, a 3.600 metros acima do nível do mar.

Assim como a pressão atmosférica, o ponto de ebulição de um líquido ou a densidade de determinado gás dependem da altitude. No desenvolvimento científico, as ideias de interdependência e transformação levaram ao conceito de função.

Utilize o infográfico destacando a variação da pressão atmosférica em função da altitude e as possíveis reações no corpo humano. Os efeitos da altitude no rendimento de atletas são um tema de estudo que pode ser produtivo. Sabe-se que, após algum tempo de exposição ao ar rarefeito (quando um jogador brasileiro vai a La Paz, por exemplo), o corpo humano aumenta a produção de hemoglobina, molécula responsável pelo transporte de gás oxigênio nas hemácias (as células vermelhas do sangue). Esse aumento segue por alguns dias, até que seja atingido um novo patamar, no qual o sangue tem maior capacidade de transporte de gás oxigênio. Dessa maneira, a concentração de hemoglobina no sangue pode ser entendida como uma função do tempo em que o atleta passa exposto ao ar rarefeito, por exemplo. Informações como essa ajudam as equipes médicas dos times a traçarem estratégias de aclimatação.



ORLANDELI/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



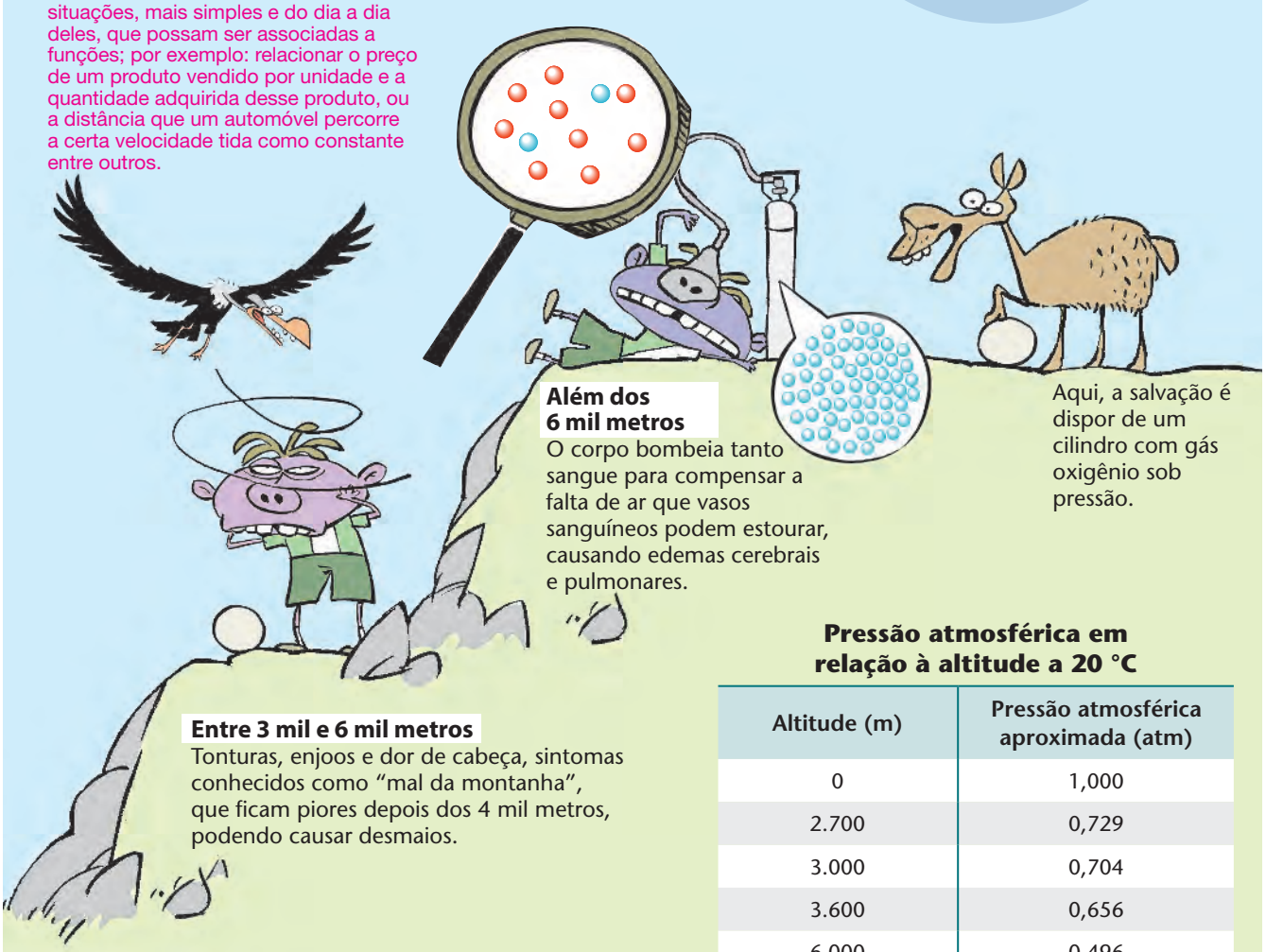
ALLGORD/SHUTTERSTOCK

No topo dos 8.848 metros do Everest, com cerca de um terço da pressão do nível do mar, seres humanos não sobrevivem muito tempo sem gás oxigênio suplementar.

Quanto menor a pressão, menor é o ponto de ebulição dos líquidos e maior a desidratação do organismo. Acima dos 6 mil metros, já há desidratação intensa, como se todos os líquidos fossem sugados para fora do corpo. A cerca de 18 mil metros, a pressão dos vapores de água do nosso corpo se iguala à pressão atmosférica; isso faria ferver toda a água do nosso organismo.



No **Além da teoria**, incentive os estudantes a comentarem outras situações, mais simples e do dia a dia deles, que possam ser associadas a funções; por exemplo: relacionar o preço de um produto vendido por unidade e a quantidade adquirida desse produto, ou a distância que um automóvel percorre a certa velocidade tida como constante entre outros.



Além dos 6 mil metros
O corpo bombeia tanto sangue para compensar a falta de ar que vasos sanguíneos podem estourar, causando edemas cerebrais e pulmonares.

Aqui, a salvação é dispor de um cilindro com gás oxigênio sob pressão.

Entre 3 mil e 6 mil metros
Tonturas, enjoos e dor de cabeça, sintomas conhecidos como "mal da montanha", que ficam piores depois dos 4 mil metros, podendo causar desmaios.

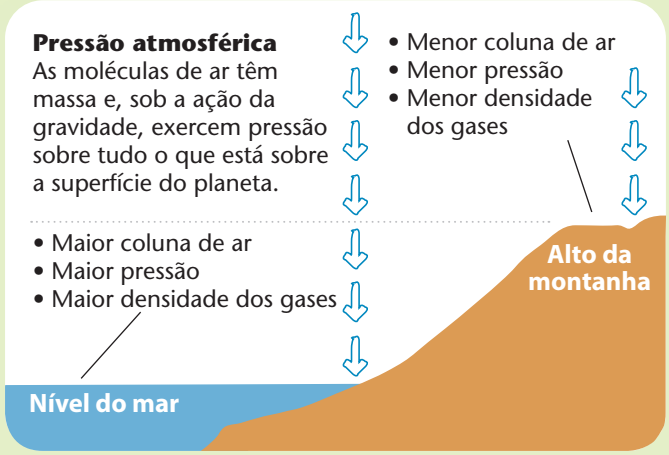
Pressão atmosférica em relação à altitude a 20 °C

Altitude (m)	Pressão atmosférica aproximada (atm)
0	1,000
2.700	0,729
3.000	0,704
3.600	0,656
6.000	0,496
8.848	0,355

Fonte: RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. **Física 2**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

Observações: A altitude de 0 m equivale ao nível do mar; atm é o símbolo da unidade de medida de pressão "atmosfera", que corresponde, aproximadamente, à pressão exercida pela atmosfera terrestre no nível do mar.

Pressão atmosférica
As moléculas de ar têm massa e, sob a ação da gravidade, exercem pressão sobre tudo o que está sobre a superfície do planeta.



Além da teoria

Além da teoria: Resposta pessoal.

Dê um exemplo de outro fenômeno da natureza ou de uma situação do dia a dia em que a medida de uma grandeza depende de outra.

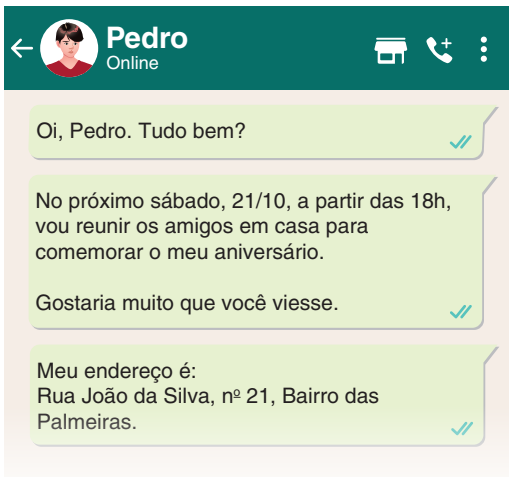
ORLANDELI/ARQUIVO DA EDITORA

1. Sistema de coordenadas

Joana enviou uma mensagem a um amigo, utilizando um aplicativo de seu *smartphone*, convidando-o para uma festa na casa onde ela mora.

Observe a mensagem que ela enviou.

Apresente a noção de coordenadas a partir de situações do cotidiano. Por exemplo, a localização de uma cadeira em um teatro é determinada por uma letra e um número: G12 (fila G, cadeira 12). Peça outros exemplos aos estudantes.
Conceitue "sistema de coordenadas" descrevendo a localização de pontos em uma estrada (marcos quilométricos), na superfície terrestre (latitude e longitude) e no espaço aéreo (latitude, longitude e altitude).
Comente que a localização de pontos no plano pode ser feita por meio do sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, explicando o significado da palavra "ortogonal" (que forma ângulo reto).
Descrevendo os procedimentos para a marcação de um ponto no plano cartesiano, defina as coordenadas do ponto: abscissa e ordenada.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Enfatize que, no plano cartesiano, identificamos o ponto, como figura geométrica, com o par ordenado que o determina.
Comente que a localização de um ponto no plano também pode ser por meio de um sistema de eixos não ortogonais, mas que, pela facilidade de raciocínio, técnicas e procedimentos, adotaremos, sempre, o sistema ortogonal. Assim, ao nos referirmos a um sistema cartesiano, ficará subentendido "sistema cartesiano ortogonal".

Observe que a localização da residência onde Joana mora é determinada por um conjunto de informações: Rua João da Silva, número 21, bairro das Palmeiras. Essas informações são as **coordenadas** da residência de Joana. Se necessário, poderiam ser inseridas informações como município e estado para uma maior precisão.

As **coordenadas** de um ponto são as informações que permitem a localização exata desse ponto.



CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Essa placa indica a distância até o marco zero da estrada.

Em diversas situações do cotidiano, necessitamos de um **sistema de coordenadas**. Acompanhe alguns exemplos.

- No Brasil, os pontos de uma estrada são determinados pelos marcos quilométricos. Assim, cada um desses marcos indica a coordenada de um ponto dessa estrada.
- Um ponto da superfície da Terra é determinado por duas coordenadas: latitude e longitude.
- Um ponto do espaço aéreo é determinado por três coordenadas: latitude, longitude e altitude.

Observação

A palavra "ortogonal", originada do latim *orthogonius*, significa "que forma ângulo reto". Logo, o sistema ortogonal é assim chamado porque os eixos formam ângulos retos entre si.

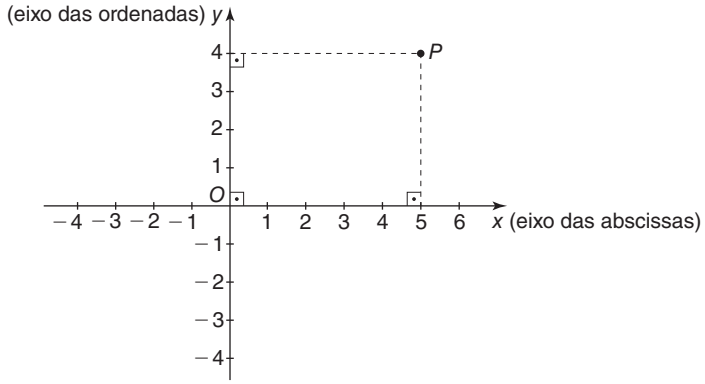
Sistema cartesiano ortogonal de coordenadas

Analogamente aos exemplos anteriores, para localizar um ponto em um plano, podemos adotar um sistema de coordenadas contido no plano. O mais usual é o **sistema cartesiano ortogonal de coordenadas**, formado por dois eixos reais, *Ox* e *Oy*, perpendiculares entre si na origem *O*.

O ponto *O* é chamado de **origem do sistema de eixos**, e o plano que contém esse sistema é chamado de **plano cartesiano**.

Por exemplo, para determinar as **coordenadas** do ponto *P* do plano cartesiano a seguir, traçamos por *P* as perpendiculares aos eixos *Ox* e *Oy*, obtendo, no eixo *Ox*, um número chamado de **abscissa** do ponto *P* e, no eixo *Oy*, um número chamado de **ordenada** do ponto *P*.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.





FÁBIO CORTEZ REIS/ ARQUIVO DA EDITORA

Ilustração do busto de René Descartes (1596-1650). Embora o conceito de sistema de coordenadas já fosse utilizado por outros matemáticos, coube a René Descartes sua formalização na obra *La Géométrie*, em 1637.

Nesse exemplo, as coordenadas do ponto P são 5 e 4. A abscissa é 5, e a ordenada é 4. Indicamos esse fato por $P(5, 4)$.

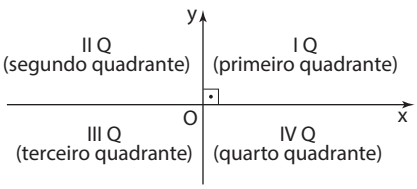
A representação (5, 4) é chamada de "**par ordenado** de abscissa 5 e ordenada 4".

Notas:

1. Dois pares ordenados de números reais são iguais se, e somente se, suas abscissas são iguais e suas ordenadas são iguais, isto é: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$

   Por exemplo: $(a, 8) = (7, y) \Leftrightarrow a = 7$ e $y = 8$

2. Os **eixos coordenados** Ox e Oy separam o plano cartesiano em quatro regiões denominadas **quadrantes**, que devem ser numerados conforme mostra a figura.

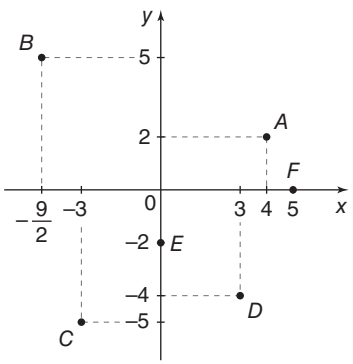


Observe que:

$P(a, b) \in$ I Q $\Leftrightarrow a > 0$ e $b > 0$
$P(a, b) \in$ II Q $\Leftrightarrow a < 0$ e $b > 0$
$P(a, b) \in$ III Q $\Leftrightarrow a < 0$ e $b < 0$
$P(a, b) \in$ IV Q $\Leftrightarrow a > 0$ e $b < 0$

Exemplos:

$A(4, 2) \in$ I Q; $B\left(-\frac{9}{2}, 5\right) \in$ II Q; $C(-3, -5) \in$ III Q; $D(3, -4) \in$ IV Q.



3. Os pontos dos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante.
4. Todo ponto de abscissa nula pertence ao eixo Oy, e todo ponto de ordenada nula pertence ao eixo Ox.

   Por exemplo: $E(0, -2) \in Oy$ e $F(5, 0) \in Ox$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

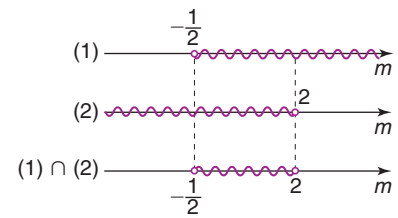
1. Determine os valores reais de m de modo que o ponto $P(2m + 1, 3m - 6)$ pertença ao quarto quadrante.

Resolução

O ponto P pertence ao quarto quadrante se, e somente se, sua abscissa é positiva e sua ordenada é negativa. Observe:

$$\begin{cases} 2m + 1 > 0 \\ 3m - 6 < 0 \end{cases}, \text{ ou seja } \begin{cases} m > -\frac{1}{2} & (1) \\ m < 2 & (2) \end{cases}$$

Efetuando a intersecção de (1) e (2), obtemos:



Portanto, concluímos que: $-\frac{1}{2} < m < 2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Respostas no final do livro.

Faça os exercícios no caderno.

1. Construa um plano cartesiano no caderno e represente o que se pede a seguir.

a. Os pontos $A(5, 3)$, $B(3, 5)$, $C(-3, 4)$, $D(4, -3)$, $E(-2, -4)$, $F(-5, 2)$, $G(-6, 0)$, $H(0, -6)$ e $I(0, 0)$.

b. O triângulo MNP de vértices $M(-4, 2)$, $N(5, 4)$ e $P(0, 0)$.

c. O quadrado $QRST$, dados $Q(6, 0)$, $R(0, 6)$ e $S(-6, 0)$.

d. A circunferência de centro $O(0, 0)$ e raio medindo 5.

(**Nota:** Neste item, subentende-se que a unidade de comprimento da medida 5 seja a mesma adotada nos eixos coordenados.)

2. Considerando os pontos $A(8p - 2, 6)$, $B(7, 2q^2 - 18)$, $C\left(\frac{5}{4}, 6r - 24\right)$, $D(2s - 3, 1 - 2s)$, $E(2t^2, 12)$ e $F(18, t^2 - 7t)$, obtenha os números reais p, q, r, s e t de modo que:

a. A pertença ao eixo das ordenadas.

b. B pertença ao eixo das abscissas.

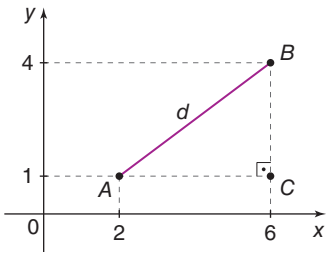
c. C pertença ao quarto quadrante.

d. D pertença ao terceiro quadrante.

e. E e F sejam simétricos em relação ao eixo das abscissas.

3. Determine os números reais m e n de modo que $(2m + n, 3m - n) = (6, 14)$. **3.** $m = 4$ e $n = -2$

4. O teorema de Pitágoras é útil no cálculo da distância entre dois pontos do plano cartesiano. Por exemplo, para calcular a distância d entre os pontos $A(2, 1)$ e $B(6, 4)$, desenhamos o triângulo retângulo ABC auxiliar, representado a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Observando que $CB = 3$ e $CA = 4$, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow d^2 = 25$$

$$\therefore d = 5$$

Logo, a distância entre os pontos A e B é 5 (a unidade de medida é a adotada nos eixos coordenados).

Aplicando esse processo, reúna-se com um colega e calculem a distância entre os pontos:

a. $D(3, 4)$ e $E(9, 12)$; **4. a.** 10

b. $F(-2, 3)$ e $G(10, 8)$. **4. b.** 13

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 1.

2. a. $p = \frac{1}{4}$

2. b. $q = 3$ ou $q = -3$

2. c. $r < 4$

2. d. $\frac{1}{2} < S < \frac{3}{2}$

2. e. $t = 3$

Para saber mais sobre a localização de pontos, assista ao vídeo. **As aventuras do Geodetetive 2:** Latitude e Longitude. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1103. Acesso em: 19 set. 2024.
Nesse vídeo, são apresentados conceitos e métodos a respeito de como determinar a posição de um ponto da superfície da Terra.

2. O conceito de função

As medidas são usadas em diversas situações do nosso cotidiano. Por exemplo, para indicar o comprimento de uma corda, a velocidade de um automóvel, a temperatura de certa região ou a profundidade de um rio. Toda característica que possa ser expressa por uma medida é chamada de **grandeza**.

São exemplos de grandeza: comprimento, área, volume, velocidade, pressão, temperatura, altitude, profundidade, tempo, massa e vazão.

A variação da medida de uma grandeza associada a um objeto pode depender da variação das medidas de outras grandezas. O crescimento de uma planta, por exemplo, depende do tempo; a taxa de evaporação das águas de um rio depende da temperatura; a pressão atmosférica depende da altitude. Para estudar essas relações de interdependência, podemos recorrer a equações matemáticas que relacionem as grandezas envolvidas.

A fim de compreender melhor relação de dependência, acompanhe o exemplo a seguir.

Observação

Nesta coleção, para simplificar a escrita, ao nos referirmos à medida de uma grandeza, utilizaremos apenas a grandeza. Por exemplo, ao mencionarmos "a temperatura é 25 °C" nos referimos a uma medida de temperatura.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para realizar consertos em domicílio, um eletricista cobra uma tarifa fixa de R$ 50,00 mais R$ 40,00 por hora trabalhada.

Note que o valor cobrado pelo eletricista **depende** do número de horas trabalhadas no domicílio do cliente. O quadro a seguir apresenta algumas possibilidades dessa dependência.

Relação entre tempo de trabalho e valor cobrado

Número de horas trabalhadas	Valor cobrado (R$)
2	$50 + 40 \cdot 2 = 130$
5	$50 + 40 \cdot 5 = 250$
6	$50 + 40 \cdot 6 = 290$
6,5	$50 + 40 \cdot 6{,}5 = 310$
8	$50 + 40 \cdot 8 = 370$



SHINYFAMILY/E+/GETTY IMAGES

Eletricista verificando o quadro de força de um estabelecimento.

Indicando por x o número de horas trabalhadas para um cliente, e por y o respectivo valor cobrado, em real, observa-se que cada valor de x corresponde a um único valor de y. Por isso, dizemos que o preço y a pagar é calculado em **função** do número x de horas trabalhadas.

Embora seja útil, o quadro anterior apresenta limitações, pois, por mais que acrescentemos valores a x (horas trabalhadas), sempre haverá valores a serem acrescentados. Por exemplo, o quadro não contém uma linha correspondendo a $x = 2{,}8$ e, mesmo que acrescentássemos essa linha, não haveria uma linha correspondendo a $x = 5{,}2$, e assim por diante.

Então, para representar todas as x quantidades possíveis de horas trabalhadas para um cliente e os respectivos valores y cobrados, é mais adequado usar a equação a seguir que relaciona essas duas variáveis:

$$y = 50 + 40x$$

Essa equação substitui com vantagens o quadro anterior, pois fornece o valor y cobrado para qualquer número x de horas trabalhadas, e vice-versa.

Observe:

- Para determinar o valor y cobrado, em real, por 9 horas trabalhadas, basta substituir a variável x da equação por 9, obtendo:

$$y = 50 + 40 \cdot 9 = 410$$

Assim, concluímos que por 9 horas de trabalho em domicílio, o eletricista cobra R$ 410,00.

- Para determinar o número x de horas trabalhadas pelo eletricista em um domicílio, cujo valor cobrado foi R$ 550,00, basta substituir a variável y por 550, obtendo:

$$550 = 50 + 40 \cdot x \Rightarrow x = 12{,}5$$

Assim, conclui-se que R$ 550,00 é o valor cobrado pelo eletricista por 12,5 horas de trabalho em domicílio.

Da mesma maneira que relacionamos as grandezas x e y, podemos relacionar outras grandezas, de modo que a cada valor de uma seja associado um único valor da outra. Relações como essas são chamadas de **funções**.

Com a situação envolvendo os consertos realizados pelo eletricista, enfatize que, da mesma maneira que relacionamos as grandezas x e y, nesse exemplo, podemos relacionar outras grandezas de modo que a cada valor de uma seja associado um único valor da outra.
Relações como essas são chamadas de funções. Peça aos estudantes outros exemplos de funções do dia a dia.

Reflexão

Que exemplos de relações que vocês conhece poderiam ser consideradas funções?

Reflexão: Resposta pessoal.

Exemplos

a. Em um restaurante do tipo *self-service*, o valor cobrado por uma refeição é dado em função da massa de alimento servida no prato, isto é, a cada m quilograma de alimento está associado um único preço p, em real, cobrado.

b. Em um termômetro, a temperatura é dada em função do comprimento da coluna de álcool, isto é, a cada comprimento c da coluna está associada uma única temperatura T.

c. O valor pago na conta de luz de sua casa é dado em função do consumo, isto é, a cada consumo q, em kWh, está associado um único preço p, em real.



ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Marmita de comida vendida por quilograma.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Dizemos que uma variável y é dada em **função** de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor de y.

A condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de **lei de associação** ou, simplesmente, lei entre x e y.

Notas:

1. Podemos abreviar a expressão "y é dada em função de x" por "y é função de x".
2. No contexto das funções numéricas, define-se **variável** como um representante genérico dos elementos de um conjunto de números. Usualmente, indicamos uma variável por uma letra. Por exemplo, ao dizer que x é uma variável real, estamos afirmando que x simboliza um número real qualquer.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Um automóvel percorreu um trecho de estrada à velocidade constante de 2 km/min, demorando mais de 9 minutos nesse trecho. De acordo com essa informação, responda aos itens seguintes.

a. Determine a distância percorrida pelo automóvel nos 9 primeiros minutos desse percurso.

b. A distância percorrida pelo automóvel em cada instante desse percurso é função do tempo? Por quê?

c. Indicando por d a distância, em quilômetro, percorrida pelo automóvel em t minutos desse percurso, formule uma equação que relacione d e t.

Resolução

a. A cada minuto, o automóvel percorreu 2 km; logo, em 9 minutos, ele percorreu $9 \cdot 2$ km, ou seja, 18 km.

b. Sim, a distância percorrida pelo automóvel em cada instante desse percurso é função do tempo, pois a cada medida de tempo associa-se uma única distância percorrida.

c. A cada minuto, o automóvel percorreu 2 km; logo, em t minutos, ele percorreu $2t$ km. Assim, uma equação que relaciona a distância percorrida d, em quilômetro, e o tempo t, em minuto, é $d = 2t$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

5. Um capital de R$ 10.000,00 foi aplicado em regime de juro simples à taxa de 2% ao mês. Obtenha a lei de associação que expressa o montante y acumulado nessa aplicação, em real, em função do tempo x, em mês.

5. $y = 10.000 + 200x$

6. Um terreno retangular tem 30 m de comprimento. Obtenha a lei de associação que expressa a área y do terreno, em metro quadrado, em função de sua largura x, em metro. **6.** $y = 30x$

7. Em um posto de combustíveis, são vendidos 10.000 L de etanol por dia ao preço de R$ 4,50 por litro. O proprietário estima que, para cada centavo de desconto no litro, haverá um acréscimo de 200 L na venda diária de etanol. Supondo que essa estimativa esteja correta, responda aos itens seguintes. **7. a.** 10.600 L

a. Quantos litros de etanol serão vendidos por dia se for concedido um desconto de 3 centavos por litro?

b. Sendo y o número de litros de etanol vendidos diariamente, e x o desconto, em centavo, concedido no preço do litro, determine a lei de associação que expressa y em função de x. **7. b.** $y = 10.000 + 200x$

c. Sendo z a quantia total, em real, arrecadada por dia com a venda de etanol, e x o desconto, em centavo, concedido por litro de etanol, determine a lei de associação que expressa z em função de x.

7. c. $z = -2x^2 + 800x + 45.000$

8. Desde o momento em que submergiu até o momento em que emergiu, um mergulhador consumiu, por minuto, 15 litros de ar do cilindro de ar comprimido que estava usando. Dado que o cilindro tinha 900 L de ar no momento da imersão e 300 L no momento da emersão, resolva os itens a seguir.

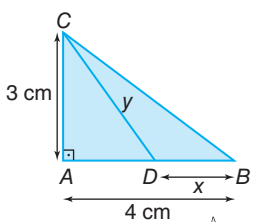
a. Durante quantos minutos o mergulhador esteve submerso? **8. a.** 40 min

b. Obtenha a lei de associação que expresse o consumo C de ar do mergulhador, em litro, em função do tempo t, em minuto, durante o período em que ele esteve submerso. **8. b.** $C = 15t$

c. Obtenha a lei de associação que expresse a quantidade Q de ar contida no cilindro, em litro, em função do tempo t, em minuto, durante o tempo que o mergulhador esteve submerso. **8. c.** $Q = 900 - 15t$

d. Quantos minutos depois da submersão o volume de ar consumido igualou-se ao volume de ar contido no cilindro? **8. d.** 30 min

9. Considere o triângulo ABC apresentado e as medidas indicadas nele, em cm.



AUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

a. Obtenha a lei de associação que expressa y em função de x. **9 a.** $y = \sqrt{9 + (4 - x)^2}$

b. Obtenha a lei de associação que expressa a área S do triângulo ACD em função de x. **9. b.** $S = \frac{3(4 - x)}{2}$

10. O rótulo das embalagens de alimentos industrializados apresenta as informações nutricionais referentes ao produto. É importante ficar atento às informações, pois há componentes que, em excesso, fazem mal à saúde.

Considere o rótulo representado a seguir com as informações nutricionais de um alimento industrializado.

a. Analise o item porcentagem dos valores diários de referência, escolha um dos componentes indicados e determine a lei de associação que relaciona a quantidade de porções do alimento e a quantidade correspondente do componente nutricional escolhido.

b. Pesquise na internet e converse com os colegas sobre alimentos naturais, alimentos processados e alimentos ultraprocessados.

c. Dos grupos de alimentos pesquisados, quais fazem parte da sua alimentação? Com que frequência?

10. Respostas pessoais. Mais informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.



INFORMAÇÃO NUTRICIONAL		
Porção de 20 g (2 colheres de sopa)		
QUANTIDADE POR PORÇÃO		%VD (*)
Valor energético	77 kcal = 323 kJ	4
Calorias	18 g, dos quais:	6
Açúcares	18 g	**
Proteínas	0 g	0
Gorduras totais	0 g	0
Gorduras saturadas	0 g	0
Gorduras tans	0 g	**
Fibra alimentar	0,6 g	2
Sódio	26 mg	1
Vitamina A	90 mcg	15
Vitamina D	1,5 mcg	30
Vitamina C	6,8 mg	15
Vitamina B6	0,20 mg	15

Detalhe da imagem com ampliação de 139%.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

11. Resposta pessoal.

11. Identifique uma situação do cotidiano em que a ideia de função pode ser aplicada e elabore um problema relacionado a ela. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

Aproveite o conteúdo do boxe **Conectado** para falar de algoritmos e para explorar o fato de que alguns conjuntos de problemas podem ser resolvidos por uma mesma sequência de passos. Pode-se solicitar aos estudantes uma pesquisa sobre o que são algoritmos e como eles são utilizados em Computação, por exemplo.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 2.

Conectado

Na função $y = f(x)$, acompanhe um procedimento para determinar o valor numérico y relacionado ao valor numérico x_1, por meio de um algoritmo.

1º passo: verificar as operações envolvidas na relação entre y e $f(x)$.

2º passo: substituir a variável x pelo número x_1 na expressão algébrica que representa $f(x)$, obtendo uma expressão numérica.

3º passo: efetuar as operações e determinar o valor numérico da expressão obtida no 2º passo.

4º passo: Indicar que $y = f(x_1)$ sendo $f(x_1)$ o valor numérico determinado no 3º passo.

Observação

Algoritmos são procedimentos predefinidos que devem ser efetuados. Uma receita de bolo dá a ideia de algoritmo escrito na linguagem natural, mas os algoritmos também são utilizados em programação de computadores, por exemplo. Nesse caso, existe uma linguagem de programação associada a cada *software* que lê e executa determinado algoritmo.

3. Representação de uma função

Em um laboratório, foi realizada uma experiência com o objetivo de estudar o comportamento de uma colônia de fungos a baixas temperaturas. A experiência foi realizada no período de 0 h às 24 h de um mesmo dia. A cada hora desse dia, a colônia foi submetida a uma das seguintes medidas de temperatura: 0 °C, 1 °C, 4 °C, 5 °C, 6 °C e 7 °C, representadas pelos elementos do conjunto $B = \{0, 1, 4, 5, 6, 7\}$.

Os cientistas observaram uma reação destoante dos fungos nos instantes 6 h, 7 h, 8 h e 9 h, representados pelos elementos do conjunto $A = \{6, 7, 8, 9\}$.

Para registro no relatório da experiência, foi construído o diagrama a seguir, que mostra a correspondência, por meio das flechas, entre cada instante de A e a temperatura nesse instante, em B.

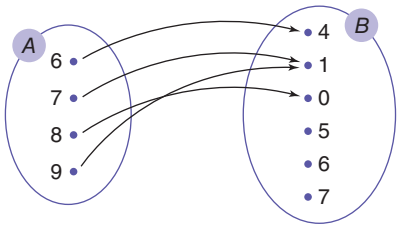


DR_MICROBE/ISTOCK/GETTY IMAGES

Colônia de fungos cultivada em uma placa de Petri, muito utilizada em laboratórios de microbiologia para a cultura de diversos microrganismos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



Essa maneira de representação é chamada de **diagrama de flechas**.

Observando que cada instante do conjunto A corresponde a uma única temperatura no conjunto B, concluímos que essa correspondência é uma função f do conjunto A no conjunto B. Indicamos esse fato por $f: A \to B$ (lê-se: "f é uma função de A em B").

Os conjuntos A e B são chamados, respectivamente, de **domínio** e **contradomínio** da função f, que indicaremos por $D(f)$ e $CD(f)$, respectivamente. O conjunto {4, 1, 0} é chamado de **conjunto imagem** da função f, que indicaremos por $Im(f)$.

Além do diagrama, há outras maneiras de representar a função f. A seguir, vamos apresentar algumas delas.

Comente que, além da representação por um diagrama de flechas, a função f tem outras representações. Represente a função f por um quadro e explique sua construção, pois esse tipo de esquema será bastante utilizado. Comente que a representação cartesiana dos pontos (x, y) constituem o gráfico da função f. Enfatize que o domínio de f é representado no eixo das abscissas e o conjunto imagem, no eixo das ordenadas. Generalize os conceitos apresentados no exemplo introdutório, definindo: função f de A em B, domínio, contradomínio e conjunto imagem de f. Enfatize que, se um elemento x de A está associado a um elemento y de B, então, dizemos que y é a imagem de x pela função f. Esse fato é indicado por $y = f(x)$.

Representação de *f* por um quadro

Cada linha do quadro associa um instante à medida da temperatura nesse instante.

Relação entre o instante e a temperatura

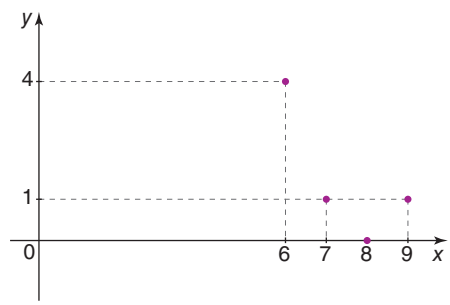
Instante (h)	Temperatura (°C)
6	4
7	1
8	0
9	1

Representação de *f* por um gráfico cartesiano

Todos os pontos (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$, tais que x e y estão associados por meio de f, constituem a representação gráfica de f no plano cartesiano.

Representando a função da situação anterior no plano cartesiano, obtemos um gráfico como indicado na imagem.

É importante ressaltar que os elementos do domínio de f são abscissas dos pontos do gráfico e os do conjunto imagem são ordenadas.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Nota:

Convencionamos que, se um ponto (x, y) pertence ao gráfico de uma função, diremos simplesmente que (x, y) pertence à função. Assim, observando o gráfico anterior, podemos dizer, por exemplo, que o ponto (6, 4) pertence a f.

Representação de *f* por uma equação

Observando atentamente a relação entre cada instante x, com $x \in A$, e a medida de temperatura correspondente y, com $y \in B$, constatamos que essa relação pode ser descrita pela equação:

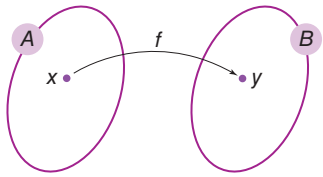
$$y = (8 - x)^2$$

pois:

- para $x = 6$, temos: $y = (8 - 6)^2 \Rightarrow y = 4$
- para $x = 7$, temos: $y = (8 - 7)^2 \Rightarrow y = 1$
- para $x = 8$, temos: $y = (8 - 8)^2 \Rightarrow y = 0$
- para $x = 9$, temos: $y = (8 - 9)^2 \Rightarrow y = 1$

A equação $y = (8 - x)^2$, junto com $D(f)$ e $CD(f)$, representa a função f. Destacamos, porém, que nem sempre é possível representar uma função por meio de uma equação.

Sendo A e B conjuntos não vazios, chama-se **função** de A em B toda correspondência f que associa cada elemento de A a um único elemento de B.

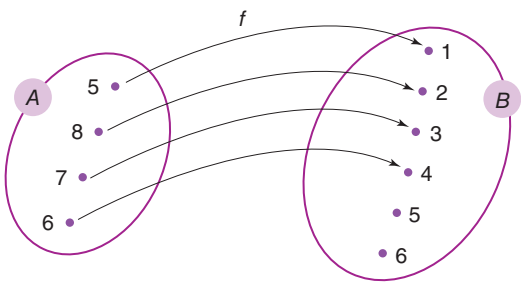


- Os conjuntos A e B são o domínio e o contradomínio da função f, respectivamente.
- Indica-se que f é uma função de domínio A e contradomínio B por meio do símbolo $f: A \to B$.
- Cada elemento y de B associado, por meio de f, a um elemento x de A é chamado de imagem de x. Esse fato é indicado por $y = f(x)$ (lê-se: "y é igual a f de x" ou "y é a imagem de x por meio de f").
- O subconjunto de B, formado por todos os elementos que são imagens por meio de f, chamado de conjunto imagem de f.

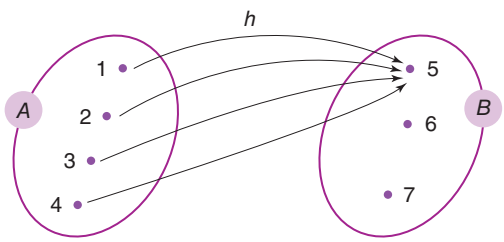
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. Quais das seguintes correspondências representam funções de A em B?

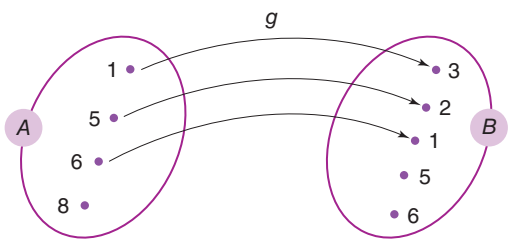
a.



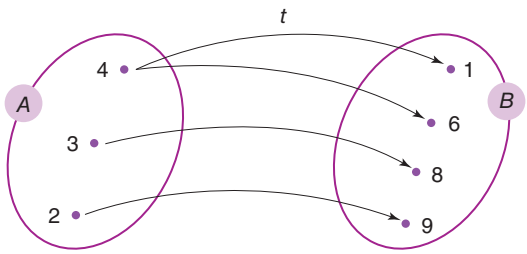
b.



c.



d.



Resolução

a. f é função de A em B, pois todo elemento de A está associado, por meio de f, a um único elemento de B.

b. h é função de A em B, pois todo elemento de A está associado, por meio de h, a um único elemento de B.

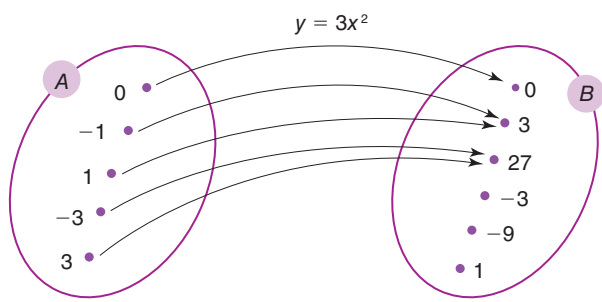
c. g não é função de A em B, pois existe elemento em A (o elemento 8) que não está associado, por meio de g, a algum elemento de B.

d. t não é função de A em B, pois existe elemento em A (o elemento 4) associado, por meio de t, a mais de um elemento de B.

4. Dados os conjuntos $A = \{0, -1, 1, -3, 3\}$ e $B = \{0, 3, 27, -3, -9, 1\}$, determine o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função f dada pela correspondência $y = 3x^2$, com $x \in A$ e $y \in B$.

Resolução

Representamos a função por um diagrama:



Assim, temos:

$D(f) = A = \{0, -1, 1, -3, 3\}$

$CD(f) = B = \{0, 3, 27, -3, -9, 1\}$

$Im(f) = \{0, 3, 27\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O **exercício proposto 14** apresenta uma oportunidade para distinguir potência de energia. Se for possível, proponha uma atividade com o professor de Física a fim de trabalhar esses conceitos de maneira interdisciplinar.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

12. Dados os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 8\}$, quais das correspondências apresentadas a seguir são funções de A em B?

a. $y = \frac{1}{x}$, em que $x \in A$ e $y \in B$. **12. a.** Não é função.

b. $f(x) = x^2 + 1$, em que $x \in A$ e $f(x) \in B$. **12. b.** É função.

c. $y^2 = x^2$, em que $x \in A$ e $y \in B$. **12. c.** Não é função.

d. $f(x) = x^3$, em que $x \in A$ e $f(x) \in B$. **12. d.** É função.

13. Dados os conjuntos $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5, 8\}$, construa o gráfico da função definida pela lei $y = \frac{x+2}{2}$, em que $x \in A$ e $y \in B$. Depois, por meio de um fluxograma, indique os procedimentos que podem ser adotados para determinar se y é função de A em B e para obter o gráfico de y. **13.** Resposta no final do livro.

14. Saber calcular o consumo de energia dos eletrodomésticos pode ajudar a reduzir o valor da conta de energia e, ainda, evitar o desgaste dos aparelhos. Considerando o tempo de funcionamento em hora, para calcular o consumo C, em quilowatt-hora (kWh), de um aparelho elétrico, aplicamos a seguinte fórmula:

$$C = \left(\frac{\text{potência do aparelho em watt}}{1.000}\right) \cdot (\text{tempo de funcionamento})$$

Ou, de maneira equivalente:

$$C = (\text{potência do aparelho em quilowatt}) \cdot (\text{tempo de funcionamento})$$

De acordo com essas informações, responda às questões a seguir.

a. Alguns aparelhos elétricos, com diversificadas potências, estiveram em funcionamento durante certo tempo, conforme mostra o quadro a seguir.

Tempo de funcionamento de equipamentos elétricos

Aparelho elétrico	Potência elétrica (em watt)	Tempo de funcionamento (em hora)
Ferro de passar roupa	1.400	3
Máquina de secar roupas	3.500	2
Cafeteira	600	0,5
Lâmpada	100	3

Considere A o conjunto dos aparelhos elétricos do quadro e B o conjunto dos respectivos consumos, em kWh, desses aparelhos durante os períodos apresentados no quadro. Construa o diagrama de flechas que representa a função $f: A \to B$, que associa cada aparelho ao seu respectivo consumo, em kWh, durante o período mostrado no quadro.

b. Um aparelho de ar-condicionado que tem 3,2 quilowatts de potência é mantido ligado durante 6 horas por dia, durante um mês de 30 dias. Se o preço a pagar por kWh consumido é R$ 0,50, qual será o valor a pagar pela energia consumida por esse aparelho neste mês? **14. b.** R$ 288,00

c. Um fogão elétrico tem x quilowatts de potência e se mantém ligado durante 4 horas por dia. Se o preço a pagar por kWh consumido é R$ 0,50, elabore uma equação que expresse, em função de x, o valor v a pagar pela energia consumida por esse fogão em um mês de 30 dias. **14. c.** $v = 60x$

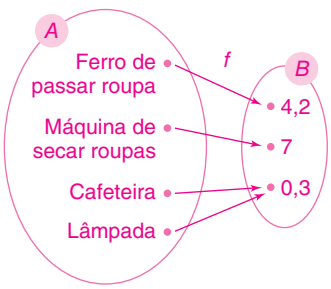
d. Na internet, pesquise um simulador e simule o consumo mensal e o custo, em real, de aparelhos eletrônicos instalados em uma residência. Uma sugestão, é o *site*: ENEL. **Simulador de consumo**. Disponível em: https://enel-rj.simuladordeconsumo.com.br/. Acesso em: 19 set. 2024. Após a simulação, converse com os colegas sobre o uso eficiente e consciente de energia elétrica de onde você mora.

14. d. Resposta pessoal. Em relação ao uso de energia elétrica residencial, é importante evitar deixar aparelhos elétricos ligados sem necessidade e reduzir o consumo de maneira geral. Promova uma conversa acerca do uso de a energia solar ser uma alternativa sustentável, porém com um custo de investimento pouco acessível para a maioria dos brasileiros.

Observação

A potência elétrica indica a quantidade de energia elétrica transformada por unidade de tempo. Nos aparelhos elétricos, a potência é informada nos rótulos ou nos manuais de instrução. O watt (W) e o quilowatt (kW) são unidades de potência, com 1 kW = 1.000 W.
Um watt-hora (Wh) é a quantidade de energia consumida durante 1 hora por um aparelho com potência de 1 watt. Analogamente, um quilowatt-hora é a quantidade de energia consumida durante 1 hora por um aparelho com potência de 1 quilowatt.

14. a.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 7

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

15. O Brasil pode ser considerado um país privilegiado quanto à disponibilidade de água doce: o território brasileiro tem 14% das reservas mundiais de água doce, distribuídas por 12 bacias hidrográficas. Apesar disso, é comum passar por algumas crises hídricas, como destacado no texto a seguir.

ODS 12

Os fatores que fazem disparar risco de apagão no Brasil

Após sucessivos anos de poucas chuvas, os reservatórios das hidrelétricas brasileiras nas regiões Sudeste e Sul chegaram ao mês de setembro em seu pior nível histórico, abaixo mesmo do patamar de 2001, quando o país enfrentou um severo racionamento de energia.

Fonte: SCHREIBER, M. Os fatores que fazem disparar risco de apagão no Brasil **BBC News Brasil**, 20 set. 2021. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/brasil-58618347. Acesso em: 18 jun. 2024.

Com base nessas informações, converse com os colegas sobre o que cada cidadão brasileiro poderia fazer para minimizar o risco de apagão. Pesquise e posicione-se frente ao "racionamento educativo" ou ao "racionamento compulsório" de energia elétrica.

15. Pesquisa pessoal. O contexto desse exercício possibilita explorar a importância de utilizar os recursos naturais de maneira sustentável. Para além de hábitos como reduzir o consumo pessoal direto de água e energia elétrica, é importante repensar o consumismo e o modo como a indústria, as empresas e os governos agem a esse respeito. O consumo de energia elétrica e de água também está associado à agropecuária e à agricultura, por exemplo, e alguns alimentos têm um gasto energético mais eficiente que outros; logo, dar preferência a eles também está associado, indiretamente, ao consumo sustentável de recursos naturais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Imagem de x pela função f

Já foi apresentado que, se (x, y) pertence a uma função f, a ordenada y é chamada de **imagem de x pela função f** (ou **imagem de x por meio de f**). E indicaremos esse fato por $y = f(x)$.

Vamos estudar algumas particularidades dessa imagem.

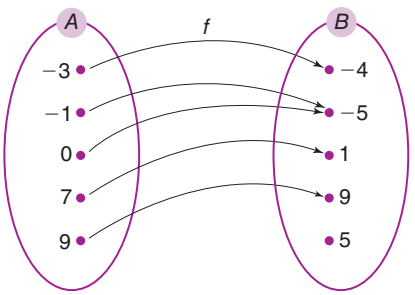
Imagem de um elemento pelo diagrama de flechas

Considere a função f descrita pelo diagrama de flechas.

Se um elemento y de B estiver associado, por meio de f, a um elemento x de A, então diremos que y é a imagem de x por meio de f.

Assim, temos:

- $-4 = f(-3)$, ou seja, -4 é imagem de -3 por meio de f;
- $-5 = f(-1)$, ou seja, -5 é imagem de -1 por meio de f;
- $-5 = f(0)$, ou seja, -5 é imagem de 0 por meio de f;
- $1 = f(7)$, ou seja, 1 é imagem de 7 por meio de f;
- $9 = f(9)$, ou seja, 9 é imagem de 9 por meio de f.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Imagem de um elemento pela lei $y = f(x)$

Vamos considerar a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 5x - 2$.

A lei $f(x) = 5x - 2$ informa que a imagem de cada x do domínio é o número $5x - 2$ do contradomínio. Acompanhe os exemplos a seguir.

A imagem do elemento 6, por meio de f, é: $f(6) = 5 \cdot 6 - 2 \Rightarrow f(6) = 28$

Logo, o par ordenado $(6, 28)$ pertence a f.

A imagem do elemento $\frac{3}{5}$, por meio de f, é: $f\left(\frac{3}{5}\right) = 5 \cdot \frac{3}{5} - 2 \Rightarrow f\left(\frac{3}{5}\right) = 1$

Logo, o par ordenado $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$ pertence a f.

Equivalência entre os símbolos y e $f(x)$

Como o símbolo $f(x)$ representa a ordenada y do ponto de abscissa x, em vez de escrever $f(x) = 5x - 2$, podemos escrever $y = 5x - 2$, ou seja, o símbolo $f(x)$ pode ser substituído por y e vice-versa.

Ao trabalhar a imagem de um elemento, reitere que, se o ponto (x, y) pertence ao gráfico de uma função f, a ordenada y é chamada imagem de x pela função f (ou imagem de x através de f). Indicaremos esse fato por $y = f(x)$.

O **exercício proposto 20** requer uma atenção especial, por exigir a resolução de uma equação polinomial do 3º grau.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

16. Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = 8 - x$; e $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, com $g(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$, calcule:

a. $f(0)$ **16. a.** 8

b. $f(2)$ **16. b.** 6

c. $f(-4)$ **16. c.** 12

d. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ **16. d.** $\frac{15}{2}$

e. $g(1)$ **16. e.** -1

f. $g(-2)$ **16. f.** -1

g. $g\left(-\frac{1}{3}\right)$ **16. g.** $\frac{17}{3}$

h. $f(-3) + g(-1)$ **16. h.** 12

17. A lei de associação da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $f(x) = \frac{ax - 1}{x^2 + 3}$, em que a é uma constante real. Determine a constante a, sabendo que $f(2) = f(1)$. **17.** $a = -3$

18. Resolva os itens a seguir. **18. a.** $a = 5$ e $b = -2$

a. Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = ax^2 + bx$, em que a e b são constantes reais. Determine, se possível, os números reais a e b, sabendo que $f(2) = 16$ e $f(-1) = 7$. **18. b.** Faltam dados para a solução do problema.

b. Uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $g(x) = \frac{cx + 4}{c + dx}$, para qualquer número real, com $x \neq -\frac{c}{d}$. Determine, se possível, as constantes reais c e d, sabendo que $g(3) = 3$.

19. Um fazendeiro estabelece o preço da saca de café em função da quantidade de sacas adquiridas pelo comprador, usando a equação $P = 50 + \frac{200}{x}$, em que P é o preço em dólar e x é o número de sacas vendidas.

a. Quanto deverá pagar, por saca, um comprador que adquirir 100 sacas? **19. a.** 52 dólares

b. Quanto deverá pagar, por saca, um comprador que adquirir 200 sacas? **19. b.** 51 dólares

c. Se um comprador pagou 54 dólares por saca, quantas sacas ele comprou? **19. c.** 50 sacas

20. (Enem) Um laticínio possui dois reservatórios de leite. Cada reservatório é abastecido por uma torneira acoplada a um tanque resfriado. O volume, em litros, desses reservatórios depende da quantidade inicial de leite no reservatório e do tempo t, em horas, em que as duas torneiras ficam abertas. Os volumes dos reservatórios são dados pelas funções

$V_1(t) = 250t^3 - 100t + 3.000$ e

$V_2(t) = 150t^3 + 69t + 3.000$.

Depois de aberta cada torneira, o volume de leite de um reservatório é igual ao do outro no instante $t = 0$ e, também, no tempo t igual a **20.** alternativa **a**

a. 1,3 h.

b. 1,69 h.

c. 10,0 h.

d. 13,0 h.

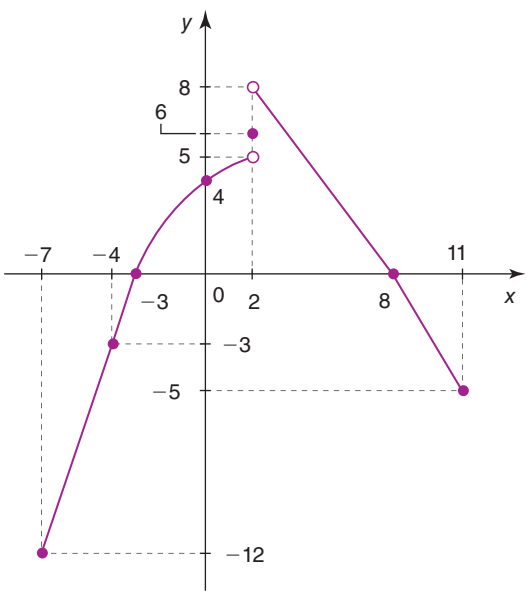
e. 16,9 h.

21. Elabore um problema em que seja necessário determinar a imagem de um elemento por meio do diagrama de flechas ou pela lei $y = f(x)$. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **21.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 3 a 6.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Imagem de um elemento pelo gráfico de uma função



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Cada ponto (x, y) do gráfico cartesiano de uma função f deve ser interpretado como $(x, f(x))$, ou seja, a ordenada é a imagem da abscissa através de f. Por exemplo, considerando o gráfico da figura, o ponto $P(-4, -3)$ pertence ao gráfico; logo, $f(-4) = -3$. Analogamente, temos:

- $(11, -5)$ pertence ao gráfico; logo, $f(11) = -5$;
- $(8, 0)$ pertence ao gráfico; logo, $f(8) = 0$;
- $(2, 6)$ pertence ao gráfico; logo, $f(2) = 6$;
- $(0, 4)$ pertence ao gráfico; logo, $f(0) = 4$;

e assim por diante.

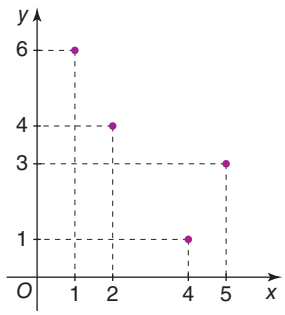
Observação

Assim como nos intervalos reais a bolinha vazia ○ **exclui** o ponto do gráfico, a bolinha cheia ● **inclui** o ponto no gráfico.

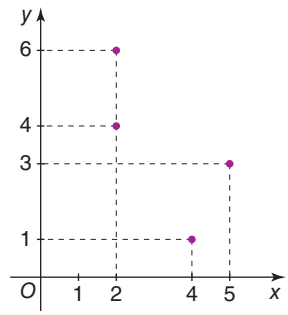
Reconhecimento de uma função pela análise gráfica

Observe que os gráficos a seguir representam duas correspondências diferentes, f e g, de $A = \{1, 2, 4, 5\}$ em $B = \{1, 3, 4, 6\}$.

correspondência f



correspondência g



Traçando pelos pontos de cada gráfico as retas paralelas ao eixo Oy, determinamos no eixo Ox o conjunto das abscissas desses pontos: na correspondência f obtemos $\{1, 2, 4, 5\}$ e na correspondência g obtemos $\{2, 4, 5\}$.

Traçando pelos pontos de cada gráfico as retas paralelas ao eixo Ox, determinamos no eixo Oy o conjunto das ordenadas desses pontos: na correspondência f obtemos $\{1, 3, 4, 6\}$ e na correspondência g obtemos $\{1, 3, 4, 6\}$.

Portanto:

- na correspondência f, cada elemento de A corresponde a um único elemento de B, com o que concluímos que f é uma função de A em B;
- na correspondência g, há pelo menos um elemento de A que corresponde a mais de um elemento em B: o elemento 2 corresponde aos elementos 4 e 6. Isso já é suficiente para afirmar que a correspondência g não é função de A em B. Poderíamos, ainda, afirmar que a correspondência g não é função de A em B, observando que o elemento 1 de A não tem correspondente em B através de g.

Um gráfico representa uma função de A em B se, e somente se, qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto qualquer de abscissa x, com $x \in A$, intersepta o gráfico em um único ponto.

Considerando o gráfico do exemplo, peça aos estudantes que construam o diagrama de flechas correspondente a cada um. A seguir, pergunte:
• Qual dos diagramas representa uma função? (A correspondência f.)
• Por que a correspondência g não representa uma função? (Porque há pelo menos um elemento do domínio com mais de uma imagem; o elemento 2 tem duas imagens pela correspondência g.)
• Considerando as intersecções de cada gráfico com as retas verticais que passam por todos os pontos de abscissas x do domínio, sob que condição geométrica esse gráfico representa uma função? (Se cada uma dessas retas interceptar o gráfico em um único ponto.)
Conclua, então: um gráfico representa uma função de A em B se, e somente se, qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto qualquer de abscissa x, com $x \in A$, intercepte o gráfico em um único ponto.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5. Qual dos gráficos a seguir representa uma função de $A = [2, 6]$ em $B = [1, 5]$?

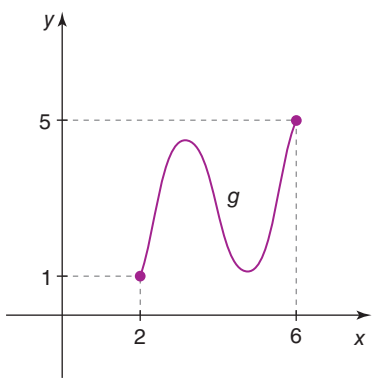


figura 1

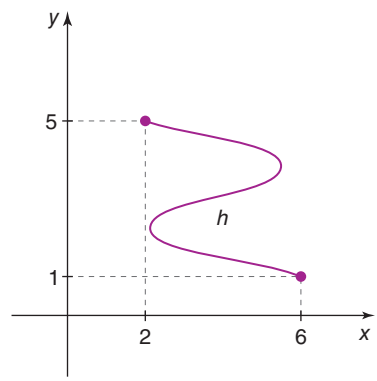


figura 2

Resolução

Podemos organizar a resolução desse problemas em etapas.

1. Compreender

É importante identificar o que o problema solicita: reconhecer qual dos gráficos é uma função de A em B, com A e B dados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Elaborar um plano

Para saber se um gráfico é uma função de A em B, podemos identificar se há alguma reta paralela ao eixo Oy que passe por um ponto de abscissa x, com $x \in A$ e intersepta o gráfico em mais de um ponto. Se isso ocorrer, o gráfico não é função de A em B.

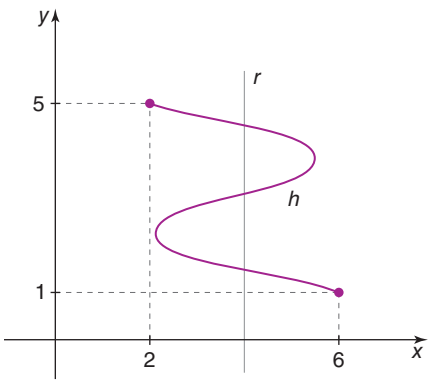
3. Executar o plano

Com base no plano elaborado, analisamos os gráficos.

4. Verificar

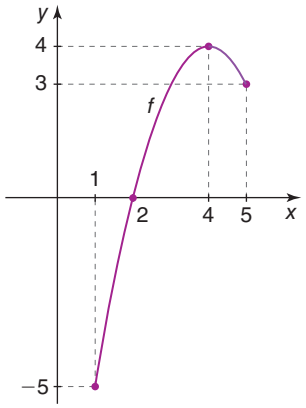
Na figura 1, qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, com $x \in A$, intersepta o gráfico de g em um único ponto. Isso significa que qualquer x do conjunto A está associado a um único y do conjunto B através de g. Logo, g é função de A em B.

Na figura 2, existe pelo menos uma reta paralela ao eixo Oy que intersepta o gráfico em mais de um ponto; por exemplo, a reta r representada a seguir.



Isso significa que há elemento em A com mais de um correspondente em B. Logo, h não é função de A em B.

6. Observe o gráfico de f a seguir.



a. Explique o porquê de o gráfico de f representar uma função.

b. Determine o domínio e o conjunto imagem da função f representada pelo gráfico.

Resolução

a. No gráfico, é possível traçar qualquer reta paralela ao eixo Oy, passando por um ponto de abscissa x, com $1 \leqslant x \leqslant 5$, que ela irá interseptar o gráfico de f em um único ponto. Logo, f é função.

b. O domínio da função é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico, isto é, $D(f) = [1, 5]$.

O conjunto imagem da função é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico, ou seja, $Im(f) = [-5, 4]$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reflexão

Uma circunferência do plano cartesiano pode ser o gráfico de uma função $f: A \to \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}$?

Reflexão: Não. Uma circunferência do plano cartesiano não pode ser o gráfico de uma função, pois, qualquer que seja a posição da circunferência nesse plano, sempre haverá uma reta paralela ao eixo Oy interceptando-a em mais de um ponto, ou seja, haverá elementos de A com mais de um correspondente em $\mathbb{R}$.

Estudo do sinal de uma função

Sendo f uma função de domínio D, dizemos que:

- f é **positiva** para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) > 0$;
- f é **negativa** para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) < 0$;
- f **se anula** para um elemento x, com $x \in D$, se, e somente se, $f(x) = 0$. Nesse caso, dizemos que x é **raiz** (ou **zero**) da função.

Exemplo

Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 4$, temos:

- a função é positiva para $x = -3$, pois $f(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$;
- a função é negativa para $x = -1$, pois $f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3$;
- a função se anula para $x = 2$, pois $f(2) = 2^2 - 4 = 0$. Nesse exemplo, 2 é uma raiz da função f (podemos dizer, também, que 2 é um zero da função f).

Observação

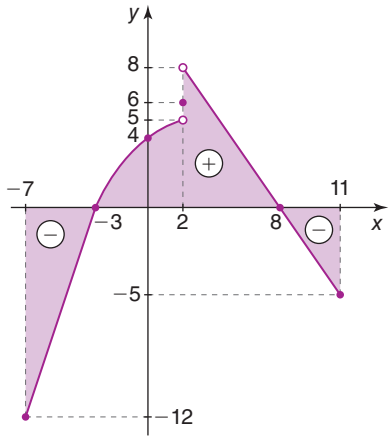
Note que o sinal da função para um elemento x do domínio é o sinal de $f(x)$, e não o sinal de x.

Estudo do sinal pelo gráfico da função

A variação de sinal de uma função pode ser estudada por meio de seu gráfico; por exemplo, dado o gráfico da função f representado na figura.

- para todo x com $-3 < x < 8$, temos $f(x) > 0$. Por isso, dizemos que a função f é positiva para $-3 < x < 8$;
- para todo x com $-7 \leqslant x < -3$ ou $8 < x \leqslant 11$, temos $f(x) < 0$. Por isso, dizemos que f é negativa para $-7 \leqslant x < -3$ ou $8 < x \leqslant 11$;
- para $x = -3$ ou $x = 8$, a função se anula, ou seja, $f(-3) = f(8) = 0$ (os números -3 e 8 são as raízes da função).

Note que as raízes da função são as abscissas dos pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox.

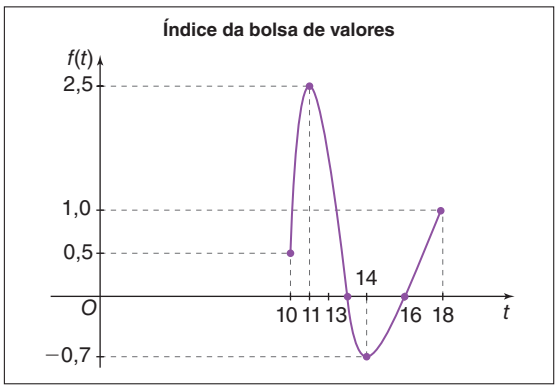


Explorando o gráfico do exemplo, pergunte:
• Para que valores de x a função f é positiva? ($-3 < x < 8$)
• Para que valores de x a função f é negativa? ($-7 \leq x < 3$ ou $8 < x \leq 11$)
• Para que valores de x a função f se anula? ($x = -3$ ou $x = 8$)
Enfatize que os valores de x em que f se anula são as raízes da função e que esses valores são as abscissas dos pontos em que o gráfico intercepta o eixo das abscissas.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIO RESOLVIDO

7. Observe o gráfico que descreve o índice $f(t)$ da bolsa de valores de um estado, em porcentagem, em função do horário t, em hora, desde o início do pregão, às 10 h, até o fechamento, às 18 h, de determinado dia.



Elaborado para fins didáticos.

a. Qual foi o maior valor atingido pelo índice da bolsa de valores nesse dia? Em que horário esse valor foi atingido?

b. Qual foi o menor valor atingido pelo índice da bolsa de valores nesse dia? Em que horário esse valor foi atingido?

c. Em que horários desse dia o índice da bolsa de valores foi nulo?

d. Em que horários desse dia o índice da bolsa de valores esteve positivo?

e. Em que horários desse dia o índice da bolsa de valores esteve negativo?

Resolução

a. Observando que $f(11) = 2{,}5$ e que $2{,}5 \geqslant f(t)$ para qualquer t do domínio de f, concluímos que o maior valor do índice da bolsa de valores nesse dia foi 2,5% e que esse valor foi atingido às 11 horas.

b. Observando que $f(14) = -0{,}7$ e que $-0{,}7 \leqslant f(t)$ para qualquer t do domínio de f, concluímos que o menor valor do índice da bolsa de valores nesse dia foi $-0{,}7\%$ e que esse valor foi atingido às 14 horas.

c. A função f se anula nos pontos de intersecção do gráfico com o eixo das abscissas. Logo, o índice da bolsa de valores foi nulo às 13 horas e às 16 horas.

d. Cada ponto do gráfico é da forma $(t, f(t))$ e, portanto, os pontos que têm $f(t) > 0$ são aqueles localizados acima do eixo Ot. Esses pontos têm a abscissa t obedecendo à condição $10 \leqslant t < 13$ ou $16 < t \leqslant 18$. Logo, no período do pregão, o índice da bolsa de valores esteve positivo antes das 13 horas e depois das 16 horas.

e. O índice da bolsa de valores esteve negativo para os pontos que têm $f(t) < 0$, ou seja, para aqueles localizados abaixo do eixo Ot. Esses pontos têm a abscissa t obedecendo à condição $13 < t < 16$. Logo, no período do pregão, o índice da bolsa de valores esteve negativo entre 13 e 16 horas.

Reflexão: Sim. Se o gráfico de uma função for uma reta não paralela ao eixo Ox, então o gráfico vai cruzar esse eixo em um único ponto. Assim, à direita desse ponto o sinal assumido pela função será contrário ao sinal assumido por ela à esquerda desse ponto.

Reflexão

Se o gráfico de uma função for uma reta não paralela ao eixo Ox, então, obrigatoriamente, essa função vai assumir valores positivos e também valores negativos?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

22. O gráfico a seguir representa a função:

$f: [-4, 2] \to \left]-\frac{9}{2}, 8\right]$

Determine:

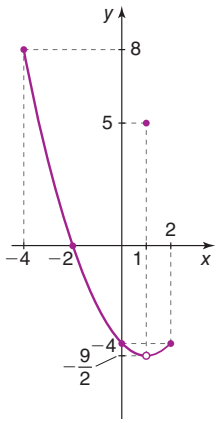
a. $f(-4)$ **22. a.** $f(-4) = 8$

b. $f(-2)$ **22. b.** $f(-2) = 0$

c. $f(0)$ **22. c.** $f(0) = -4$

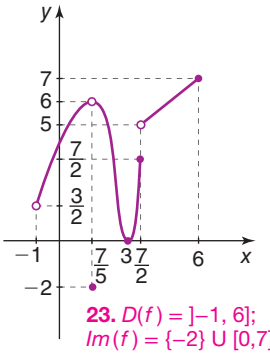
d. $f(1)$ **22. d.** $f(1) = 5$

e. $f(2)$ **22. e.** $f(2) = -4$

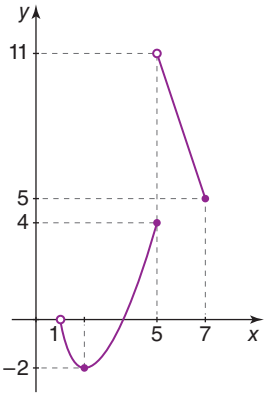


23. Determine o domínio e o conjunto imagem das funções f e g representadas a seguir.

função f



função g

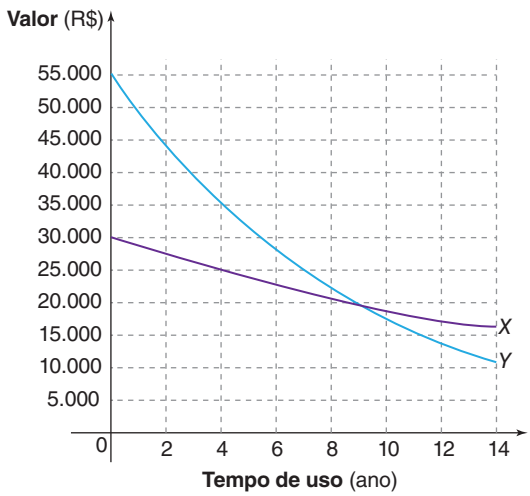


23. $D(f) =]-1, 6]$;
$Im(f) = \{-2\} \cup [0,7]$;
$D(g) =]1, 7]$;
$Im(g) = [-2, 4] \cup [5,11[$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

24. (Enem) Alguns brasileiros têm o hábito de trocar de carro a cada um ou dois anos, mas essa prática nem sempre é um bom negócio, pois o veículo desvaloriza com o uso. Esse fator é chamado de depreciação, sendo maior nos primeiros anos de uso.

Uma pessoa realizou uma pesquisa sobre o valor de mercado dos dois veículos (X e Y) que possui. Colocou os resultados obtidos em um mesmo gráfico, pois os veículos foram comprados juntos.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Após a pesquisa, ela decidiu vender os veículos no momento em que completarem quatro anos de uso.

Disponível em: www.carrosnaweb.com.br. Acesso em: 3 ago. 2012 (adaptado).

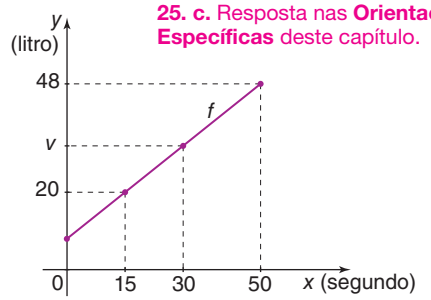
Considerando somente os valores de compra e de venda dos veículos por essa pessoa, qual a perda, em reais, que ela terá? **23.** alternativa **c**

a. 10.000,00 **c.** 25.000,00 **e.** 45.000,00

b. 15.000,00 **d.** 35.000,00

25. Em um posto de abastecimento, um motorista pediu ao frentista que completasse o tanque de seu automóvel, que estava com pouco combustível. O gráfico a seguir, formado por um segmento de reta, representa a função f que descreve o volume de combustível no tanque, em litro, em função do tempo t, em segundo, a partir do instante 0 (zero) em que foi acionado o gatilho da bomba de combustível, a uma vazão constante.

25. c. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.



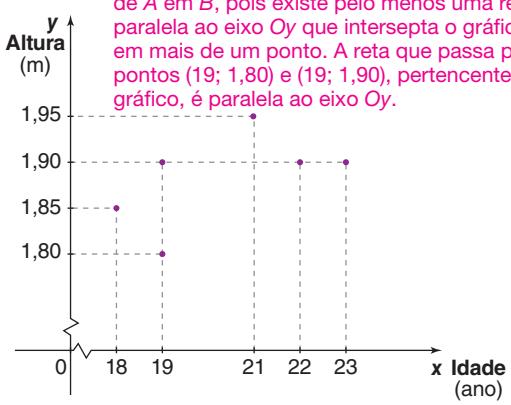
a. Aplicando o teorema de Tales, calculem o volume v de combustível, em litro, que havia no tanque depois de 30 s do acionamento do gatilho. **25. a.** 32 L

b. Aplicando o teorema de Tales, calculem a quantidade de combustível, em litro, que havia no tanque quando o motorista parou no posto. **25. b.** 8 L

c. Resolvam os itens **a** e **b** de outra maneira.

26. O gráfico a seguir relaciona as idades com as respectivas alturas dos 6 jogadores da equipe titular de voleibol de um clube.

26. a. O gráfico não representa uma função de A em B, pois existe pelo menos uma reta paralela ao eixo Oy que intersepta o gráfico em mais de um ponto. A reta que passa pelos pontos (19; 1,80) e (19; 1,90), pertencentes ao gráfico, é paralela ao eixo Oy.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Nota: Os símbolos ≷ no eixo vertical e ⌇ no eixo horizontal indicam que os intervalos [0; 1,80] e [0;18] estão fora de escala em relação às demais medidas representadas nos respectivos eixos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

27. a. $S = \{-2, 0, 1, 2, \frac{5}{2}\}$

27. b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } 1 < x < 2 \text{ ou } \frac{5}{2} < x \leqslant 3\}$

a. Sendo A o conjunto das idades desses jogadores e B o conjunto das respectivas alturas, o gráfico anterior representa uma função de A em B? Por quê?

b. Quantos jogadores dessa equipe têm a mesma idade?

c. Quantos jogadores dessa equipe têm a mesma altura? **26. c.** 3 jogadores **26. b.** 2 jogadores

27. O gráfico a seguir representa uma função $f\colon [-2, 3] \to \mathbb{R}$. Obtenha os valores de x para os quais:

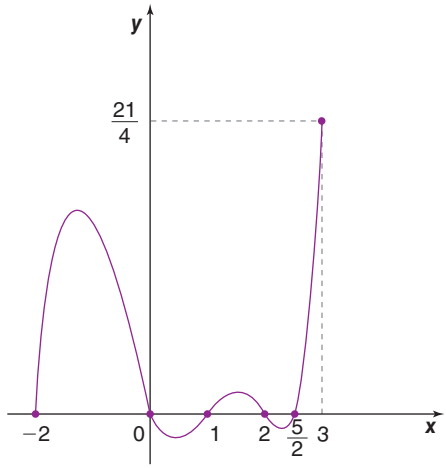
a. $f(x) = 0$

b. $f(x) > 0$

c. $f(x) \geqslant 0$

d. $f(x) < 0$

e. $f(x) \leqslant 0$



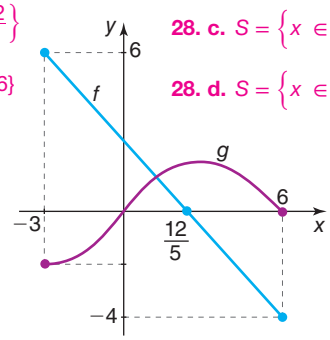
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

27. c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ ou } \frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 3\}$

28. No plano cartesiano a seguir, estão representadas duas funções, f e g, de domínio $[-3, 6]$ e contradomínio $\mathbb{R}$.

28. a. $S = \{\frac{12}{5}\}$

28. b. $S = \{0, 6\}$



28. c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < \frac{12}{5}\}$

28. d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{12}{5} < x \leqslant 6\}$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Determine os valores de x tais que:

a. $f(x) = 0$

b. $g(x) = 0$

c. $f(x) > 0$

d. $f(x) < 0$

e. $g(x) > 0$

f. $g(x) < 0$

g. $f(x) \cdot g(x) < 0$

h. $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$

29. Elabore um problema envolvendo o gráfico de uma função que tem pelo menos três pontos cuja imagem é 0 (zero), ou seja, que $f(x) = 0$ para três valores distintos de x. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

29. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 7 a 10.

27. d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < \frac{5}{2}\}$

27. e. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\}$

Mentes brilhantes

A ideia de gráfico de uma função

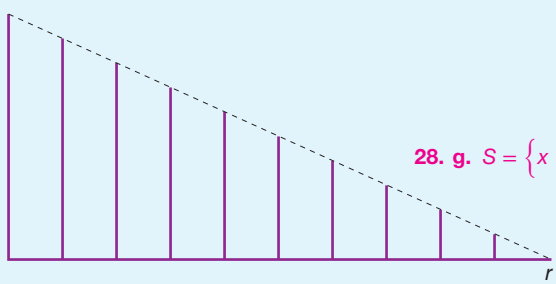
Duas importantes características da realidade que nos cerca são a transformação e a interdependência. Todas as coisas se transformam no Universo, e cada uma depende da transformação de outra. A necessidade de estudar essas duas características simultâneas levou filósofos e cientistas a criar o conceito de função.

O termo **função**, para nomear um tipo de relação entre duas variáveis dependentes, apareceu pela primeira vez em um manuscrito de Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) em 1673, embora o conceito já fizesse parte das ciências de maneira informal.

Muito antes de Leibniz, um importante avanço nesse estudo foi conseguido pelo matemático francês Nicole Oresme (cerca de 1323-1382), quando usou o que hoje chamamos de **gráfico** para representar a variação de duas grandezas interdependentes.

Ao estudar o movimento de um corpo com aceleração constante, Oresme teve a ideia de representar instantes de tempo por meio de pontos assinalados em uma reta r e por eles traçar segmentos de reta, perpendiculares a r, cujos comprimentos representavam a velocidade do corpo, conforme mostra a figura a seguir. Ligando as extremidades desses segmentos, Oresme constatou, geometricamente, importantes leis da Física.

Aproveite o contexto do boxe **Mentes brilhantes** para evidenciar que os conhecimentos científicos são obtidos por um esforço coletivo e que os avanços científicos, inclusive os matemáticos, são potencializados pela cooperação entre as pessoas que produzem Ciência.



28. e. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 6\}$

28. f. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 0\}$

28. h. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{12}{5}\}$

28. g. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 0 \text{ ou } \frac{12}{5} < x < 6\}$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Defina a função real de variável real, explicando o significado dessa classificação: função real é toda aquela que assume valores reais; variável real é toda aquela que assume valores reais.
Comente que uma função f está completamente determinada se conhecermos o seu domínio A, o seu contradomínio B e a lei que associa cada x de A a um y de B.
Quando uma função é apresentada simplesmente pela lei $y = f(x)$, devemos entender que seu domínio é o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$, em que f pode ser definida e seu contradomínio é $\mathbb{R}$.

5. Função real de variável real

Toda função em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ é chamada de **função real de variável real**. Por exemplo, a função $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = 2x - 5$ é uma função real de variável real, pois seu domínio ($\mathbb{N}$) e seu contradomínio ($\mathbb{Z}$) são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Domínio e contradomínio

Uma maneira de descrever precisamente uma função f é explicitar seu domínio, seu contradomínio e a lei que associa cada x do domínio ao correspondente y do contradomínio. Há casos, porém, em que a descrição de uma função pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$, ficando subentendidos o domínio e o contradomínio. Esses casos são sintetizados pela seguinte convenção:

> Uma função f pode ser apresentada simplesmente pela lei de associação $y = f(x)$ se, e somente se, o domínio de f é o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ em que f pode ser definida, e o contradomínio de f é $\mathbb{R}$.

Assim, se uma função é apresentada apenas pela lei de associação $y = f(x)$, seu domínio $D(f)$ e seu contradomínio $CD(f)$ são os conjuntos:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \text{ e } CD(f) = \mathbb{R}$$

Exemplos

a. Considere a função dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Como o domínio e o contradomínio não foram explicitados, admitimos $CD(f) = \mathbb{R}$ e $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$, pois:

$$\frac{1}{x} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } x \neq 0$$

b. Considere a função dada por $g(x) = 5x$. Como o domínio e o contradomínio não foram explicitados, admitimos $CD(f) = \mathbb{R}$ e $D(f) = \mathbb{R}$, pois, para que $5x$ seja real, basta que x seja real:

$$5x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

Note que, ao buscar o domínio de uma função $y = f(x)$, precisamos analisar a lei de associação de f e, assim, obter as restrições da variável x para que exista a função f. A essas restrições damos o nome de **condição de existência**.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8. Determine o domínio da função f dada por:

$$f(x) = \frac{3}{x - 8}$$

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais x de modo que $\frac{3}{x-8}$ também seja real.

Então, temos:

$\frac{3}{x-8} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 8 \neq 0$, ou seja, $x \neq 8$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 8\}$.

9. Determine o domínio da função f dada por:

$$f(x) = \sqrt{x - 5}$$

Resolução

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais x de modo que $\sqrt{x-5}$ também seja real.

Então, temos:

$\sqrt{x-5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ e $x - 5 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant 5$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

10. Determine o domínio da função f de lei:

$$f(x) = \frac{3}{x-8} + \sqrt{x-5}$$

Resolução

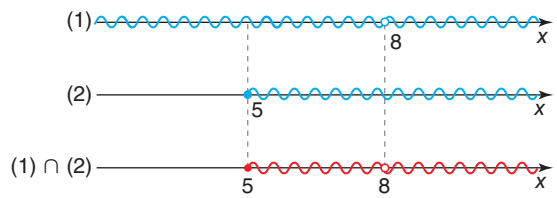
O domínio de f é o conjunto de todos os números reais de modo que

$\frac{3}{x-8} + \sqrt{x-5}$ também seja real.

Então, temos:

$$\frac{3}{x-8} + \sqrt{x-5} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R},\ \underbrace{x-8 \neq 0}_{(1)} \text{ e } \underbrace{x-5 \geqslant 0}_{(2)}$$

Lembrando que o conectivo "**e**" indica a intersecção das soluções das inequações (1) e (2), temos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5 \text{ e } x \neq 8\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

30. Determine o domínio de cada uma das funções.

a. $f(x) = \sqrt{x}$ **30. a.** $D(f) = \mathbb{R}_+$

b. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **30. b.** $D(f) = \mathbb{R}$

c. $f(x) = 3x + 5$ **30. c.** $D(f) = \mathbb{R}$

d. $f(x) = \frac{5}{x^2 - 9}$ **30. d.** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\}$

e. $f(x) = \sqrt{x-2}$ **30. e.** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

f. $f(x) = 15$ **30. f.** $D(f) = \mathbb{R}$

g. $f(x) = \frac{3}{x^2 - 36} + \sqrt{x-2}$ **30. g.** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 6\}$

h. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ **30. h.** $D(f) = \mathbb{R}^*$

31. Façam o que se pede.

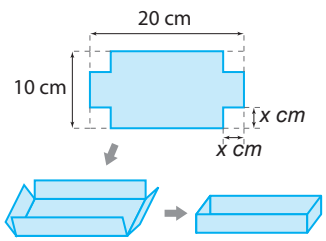
a. Determinem o domínio da função f de lei:

$$f(x) = \frac{4}{3x^2 + 2x + 1}$$ **31. a.** $D(f) = \mathbb{R}$

b. Determinem os valores reais de k para que a função g de lei $g(x) = \frac{4}{3x^2 + 2x + k}$ tenha como domínio o conjunto $\mathbb{R}$. **31. b.** $k > \frac{1}{3}$

32. Com uma folha retangular de cartolina de 20 cm de comprimento por 10 cm de largura, adotam-se os seguintes procedimentos:

- recortam-se dessa folha quatro quadrados de lado x cm, de modo que cada um deles tenha um vértice coincidindo com um vértice da folha;
- dobra-se essa folha, formando-se, assim, uma caixa sem tampa, conforme mostra a figura:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

32. a. $V(x) = (20 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x$

Indicando por $V(x)$ o volume, em centímetro cúbico, da caixa em função da medida x dos lados dos quadrados recortados, faça o que se pede.

a. Obtenha o volume $V(x)$ dessa caixa, em centímetro cúbico, em função da medida x.

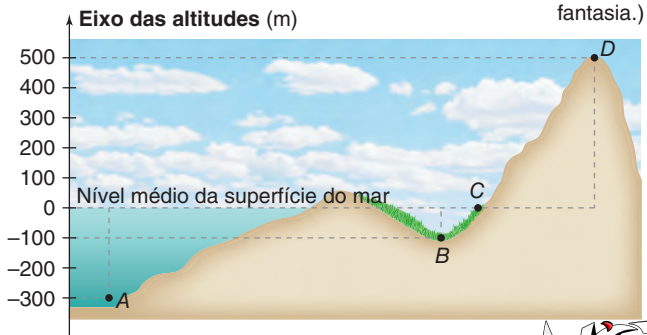
b. No contexto deste problema, determine o domínio da função V obtida no item **a**. **32. b.** $D(V) =]0, 5[$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 11 a 14.

6. Zero (ou raiz) de uma função

A distância de um ponto P ao nível médio da superfície do mar determina a altitude desse ponto. Se P está acima desse nível, sua altitude é positiva; se P está abaixo desse nível, sua altitude é negativa; e se P pertence a esse nível, sua altitude é zero. Por exemplo, na figura, que representa parte do relevo de uma região, os pontos A e B estão a altitudes negativas de -300 m e -100 m, respectivamente, o ponto C está à altitude 0 (zero), e D está à altitude positiva de 500 m.

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Após conceituar altitude de um ponto, discuta com os estudantes o exemplo introdutório. Pergunte: a partir da equação $h = -t^2 + 80t - 375$, como podemos determinar os instantes em que o alpinista esteve em pontos localizados ao nível do mar? (Basta fazer $h = 0$) Defina raiz (ou zero) de uma função, enfatizando que nem toda função tem raiz.
No item **h** do **exercício proposto 33**, reforce a importância da propriedade do produto nulo na resolução de equações.
Dê atenção especial ao **exercício proposto 34**, que explora o conceito de simetria.

Suponha que um alpinista, partindo do ponto *B*, representado na figura da página anterior, escale a montanha até o ponto *D* e retorne ao ponto de partida, e que a altitude *h*, em metro, em cada ponto do percurso, seja dada pela função *h* de lei $h = -t^2 + 80t - 375$, em que *t* representa o tempo decorrido, em minuto, desde o instante da partida.

Quanto tempo, em minuto, após a partida, o alpinista esteve em pontos localizados no nível do mar?

Para responder a essa questão, observamos que a altitude *h* de um ponto ao nível do mar é 0 (zero), isto é, $h = 0$. Assim, para determinar os valores de *t* para os quais a altitude *h* é zero, basta resolver a equação: $-t^2 + 80t - 375 = 0$

Calculando o discriminante dessa equação, temos:

$$\Delta = 80^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-375) = 4.900$$

Assim, obtemos as raízes da equação:

$$t = \frac{-80 \pm \sqrt{4.900}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow t = 5 \text{ ou } t = 75$$

Concluímos, então, que o alpinista esteve em pontos localizados ao nível do mar 5 minutos após a partida e 75 minutos após a partida. Os valores de *t*, 5 e 75, que anulam a função *h*, são chamados de raízes (ou zeros) dessa função.

Definimos:

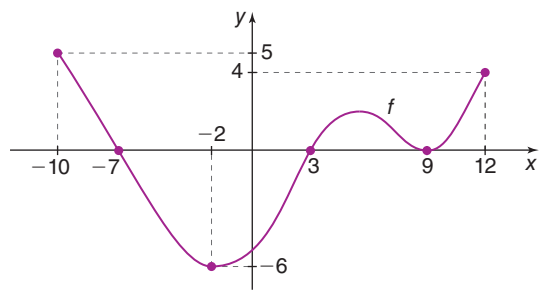
> Chama-se **zero** (ou **raiz**) de uma função real de variável real, $y = f(x)$, todo número *r* do domínio de *f* tal que $f(r) = 0$.

Nota:

Há funções que não têm raízes reais, como as funções *f* e *g* de leis $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = \frac{3}{x}$. Ou seja, não existe valor de *x* que faça *f* ou *g* se anularem.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

11. Neste plano cartesiano está representado o gráfico de uma função *f*. Quais são as raízes de *f*?



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

Observando o gráfico, temos $f(-7) = 0$, $f(3) = 0$ e $f(9) = 0$; então, concluímos que as raízes de *f* são: −7, 3 e 9.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

33. Determine as raízes de cada uma das funções reais de variável real.

a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ **33. a** 1 e 3

b. $y = 5x + 3$ **33. b.** $-\frac{3}{5}$

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ **33. c.** 3 e −3

d. $f(x) = x^4 - 4x^2$ **33. d.** 0, 2 e −2

e. $y = x^2 + 1$ **33. e.** Não existem raízes.

f. $z(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ **33. f.** 0, 2 e 4

g. $y = -3$ **33. g.** Não existem raízes.

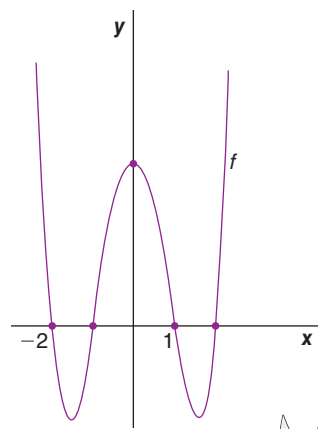
h. $f(x) = x^3 - 9x^2 - 9x + 81$ **33. h.** 9, 3 e −3

(*Sugestão:* Fatore o polinômio $x^3 - 9x^2 - 9x + 81$).

34. O gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é simétrico em relação ao eixo das ordenadas e intersepta o eixo das abscissas em exatamente quatro pontos distintos.

Quais são as raízes de *f*?

34. −2, −1, 1 e 2



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

35. Em relação à função f de lei $f(x) = 2x^2 - 3x + k$, obtenha os valores reais de k de modo que o gráfico de f:

a. tenha dois pontos distintos em comum com o eixo das abscissas; **35. a.** $k < \frac{9}{8}$

b. tenha apenas um ponto em comum com o eixo das abscissas; **35. b.** $k = \frac{9}{8}$

c. não tenha ponto em comum com o eixo das abscissas. **35. c.** $k > \frac{9}{8}$

36. A balança comercial de um país em determinado período é a diferença entre o valor monetário das exportações e o das importações, nessa ordem. Quando essa diferença é positiva, dizemos que houve um superávit na balança comercial; quando é negativa, afirmamos que houve déficit; e quando é zero, dizemos que a balança comercial foi nula ou que ela esteve em equilíbrio comercial.

Suponha que a balança comercial de um país tenha variado em determinado ano de acordo com a função f de lei $f(t) = t^2 - 7t + 10$, em que $f(t)$ é o valor da balança comercial, em bilhão de dólares, no mês t, com $1 \leqslant t \leqslant 12$, tal que $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, ..., e $t = 12$ representam os meses de janeiro, fevereiro, março, ..., dezembro, respectivamente.

a. Qual foi a balança comercial desse país em março do ano citado? **36. a.** –2 bilhões de dólares

b. No contexto do enunciado do problema, quais são as raízes da função f? **36. b.** 2 e 5

c. No contexto do enunciado do problema, qual é a interpretação das raízes da função f?

d. Houve algum mês do período citado em que a balança comercial desse país teve um déficit de 3 bilhões de dólares? Justifique sua resposta.

36. d. Para $t^2 - 7t + 10 = -3$, temos $\Delta = -3$. Como $\Delta < 0$, concluímos que em nenhum dos meses do período citado houve déficit de 3 bilhões de dólares.

36. c. A balança comercial esteve em equilíbrio nos meses de fevereiro e maio.

37. Em uma corrida de Fórmula 1, dois carros, A e B, dão a largada simultaneamente, lado a lado. Nos primeiros instantes da corrida, A tomou a frente; porém, logo foi ultrapassado por B. Desde a largada até o instante em que B alcança A, a distância d entre os dois, em metro, pode ser expressa em função do tempo t, em segundo, por: $d(t) = \frac{t^3 - 36t}{t - 20}$

Quantos segundos após a largada o carro B alcançou A? **37.** 6 segundos

38. Em um plano cartesiano, represente o gráfico de uma função que tenha pelo menos uma raiz. Depois, elabore um problema envolvendo esse gráfico. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

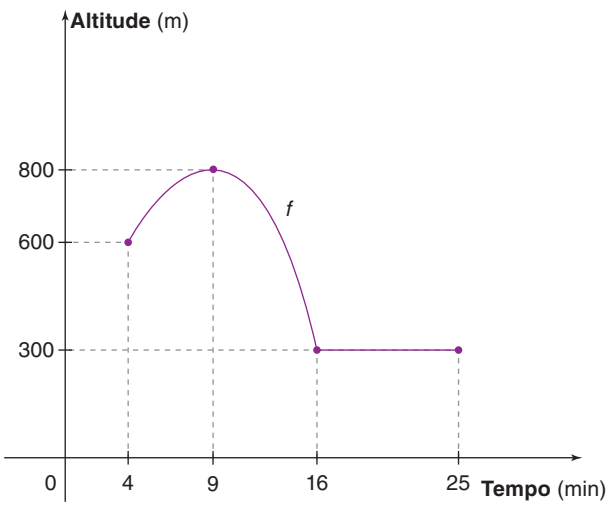
38. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 15.

7. Variação de uma função

Em um voo, um helicóptero sobrevoou o litoral de uma região.

O gráfico a seguir representa a função f que descreve a altitude de voo do helicóptero, em metro, em função do tempo, em minuto, no intervalo de 4 min a 25 min, após a partida.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



KIRSTEN WALLA/ISTOCK/GETTY IMAGES

Voo de helicóptero policial em Sydney, Austrália. Foto de 2021.

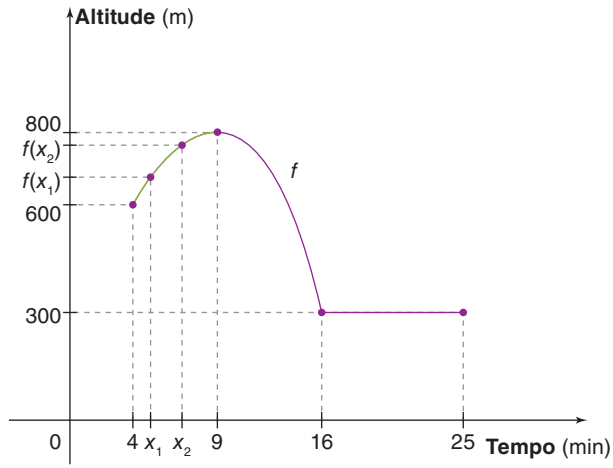
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Destacamos nesse gráfico que:

- No intervalo de 4 min a 9 min, quanto maior o tempo de voo, maior é a altitude atingida pelo helicóptero, isto é, se $\{x_1, x_2\} \subset [4, 9]$, com $x_2 > x_1$, então $f(x_2) > f(x_1)$. Por isso, dizemos que a função f é **crescente** no intervalo $[4, 9]$.

Uma função f é **crescente** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 de A, com $x_2 > x_1$, a imagem de x_2 é maior que a imagem de x_1, por meio de f. Isto é, f é crescente se, e somente se:

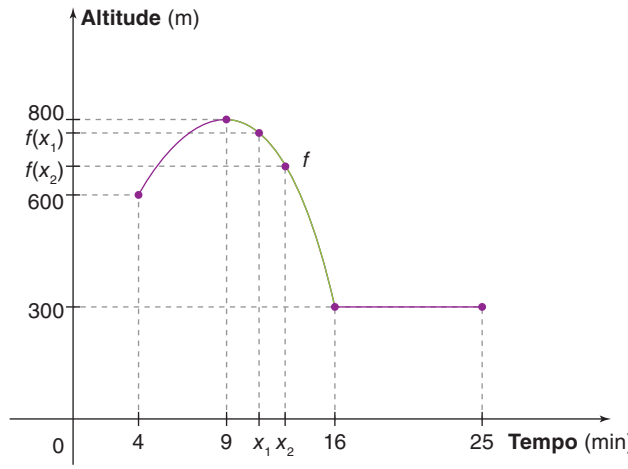
$$\{x_1, x_2\} \subset A \text{ e } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$



- No intervalo de 9 min a 16 min, quanto maior o tempo de voo, menor é a altitude atingida pelo helicóptero, isto é, se $\{x_1, x_2\} \subset [9, 16]$, com $x_2 > x_1$, então $f(x_2) < f(x_1)$. Por isso, dizemos que a função f é **decrescente** no intervalo $[9, 16]$.

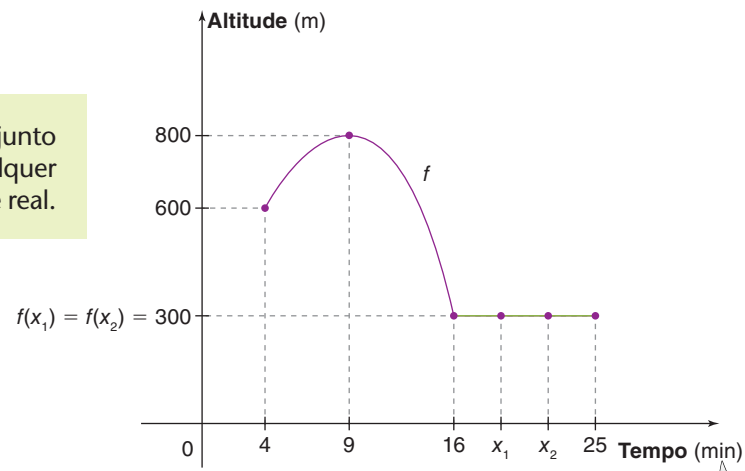
Uma função f é **decrescente** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para quaisquer números x_1 e x_2 de A, com $x_2 > x_1$, a imagem de x_2 é menor que a imagem de x_1 por meio de f. Isto é, f é decrescente se, e somente se:

$$\{x_1, x_2\} \subset A \text{ e } x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$



- No intervalo de 16 min a 25 min, a altitude de voo do helicóptero é sempre a mesma para qualquer valor do tempo, isto é, para qualquer x pertencente ao intervalo $[16, 25]$, temos $f(x) = 300$. Por isso, dizemos que f é **constante** no intervalo $[16, 25]$.

Uma função f é **constante** em um subconjunto A do domínio de f se, e somente se, para qualquer número x de A, temos $f(x) = k$, uma constante real.



ILUSTRAÇÕES: ERICSSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

12. Mostre que a função f de lei $f(x) = 3x + 2$ é crescente em todo o domínio $\mathbb{R}$.

Resolução

Vamos considerar dois números reais quaisquer, x_1 e x_2, tal que $x_2 > x_1$. Multiplicamos por 3 ambos os membros dessa desigualdade: $3x_2 > 3x_1$. Em seguida, adicionamos 2 unidades a ambos os membros da última desigualdade, obtendo:

$$\underbrace{3x_2 + 2}_{f(x_2)} > \underbrace{3x_1 + 2}_{f(x_1)}$$

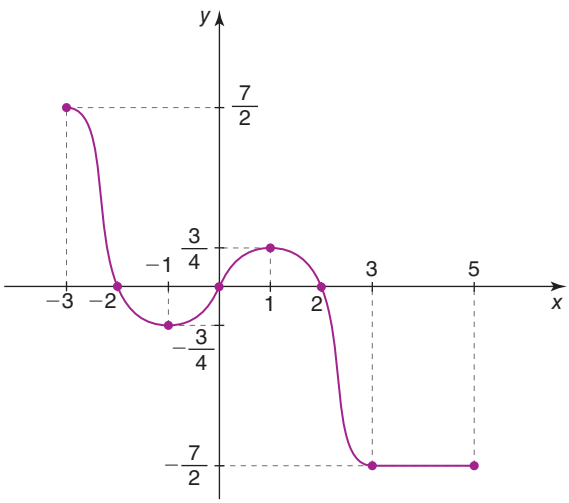
Assim, provamos que, para quaisquer números reais x_1 e x_2, com $x_2 > x_1$, temos $f(x_2) > f(x_1)$. Logo, f é uma função crescente em todo o domínio $\mathbb{R}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

39. Uma função f é representada pelo gráfico a seguir.



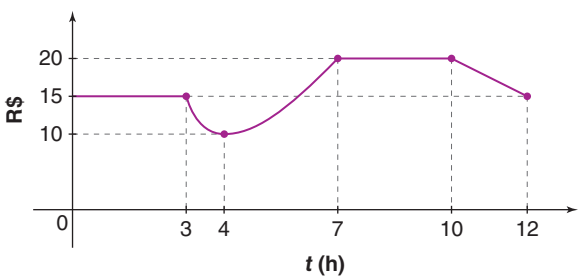
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Em que intervalo(s) do domínio a função f é crescente? **39. a.** $[-1, 1]$

b. Em que intervalo(s) do domínio a função f é decrescente? **39. b.** $[-3, -1]$ e $[1, 3]$

c. Em que intervalo(s) do domínio a função f é constante? **39. c.** $[3, 5]$

40. Em determinado dia, os valores das ações de um empresa oscilaram em um período de 12 horas, como representado no gráfico a seguir.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com o gráfico, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. O valor da ação dessa empresa foi decrescente de 3 h a 4 h e de 10 h a 12 h desse período. **40. a.** verdadeira

b. O valor da ação dessa empresa foi constante de 0 h a 3 h e de 7 h a 10 h desse período. **40. b.** verdadeira

c. O valor da ação dessa empresa foi crescente durante quatro horas desse período. **40. c.** falsa

d. O maior valor atingido pela ação dessa empresa nesse período foi de 20 reais. **40. d.** verdadeira

e. O menor valor atingido pela ação dessa empresa nesse período foi de 5 reais. **40. e.** falsa

41. Em um trecho de uma estrada, a velocidade v de um caminhão, em quilômetro por hora, em função do tempo t, em hora, pode ser calculada por $v(t) = 6t + 60$.



TARCISIO SCHNAIDER/SHUTTERSTOCK

Caminhão na Rodovia BR-163, em Rurópolis, Pará. Foto de 2024.

a. Durante esse trecho, sejam t_1 e t_2 dois valores quaisquer do tempo, em hora. Mostre que, se $t_1 > t_2$, então $v(t_1) > v(t_2)$. **41. a.** $t_1 > t_2 \Rightarrow 6t_1 > 6t_2$
$\therefore 6t_1 + 60 > 6t_2 + 60 \Rightarrow v(t_1) > v(t_2)$

b. De acordo com o que você demonstrou no item **a**, pode-se concluir que o caminhão esteve em movimento acelerado ou retardado? (O movimento é acelerado ou retardado conforme a velocidade v do caminhão seja crescente ou decrescente, respectivamente.) **41. b.** acelerado

42. a. $t_1 > t_2 \Rightarrow -10t_1 < -10t_2 \therefore 90.000 - 10t_1 < 90.000 - 10t_2 \Rightarrow v(t_1) < v(t_2)$

42. Durante certo período, o volume V, em litro, de água contida em uma piscina variou em função do tempo t, em hora, de acordo com a função V de lei:

$$V(t) = 90.000 - 10t$$

a. No período considerado, sejam t_1 e t_2 dois valores quaisquer do tempo, em hora. Mostre que, se $t_1 > t_2$, então $V(t_1) < V(t_2)$.

b. De acordo com o que você demonstrou no item **a**, pode-se concluir que a piscina estava sendo enchida ou esvaziada no período considerado?

42. b. esvaziada

43. Durante certo período, a pressão interna p de um recipiente variou em função do tempo t conforme a função p de lei $p(t) = \frac{t+1}{t}$, em que as unidades de p e t são atmosfera e minuto, respectivamente. Mostrem que durante esse período a pressão decresceu com o passar do tempo.

43. Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** do capítulo.

$\left(\text{Sugestão: } \frac{t+1}{t} = \frac{t}{t} + \frac{1}{t} = 1 + \frac{1}{t}\right)$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 16 a 19.

Reflexão

Se na função $y = f(x)$ a variável y representa a distância, em quilômetro, percorrida por um automóvel em x horas de viagem, qual é o significado físico da taxa média de variação de y em relação a x, quando este varia de x_1 a x_2, com $x_2 > x_1$?

Reflexão: Quando x varia de x_1 a x_2, com $x_2 > x_1$, temos que y varia de $f(x_1)$ a $f(x_2)$. Assim, a taxa média de variação de y em relação a x é dada, em quilômetros por hora, por: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
Logo, a taxa média de variação de y em relação a x representa a velocidade média do automóvel, em quilômetro por hora, no intervalo de tempo $[x_1, x_2]$.

Taxa média de variação de uma função

Para qualquer função $y = f(x)$, a razão entre a variação de valores de y e a correspondente variação de valores de x, nessa ordem, é chamada de **taxa média de variação** de y em relação a x, isto é, se $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ são dois pontos distintos do gráfico da função $y = f(x)$, então a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, que é igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$, é a taxa média de variação de y em relação a x, quando este varia de x_A a x_B.

Exemplos

a. Para a função f de lei $f(x) = x^2$, temos:

- a taxa média de variação para x variando de 2 a 3 é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3^2 - 2^2}{3 - 2} = \frac{5}{1} = 5$$

- a taxa média de variação para x variando de 4 a 6 é dada por:

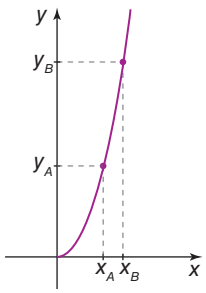
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6^2 - 4^2}{6 - 4} = \frac{20}{2} = 10$$

b. Na função constante $y = 4$, a taxa média de variação para x variando de x_A a x_B é zero, para quaisquer valores reais distintos x_A e x_B, pois: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 - 4}{x_B - x_A} = 0$

Propriedades

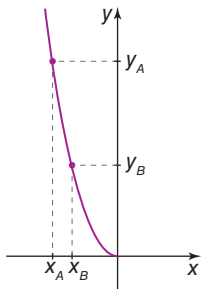
Converse com os estudantes acerca das três propriedades que relacionam a taxa média de variação de uma função com as possíveis classificações da função: crescente, constante ou decrescente. Peça exemplos do dia a dia.

Uma função é **crescente** em um subconjunto S do domínio se, e somente se, a taxa média de variação é positiva para quaisquer dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do gráfico, com $\{x_A, x_B\} \subset S$.



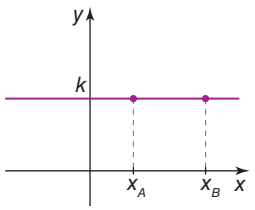
$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} > 0$$

Uma função é **decrescente** em um subconjunto S do domínio se, e somente se, a taxa média de variação é negativa para quaisquer dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do gráfico, com $\{x_A, x_B\} \subset S$.



$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} < 0$$

Uma função é **constante** em um subconjunto S do domínio se, e somente se, a taxa média de variação é nula para quaisquer dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do gráfico, com $\{x_A, x_B\} \subset S$.



$$\frac{k - k}{x_B - x_A} = 0$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

44. Um ciclista, trafegando em um único sentido de uma rodovia, passou às 10 h pelo quilômetro 32 e às 10 h 30 min pelo quilômetro 50. Qual foi a taxa média de variação da distância percorrida em relação ao tempo, em quilômetro por hora? (*Nota*: Essa taxa de variação é chamada de **velocidade média** do ciclista no período de tempo considerado.)

44. 36 km/h

45. Em uma noite de inverno em uma região montanhosa, a temperatura às 19 h era 8 °C, decrescendo até 2 °C às 23 h. Qual foi a taxa média de variação da temperatura em relação ao tempo? **45.** −1,5 °C/h

46. Em dias muito quentes, costumamos dizer que o vento refresca o clima. Esse frescor é, na verdade, a sensação térmica, pois, mesmo que a temperatura do ar seja constante, a velocidade do vento nos dá a sensação de variação na temperatura.

A sensação térmica depende de fatores que podem ser medidos, como a umidade relativa do ar, a pressão atmosférica e a velocidade do vento, e de fatores subjetivos, que não podem ser medidos, já que variam de uma pessoa para outra.

Quando os noticiários se referem a uma medida em grau Celsius da sensação térmica, na realidade eles estão informando o **índice de sensação térmica**, que leva em consideração apenas a temperatura do ar e a velocidade do vento.

Segundo dados do Instituto Nacional de Meteorologia (Inmet), sob a temperatura real de 10 °C e ventos com velocidade 11 km/h, o índice de sensação térmica é de 7 °C; se a velocidade do vento aumentar para 47 km/h, o índice de sensação térmica cai para −2 °C.

Sob a temperatura real de 10 °C, qual é a taxa média de variação do índice de sensação térmica em relação à velocidade do vento, quando há variação de 11 km/h a 47 km/h? **46.** −0,25 °C

47. Resposta pessoal.

47. Elabore um problema cuja taxa de variação de uma função seja igual a 5, em unidade de medida dessa variação. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 20 e 21.

8. Funções inversas

Explore o exemplo do reservatório de água fazendo perguntas como as indicadas a seguir.
• Qual é a interpretação das coordenadas do ponto (1, 20) do gráfico 1? (As coordenadas indicam que, quando a altura da superfície da água, em relação ao fundo, era 1 m, o volume de água no reservatório era de 20 m³.)
• Qual é a interpretação das coordenadas do ponto (20, 1) do gráfico 2? (A interpretação das coordenadas desse ponto é a mesma do ponto (1, 20).)
Destaque que, se um ponto (a, b) pertence a um dos gráficos, então o ponto (b, a) pertence ao outro. Após essa discussão, conclua que as funções representadas nos gráficos são inversas entre si.
Pergunte:
• Qual é o domínio da função representada pelo gráfico 1?
• Qual é o conjunto da função representada pelo gráfico 1?
• Qual é o domínio da função representada pelo gráfico 2?
• Qual é o conjunto imagem da função representada pelo gráfico 2?
Enfatize que o domínio de qualquer uma dessas funções é igual ao conjunto imagem da outra. Conclua comentando que os gráficos representam funções inversas.

Quando um reservatório de água com 60 m³ de capacidade estava vazio, abriu-se uma torneira com vazão constante para completá-lo. Os gráficos a seguir relacionam o volume v de água no reservatório, em metro cúbico, com a correspondente altura h, em metro, da superfície da água em relação ao fundo.

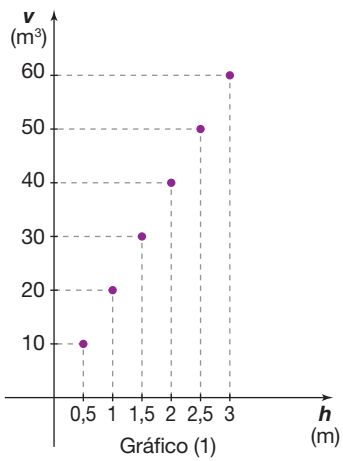


Gráfico (1)

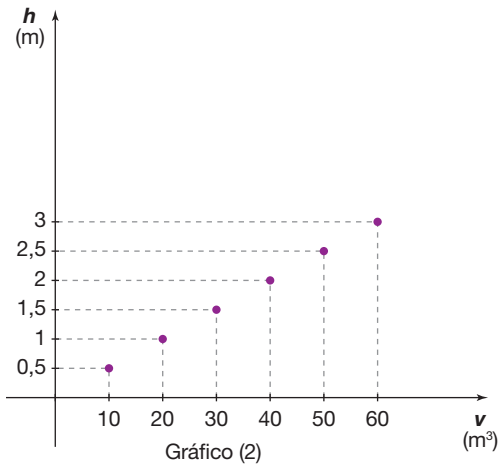


Gráfico (2)

Observando que o gráfico (**1**) descreve v em função de h, e o gráfico (**2**) descreve h em função de v, temos que:

- o gráfico (**1**) representa uma função de domínio $A = \{0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$ e conjunto imagem $B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$;
- o gráfico (**2**) representa uma função de domínio $B = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$ e conjunto imagem $A = \{0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3\}$;
- se um número b é imagem de um número a em um dos gráficos, então, a é imagem de b no outro; por exemplo, no gráfico (**1**) o número 40 é imagem do número 2, e no gráfico (**2**) o número 2 é imagem do número 40.

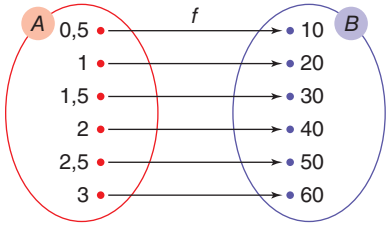
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

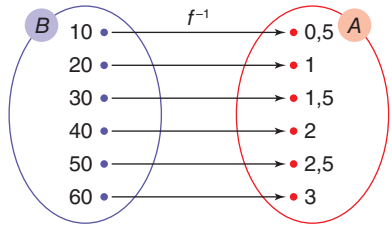
Por isso, dizemos que as funções representadas por esses gráficos são **inversas** uma da outra. Se indicarmos por f a função representada pelo gráfico (**1**), a função inversa de f, representada pelo gráfico (**2**), será indicada por: f^{-1} (lê-se: inversa da função f).

Observação

Se uma função f admite inversa, dizemos que ela é **invertível**.



$D(f) = Im(f^{-1}) = \{0{,}5;\ 1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3\}$



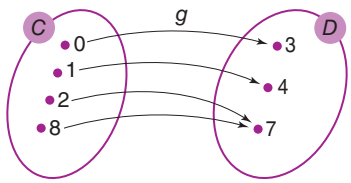
$D(f^{-1}) = Im(f) = \{10,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50,\ 60\}$

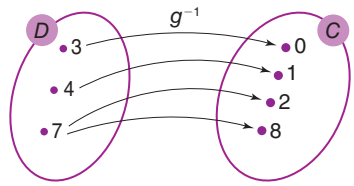
Nota:

É importante destacar que cada uma das funções f e f^{-1} é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B.

Se uma função g não é uma correspondência biunívoca entre seu domínio e seu contradomínio, então há pelo menos dois elementos no domínio com uma mesma imagem ou há algum elemento no contradomínio sem correspondente através de g e, portanto, a correspondência g^{-1} não é função.

Por exemplo:





Note que g^{-1} não é função, pois o elemento 7 tem mais de um correspondente no contradomínio C. Nesse caso, dizemos que a função g não admite inversa ou que a função g não é invertível.

Ou seja, uma função $f\colon A \to B$ é invertível se, e somente se, f é uma correspondência biunívoca entre A e B.

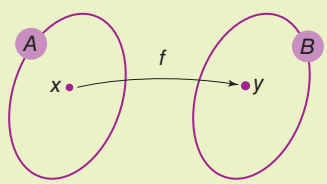
Sendo a função $f\colon A \to B$ uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B, a **inversa** de f é a função $f^{-1}\colon B \to A$, tal que:

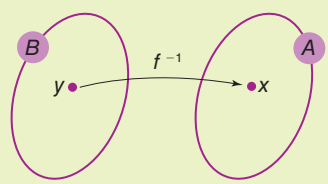
$$\text{se } f(x) = y, \text{ então } f^{-1}(y) = x,$$

para quaisquer x e y, com $x \in A$ e $y \in B$.

Observação

Observe que, se f é invertível, então $D(f) = Im(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = Im(f)$.





Obtendo a inversa de uma função

Retomando o exemplo que introduziu o tópico 8, acerca do reservatório de água, observamos que, a cada acréscimo de 0,5 m na altura da superfície da água, em relação ao fundo, há um acréscimo de 10 m³ de água no reservatório, inicialmente vazio. Assim, indicando por v o volume de água no reservatório, em metro cúbico, e por h a respectiva altura, em metro, atingida pela superfície da água, em relação ao fundo do reservatório, chegamos à equação:

$$v = 20h$$

Se achar necessário, relembre aos estudantes que uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos não vazios A e B associa cada elemento de A a um único elemento de B e cada elemento de B a um único elemento de A.

Lembre aos estudantes de que, para ser função, **todos** os elementos do domínio devem ter um correspondente no contradomínio e cada elemento do domínio deve estar associado a **apenas um** elemento do contradomínio.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
ILUSTRAÇÕES: ERICSSON GUILHERME LUCIANO /ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Essa equação expressa v em função de h; portanto, corresponde ao gráfico (**1**) apresentado naquele tópico. Se quisermos a equação correspondente ao gráfico (**2**), que expressa h em função de v, basta isolar h em um dos membros da equação apresentada anteriormente, obtendo:

$$h = \frac{v}{20}$$

Assim, observando os conjuntos A e B apresentados naquele tópico, temos que a função $v\colon A \to B$, com $v(h) = 20h$, e a função $h\colon B \to A$, com $h(v) = \frac{v}{20}$, são inversas.

Esse exemplo ajuda a entender o procedimento, descrito no exercício resolvido a seguir, para obter a lei de associação da função f^{-1} a partir da lei de associação da função f.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

13. Determine a inversa da função f de lei $f(x) = 3x - 1$.

Resolução

A expressão $f(x)$ representa a ordenada y de um ponto de abscissa x. Assim, a lei de associação que representa a função f pode ser expressa por $y = 3x - 1$. Para obter a inversa dessa função, inicialmente exibimos x em função de y, isto é, isolamos a variável x:

$$y = 3x - 1 \Rightarrow x = \frac{y + 1}{3}$$

Como a abscissa e a ordenada de cada ponto do gráfico da função f são transformadas, respectivamente, em ordenada e abscissa do ponto correspondente na função inversa f^{-1}, devemos substituir x por y e y por x nessa última igualdade, obtendo: $y = \frac{x + 1}{3}$

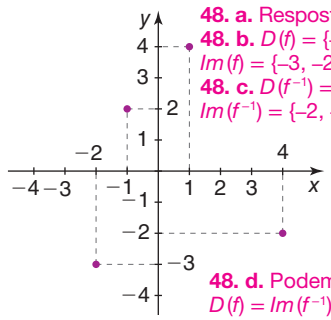
Concluímos, então, que a inversa da função f de lei $f(x) = 3x - 1$ é a função f^{-1} de lei $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3}$.

52. Espera-se que os estudantes respondam que não, pois o número de elementos de A é diferente do número de elementos de B e, portanto, não é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os conjuntos A e B.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

48. Observe o gráfico da função f.



48. a. Resposta no final do livro.
48. b. $D(f) = \{-2, -1, 1, 4\}$
$Im(f) = \{-3, -2, 2, 4\}$
48. c. $D(f^{-1}) = \{-3, -2, 2, 4\}$
$Im(f^{-1}) = \{-2, -1, 1, 4\}$
48. d. Podemos observar que $D(f) = Im(f^{-1})$ e $Im(f) = D(f^{-1})$

a. Represente em um plano cartesiano o gráfico de f^{-1}, ou seja, da inversa da função f.

b. Quais são o domínio e o conjunto imagem de f?

c. Quais são o domínio e o conjunto imagem de f^{-1}?

d. Com base nos itens **b** e **c**, o que você pode observar em relação ao domínio e à imagem de f e f^{-1}?

49. Dada a função invertível f de lei $f(x) = \frac{1}{x - 3}$, determine o conjunto imagem de sua inversa.

49. $Im(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$

50. Sejam os conjuntos $A = \{1, -1, 2, -2, 3\}$ e $B = \{2, 5, 10\}$ e a função $f\colon A \to B$ tal que $f(x) = x^2 + 1$.

a. Construa um diagrama de flechas que represente a função f.

b. Construa um diagrama de flechas que represente a correspondência f^{-1}.

c. A correspondência f^{-1} é função? Por quê?

50. Respostas no final do livro.

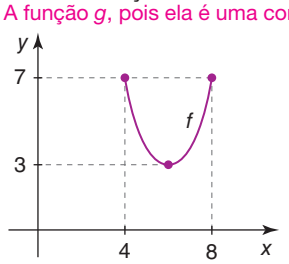
51. Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 7\}$ e $B = \left\{-4, 2, \frac{7}{2}, 6\right\}$ e a função $f\colon A \to B$ tal que $f(x) = \frac{x + 3}{x - 2}$. A função f é invertível? Por quê?

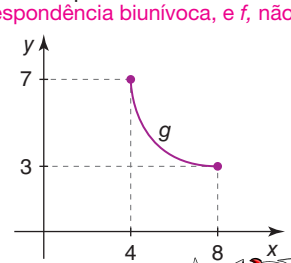
51. Sim, pois há uma correspondência biunívoca entre os elementos dos conjuntos A e B.

52. Reúna-se com um colega e discutam se existe alguma função de $A = \{2, 4, 6, 8\}$ em $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ que seja invertível. Justifiquem suas respostas.

53. Os gráficos a seguir representam duas funções, f e g, de domínio $D = [4, 8]$ e contradomínio $CD = [3, 7]$. Qual dessas funções é invertível? Por quê?

53. A função g, pois ela é uma correspondência biunívoca, e f, não.





Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

54. a. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$ **54. b.** $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$ **54. c.** $f^{-1}(x) = \frac{8-2x}{3x}$ **54. d.** $f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{2x-1}$ **54. e.** $f^{-1}(x) = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$ **54. f.** $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^3$

54. Considerando que cada uma das funções a seguir é uma correspondência biunívoca, determine a inversa de cada uma delas.

a. $y = 2x - 1$

b. $y = 4x + 2$

c. $y = \frac{8}{3x+2}$

d. $y = \frac{x+1}{2x-4}$

e. $y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$

f. $y = \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$

55. (UFC-CE) Uma função invertível f é tal que $f(x+3) = 2x - 1$. A inversa de f é: **55.** alternativa **a**

a. $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{2}$

b. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

c. $f^{-1}(x) = x + 3$

d. $f^{-1}(x) = 2x - 3$

e. $f^{-1}(x) = \frac{2}{x-3}$

56. Em determinado horário, os taxistas de uma cidade cobram uma tarifa fixa de R$ 5,00 pela bandeirada, cujo valor é indicado no taxímetro ao início da corrida, mais R$ 2,00 por quilômetro rodado. Indicando por p o preço a pagar, em real, por uma corrida qualquer nesse horário e por d a distância percorrida pelo táxi, em quilômetro, faça o que se pede.

a. Dê a equação que expressa o preço p em função da distância d. **56. a.** $p = 5 + 2d$

b. No item **a**, você obteve p em função de d. Observando que essa função é invertível, obtenha sua inversa, isto é, expresse d em função de p. **56. b.** $d = \frac{p-5}{2}$

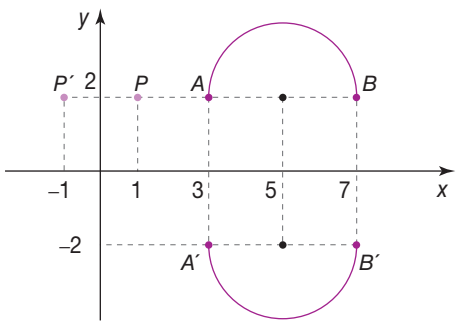
c. Qual é a interpretação da função obtida no item **b** em relação às grandezas envolvidas?

56. c. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

57. O conceito de **simetria** em relação a uma reta obedece às seguintes definições:

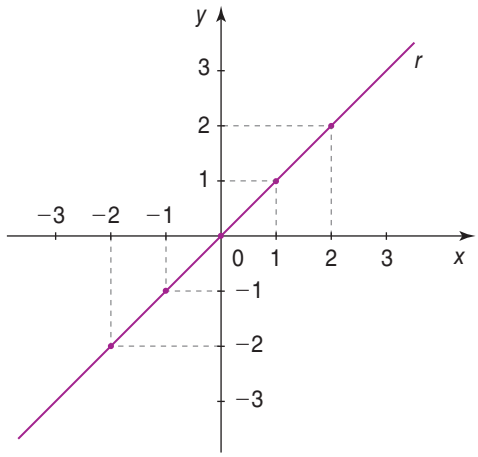
- Dois pontos distintos P e P' são **simétricos** em relação a uma reta r se, e somente se, a reta r é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Se um ponto M pertence à reta r, então o simétrico de M em relação a r é o próprio ponto M.
- Duas figuras são **simétricas** em relação a uma reta r quando todo ponto de qualquer uma delas é simétrico de um ponto da outra em relação a r.

Por exemplo, no plano cartesiano representado a seguir, os pontos P e P' são simétricos em relação ao eixo das ordenadas, e as semicircunferências $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{A'B'}$ são simétricas em relação ao eixo das abscissas.



De acordo com essas definições, responda aos itens a seguir.

a. A reta r, que divide os primeiro e terceiro quadrantes em ângulos de 45°, é chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares** e é o gráfico da função dada por $y = x$, esboçado a seguir.



57. d. Resposta no final do livro.

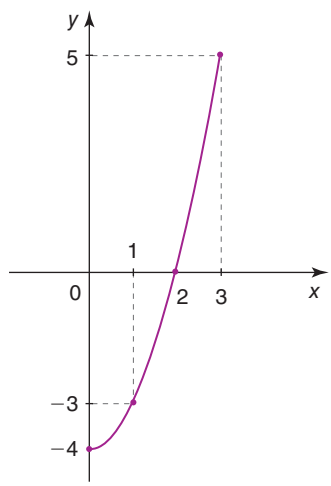
Qual é o simétrico do ponto $P(3, 5)$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares? **57. a.** $P'(5, 3)$

b. Qual é o simétrico do ponto $M(7, 7)$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares? **57. b.** $M'(7, 7)$

c. Para quaisquer números reais a e b, qual é o simétrico do ponto $Q(a, b)$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares? **57. c.** $Q'(b, a)$

d. Foi apresentado que se uma função f é invertível e um ponto $P(a, b)$ pertence ao gráfico de f, então o ponto $P'(b, a)$ pertence ao gráfico de f^{-1}. Assim, conhecendo o gráfico de f, como podemos construir o gráfico de f^{-1}?

58. Considere a função $f: [0, 3] \to [-4, 5]$, representada a seguir.



58. Resposta no final do livro.

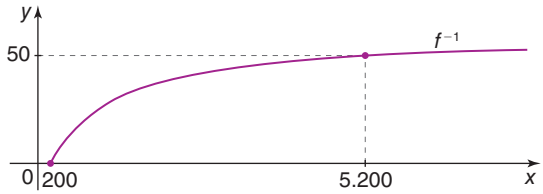
De acordo com a conclusão no exercício anterior, construa o gráfico de f^{-1}, determinando seu domínio e conjunto imagem.

57. Este exercício explora a a simetria em gráficos de funções, o que contribui para o trabalho com a habilidade **EM13MAT105**.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

59. Para aplanar um terreno, o proprietário contratou uma empresa de terraplanagem. O preço $f(x)$, em real, cobrado pela empresa por x metros cúbicos de terra retirados é dado pela função $f(x) = a + \frac{bx}{100 - x}$, para $x < 100$. O gráfico da função inversa f^{-1} é representado a seguir.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Nessas condições, determine:

a. as constantes a e b. **59. a.** $a = 200$ e $b = 5.000$

b. o preço cobrado pela empresa se o volume de terra retirado for de 36 m³. **59. b.** R$ 3.012,50

c. o volume de terra retirado se o preço cobrado pela empresa for R$ 15.200,00. **59. c.** 75 m³

60. Considerando o consumo médio de combustível de um veículo, digamos, 15 km/L, podemos determinar o volume de combustível gasto por meio de certa função f que relaciona o deslocamento x e o consumo médio. Agora, se queremos determinar o deslocamento de certo trajeto em relação ao volume gasto de combustível, podemos utilizar f^{-1}. Que outra situação do cotidiano pode ser associada a uma função invertível? Elabore um problema relacionado a essa situação e a funções inversas. **60.** Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Reúnam-se em duplas, apontem o erro cometido e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

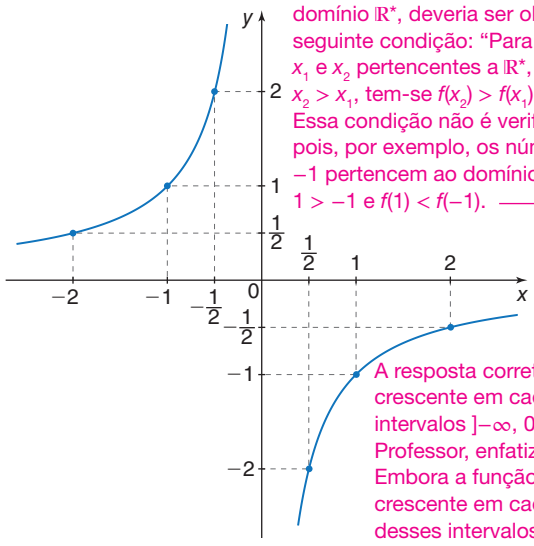
Considerando a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, com, $f(x) = -\frac{1}{x}$

a. atribua valores a x, obtenha alguns pontos e, a partir deles, esboce o gráfico da função; **Análise da resolução: a.** O esboço do gráfico apresentado está correto.

b. descreva os intervalos em que f é crescente, decrescente ou constante.

Resolução

a)



x	y
−2	$\frac{1}{2}$
−1	1
$-\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{2}$	−2
1	−1
2	$-\frac{1}{2}$

b. A resposta que o estudante deu a esse item é incorreta, pois, para que f fosse crescente em todo o domínio $\mathbb{R}^*$, deveria ser obedecida a seguinte condição: "Para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a $\mathbb{R}^*$, com $x_2 > x_1$, tem-se $f(x_2) > f(x_1)$". Essa condição não é verificada, pois, por exemplo, os números 1 e −1 pertencem ao domínio de f, com $1 > -1$ e $f(1) < f(-1)$.

A resposta correta é: f é crescente em cada um dos intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$. Professor, enfatize! Embora a função f seja crescente em cada um desses intervalos, ela não é crescente na reunião deles.

b) A função f é crescente em todo o seu domínio, pois a curva é descendente da esquerda para a direita.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Explorar erros comuns e recorrentes cometidos pelos estudantes é uma estratégia para minimizar esses erros e submetê-los à crítica. Para isso, os estudantes devem apontar e corrigir um erro cometido propositalmente no exercício. Incentive-os ao levantamento de dúvidas e a se posicionarem criticamente.

Conectado

Se possível, reserve a sala de informática para desenvolver essa atividade. Verifique se os computadores têm algum *software* de Geometria dinâmica instalado ou se é possível acessar programas desse tipo pela internet. Uma alternativa é explorar a atividade em sala de aula com um computador e projetor multimídia ou, ainda, utilizando calculadoras e folha de papel quadriculado.

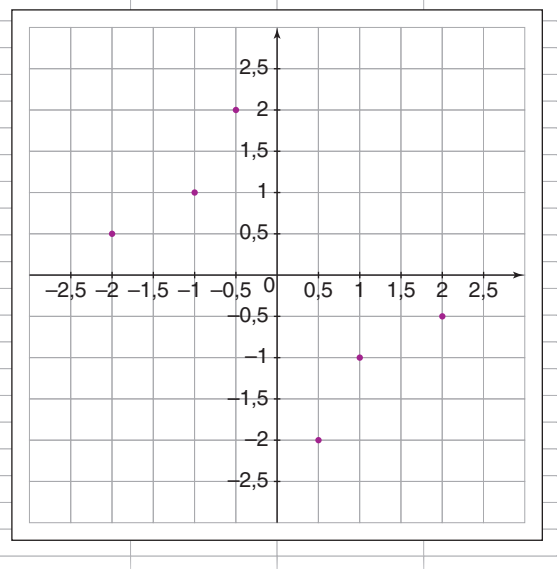
Vamos verificar outra maneira de compor o gráfico da função

$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, com, $f(x) = -\frac{1}{x}$.

Observe que o domínio da função não inclui o 0 (zero).

Em uma planilha eletrônica, indique os valores de x em uma coluna, digamos a **A**, e os de y em outra coluna, digamos a coluna **B**. Depois, selecione a opção "Inserir", "Gráfico" e escolha o tipo de gráfico de "Dispersão". Você obterá um gráfico similar ao apresentado na figura.

	A	B
1	x	y
2	–2	0,5
3	–1	1
4	–0,5	2
5	0,5	–2
6	1	–1
7	2	–0,5
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		



Incentive os estudantes a compor mais pontos, de maneira automática e com os recursos do *software* de Geometria dinâmica, a fim de que assimilem intuitivamente a ideia de continuidade do gráfico da função no intervalo $[-\infty, 0[$ e no intervalo $]0, \infty]$. Realize uma conversa acerca de o 0 (zero) não fazer parte do domínio da função f dessa atividade e explore uma análise gráfica do que acontece quando os valores de x se aproximam de zero pela esquerda e pela direita.

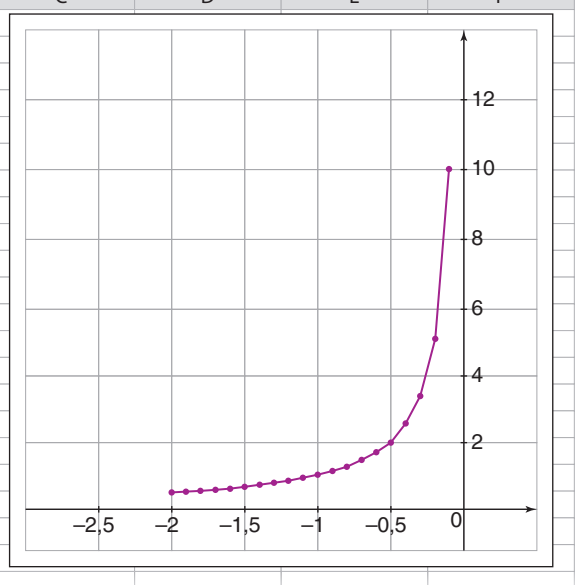
Observe que com apenas esse conjunto de pontos, podemos não ter ideia do comportamento da função. Existem diferentes ferramentas matemáticas para obter o gráfico de uma função, algumas serão apresentadas nos capítulos seguintes. Contudo, nesse momento, podemos observar como o gráfico se comporta inserindo mais pontos do domínio. Vamos focar os valores negativos do domínio da função f.

Abra uma nova planilha e reserve a coluna **A** para entrar com valores de x. Na coluna **B**, copie a fórmula "=–1/A2" na célula B2, "=–1/A3" na célula B3 e assim por diante. Você não precisa digitar as aspas, apenas a fórmula.

Agora, na coluna **A**, digite valores negativos para x, no intervalo de -2 a 0. Observe que os valores de y são preenchidos automaticamente na planilha.

Repita o procedimento para obter o gráfico de dispersão da função f referente aos valores negativos do domínio de f. O resultado está ilustrado a seguir.

	A	B
1	x	y
2	–2	0,5
3	–1,9	0,526316
4	–1,8	0,555556
5	–1,7	0,588235
6	–1,6	0,625
7	–1,5	0,666667
8	–1,4	0,714286
9	–1,3	0,769231
10	–1,2	0,833333
11	–1,1	0,909091
12	–1	1
13	–0,9	1,111111
14	–0,8	1,25
15	–0,7	1,428571
16	–0,6	1,666667
17	–0,5	2
18	–0,4	2,5
19	–0,3	3,333333
20	–0,2	5
21	–0,1	10
22		



O procedimento para obter gráficos de um conjunto de dados na planilha eletrônica pode ser realizado para diferentes tipos de gráficos, como o de colunas ou de setores. Neste momento, utilizamos o gráfico do tipo "dispersão" para compreender o comportamento de uma função f.

Repita o procedimento para os valores reais positivos do domínio da função f e compare com o gráfico apresentado na seção **Análise da resolução** da página anterior.

Após finalizar a análise gráfica da função f apresentada nesta seção, recomende aos estudantes que explorem o gráfico de outras funções. Sugira alguns exemplos e incentive-os a indicar outras funções.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Comente que, neste tópico, será realizada uma breve introdução aos gráficos estatísticos, que serão estudados com mais detalhes mais adiante. Se possível, mostre a construção desses gráficos por meio de uma planilha eletrônica.

9. Gráficos estatísticos



RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

Pesquisador do IBGE em Santos (SP). Foto de 2022.

A Estatística é o ramo da Matemática Aplicada que trata da coleta, análise, interpretação e apresentação de dados numéricos relativos a fenômenos e processos naturais, sociais, econômicos etc.

Em toda pesquisa estatística, pretende-se quantificar pelo menos uma característica de determinado conjunto, cujos elementos podem ser de qualquer tipo: pessoas, regiões, plantas, automóveis etc. Essa característica é chamada de **variável estatística**, que pode ser **quantitativa**, quando é expressa numericamente, por exemplo, idade dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola; ou **qualitativa**, quando é expressa por uma qualidade não numérica, por exemplo, o estado civil dos funcionários de uma empresa.

Para a organização dos dados, a variável estatística é separada em classes (ou categorias), assim, na escola do exemplo anterior, as classes (categorias) poderiam ser: 13, 14, 15 e 16 anos de idade; e na empresa do exemplo anterior, as classes seriam: casado, solteiro, viúvo e divorciado.

A apresentação dos dados estatísticos pode ser feita por meio de tabelas ou gráficos.

Por expressar visualmente os dados, o gráfico estatístico pode facilitar a compreensão e propiciar uma leitura mais rápida.

Dentre os vários tipos de gráficos estatísticos, vamos estudar, por enquanto, três deles: o gráfico de **colunas**, o gráfico de **linha** e o gráfico de **setores**, também conhecido como gráfico de ***pizza***.

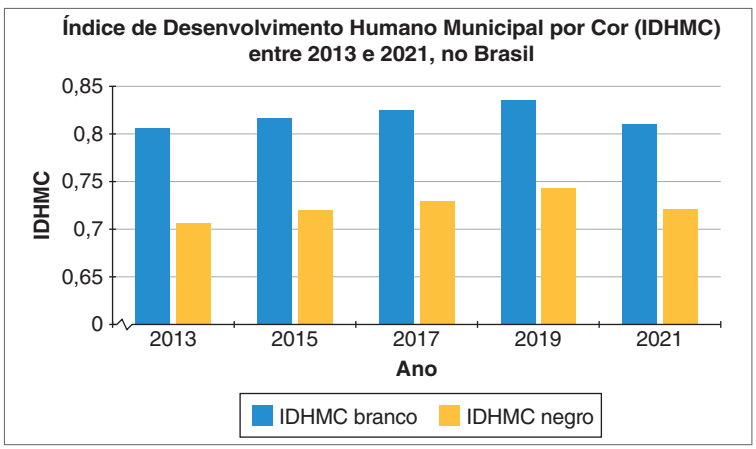
Gráfico de colunas (ou gráfico de barras verticais)

Esse tipo de gráfico é formado por retângulos, cujas alturas, medidas em um eixo vertical, correspondem aos valores que se pretende descrever em relação às respectivas classes, representadas em um eixo horizontal. Pode ser um gráfico de **colunas simples**, recomendado quando se pretende comparar classes individualmente, como no primeiro exemplo a seguir, ou de **colunas agrupadas**, recomendado quando se pretende comparar duas ou mais variáveis em cada classe considerada, como no segundo exemplo.

Exemplos



Fonte: DEPARTAMENTO INTERSINDICAL DE ESTATÍSTICA E ESTUDOS SOCIOECONÔMICOS. Salário mínimo nominal e necessário. **Dieese**, 2024. Disponível em: https://www.dieese.org.br/analisecestabasica/salarioMinimo.html. Acesso em: 26 abr. 2024.



Fonte: UNIDADE DE DESENVOLVIMENTO HUMANO. **Painel IDHM**. 2024. Disponível em: https://www.undp.org/pt/brazil/desenvolvimento-humano/painel-idhm. Acesso em: 22 ago. 2024.

Reflexão

De acordo com a *Pesquisa nacional da Cesta Básica de Alimentos* realizada pelo DIEESE, o salário mínimo necessário no final de 2020 era de R$ 5.304,90 e no final de 2023, R$ 6.439,62. Considerando essas informações e as do gráfico Valor mensal do salário mínimo no Brasil (em real), como poderíamos comparar a variação do salário mínimo nesse período?

Reflexão: Pode-se indicar uma pequena variação positiva, pois o salário mínimo desejado (segundo critérios do Diesse) em 2020 era cerca de 5,1 vezes o salário mínimo de 2020, e o de 2023 era cerca de 4,9 vezes o do ano correspondente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão: Resposta pessoal. Você pode encontrar mais informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Reflexão

O IDHM Cor mede as lacunas existentes entre negros e brancos nas conquistas nas três dimensões básicas do desenvolvimento humano: vida longa e saudável; acesso ao conhecimento; e o padrão de vida decente. Com base nessa informação e nos dados apresentados no gráfico, você considera importantes os índices que diferenciam as pessoas por cor ou por gênero, por exemplo? Por quê?

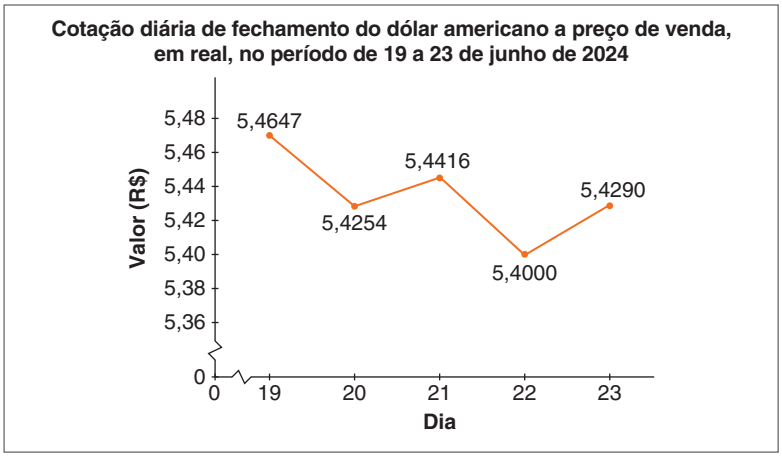
Gráfico de linha

O gráfico de linha é formado por pontos ligados por segmentos de reta. Apenas os pontos (extremos dos segmentos) oferecem informações sobre os dados descritos; as demais partes da linha são apenas auxiliares. Esse tipo de gráfico é recomendado para representar os valores de uma variável ao longo do tempo, sendo que no eixo horizontal são apresentadas as medidas de tempo, e no eixo vertical, os valores assumidos pela variável. É permitida a representação de dois ou mais gráficos de linha simultaneamente, o que facilita a comparação entre as classes.

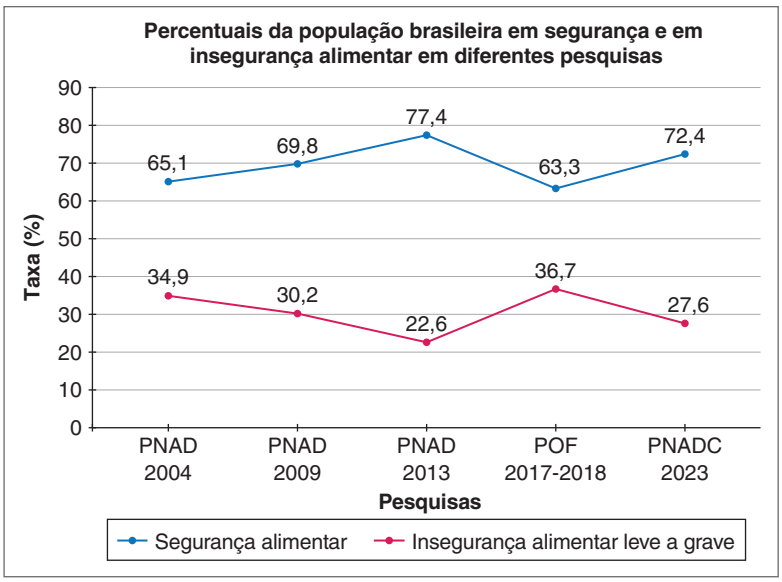
Observação

Nesse gráfico, o símbolo ⟩ no eixo vertical indica que o intervalo [0,5,06] está fora de escala em relação às demais medidas representadas nesse eixo. A mesma convenção é adotada para o símbolo ⌇ no eixo horizontal, que indica que o intervalo [0, 22] está fora da escala das demais medidas apresentadas no eixo horizontal.

Exemplos



Fonte: BRASIL. Banco Central do Brasil. **Cotações e boletins**. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/estabilidadefinanceira/historicocotacoes. Acesso em: 30 jun. 2024.



Fonte: FERREIRA, I. Segurança alimentar nos domicílios brasileiros volta a crescer em 2023. **Agência IBGE**, 15 abr. 2024. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/39838-seguranca-alimentar-nos-domicilios-brasileiros-volta-a-crescer-em-2023. Acesso em: 22 ago. 2024.

ODS 1 ODS 2

Aproveite este gráfico e desenvolva um trabalho interdisciplinar com as áreas de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas sobre insegurança alimentar e as desigualdades sociais no Brasil, mobilizando, assim, o **TCT Educação em direitos humanos**.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A partir do boxe **Trabalho e juventudes**, aborde a importância de uma alimentação saudável. Se possível, incentive os estudantes a pesquisarem e a e exporem orientações pautadas no *Guia de alimentação para a população brasileira* acerca da alimentação saudável.

TRABALHO E JUVENTUDES

Nutricionista

Um dos responsáveis pela manutenção da saúde humana por meio da nutrição e alimentação, o nutricionista está habilitado a atuar em diversos setores, como clínicas, hospitais, restaurantes, empresas, órgãos governamentais, educação, assessoria etc.

A interpretação de dados e análise estatística, assim como o conceito de proporção, são habilidades matemáticas presentes no cotidiano do nutricionista para que ele possa desenvolver estratégias nutricionais e programas alimentares específicos para seus pacientes. É por meio de fórmulas matemáticas que esse profissional calcula, dentre outras coisas, o Índice de Massa Corporal (IMC), a Taxa Metabólica Basal (TMB), as quantidades de calorias e nutrientes necessários para a adequação nutricional do organismo humano etc.

Quer saber mais sobre essa profissão? Faça uma pesquisa na internet e depois compartilhe com os colegas um resumo de sua pesquisa.

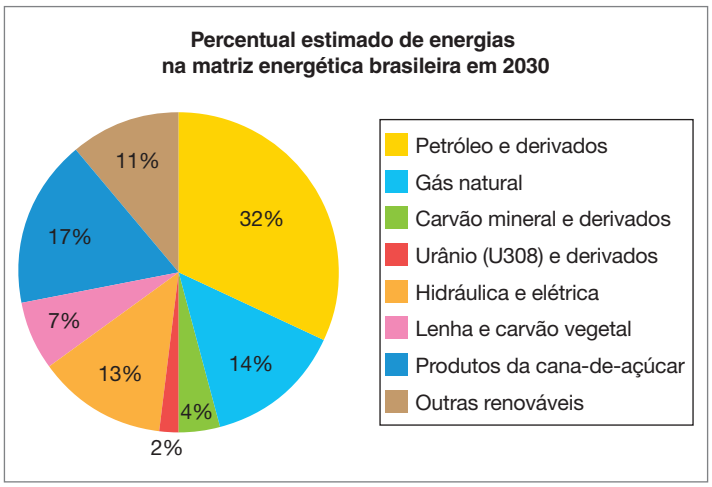
Gráfico de setores (gráfico de *pizza*)

ODS 7

Nesse tipo de gráfico, o todo é simbolizado por um círculo dividido em setores (ângulos com o vértice no centro do círculo), tal que as medidas dos ângulos centrais são proporcionais aos respectivos valores da variável representados pelos setores. Cada setor representa um percentual do todo.

Note, portanto, que esse tipo de gráfico só pode ser utilizado quando a reunião dos setores constituir o todo (100%) que queremos representar.

No Brasil as fontes de energia renovável devem chegar a 48% de nossa matriz energética, em 2030, conforme a projeção mostrada no gráfico de setores.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: BRASIL. Ministério de Minas e Energia. **Estudos do Plano Decenal de Expansão de Energia 2030**. Brasília, DF: Ministério de Minas e Energia, 2022. Disponível em: https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-490/topico-522/Caderno%20de%20Consolida%C3%A7%C3%A3o%20dos%20Resultados.pdf. Acesso em: 26 abr. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

14. A tabela a seguir mostra a produção brasileira de soja na safra 2021/2022, com destaque para os sete estados maiores produtores.

Produção de soja no Brasil na safra 2021/2022

Estado	Produção (milhões de toneladas)
Mato Grosso (MT)	40,7
Goiás (GO)	16,0
Paraná (PR)	12,2
Rio Grande do Sul (RS)	9,1
Mato Grosso do Sul (MS)	8,8
Minas Gerais (MG)	7,6
Bahia (BA)	6,9
Outros juntos	22,9



CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Vagem de soja.

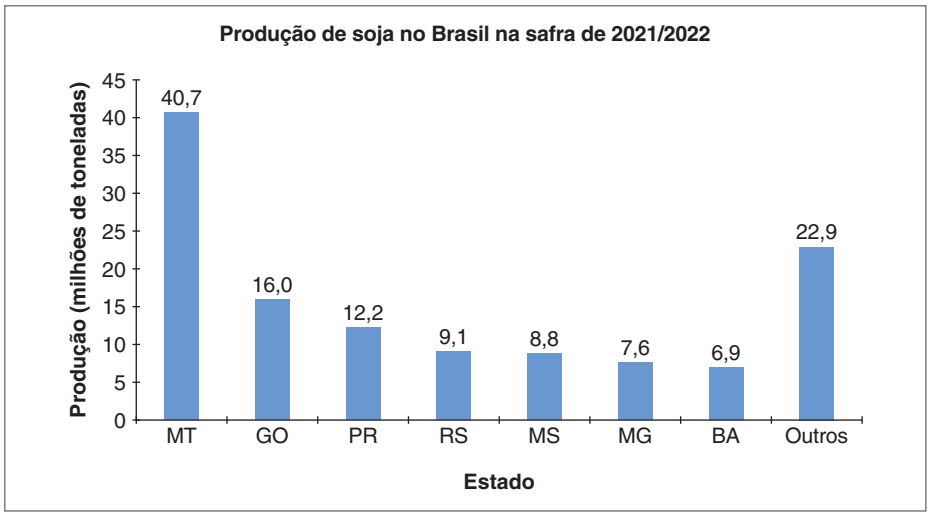
Fonte: BURBELLO, V. Soja: seca embaralha *ranking* dos maiores estados produtores; veja os *top* 10. **Canal Rural**, 27 jun. 2022. Disponível em: https://www.canalrural.com.br/agricultura/projeto-soja-brasil/quebra-safra-soja-ranking-estados-produtores/. Acesso em: 19 set. 2024.

Construa os gráficos de colunas e de setores, representando os dados dessa tabela.

Resolução

Vamos, primeiramente, construir o gráfico de colunas com os dados da tabela.

Representando os estados brasileiros no eixo horizontal e a produção no eixo vertical, temos:



Fonte: BURBELLO, V. Soja: seca embaralha *ranking* dos maiores estados produtores; veja os *top* 10. **Canal Rural**, 27 jun. 2022. Disponível em: https://www.canalrural.com.br/agricultura/projeto-soja-brasil/quebra-safra-soja-ranking-estados-produtores/. Acesso em: 19 set. 2024.

Agora, vamos construir o gráfico de setores.

A produção brasileira de soja na safra 2021/2022, em milhões de toneladas, é dada por:

$40{,}7 + 16{,}0 + 12{,}2 + 9{,}1 + 8{,}8 + 7{,}6 + 6{,}9 + 22{,}9 = 124{,}2$

As parcelas da adição representam, respectivamente e aproximadamente, 32,8%; 12,9%; 9,8%; 7,3%; 7,1%; 6,1%; 5,6%; 18,4% do total 124,4.

Vamos calcular as medidas ângulos dos setores que formarão o gráfico:

MT: $32{,}8\% \cdot 360° = 118{,}08°$

GO: $12{,}9\% \cdot 360° = 46{,}44°$

PR: $9{,}8\% \cdot 360° = 35{,}28°$

RS: $7{,}3\% \cdot 360° = 26{,}28°$

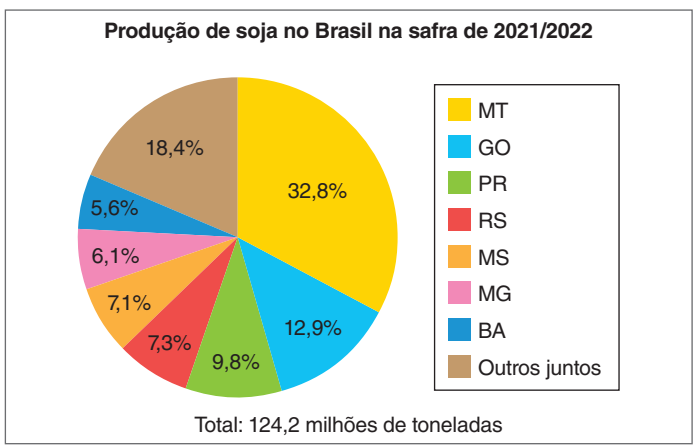
MS: $7{,}1\% \cdot 360° = 25{,}56°$

MG: $6{,}1\% \cdot 360° = 21{,}96°$

BA: $5{,}6\% \cdot 360° = 20{,}16°$

Outros juntos: $18{,}4\% \cdot 360° = 66{,}24°$

Assim, podemos construir o gráfico de setores:



Fonte: BURBELLO, V. Soja: seca embaralha *ranking* dos maiores estados produtores; veja os *top* 10. **Canal Rural**, 27 jun. 2022. Disponível em: https://www.canalrural.com.br/agricultura/projeto-soja-brasil/quebra-safra-soja-ranking-estados-produtores/. Acesso em: 19 set 2024.

Observação

Note que a altura das barras verticais são proporcionais às medidas que elas indicam, isto é, há uma escala aplicada. Além disso, os eixos estão identificados e oferecem informações importantes, como o fato de os números estarem expressos em "milhões de toneladas".

Reflexão

No contexto desse exercício, quais são as vantagens de representar os dados com o gráfico de setores e com o gráfico de colunas?

Reflexão: Resposta possível: o gráfico de colunas pode favorecer a comparação entre os valores, a partir da altura das colunas; já o gráfico de setores comunica, mais rapidamente, que o conjunto dos dados se trata de um todo, no caso, de todos os estados do Brasil.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

15. Observe a tabela, que descreve as variações percentuais do Produto Interno Bruto (PIB), a cada ano, em relação ao ano anterior, no período de 2015 a 2021.

Construa os gráficos de colunas e de linha, representando os dados dessa tabela.

Variações percentuais do produto interno bruto (PIB) brasileiro, a cada ano, em relação ao ano anterior

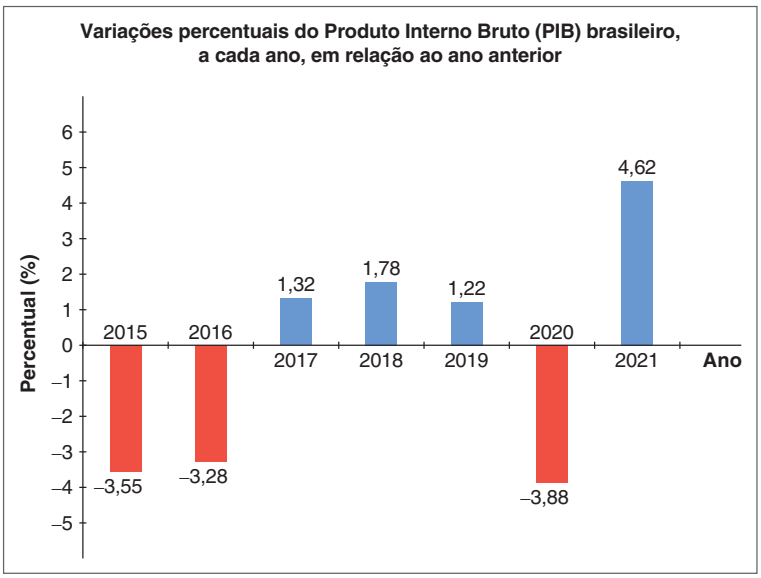
Ano	Percentual
2015	–3,55
2016	–3,28
2017	1,32
2018	1,78
2019	1,22
2020	–3,88
2021	4,62

Fonte: BRASIL. Banco Central do Brasil. **Produto Interno Bruto**: Taxa de variação real no ano. Brasília, DF: Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www3.bcb.gov.br/sgspub/localizarseries/localizarSeries.do?method=prepararTelaLocalizarSeries. Acesso em: 19 set. 2024.

Resolução

Vamos, primeiramente, construir o gráfico de colunas com os dados da tabela.

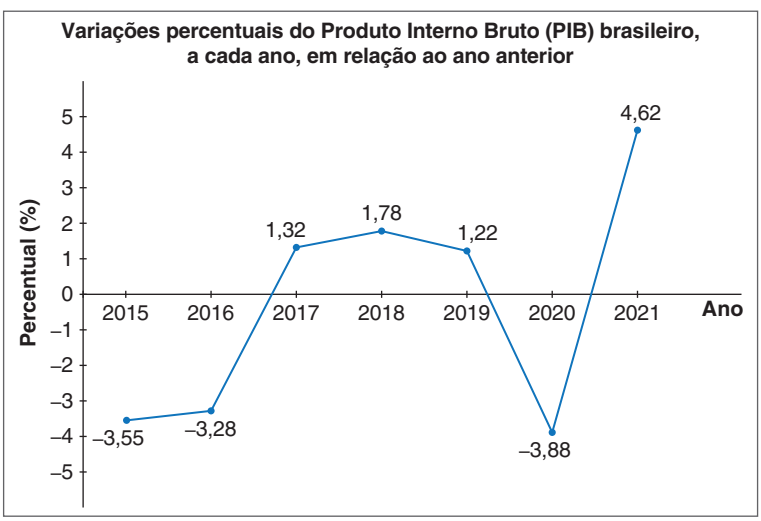
Representando os anos no eixo horizontal e os percentuais no eixo vertical, temos:



Fonte: BRASIL. Banco Central do Brasil. **Produto Interno Bruto**: Taxa de variação real no ano. Brasília, DF: Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www3.bcb.gov.br/sgspub/localizarseries/localizarSeries.do?method=prepararTelaLocalizarSeries. Acesso em: 19 set. 2024.

Agora, vamos construir o gráfico de linha.

Representando os anos no eixo horizontal e os percentuais no eixo vertical, temos:



Fonte: BRASIL. Banco Central do Brasil. **Produto Interno Bruto**: Taxa de variação real no ano. Brasília, DF: Banco Central do Brasil. Disponível em: https://www3.bcb.gov.br/sgspub/localizarseries/localizarSeries.do?method=prepararTelaLocalizarSeries. Acesso em: 19 set. 2024.

Observação

O PIB é a soma de todos os bens e serviços finais produzidos em determinado período, por um país, estado ou cidade, geralmente em um ano.

Reflexão

O PIB pode ser utilizado como indicador da qualidade de vida de um país, pois, teoricamente, quanto maior a riqueza gerada, mais os cidadãos se beneficiam. Que outros fatores de desenvolvimento você considera importantes para compor o indicadores da qualidade de vida de uma população? Apenas um indicador econômico como o PIB é suficiente, na sua opinião?

Reflexão: Respostas pessoais. Os estudantes podem comentar que fatores como distribuição de renda, educação, saúde, preservação do meio ambiente, desigualdade social, escolaridade também devem ser considerados.

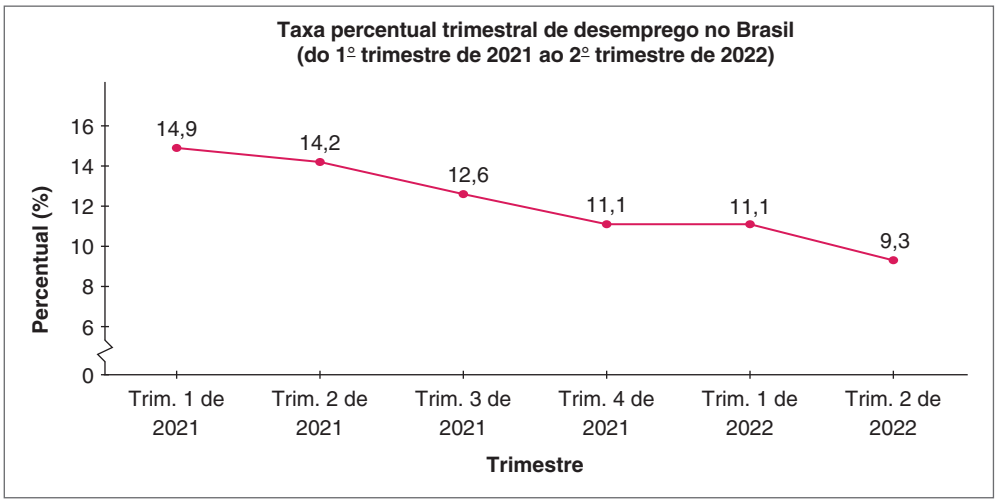
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

61. Considerando apenas o período apresentado no gráfico e indicando por x e y os valores nos eixos horizontal e vertical, respectivamente, faça o que se pede.



Fonte: BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua**. IBGE, 2024. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/9173-pesquisa-nacional-por-amostra-de-domicilios-continua-trimestral.html. Acesso em: 29 ago. 2024.

a. Construa um gráfico de colunas (barras verticais) correspondente aos dados do gráfico.

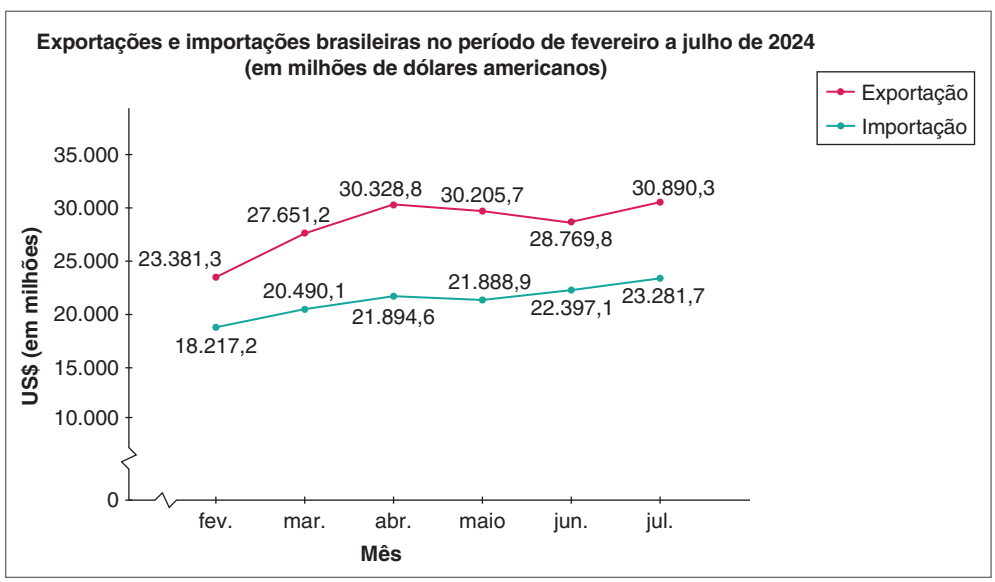
b. Considerando que, no segundo trimestre de 2022, a população brasileira que estava trabalhando ou que buscava um trabalho era cerca de 107.000.000, qual foi o número de trabalhadores desempregados ao final desse trimestre? **61. b.** 9.951.000

c. Pesquise os dados mais atuais sobre desemprego no Brasil e construa um gráfico de linhas com os dados dos últimos 4 trimestres. Comparando com os dados de 2022, podemos dizer que a taxa de desemprego aumentou ou diminuiu?

61. a. Resposta no final do livro.

61. c. Segundo o IBGE, o desemprego se refere às pessoas com idade para trabalhar (acima de 14 anos) que não estão trabalhando, mas estão disponíveis e tentam encontrar trabalho. Casos os estudantes tenham dificuldades em encontrar dados atuais, sugira o acesso a: BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Desemprego**. IBGE, 2024. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/explica/desemprego.php. Acesso em: 22 ago. 2024.

62. O saldo da balança comercial é dito positivo quando os valores de exportações são maiores que os de importações realizadas; nesse caso, a balança comercial tem um superávit. Quando o saldo é negativo, dizemos que houve um déficit. De acordo com o gráfico a seguir, faça o que é pedido.



Fonte: BRASIL. **Balança Comercial Preliminar Parcial do Mês**. Brasília, DF: Ministério do Desenvolvimento, Indústria, Comércio e Serviços, 2024. em https://balanca.economia.gov.br/balanca/pg_principal_bc/principais_resultados.html. Acesso em: 26 ago. 2024.

a. Calcule o saldo da balança comercial brasileira no mês de abril de 2024.

b. Nos meses considerados no gráfico, em que mês a balança comercial brasileira teve o menor saldo? Qual foi esse saldo? **62. b.** Fevereiro; US$ 5.164,10 milhões

c. Em algum dos meses considerados no gráfico a balança comercial brasileira apresentou déficit? Justifique a sua resposta.

62. a. US$ 8.434,20 milhões

62. c. Não, pois as exportações foram sempre superiores às importações.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

63. Em determinado período, produção diária de uma indústria de óleo comestível foi distribuída conforme a tabela a seguir.

Distribuição percentual da produção diária da indústria

Tipo de óleo	Soja	Milho	Girassol	Arroz
Percentual	60%	25%	10%	5%

Fonte: Elaborado para fins didáticos.

a. Construa os gráficos de colunas e de setores correspondentes aos dados dessa tabela. (Se possível, construa esses gráficos em uma planilha eletrônica.) **63. a.** Resposta no final do livro.

b. Agora, escolham um tema e realizem uma pesquisa. Vocês podem se juntar em pequenos grupos e coletar as informações. Depois, organizem os dados coletados em gráficos e produzam um breve relatório comentando os resultados. **63. b.** Resposta pessoal.

64. A tabela a seguir apresenta a produção de milho nas safras 2020/21 e 2021/22, dos três maiores produtores, segundo o Departamento de Agricultura dos Estados Unidos (USDA). Em relação a essa tabela, faça o que se pede:

Produção mundial de milho nas safras 2020/21 E 2021/22 (em milhões de toneladas)

País	2020/21	2021/22
EUA	360,25	380,93
China	260,67	273,00
Brasil	86,00	118,00

Fonte: FORMIGONI, I. Maiores produtores mundiais de milho, safra 2021/22: dados de setembro. **Farmnews**, 20 set. 2021. Disponível em: https://www.farmnews.com.br/mercado/maiores-produtores-mundiais-de-milho-safra-2021-22-dados-de-setembro/. Acesso em: 27 abr. 2024.

a. Construa um gráfico de colunas representando os dados dessa tabela. Se possível, utilize um *software* para a construção do gráfico. **64. a.** Resposta no final do livro.

b. De acordo com dados da Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa), o Brasil está nas primeiras posições do *ranking* de maiores produtores mundiais, não só de milho, mas, também, de vários outros grãos. Além de se destacar na produção agrícola, o Brasil se sobressai na pecuária, considerada uma das mais produtivas do mundo. Apesar dessa fartura na produção de alimentos, uma pesquisa da Rede Brasileira de Pesquisa em Soberania e Segurança Alimentar e Nutricional (Rede Penssan), divulgada no final de 2021, destacava que 43,4 milhões de brasileiros não tinham alimentos em quantidade suficiente e 19 milhões enfrentavam a fome.

ODS 2

Consulte fontes confiáveis que tratem desse assunto para, depois, em uma roda de conversa, conversarem sobre o tema. Por fim, pensem em algumas soluções que podem ser tomadas para que o problema apresentado seja diminuído. **64. b.** Respostas pessoais.

65. O racismo ambiental é um termo que se refere ao processo de discriminação que populações periféricas ou compostas de minorias étnicas sofrem por meio da degradação ambiental. Por meio dessa expressão, pode-se compreender que os impactos ambientais não se dão de maneira igual entre a população. Com base nessas informações, procurem materiais sobre o tema (como notícias ou artigos científicos) e, depois, organizem uma pesquisa na escola ou na comunidade a fim de verificar o que as pessoas sabem do assunto. Produzam gráficos para comunicar os resultados da pesquisa e um relatório contendo a análise dos dados. Se possível, utilizem uma planilha eletrônica para organizar as informações e produzir os gráficos. **65.** Resposta pessoal. Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

ODS 10

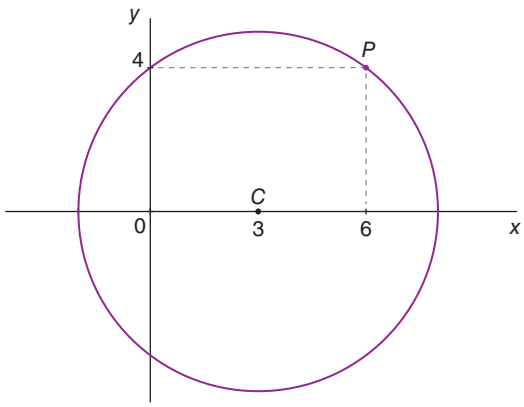
Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 22 e 23.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Calcule a medida do raio da circunferência de centro C representada no plano cartesiano a seguir. **1.** 5



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Uma televisão que permanece ligada 6 horas por dia, durante 10 dias, consome o total de x kW/h. Se essa televisão permanecer ligada 4 horas por dia, durante 25 dias, o seu consumo total y, em quilowatt-hora, pode ser expresso, em função de x, por: **2.** alternativa **d**

a. $y = x + 120$

b. $y = 2x$

c. $y = \frac{4x}{3}$

d. $y = \frac{5x}{3}$

e. $y = 3x + \frac{1}{5}$

3. (Ufal) Suponha que o número N do sapato que uma pessoa calça seja dado, em termos do comprimento c, em centímetros, do pé da pessoa, por $N = 1{,}25c + 7$. Qual o comprimento do pé de uma pessoa que calça número 44? **3.** alternativa **c**

a. 29,2 cm **c.** 29,6 cm **e.** 30,0 cm

b. 29,4 cm **d.** 29,8 cm

4. O termo *spam* é comum na internet e se refere a conteúdos enviados sem o consentimento do destinatário. Geralmente associados a *e-mails*, atualmente também podem estar relacionados a materiais veiculados em redes sociais com fins publicitários ou, ainda, como golpes ou propagação de notícias falsas. Suponha que o número N de *spams* enviados automaticamente por um programa seja dado em função do tempo t, em minuto, pela lei $N(t) = \frac{200\,t^2}{5 + 3t}$, aproximadamente.

a. Quantos *spams* são enviados, aproximadamente, por esse programa em 4 minutos de atividade? **4. a.** 188

b. Em quantos minutos de atividade, aproximadamente, são enviados 250 *spams* por esse programa? **4. b.** 5 min

c. Converse com os colegas a respeito da importância de identificar uma mensagem caracterizada com o spam e o que pode ser feito ao receber uma mensagem desse tipo. **4. c.** Resposta pessoal.

5. (Enem) Uma indústria fabrica um único tipo de produto e sempre vende tudo o que produz. O custo total para fabricar uma quantidade q de produtos é dado por uma função, simbolizada por C_T, enquanto o faturamento que a empresa obtém com a venda da quantidade q também é uma função, simbolizada por F_T. O lucro total (L_T) obtido pela venda da quantidade q de produtos é dado pela expressão $L_T(q) = F_T(q) - C_T(q)$.
Considerando-se as funções $F_T(q) = 5q$ e $C_T(q) = 2q + 12$ como faturamento e custo, qual a quantidade mínima de produtos que a indústria terá de fabricar para não ter prejuízo? **5.** alternativa **d**

a. 0 **c.** 3 **e.** 5

b. 1 **d.** 4

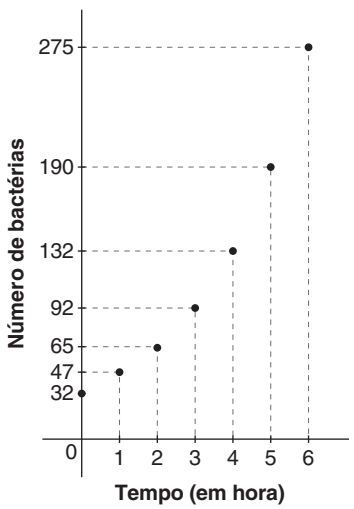
6. Uma fissura em um reservatório de água provocou um grande vazamento. A partir do instante em que o dano ocorreu, a medida do volume V (em quilolitro) de água restante no reservatório em função da medida do tempo t (em hora) podia ser calculado pela lei $V(t) = -2t^2 - 8t + 120$.

a. Qual era a quantidade, em litro, de água restante no reservatório três horas depois da ocorrência da avaria? **6. a.** 78.000 L

b. Calcule a medida da capacidade, em litro, desse reservatório, sabendo que ele estava completamente cheio no momento em que ocorreu a fissura. **6. b.** 120.000 L

c. Qual teria sido a medida do tempo, em hora, necessária para que o reservatório ficasse vazio caso os técnicos não tivessem conseguido realizar o conserto? **6. c.** 6 h

7. Ao estudar uma cultura bacteriológica, um biólogo contou o número de bactérias em determinado instante, que chamou de instante zero. Ao final de cada uma das seis horas seguintes, fez nova contagem das bactérias. Os resultados dessa experiência foram descritos pelo gráfico a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

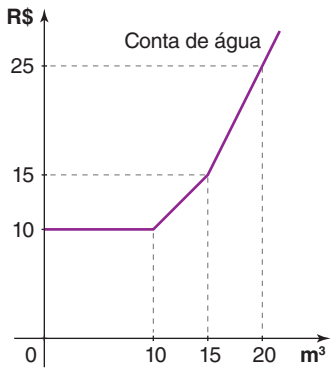
Observando o gráfico, responda:

a. Qual era o número de bactérias no início da contagem, isto é, no instante zero? **7. a.** 32 bactérias

b. Em quanto aumentou o número de bactérias da quinta para a sexta hora? **7. b.** 85 bactérias

c. Qual foi o percentual de aumento no número de bactérias nas 3 primeiras horas dessa experiência? **7. c.** 187,5%

8. (Enem) Certo município brasileiro cobra a conta de água de seus habitantes de acordo com o gráfico abaixo. O valor a ser pago depende do consumo mensal em m^3.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Se um morador pagar uma conta de R$ 19,00, isso significa que ele consumiu: **8.** alternativa **b**

a. 16 m^3 de água.

b. 17 m^3 de água.

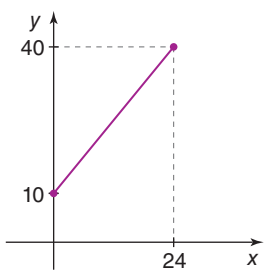
c. 18 m^3 de água.

d. 19 m^3 de água.

e. 20 m^3 de água.

(*Sugestão*: Aplique o teorema de Tales.)

9. Quando um tanque continha 10 L de água, foi aberta uma torneira com vazão constante. Depois de 24 segundos, o tanque atingiu sua capacidade total, que é de 40 L. Em cada ponto $P(x, y)$ do segmento de reta representado no plano cartesiano a seguir, a abscissa x é a medida do tempo, em segundo, necessária para que o total de água no tanque seja y litros.



a. Quanto tempo ficou aberta a torneira para que o tanque atingisse 20 L? **9. a.** 8 s

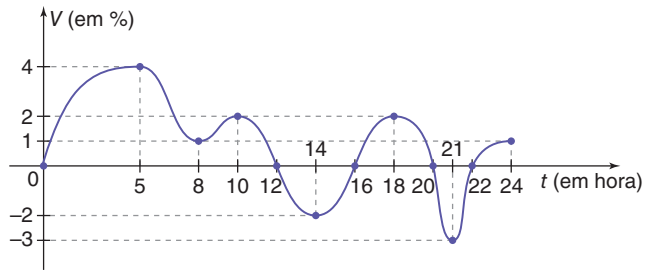
b. Obtenha uma equação que relacione x e y. **9. b.** $5x - 4y + 40 = 0$

10. Se em determinado momento 1 euro (€) valia R$ 5,28, e no dia anterior a cotação havia fechado a R$ 5,50, então, naquele momento, a variação V da cotação do euro, em real, em relação à cotação de fechamento do dia anterior, é dada por:

$$V = \frac{5{,}28 - 5{,}50}{5{,}50} = -0{,}04 \Rightarrow V = -4\%$$

De acordo com esse exemplo, resolva o problema a seguir.

O gráfico mostra a variação percentual V da cotação, em real, de uma moeda estrangeira, ao longo das 24 horas de determinado dia, em relação à cotação de fechamento do dia anterior.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Para que valores de t a cotação da moeda estrangeira esteve: **10. a.** $0 < t < 12$ ou $16 < t < 20$ ou $22 < t \leqslant 24$

a. acima da cotação de fechamento do dia anterior?

b. abaixo da cotação de fechamento do dia anterior? **10. b.** $12 < t < 16$ ou $20 < t < 22$

c. com a mesma cotação de fechamento do dia anterior? **10. c.** $t = 0$ ou $t = 12$ ou $t = 16$ ou $t = 20$ ou $t = 22$

11. (UFRN) Seja $f: D \to \mathbb{R}$, com $D \subset \mathbb{R}$, a função definida por $f(x) = \sqrt{5 - x} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$. O domínio D é: **11.** alternativa **d**

a. $[-1, 5]$

b. $[5, +\infty[$

c. $]5, +\infty[$

d. $]-1, 5]$

e. $]5, +\infty[- \{-1\}$

12. Considere todos os retângulos cujo comprimento tem 10 cm a mais que a largura, e o perímetro mede 340 cm, no mínimo, e 440 cm, no máximo.

a. Obtenha a lei de associação que expressa o perímetro p de cada retângulo, em função da sua largura x, com p e x em centímetro. **12. a.** $p = 4x + 20$

b. No contexto desse problema, qual é o domínio da função p, obtida no item **a**? **12. b.** $D(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid 80 \leqslant x \leqslant 105\}$

c. No contexto desse problema, qual é o conjunto imagem da função p, obtida no item **a**? **12. c.** $Im(p) = \{p \in \mathbb{R} \mid 340 \leqslant p \leqslant 440\}$

13. Ao iniciar a retirada dos peixes de um lago, um piscicultor estima que, se no início da pesca o número de peixes no lago é x, então ao final do dia a quantidade n de peixes remanescente no lago é dada, aproximadamente, pela lei $n(x) = 80 - \sqrt{8.400 - x}$. Nesse contexto, qual é o domínio da função n? **13.** $D(n) = \{x \in \mathbb{N} \mid 2.000 \leqslant x \leqslant 8.400\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

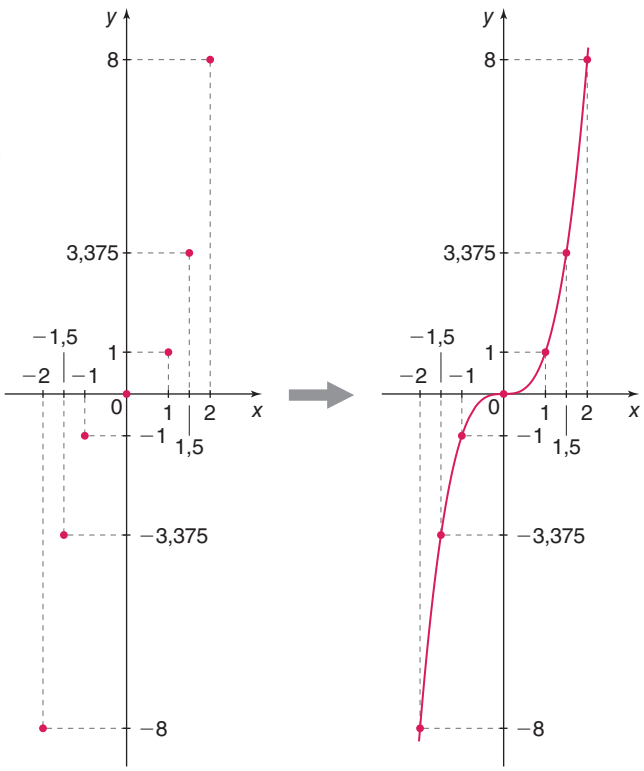
14. Respostas no final do livro.

14. Todas as funções $y = f(x)$ que estudaremos neste curso têm pequenas variações entre dois pontos relativamente próximos e, por isso, seus gráficos podem ser esboçados a partir de alguns de seus pontos (x, y). Por exemplo, para esboçar o gráfico da função $y = x^3$, construímos um quadro em que atribuímos a x alguns valores do domínio da função e calculamos os correspondentes valores de y, representando a seguir os pontos (x, y) no plano cartesiano. Observe:

Alguns pontos de $y = x^3$

x	-2	$-1{,}5$	-1	0	1	$1{,}5$	2
y	-8	$-3{,}375$	-1	0	1	$3{,}375$	8

Se necessário, atribuímos mais valores a x no quadro, marcando os novos pontos (x, y) no plano cartesiano, até que consigamos perceber a forma do gráfico.

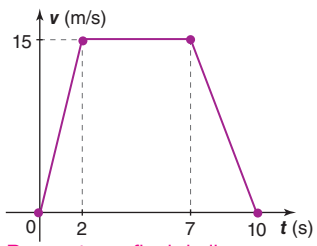


ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Raciocinando dessa maneira, esboce, no caderno, os gráficos das funções dadas pelas seguintes leis a seguir. Se possível, compare com a representação obtida por meio de um *software* ou planilha eletrônica.

a. $y = 2x$ **b.** $y = x^2$ **c.** $y = \frac{1}{x}$ **d.** $y = 5$

15. O gráfico a seguir mostra a velocidade v de um automóvel em função do tempo t.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Em qual(is) intervalo(s) de tempo a velocidade é crescente? **15. a.** [0, 2]

b. Em qual(is) intervalo(s) de tempo a velocidade é decrescente? **15. b.** [7, 10]

c. Em qual(is) intervalo(s) de tempo a velocidade é constante? **15. c.** [2, 7]

16. Lucas, que já atingiu sua estatura máxima, consome 2.400 quilocalorias diárias e mantém sua massa. Isso significa que ele queima exatamente as quilocalorias que ingere. Como deseja emagrecer, mantendo a mesma dieta, o rapaz deve se exercitar para aumentar o gasto calórico diário. Um professor de Educação Física, após uma avaliação das condições físicas de Lucas, prescreveu-lhe uma série de exercícios físicos com os quais a massa m, em grama, perdida semanalmente em função do número c de quilocalorias queimadas diariamente, com $c \geqslant 2.400$, pode ser estimada pela função de lei $m = 9{,}07\,(c - 2.400)$ até certo limite. De acordo com essa função, responda às questões a seguir.

a. Mostre que a função dada por $m(c) = 9{,}07(c - 2.400)$ é crescente.

b. Se Lucas queimar 2.500 quilocalorias diárias, quantos gramas perderá em uma semana?

c. Para perder 1.814 g em uma semana, quantas quilocalorias Lucas deve queimar por dia?

d. Para perder mais de 1 kg em uma semana, qual é o número inteiro mínimo de quilocalorias que Lucas deve queimar por dia? **16. d.** 2.511 quilocalorias

17. Durante certo período, o volume de medida V, em litro, de um reservatório de água pôde ser expresso em função do tempo de medida t, em hora, pela função de lei $V(t) = \frac{1.000 - t}{5}$. Mostre que nesse período o reservatório estava sendo esvaziado.

17. Resposta no final do livro.

18. Em certa fábrica, o custo p de produção, em real, de cada chocolate depende da quantidade q de chocolates fabricados, e essa quantidade depende do número n de horas de funcionamento de uma máquina. Essas condições são descritas pelas funções dadas por:

$$p = 3 + \frac{500}{q} \text{ e } q = 200n$$

18. Respostas nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

a. Se essa máquina funcionar por apenas 5 horas, qual será o custo de produção de cada chocolate, em real?

b. Expresse p em função de n. Essa função é crescente, decrescente ou constante? Por quê?

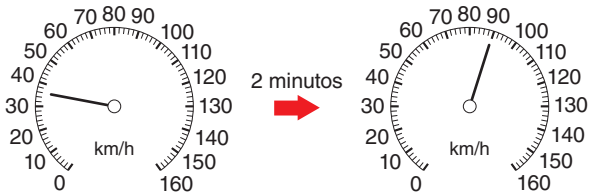
c. Expresse n em função de p. Essa função é crescente, decrescente ou constante? Por quê?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

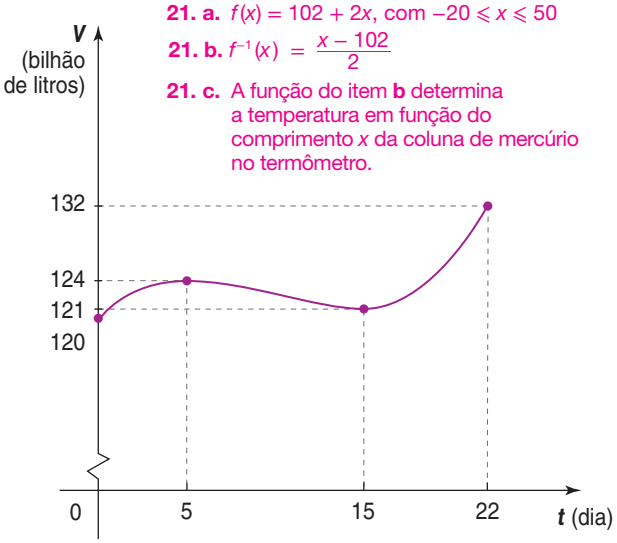
16. a. Resposta no final do livro.
16. b. 907 gramas
16. c. 2.600 quilocalorias

19. Observando o velocímetro de um automóvel em velocidade crescente durante dois minutos, um passageiro percebeu a posição do ponteiro variar do registro 36 km/h ao registro 90 km/h. Qual foi a taxa média de variação da velocidade do veículo em relação ao tempo, em metro por segundo ao quadrado, nesse período? (**Nota:** Essa taxa de variação é chamada de **aceleração média** do veículo, no período de tempo considerado.) **19.** 0,125 m/s²

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



20. O gráfico a seguir descreve o volume *V* de água de uma represa, em bilhão de litros, em função do tempo *t*, em dia, a partir do instante $t = 0$.



21. a. $f(x) = 102 + 2x$, com $-20 \leqslant x \leqslant 50$

21. b. $f^{-1}(x) = \frac{x - 102}{2}$

21. c. A função do item **b** determina a temperatura em função do comprimento *x* da coluna de mercúrio no termômetro.

De acordo com esse gráfico, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir quanto à taxa média *k* de variação do volume de água em relação ao tempo, em bilhão de litros por dia.

a. Quando *t* variou de 0 a 5, a taxa *k* foi de 0,8 bilhão de litros por dia. **20. a.** verdadeira

b. Quando *t* variou de 15 a 22, a taxa *k* foi de 1,2 bilhão de litros por dia. **20. b.** falsa

c. Quando *t* variou de 5 a 15, a taxa *k* foi de −0,3 bilhão de litros de água por dia. **20. c.** verdadeira

d. No intervalo de tempo [5, 15], o volume de água da represa cresceu, em média, 0,3 bilhão de litros por dia. **20. d.** falsa

e. Nos intervalos de tempo em que a função é decrescente, a taxa *k* é negativa, e nos intervalos em que a função é crescente, a taxa *k* é positiva. **20. e.** verdadeira

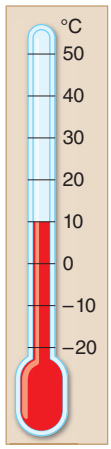
21. A escala de um termômetro registra temperaturas de medidas −20 °C a 50 °C.

O comprimento da coluna de álcool desse termômetro aumenta ou diminui 2 mm conforme a temperatura aumenta ou diminui 1° C, respectivamente. À temperatura de 10 °C, o comprimento da coluna mede 122 mm.

a. Obtenha a função *f* que expressa o comprimento, em milímetro, da coluna de álcool desse termômetro em relação à temperatura, em grau Celsius, no intervalo considerado.

b. Obtenha a função f^{-1}, inversa da função citada no item **a**.

c. Qual é a interpretação da função obtida no item **b** em relação às grandezas envolvidas?



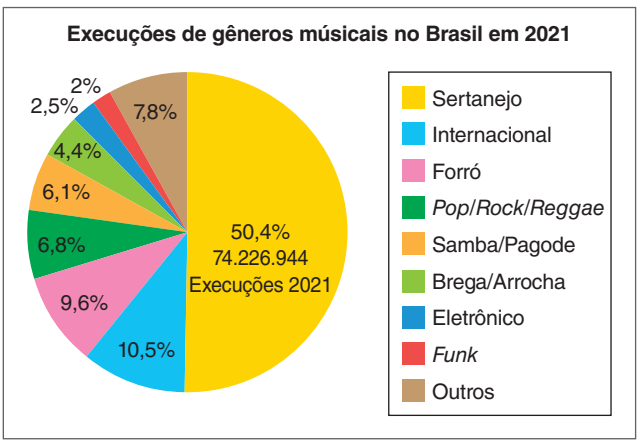
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Modelo didático sem escala e com cores fantasia.

22. A música caipira ou sertaneja é um gênero musical tipicamente brasileiro que começou a surgir quando trabalhadores de fazendas e tropas de gado se reuniam ao fim do dia, geralmente em torno de uma fogueira e acompanhados de uma viola. Inspirado por essas modas, foi lançado um disco com fragmentos de músicas típicas do interior de São Paulo, de Goiás, do Mato Grosso do Sul e de Minas Gerais. Lançada em 1929, a obra esgotou-se rapidamente marcando o início oficial do gênero. Nessa época, as composições eram muito relacionadas à vida no interior, passando por questões como as paisagens bucólicas e as diferenças da realidade urbana.

Elaborado com base em: PONTES, M. M. Breve história da música sertaneja. **Sociedade Artística Brasileira**, 19 nov. 2020. Disponível em: https://www.sabra.org.br/site/breve-historia-da-musica-sertaneja/. Acesso em: 25 mar. 2024.

A urbanização e as sucessivas fases temáticas transformaram a música sertaneja no gênero musical preferido dos brasileiros, conforme mostra o gráfico de setores a seguir.



Fonte: CONNECTMIX. **As músicas e artistas mais tocados nas rádios do Brasil**. Disponível em: https://www.connectmix.com/ranking/. Acesso em: 22 ago. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



JOSÉ FERRAZ DE ALMEIDA JÚNIOR - PINACOTECA DE SÃO PAULO, SÃO PAULO

ALMEIDA JÚNIOR, José Ferraz. **O violeiro**. 1899. Óleo sobre tela, 141 x 172 cm. Pinacoteca do Estado de São Paulo, São Paulo.

22. c. Resposta no final do livro.

De acordo com o gráfico, responda:

a. Quantas execuções musicais são representadas pelo setor circular relativo ao gênero "forró"?

22. a. aproximadamente 14.138.466

b. Quantas execuções musicais de todos os gêneros são representadas? **22. b.** 147.275.682

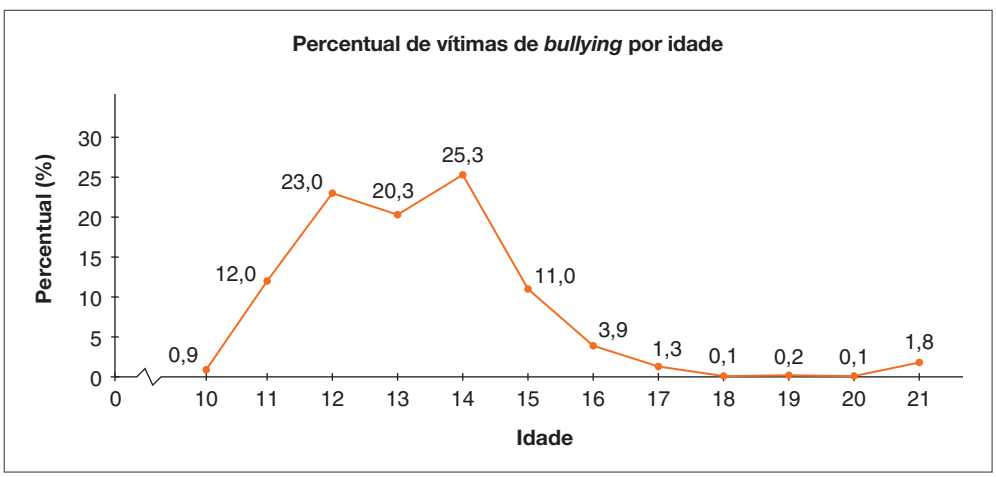
c. Construa um gráfico de colunas (barras verticais) que represente a distribuição percentual de cada gênero musical representado por esse gráfico. Caso seja possível, construa esse gráfico utilizando uma planilha eletrônica.

Nascido em Itu (SP), o pintor José Ferraz de Almeida Júnior (1850-1899) é considerado o precursor da abordagem temática regionalista, particularmente, o caipira. Para conhecer um pouco mais sobre ele, faça uma visita presencial ou virtual ao Museu Republicano "Convenção de Itu", onde, além de um rico acervo histórico, destacam-se pinturas de Almeida Junior. Para visitar o acervo digital, acesse: Museu Republicano de Itu. Disponível em: https://vila360.com.br/tour/mrciusp.html. Acesso em: 18 jun. 2024.

Sugerimos o filme **As Vantagens de Ser Invisível**, com direção de Stephen Chbosky, de 2012, o qual retrata a vida de um estudante introvertido que sofre *bullying* e encontra conforto em um grupo de amigos. O filme aborda questões como depressão, solidão e a importância da amizade como um fator de proteção contra o *bullying*.

23. Você sabe o que é *bullying*? O *bullying* é a prática intencional de humilhar e intimidar uma pessoa ou um grupo de pessoas por qualquer motivo. Essas agressões podem ser motivadas por preconceitos como racismo, homofobia, transfobia, por misoginia, contra as mulheres, por características físicas ou de personalidade, entre outras razões. O objetivo do agressor ou agressores é inferiorizar e desumanizar essa pessoa ou grupo de pessoas tratando-as como objetos, destituindo-as de sua humanidade e atentando contra sua dignidade. Portanto, é preciso refletir sobre as causas do *bullying* e combatê-las, pois todas as pessoas devem ser respeitadas, independentemente de suas características ou modo de vida. *Bullying* não é brincadeira, é crime previsto na Lei 14.811/2024.

A Associação Brasileira Multiprofissional de Proteção à Infância e Adolescência (Abrapia) vem estudando a ocorrência e as causas de *bullying*. O gráfico a seguir apresenta os resultados de uma das primeiras pesquisas brasileiras sobre o assunto divulgada em 2011 e realizada em uma amostra de 5.168 estudantes de 10 a 21 anos de todo o país.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: Associação Brasileira Multiprofissional de Proteção a Infância e Adolescência (ABRAPIA). ***Bullying* escolar**. 2011.

23. a. Resposta no final do livro.

OBJETO DIGITAL *Podcast*: *Bullying e cyberbullying*

a. Construa o gráfico de colunas (barras verticais) correspondente a esse gráfico de linhas. Caso seja possível, construa esse gráfico utilizando uma planilha eletrônica.

b. De acordo com o gráfico de linhas, quantos estudantes de 12 a 14 anos, pertencentes à amostra dessa pesquisa, haviam sofrido *bullying*? **23. b.** aproximadamente 3.545

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 5

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Um granjeiro utilizou exatamente 200 metros lineares de alambrado para cercar um terreno retangular. Obtenha a lei $y = f(x)$ que expressa a medida y da área do terreno, em metro quadrado, em função da medida x, em metro, de um dos lados desse terreno.

a. $y = x^2$
b. $y = -x^2$
c. $y = -x^2 + 100x$
d. $y = x^2 - 100x$
e. $y = (100 - x)^2$

1. alternativa **c**

Considere o texto a seguir para responder às questões **2** a **4**.

Em um experimento de laboratório, uma cultura de bactérias foi submetida à ação de um antibiótico durante 3 dias. O número n, em milhar, de bactérias vivas da cultura, em função do tempo t, em dia, pode ser expresso por $n(t) = t^3 - 3t^2 - 22t + 72$, em que $t = 0$ representa o instante da aplicação do antibiótico.

2. O número de bactérias vivas na cultura depois de 1 dia da aplicação do antibiótico era:

a. 12.000.
b. 24.000.
c. 36.000.
d. 48.000.
e. 60.000.

2. alternativa **d**

3. O número de bactérias vivas na cultura depois de 2 dias da aplicação do antibiótico era:

a. 12.000.
b. 24.000.
c. 36.000.
d. 48.000.
e. 60.000.

3. alternativa **b**

4. Determine a taxa média diária de variação no número de bactérias vivas na cultura, durante os três dias de duração do experimento.

a. −26.000 bactérias/dia
b. −22.000 bactérias/dia
c. 22.000 bactérias/dia
d. 24.000 bactérias/dia
e. 26.000 bactérias/dia

4. alternativa **b**

5. Classifique como verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações a seguir, relativas à função f de lei $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Em seguida, indique a alternativa que corresponde à sequência correta.

(1) O ponto $\left(3, \frac{3}{10}\right)$ pertence ao gráfico da função f.

(2) O ponto (0, 0) pertence ao gráfico da função f.

(3) O ponto (1, 2) pertence ao gráfico da função f.

(4) O domínio da função f é o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}$.

(5) Não existe número a, pertencente ao domínio de f, tal que $f(a) = 2$.

(6) Existe apenas um número k, pertencente ao domínio de f, tal que $f(k) = \frac{2}{5}$.

a. V, V, F, V, V, F
b. V, V, F, F, F, V
c. V, V, F, F, V, F
d. V, F, V, F, F, V
e. F, V, F, V, V, F

5. alternativa **c**

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno a ficha de autoavaliação apresentada no capítulo 1, completando as colunas com os números dos exercícios de 1 a 5; ela lhe fornecerá uma visão geral sobre o seu desempenho neste capítulo. Assinale com um X a cada célula se a resposta for "sim".

A ficha de autoavaliação foi apresentada no Capítulo 1, mas você pode copiá-la e preenchê-la sempre que considerar necessário verificar sua aprendizagem, adequando o número de colunas ao número de exercícios.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

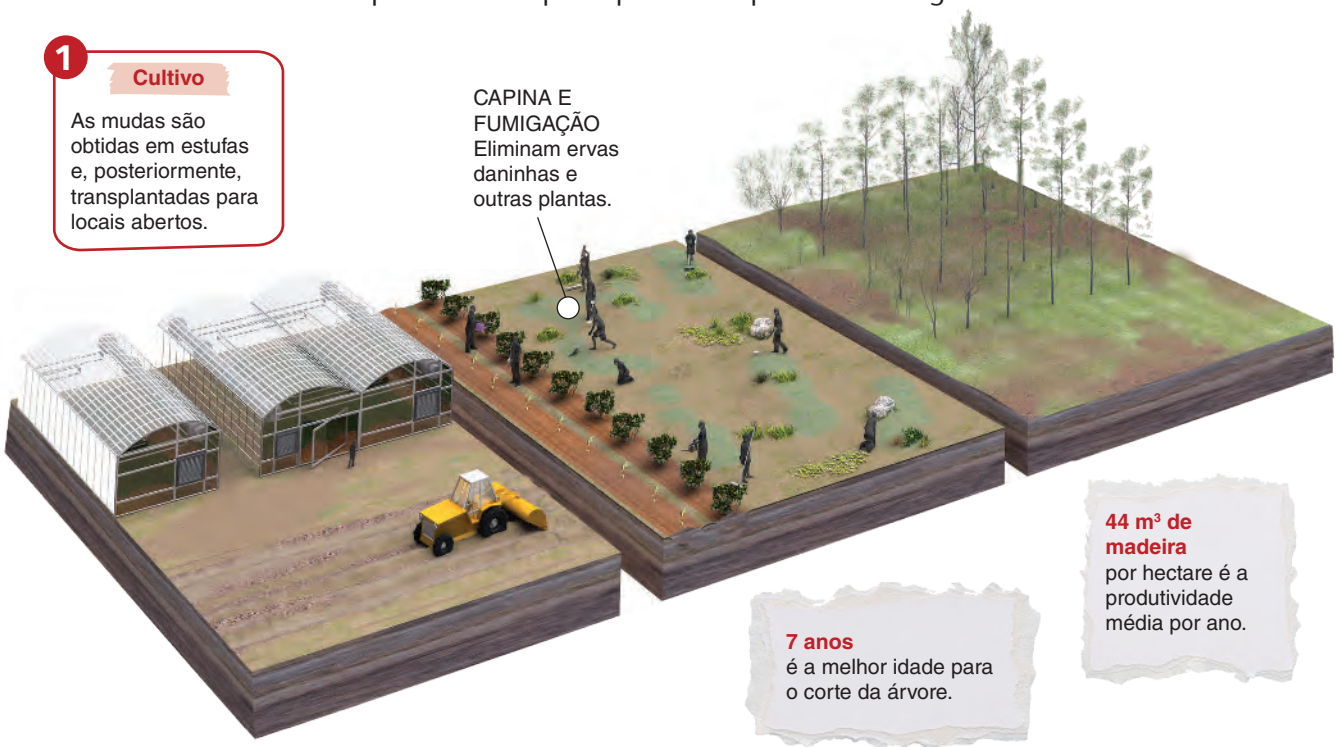
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 6

Função polinomial do 1º grau ou função afim

A produção do papel

O processo básico de fabricação do papel não mudou muito ao longo dos últimos dois mil anos, embora hoje a tecnologia permita produzi-lo em quantidades incomparavelmente maiores às da produção do papiro na Antiguidade. O papel é produzido por meio da reciclagem ou de uma pasta feita com a celulose do tronco de árvores. A árvore mais usada no Brasil para esse fim é o eucalipto, devido ao rápido crescimento, à qualidade, à consistência adequada e ao rendimento dessa espécie. Em contrapartida, o cultivo do eucalipto é um dos que requer maior quantidade de água.



ILUSTRAÇÕES: SOL90 IMAGES/ARQUIVO DA EDITORA
MIRAGEC/MOMENT/GETTY IMAGES
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

ODS 15

Além da teoria Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

1. De acordo com os dados do infográfico, quantos litros de água são economizados para produzir 1 tonelada de papel reciclado em relação ao papel não reciclado?
2. Escreva a lei da função que expressa a economia y de água, em litro, na produção de papel reciclado em relação à quantidade produzida x, em tonelada, de papel não reciclado.
3. Quais atitudes podemos adotar no nosso dia a dia para evitar o desperdício de papel?
4. Em sua opinião, quais são os benefícios da reciclagem de papel para o meio ambiente?

Além da teoria: 1. 98.000 litros **2.** $y = 98.000x$ **3.** Resposta pessoal. **4.** Resposta pessoal.

2 Desflorestamento

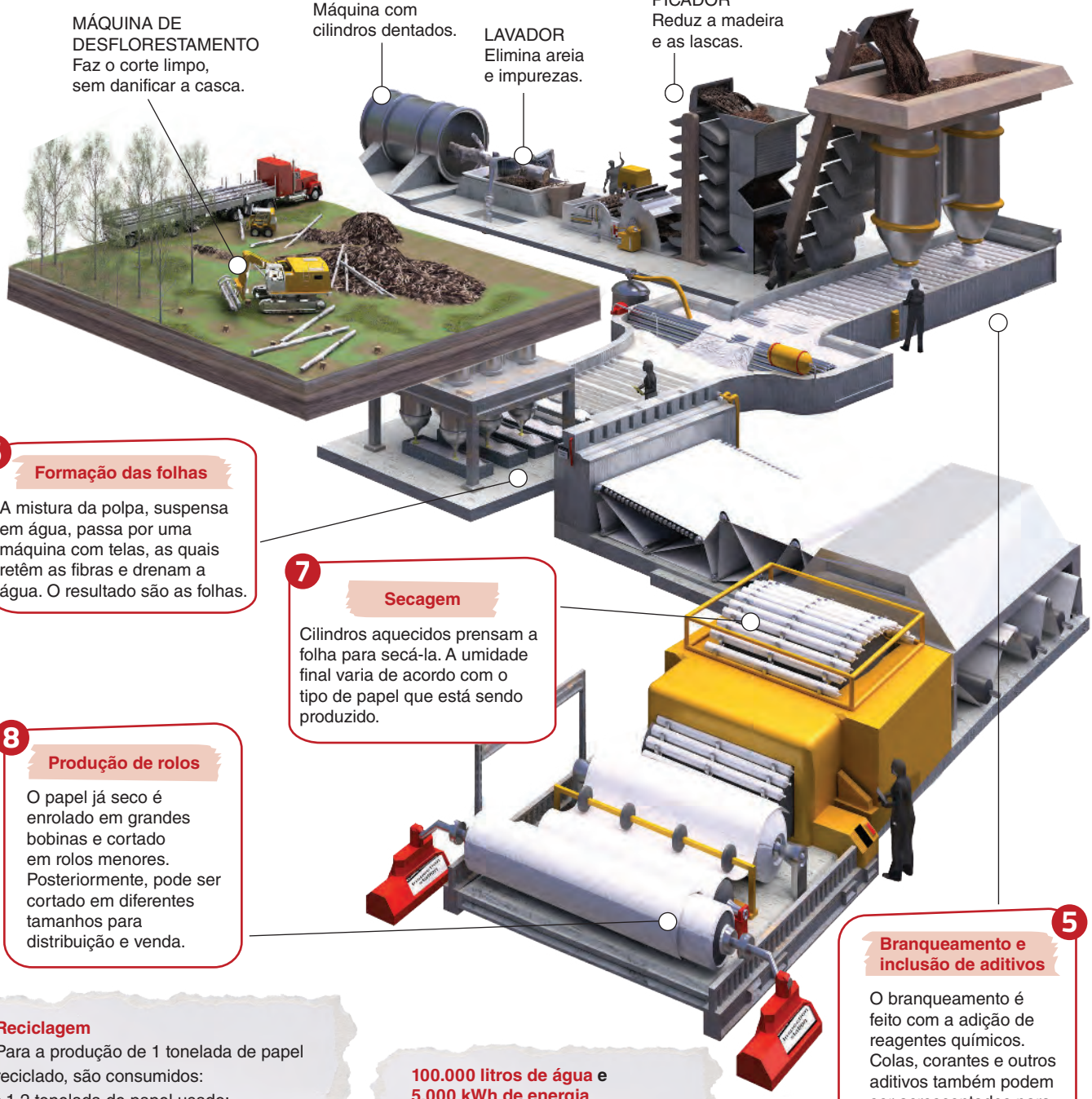
O momento em que as árvores são cortadas determina o êxito financeiro da produção. O replantio é feito simultaneamente.

3 Descascamento, lavagem e picagem

A casca é removida do tronco e eliminada do processo industrial. O tronco descascado é lavado e picado para facilitar o manuseio.

4 Produção da polpa

As fibras são separadas e suspensas na água, de modo que possam ser depuradas e branqueadas.



6 Formação das folhas

A mistura da polpa, suspensa em água, passa por uma máquina com telas, as quais retêm as fibras e drenam a água. O resultado são as folhas.

7 Secagem

Cilindros aquecidos prensam a folha para secá-la. A umidade final varia de acordo com o tipo de papel que está sendo produzido.

8 Produção de rolos

O papel já seco é enrolado em grandes bobinas e cortado em rolos menores. Posteriormente, pode ser cortado em diferentes tamanhos para distribuição e venda.

5 Branqueamento e inclusão de aditivos

O branqueamento é feito com a adição de reagentes químicos. Colas, corantes e outros aditivos também podem ser acrescentados para conferir características especiais ao papel.

Reciclagem

Para a produção de 1 tonelada de papel reciclado, são consumidos:

- 1,2 tonelada de papel usado;
- 2.000 litros de água;
- 1.000 a 2.500 kWh de energia.

100.000 litros de água e 5.000 kWh de energia são consumidos na produção de 1 tonelada de papel.

Elaborado com base em: APRENDA como funciona a produção de papel e celulose. **Propeq**, 27 maio 2021. Disponível em: https://propeq.com/papel-producao/. Acesso em: 27 set. 2024.

ILUSTRAÇÕES: SOL90 IMAGES/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MIRAGEC/MOMENT/GETTY IMAGES

Aproveite para propor algumas questões aos estudantes, como:
Observando o quadro, pode-se concluir que a variável y é diretamente proporcional a x?
(Resposta: Não, pois, por exemplo, $\frac{130}{1} \neq \frac{210}{2}$.)

• Observando o quadro, pode-se concluir que as variações de y são diretamente proporcionais às correspondentes variações de x?
(Resposta: Sim, pois a taxa de variação de y em relação à correspondente variação de x é constante.)

1. A função polinomial do 1º grau ou função afim

Considere que, em uma estrada de origem O (km 0), um automóvel afasta-se de O, ao longo da trajetória, e que, a partir do ponto P, a 50 quilômetros de O (km 50), o motorista mantenha a velocidade constante de 80 km/h.

O quadro a seguir descreve a distância y, em quilômetro, entre o veículo e a origem O, ao longo da trajetória, para alguns instantes x, em hora, desde o instante em que o veículo passa por P, conforme indica a figura.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

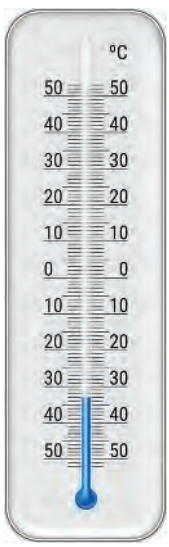
Relação entre distância e tempo

Tempo (em h)	Distância (em km)
x	y
0	50
0,5	$50 + 80 \cdot 0{,}5 = 90$
1	$50 + 80 \cdot 1 = 130$
1,5	$50 + 80 \cdot 1{,}5 = 170$
2	$50 + 80 \cdot 2 = 210$

Se, do quilômetro 50 em diante, o carro percorre 80 km a cada hora, então a distância y percorrida pelo veículo, a partir de P, pode ser descrita pela equação:

$$y = 50 + 80x$$

Por ser representada por um polinômio do 1º grau, a função definida por $y = 50 + 80x$ é chamada de **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**.



MACROVECTOR/SHUTTERSTOCK

Termômetro clássico de álcool com escala termométrica em grau Celsius (°C), arcando aproximadamente −33 °C.

Toda função y de x, cuja lei de associação é do tipo $y = f(x) = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é denominada **função polinomial do 1º grau** ou **função afim**.

Exemplos

a. $y = 5x - 6$ é uma função afim, em que $a = 5$ e $b = -6$.

b. $y = 4x$ é uma função afim, em que $a = 4$ e $b = 0$.

c. $y = \frac{3x}{2} + \frac{1}{5}$ é uma função afim, em que $a = \frac{3}{2}$ e $b = \frac{1}{5}$.

d. Na escala de certo termômetro, o comprimento da coluna varia de acordo com a medida da temperatura, de modo que, para cada variação de 1 °C, o comprimento da coluna varia 0,2 cm. Se a 0 °C o comprimento da coluna de álcool é 12 cm, podemos expressar o comprimento y da coluna, em centímetro, em função da medida x da temperatura, em grau Celsius, pela função afim definida por $y = 12 + 0{,}2x$.

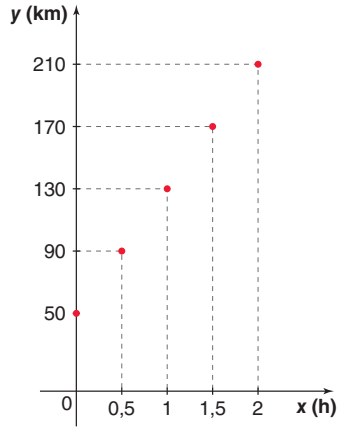
Gráfico da função polinomial do 1º grau

No tópico anterior, obtivemos a seguinte lei da função polinomial do 1º grau para expressar a distância y, em quilômetro, do veículo à origem O, em função do tempo x, em hora, a partir do momento em que o veículo passa pelo quilômetro 50 da rodovia.

$$y = 50 + 80x$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Vamos construir o gráfico dessa função, supondo que a velocidade do veículo tenha se mantido constante durante duas horas, a partir do instante em que passou por *P*. Para isso, representamos no plano cartesiano alguns pontos (x, y) do gráfico, por exemplo, os pontos do quadro do tópico anterior. Assim, obtemos o gráfico apresentado.



Note que a taxa média de variação dessa função é constante, isto é, a variação dos valores de y, que indicamos por Δy, é diretamente proporcional à variação dos valores correspondentes de x, que indicamos por Δx, para qualquer variação de x no intervalo de tempo considerado. Por exemplo:

- Quando x varia de 0 a 0,5, a variação correspondente de y é de 50 a 90; portanto, a taxa média de variação da função é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{90 - 50}{0,5 - 0} = 80$$

- Quando x varia de 1 a 2, a variação correspondente de y é de 130 a 210; portanto, a taxa média de variação da função é dada por:

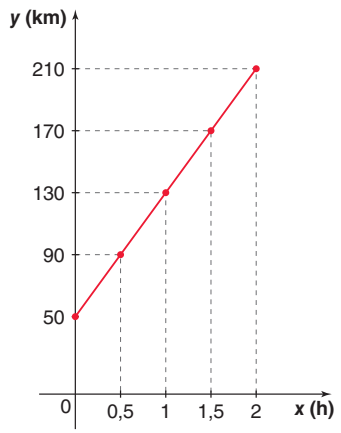
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{210 - 130}{2 - 1} = 80$$

Generalizando, quando x varia de x_1 a x_2, com $x_1 < x_2$, a variação correspondente de y é de $50 + 80x_1$ a $50 + 80x_2$; portanto, a taxa média de variação da função é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{50 + 80x_2 - (50 + 80x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\cancel{50} + 80x_2 \cancel{- 50} - 80x_1}{x_2 - x_1} = \frac{80\cancel{(x_2 - x_1)}}{\cancel{x_2 - x_1}} = 80$$

Toda função $y = f(x)$ cuja taxa de variação é constante tem como gráfico pontos de uma reta.

Assim, na função afim de lei $y = 50 + 80x$, quando x assume todos os infinitos valores, desde o início da medição do tempo ($x = 0$) até o final ($x = 2$), o gráfico será um segmento de reta, conforme está representado.



Esse resultado pode ser generalizado pelos seguintes teoremas:

O gráfico de toda função afim de domínio $\mathbb{R}$ é uma reta.

Toda reta do plano cartesiano, não paralela a um dos eixos coordenados, é o gráfico de uma função afim de domínio $\mathbb{R}$.

Nota:

Na expressão "função afim", o termo "afim" é emprestado da Geometria, que define como "transformação afim" aquela que preserva a colinearidade entre três pontos distintos quaisquer e a razão entre as distâncias entre três pontos distintos quaisquer ao longo de uma reta. Assim, a função polinomial do 1º grau é um caso particular de transformação afim.

Observação

Observe que, no gráfico, os segmentos adotados como unidades nos eixos *Ox* e *Oy* têm comprimentos diferentes. Isso é permitido principalmente quando grandezas representadas nesse eixos estão em unidades de medida diferentes (nesse caso, hora e quilômetro).

Observação

Quando a "taxa média de variação" de uma função é constante, podemos nos referir a ela simplesmente como "taxa de variação" omitindo a palavra "média".

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Construa o gráfico da função de lei $y = 3x - 6$.

Resolução

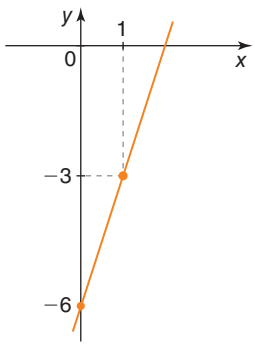
A função de lei $y = 3x - 6$ é do 1º grau. Logo, seu gráfico é uma reta, em que são necessários dois pontos distintos para determiná-la. Para isso, atribuímos a x dois valores reais quaisquer, distintos, e calculamos a imagem y de cada um deles.

Relação entre x e o ponto da reta

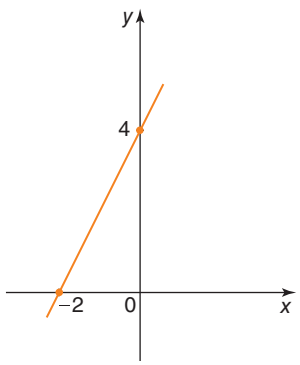
x	$y = 3x - 6$	Ponto da reta
0	$3 \cdot 0 - 6 = -6$	$(0, -6)$
1	$3 \cdot 1 - 6 = -3$	$(1, -3)$

Valores arbitrários

Assim, o gráfico da função de lei $y = 3x - 6$ é:



2. O gráfico da função dada por $y = ax + b$ é:



Determine os valores de a e b.

Resolução

Como o ponto (0, 4) pertence ao gráfico, a sentença $y = ax + b$ deve tornar-se verdadeira para $x = 0$ e $y = 4$, isto é:

$$4 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 4$$

De maneira análoga, o ponto $(-2, 0)$ pertence ao gráfico; então, devemos ter:

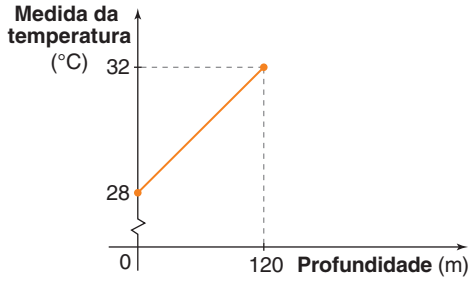
$$0 = a \cdot (-2) + b$$

Como $b = 4$, temos:

$$0 = a \cdot (-2) + 4 \Rightarrow a = 2$$

Portanto, $a = 2$ e $b = 4$.

3. Em uma região, foi medida a temperatura na superfície e abaixo da superfície da Terra, até a profundidade de 120 m, obtendo-se o gráfico a seguir.



De acordo com esse gráfico, faça o que é pedido nos itens seguintes.

a. Determine uma equação que expresse a medida da temperatura y, em grau Celsius, em função da profundidade x, em metro.

b. Qual era a medida da temperatura na superfície da Terra?

c. Qual era a medida da temperatura a 45 m de profundidade?

Resolução

a. A equação da reta que contém esse gráfico é da forma $y = ax + b$. Como essa reta passa pelos pontos (0, 28) e (120, 32), determinamos os valores de a e b, substituindo x e y pela abscissa e pela ordenada de cada um desses pontos, respectivamente, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 28 = a \cdot 0 + b \\ 32 = a \cdot 120 + b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = \frac{1}{30}$ e $b = 28$.

Assim, a equação que expressa y em função de x é $y = \frac{x}{30} + 28$, para $0 \leqslant x \leqslant 120$.

b. Pelo gráfico, verificamos que, quando $x = 0$, tem-se $y = 28$; logo, a temperatura na superfície da Terra, nessa região, media 28 °C. Podemos também calcular essa medida pela equação obtida no item **a**, bastando substituir por 0 (zero) a variável x, obtendo a medida y da temperatura correspondente:

$$y = \frac{0}{30} + 28 \Rightarrow y = 28$$

c. Substituindo por 45 a variável x da equação obtida no item **a**, temos:

$$y = \frac{45}{30} + 28 \Rightarrow y = 29{,}5$$

Concluímos, então, que a 45 m de profundidade a temperatura media 29,5 °C.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Construa o gráfico de cada uma das funções.

a. $y = 2x - 4$

b. $y = -2x - 4$

c. $y = 5x$

d. $y = -5x$

e. $y = \frac{x}{3} + 1$

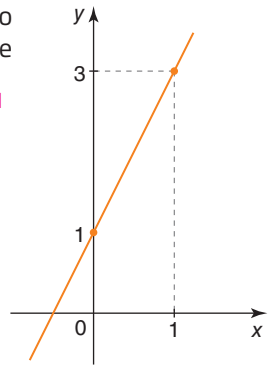
1. e **2.** Resposta no final do livro.

2. Observe o gráfico da função de lei $y = ax + b$ apresentado e determine:

2. a. $a = 2$ e $b = 1$

a. os valores de a e b;

b. a raiz da função. **2. b.** $-\frac{1}{2}$



3. b. $y = 4.000 + 0{,}05x$
3. c. Resposta no final do livro

3. O salário mensal de um vendedor é a soma de um valor fixo de R$ 4.000,00 com um valor variável (comissão), que corresponde a 5% do montante de suas vendas no mês.

3. a. R$ 6.900,00

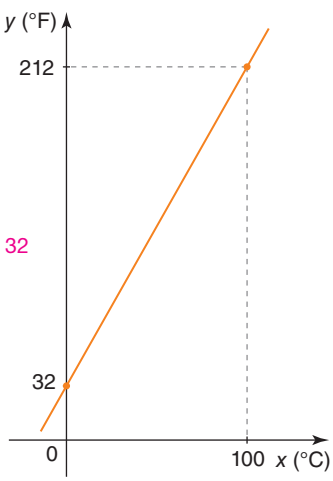
a. Qual foi o salário desse vendedor em um mês em que suas vendas totalizaram R$ 58.000,00?

b. Elabore uma equação que expresse o salário mensal y desse vendedor, em real, em função do montante x, em real, de suas vendas no mês.

c. Construa o gráfico cartesiano que representa a função obtida no item **b** para $0 \leqslant x \leqslant 58.000$.

d. Na equação obtida no item **b**, calcule a taxa média de variação de y em relação a x, quando x varia de R$ 30.000,00 a R$ 50.000,00. Qual é o significado dessa taxa?

4. A relação entre as medidas de temperatura, na escala Celsius (°C) e na escala Fahrenheit (°F), está representada no gráfico a seguir.



a. Obtenha a equação que expressa a medida y da temperatura, em grau Fahrenheit, em função da medida x, em grau Celsius. **4. a.** $y = \frac{9x}{5} + 32$

b. Determine a medida da temperatura, em grau Celsius, que corresponde a −4 °F. **4. b.** −20 °C

5. Em um estudo oceanográfico, a temperatura das águas de certa região do oceano Atlântico, próxima à Linha do Equador, foi aferida.

Para esse estudo, foram feitas duas medições: uma na superfície, onde se obteve 27 °C de temperatura, e outra a 100 m de profundidade, onde se obteve 21 °C de temperatura.

Admitindo que até 100 m a medida da temperatura diminua com a profundidade, conforme uma função polinomial do 1º grau:

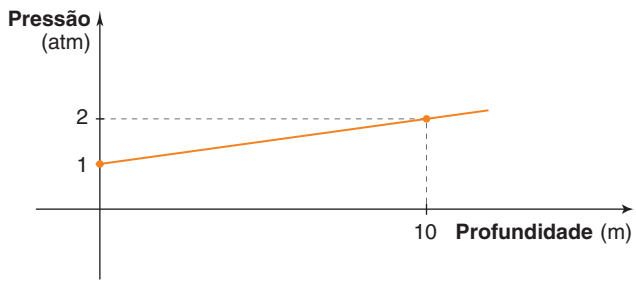
5. a. $y = -0{,}06x + 27$

a. obtenha a lei de associação que expressa a temperatura de medida y, em grau Celsius, em função da profundidade x, em metro, com $0 \leqslant x \leqslant 100$;

b. calcule a medida da temperatura da água, em grau Celsius, a 40 m de profundidade. **5. b.** 24,6 °C

6. Um mergulhador, ao submergir em águas marítimas, sofre aumento de pressão à medida que afunda. O gráfico a seguir descreve esse aumento de pressão, em atmosfera, em função da profundidade, em metro.

Pressão em mergulhos submarinos



Elaborado com base em: ENTENDA o que acontece no corpo em mergulhos de alta profundidade. **Rede Globo**, 22 set. 2012. Disponível em: http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2012/09/entenda-o-que-acontece-no-corpo-em-mergulhos-de-alta-profundidade.html. Acesso em: 20 ago. 2024.

a. Obtenha uma equação que expresse a pressão p, em atmosfera, em função da profundidade x, em metro. **6. a.** $p = \frac{1}{10}x + 1$

b. Qual é a pressão sofrida pelo mergulhador na superfície do mar? **6. b.** 1 atm

c. Qual é a pressão sofrida pelo mergulhador a 18 m de profundidade? **6. c.** 2,8 atm

7. Resposta pessoal.

7. Em dupla, discutam e listem situações comuns em sua rotina diária que sejam representadas por funções afins. Depois, cada um de vocês deve elaborar dois problemas envolvendo algumas dessas situações e o gráfico de uma função afim. Troquem os problemas elaborados por vocês e resolvam-nos. Em seguida, destroquem os problemas para corrigi-los.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 e 2.

3. d. A taxa média de variação, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, é igual a 0,05. Isso significa que o vendedor recebe R$ 0,05 de comissão para cada real de produto vendido. É outra maneira de dizer que o vendedor recebe a comissão de 5% sobre o valor de suas vendas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Conectado: Oriente os estudantes a não estabelecerem valores altos para os parâmetros **a** e **b**, de modo que fique mais fácil visualizar as transformações. No item **a**, os estudantes deverão traçar uma reta que interceptará os eixos *x* e *y* em dois pontos distintos. Ao representar os gráficos de **1** e **2** no item **b**, eles devem perceber que as novas retas obtidas serão paralelas à reta inicial, de modo que representem uma translação da reta inicial em 3 unidades para a direita ou para a esquerda. Já ao representar os gráficos de **3** e **4** no item **b**, eles devem perceber que as novas retas obtidas serão concorrentes à reta inicial, de modo que representem uma rotação da reta inicial. Atente para a redação proposta no item **c**, verifique os termos usados pelos estudantes e incentive-os a descrever todas as suas observações.

Conectado

Aplicando os passos do pensamento computacional, usando ou não um *software* de construção de gráficos, faça o que se pede.

a. Construa o gráfico de uma função polinomial do 1º grau $y = ax + b$, escolhendo quaisquer valores reais para a e b, com $a \neq 0$.

b. No mesmo plano cartesiano que foi construído o gráfico da função polinomial do item **a**, construa o gráfico das funções dadas pelas seguintes leis:

(1) $y = ax + b + 3$ (3) $y = a(x + 3) + b$

(2) $y = ax + b - 3$ (4) $y = a(x - 3) + b$

c. Para cada um dos subitens (1), (2), (3) e (4), redija um texto explicando a transformação geométrica que sofreu o gráfico em relação ao gráfico original, construído no item **a**. Tente generalizar suas conclusões.

Função linear

Toda função y de x, cuja lei de associação é do tipo $y = f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$, é chamada de **função linear**.

Note que a função linear é uma função afim do tipo $y = ax + b$, em que $b = 0$.



MONTHIRAYODTIWONG/ISTOCK/GETTY IMAGES

Exemplos

a. A função de lei $y = 3x$ é linear, pois é uma função do tipo $y = ax$, com $a \in \mathbb{R}^*$; nesse caso, $a = 3$.

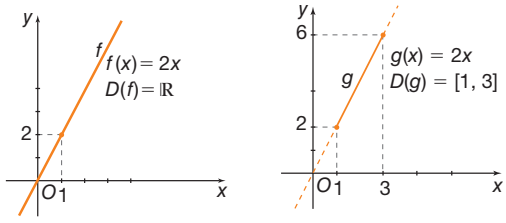
b. Cada grama de água contém $\frac{1}{9}$ g de hidrogênio. Assim, a medida y da massa de hidrogênio, em grama, contida em x gramas de água é expressa pela função linear de lei $y = \frac{x}{9}$.

Propriedades da função linear

P1. O gráfico de uma função linear é uma reta que passa pela origem O do sistema cartesiano, caso o domínio seja $\mathbb{R}$; ou é parte de uma reta que passa por O, caso o domínio seja uma parte de $\mathbb{R}$.

Exemplo

As funções f e g representadas a seguir são lineares.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

P2. Em toda função linear do tipo $y = ax$, os valores de x são diretamente proporcionais aos respectivos valores de y, isto é:

- se $x = 0$, então $y = 0$;
- se (m, n) e (p, q) são pontos da função, com coordenadas não nulas, então: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ e $\frac{n}{m} = \frac{q}{p}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

a. Na função f apresentada como exemplo da propriedade P1, temos:

- se $x = 0$, então $y = 0$;
- os pontos $(x_1, 2x_1)$ e $(x_2, 2x_2)$ pertencem a f, para quaisquer números reais x_1 e x_2.

Se x_1 e x_2 são números não nulos, observamos que: $\frac{2x_1}{x_1} = \frac{2x_2}{x_2} = 2$

b. Na função g apresentada como exemplo da propriedade P1, as variáveis x e y não assumem o valor zero; assim, a linearidade é garantida apenas pela segunda condição, isto é: os pontos $(x_1, 2x_1)$ e $(x_2, 2x_2)$ pertencem a g, para quaisquer números reais x_1 e x_2 do intervalo [1, 3]. Como x_1 e x_2 são números não nulos, observamos que: $\frac{2x_1}{x_1} = \frac{2x_2}{x_2} = 2$

Proporcionalidade na função polinomial do 1º grau – taxa de variação

Na introdução do item 1, estudamos que a função polinomial do 1º grau que expressa a distância y, em quilômetro, do veículo à origem O, em função do tempo x, em hora, a partir do momento em que o veículo passa pelo quilômetro 50 da rodovia é:

$$y = 50 + 80x$$

No item 2, estudamos que, nessa função, a variação dos valores de y é diretamente proporcional à variação dos valores correspondentes de x, isto é, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é constante. Esse fato, observado na função afim de lei $y = 50 + 80x$, é uma particularidade da propriedade a seguir.

Em toda função y de x do tipo $y = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, a taxa média de variação de y em relação a x, quando x varia em qualquer intervalo, é igual à constante a, que é o coeficiente de x na função afim (também denominado **coeficiente angular** da função afim).

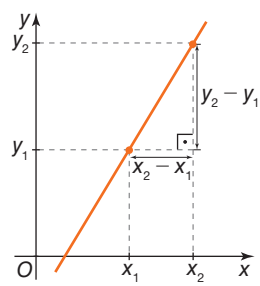
Demonstração

Na função afim dada por $y = ax + b$, vamos considerar a variação Δx de x_1 a x_2, com $x_1 < x_2$.

A variação Δy correspondente é de $ax_1 + b$ a $ax_2 + b$.

Assim, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax_2 + b - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$



Observação

Essa figura pretende apenas facilitar a visualização.
O gráfico poderia estar em qualquer outra posição ou até mesmo representar uma função afim decrescente.

Como a taxa média de variação da função afim é constante, podemos chamá-la, simplesmente, de **taxa de variação**, omitindo a palavra *média*.

Observando que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$, concluímos que $\Delta y = a \cdot \Delta x$; portanto, Δy em função de Δx é uma função linear. Por isso, dizemos que, em toda função afim da forma $y = ax + b$, os valores de x e y **variam linearmente**.

Resumindo: Na função do tipo $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, temos:

- se $b = 0$ (função linear), além de as variações Δy serem proporcionais às correspondentes variações Δx, os valores de y também são proporcionais aos correspondentes valores de x;
- se $b \neq 0$ (função afim não linear), a proporcionalidade ocorre apenas entre as **variações** correspondentes Δy e Δx, e não entre os valores correspondentes de y e x.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

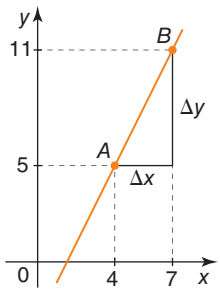
Exemplo

Para calcular a taxa de variação da função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos $A(4, 5)$ e $B(7, 11)$, basta calcular $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

As diferenças Δy e Δx devem ser calculadas em um mesmo sentido, ambas de A para B, ou ambas de B para A:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11 - 5}{7 - 4} = 2 \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 11}{4 - 7} = 2$$

Assim, a taxa de variação da função, cujo gráfico é a reta $\overleftrightarrow{AB}$, é 2.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. Obtenha a função afim do tipo $y = ax + b$ cujo gráfico passa pelos pontos $A(4, 7)$ e $B(1, 13)$.

Resolução

Primeiro, calculamos a taxa de variação a:

$$a = \frac{13 - 7}{1 - 4} = -2$$

Assim, a função afim tem a forma $y = -2x + b$. Como o ponto $(4, 7)$ pertence ao gráfico dessa função, devemos ter:

$$7 = -2 \cdot 4 + b \Rightarrow b = 15$$

Concluímos que a função pedida é:

$$y = -2x + 15$$

5. Dada a função afim do tipo $f(x) = ax + b$:

a. prove que, se $a > 0$, então f é crescente;

b. prove que, se $a < 0$, então f é decrescente;

c. dê um exemplo de uma função afim crescente com o respectivo gráfico;

d. dê um exemplo de uma função afim decrescente com o respectivo gráfico.

Resolução

a. Sejam os números reais x_1 e x_2 quaisquer, com $x_2 > x_1$. Para $a > 0$, temos:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 > ax_1$$

Adicionando b a ambos os membros da última desigualdade, chegamos a:

$$ax_2 + b > ax_1 + b$$

Concluímos, então, que:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 + b > ax_1 + b, \text{ ou seja,}$$

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Portanto, f é crescente se $a > 0$.

b. Sejam os números reais x_1 e x_2 quaisquer, com $x_2 > x_1$. Para $a < 0$, temos:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 < ax_1$$

Adicionando b a ambos os membros da última desigualdade, obtemos:

$$ax_2 + b < ax_1 + b$$

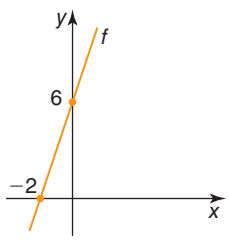
Concluímos, então, que:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 + b < ax_1 + b, \text{ ou seja,}$$

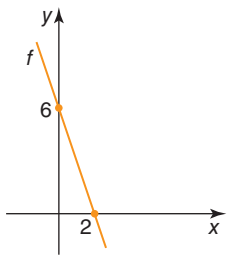
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

Portanto, f é decrescente se $a < 0$.

c. A função afim do tipo $f(x) = ax + b$ é crescente para qualquer valor positivo da taxa de variação a, por exemplo: $f(x) = 3x + 6$.



d. A função afim $f(x) = ax + b$ é decrescente para qualquer valor negativo da taxa de variação a, por exemplo: $f(x) = -3x + 6$.



Reflexão: Sim, conhecendo a taxa de variação de uma função afim f e um ponto do gráfico de f, é possível obter a lei de associação $f(x) = ax + b$, pois nessa equação ficam conhecidos a, x e $f(x)$, restando o valor de b como incógnita. Por exemplo, se uma função afim f tem taxa de variação igual a 5 e o gráfico de f passa pelo ponto $(4, 6)$, então: $f(x) = ax + b \Rightarrow 6 = 5 \cdot 4 + b \therefore b = -14$
Conclui-se, assim, que a lei de associação é $f(x) = 5x - 14$.

Reflexão

Conhecendo a taxa de variação de uma função afim f e um ponto do gráfico de f, é possível obter a lei de associação $f(x) = ax + b$? Justifique sua resposta.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8. b. Resposta no final do livro.
8. c. Sim, pois: Se $x = 0$, então $y = 0$. Se $x \neq 0$, existe uma proporcionalidade direta entre y e x, ou seja, $\frac{y}{x} = 3{,}14$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

8. Cada pneu de um caminhão tem 0,5 m de raio. Partindo do repouso, esse veículo percorreu um trecho de uma estrada. Lembrando que o perímetro C de uma circunferência de raio r é calculado por $C = 2\pi r$ e adotando $\pi = 3{,}14$, faça o que se pede.

a. Obtenha uma equação que expresse a distância y percorrida pelo caminhão, em metro, em função do número x de voltas de um de seus pneus.

8. a. $y = 3{,}14x$

b. Construa o gráfico da função obtida no item **a** para $0 \leqslant y \leqslant 3.140$.

c. A função obtida no item **a** é linear? Por quê?



MIKHAIL LEONOV/SHUTTERSTOCK

9. A função afim do tipo $y = ax + b$ tem taxa de variação igual a 5, e seu gráfico passa pelo ponto $(2, -3)$. Construa esse gráfico.

9. Resposta no final do livro.

10. Quando a temperatura de uma barra de ferro media 400 °C, iniciou-se o seu resfriamento à razão de 4 °C por minuto.

10. a. $y = 400 - 4x$

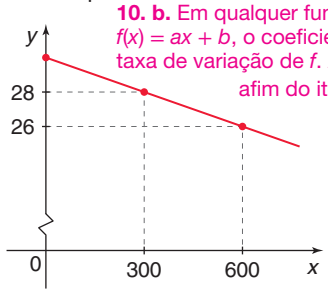
a. Obtenha uma equação que expresse a temperatura da barra, em grau Celsius, em função do tempo, em minuto, a partir do início do resfriamento.

b. Qual é a interpretação física do coeficiente de x na função obtida no item **a**?

11. Respostas nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

11. Vivemos na troposfera, que é a camada mais baixa da atmosfera terrestre, onde se concentram cerca de 75% dos gases e a quase totalidade de vapor d'água presentes na atmosfera. Sua espessura varia de 6 km a 14 km, aproximadamente, de acordo com a região da Terra, e a medida de sua temperatura diminui linearmente com o aumento da altitude.

O gráfico a seguir descreve a medida da temperatura y, em grau Celsius, em função da altitude x, em metro, medidas em uma mesma coluna vertical da troposfera a partir de um ponto P do nível do mar.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

10. b. Em qualquer função afim do tipo $f(x) = ax + b$, o coeficiente de x indica a taxa de variação de f. Assim, na função afim do item **a**, a taxa de variação é -4. Essa taxa indica que a medida da temperatura da barra diminuiu 4 °C por minuto durante o processo de resfriamento.

Camadas da atmosfera da Terra



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

a. Obtenha uma equação que expresse a medida da temperatura y em função da medida do tempo x.

b. Qual é a temperatura no ponto P?

c. Se um ponto Q dessa coluna da troposfera está a 12.000 m de atitude, qual é a temperatura no ponto Q?

12. Classifique cada uma das funções dadas pelas leis a seguir em crescente ou decrescente. **12. c.** decrescente

a. $y = 9x - 4$ **12. a.** crescente

b. $y = 5 - 2x$ **12. b.** decrescente

c. $y = -\frac{1 + x}{4}$

d. $y = \frac{x}{5}$ **12. d.** crescente

13. Dois recipientes, A e B, contêm água. Durante determinado período, a temperatura y da água do recipiente A, em grau Celsius, variou em função do tempo x, em minuto, de acordo com a função de lei $y = 30 + 2x$. E a temperatura y da água do recipiente B, em grau Celsius, variou em função do tempo x, em minuto, de acordo com a função de lei $y = 5 - 3x$. Qual das afirmações a seguir é correta, considerando apenas o período mencionado?

a. Com o passar do tempo, a temperatura da água do recipiente A aumentou, e a temperatura da água do recipiente B diminuiu. **13.** alternativa **a**

b. Com o passar do tempo, a temperatura da água do recipiente A diminuiu, e a temperatura da água do recipiente B aumentou.

c. A temperatura da água dos dois recipientes aumentou com o passar do tempo.

d. A temperatura da água dos dois recipientes diminuiu com o passar do tempo.

e. Durante um intervalo de tempo $[x_1, x_2]$, com $x_1 \neq x_2$, do período mencionado, a temperatura de um dos recipientes permaneceu constante.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 3 a 8.

Conectado: Ao construir os gráficos citados, os estudantes devem perceber que, para obter duas retas paralelas, a e c devem ter o mesmo valor, e b deve ser múltiplo de d ou d múltiplo de b. Já para obter duas retas concorrentes, a e c devem ter sinais opostos. E para que sejam coincidentes, deve-se ter $a = c$ e $b = d$.

Conectado

Acesse um *software* gratuito para a construção de gráficos matemáticos e por meio dele construa, no mesmo plano cartesiano (na mesma tela), o gráfico de duas funções polinomiais do 1º grau, $y = ax + b$ e $y = cx + d$, e determine as condições que devem ser obedecidas pelos parâmetros reais a, b, c e d para que as retas representadas sejam paralelas distintas, concorrentes ou coincidentes.

2. Funções definidas por mais de uma sentença



STRINGER/AFP/GETTY IMAGES

Consumidora lendo informações sobre os queijos à venda em um supermercado.

Em uma cotação de preços, a pessoa responsável pelas compras de um supermercado observou que uma indústria de laticínios vende determinado tipo de queijo a R$ 60,00 o quilograma, até o limite de 100 kg. Para compras acima de 100 kg, a indústria dá um desconto de 30% por quilograma sobre o que exceder o limite. Nas linhas do quadro a seguir, são apresentadas algumas possibilidades de quantidades de compra, em quilograma, e o valor, em real, a ser pago pela respectiva quantidade.

Valor a pagar pela respectiva quantidade de queijo comprada

Quantidade de queijo comprada (kg)	Valor a pagar (R$)
40	$60 \cdot 40 = 2.400$
85	$60 \cdot 85 = 5.100$
100	$60 \cdot 100 = 6.000$
101	$60 \cdot 100 + (1 - 0{,}30) \cdot 60 \cdot 1 = 6.042$
140	$60 \cdot 100 + (1 - 0{,}30) \cdot 60 \cdot 40 = 7.680$

Como poderíamos expressar o valor a pagar, em função da quantidade de queijo comprada?

Indicando por x a quantidade de queijo, em quilograma, e por $f(x)$ o valor a pagar, em real, pela respectiva quantidade de queijo, temos que uma maneira de representar a função f é:

$f(x) = 60x$, se $0 \leqslant x \leqslant 100$

e

$f(x) = 60 \cdot 100 + (1 - 0{,}30) \cdot 60 \cdot (x - 100)$, se $x > 100$

ou ainda:

$$f(x) = \begin{cases} 60x, & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 6.000 + 42(x - 100), & \text{se } x > 100 \end{cases}$$

Compare essa lei com os valores do quadro, por exemplo:

- Para 40 kg, temos $x = 40$; portanto, $0 \leqslant x \leqslant 100$. Assim, usamos a primeira sentença que define a função f, ou seja, $f(x) = 60x$, obtendo:

$$f(40) = 60 \cdot 40 = 2.400,$$

o que confere com o apresentado no quadro.

- Para 140 kg, temos $x = 140$; portanto, $x > 100$. Assim, usamos a segunda sentença que define a função f, ou seja, $f(x) = 6.000 + 42(x - 100)$, obtendo:

$$f(140) = 6.000 + 42 \cdot 40 = 7.680,$$

o que confere com o apresentado no quadro.

Observe, por este exemplo, que uma função pode ser definida por mais de uma sentença.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

6. Construa o gráfico da função f de lei:

$$f(x) = \begin{cases} 5, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x + 1, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

e determine seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Para construir o gráfico da função pedida, analisamos cada uma das sentenças separadamente.

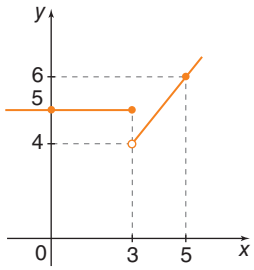
I. $f(x) = 5$, se $x \leqslant 3$, ou seja, essa parte do gráfico é uma semirreta de origem (3, 5), paralela ao eixo Ox, cujos pontos têm abscissas no intervalo $]-\infty, 3]$.

II. $f(x) = x + 1$, se $x > 3$, ou seja, essa parte do gráfico é uma semirreta contida na reta de equação: $f(x) = x + 1$, cujos pontos têm abscissas no intervalo $]3, +\infty[$.

Para obter essa semirreta, atribuímos a x o valor 3 e outro valor qualquer maior que 3, conforme o quadro a seguir. (Embora a variável x não possa assumir o valor 3, pois $x > 3$, atribuímos a ela o valor 3 para obtermos um extremo aberto dessa parte do gráfico.)

x	$f(x) = x + 1$
3	4
5	6

extremo aberto



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A reunião das duas partes do gráfico obtidas em (I) e (II) é o gráfico da função f representado.

O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente:

$$D(f) = \mathbb{R} \text{ e } Im(f) =]4, +\infty[.$$

Observação

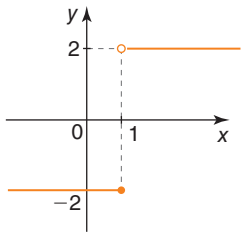
Convenciona-se usar a "bolinha vazia" para excluir um ponto de um gráfico e a "bolinha cheia" para incluir.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

16. a. e **b.** Respostas no final do livro.

Faça os exercícios no caderno.

14. Observe o gráfico da função f de lei:



$$f(x) = \begin{cases} -2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

Considerando esse gráfico, construa o gráfico de cada função dada pela lei a seguir.

a. $f(x) = \begin{cases} 4, \text{ se } x \leqslant 0 \\ x + 2, \text{ se } x > 0 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x + 2, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

14. Respostas no final do livro.

15. Construa no caderno o gráfico de cada uma das funções e dê seu domínio e conjunto imagem.

a. $f(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 4, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x \leqslant 4 \\ x + 3, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

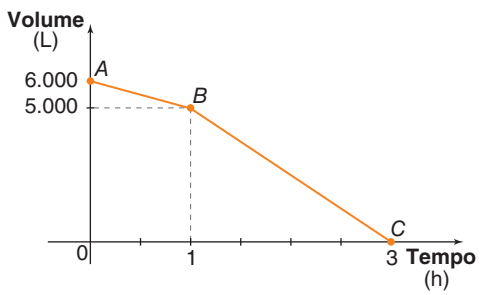
15. Respostas no final do livro.

16. Uma máquina industrial, movida a óleo diesel, tem três velocidades de produção. Funcionando na maior velocidade, seu consumo é de 10 litros de óleo por hora; na velocidade intermediária, é de 8 litros por hora; e, na menor velocidade, é de 5 litros por hora. Em certo dia, essa máquina esteve em funcionamento durante 12 horas: as 5 primeiras na maior velocidade, as 4 horas seguintes em velocidade intermediária, e o restante do tempo na menor velocidade.

a. Construa o gráfico da função que relaciona o volume V de óleo, em litro, consumido por essa máquina, como tempo t, em hora, considerando apenas o período de funcionamento da máquina nesse dia.

b. Obtenha a lei de associação da função V, cujo gráfico foi construído no item **a**.

17. (Enem) Uma cisterna de 6.000 L foi esvaziada em um período de 3 h. Na primeira hora foi utilizada apenas uma bomba, mas, nas duas horas seguintes, a fim de reduzir o tempo de esvaziamento, outra bomba foi ligada junto com a primeira. O gráfico, formado por dois segmentos de reta, mostra o volume de água presente na cisterna em função do tempo.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a vazão, em litro por hora, da bomba que foi ligada no início da segunda hora? **17.** alternativa **c**

a. 1.000 **c.** 1.500 **e.** 2.500

b. 1.250 **d.** 2.000

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 9.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Variação de sinal da função afim

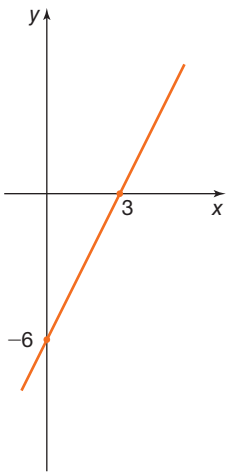
Estudar a variação do sinal da função afim do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, significa determinar os valores de x para os quais f se **anula**, f é **positiva** ou f é **negativa**. Esse estudo pode ser feito de duas maneiras: graficamente ou algebricamente.

Acompanhe os exemplos a seguir.

a. Vamos estudar a variação do sinal da função f de lei $f(x) = 2x - 6$.

Graficamente:

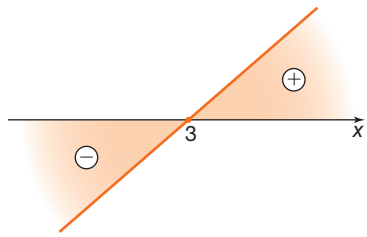
- 3 é raiz da função f;
- f é crescente;
- para qualquer x real, com $x > 3$, temos $f(x) > 0$;
- para qualquer x real, com $x < 3$, temos $f(x) < 0$.



Algebricamente:

- A raiz da função f é dada por: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$
- Os valores de x para os quais $f(x)$ é positivo são dados por: $2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3$
- Os valores de x para os quais $f(x)$ é negativo são dados por: $2x - 6 < 0 \Rightarrow x < 3$

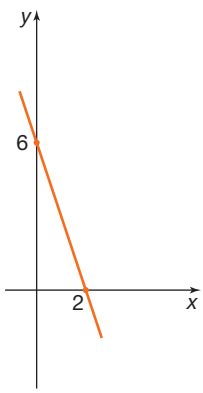
Podemos representar a variação do sinal dessa função pelo seguinte esquema:



b. Vamos estudar a variação do sinal da função f de lei $f(x) = -3x + 6$.

Graficamente:

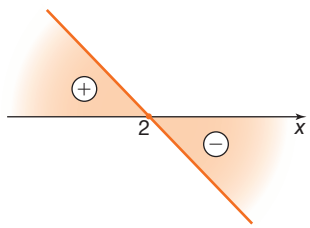
- 2 é raiz da função f;
- f é decrescente;
- para qualquer x real, com $x > 2$, temos $f(x) < 0$;
- para qualquer x real, com $x < 2$, temos $f(x) > 0$.



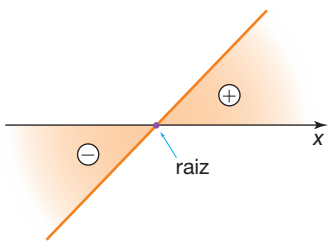
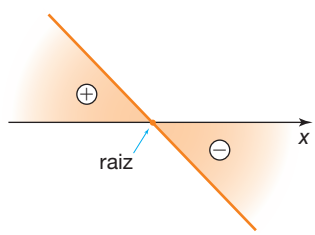
Algebricamente:

- A raiz da função f é dada por: $-3x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2$
- Os valores de x para os quais $f(x)$ é positivo são dados por: $-3x + 6 > 0 \Rightarrow x < 2$
- Os valores de x para os quais $f(x)$ é negativo são dados por: $-3x + 6 < 0 \Rightarrow x > 2$

Podemos representar a variação do sinal dessa função pelo seguinte esquema:



De maneira geral, o estudo da variação do sinal de uma função afim f do tipo $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, enquadra-se em um dos seguintes casos:

$a > 0$ (função crescente)	$a < 0$ (função decrescente)
	

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

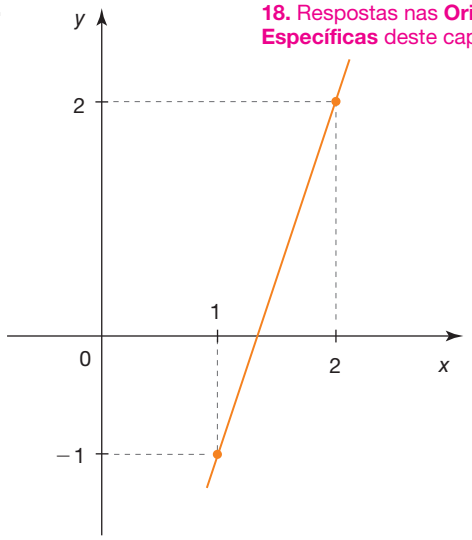
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

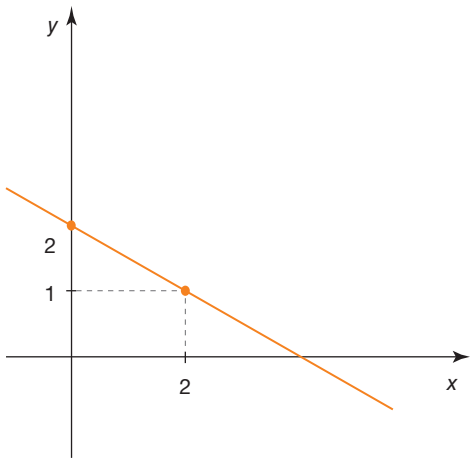
Faça os exercícios no caderno.

18. Discuta a variação de sinal de cada uma das funções do tipo $y = ax + b$, cujos gráficos são:

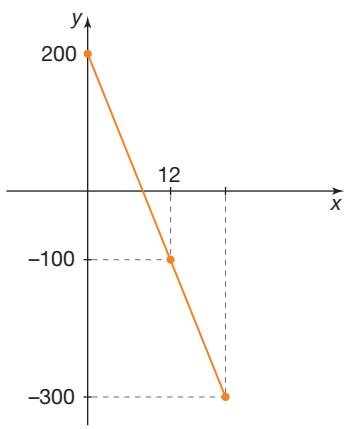
a.

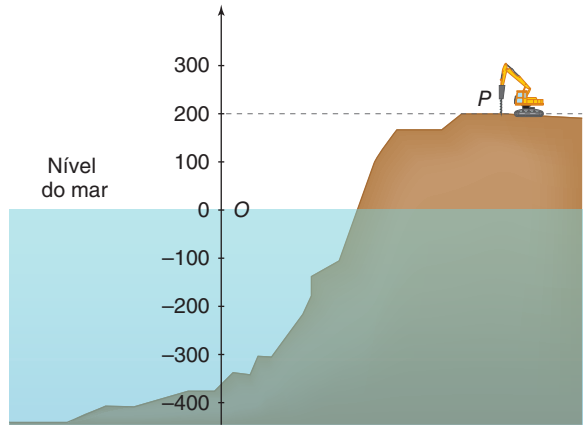


b.



19. Uma perfuratriz inicia uma cavidade vertical no topo de um morro, em um ponto P a 200 m de altitude, com o objetivo de atingir um ponto a –300 m de altitude. Uma previsão da altitude y atingida pela broca, em metro, em função do tempo x, em hora, é apresentada pelo gráfico a seguir.





ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

a. Obtenha a lei de associação que expressa y em função de x. **19. a.** $y = -25x + 200$

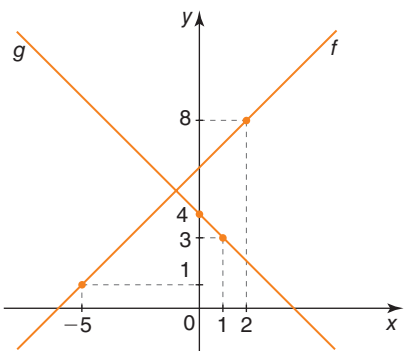
b. Quantas horas depois de iniciada a perfuração a broca atingirá o nível do mar? **19. b.** 8 horas

c. Depois de iniciada a perfuração, quantas horas serão necessárias para a broca atingir o objetivo? **19. c.** 20 horas

d. Por quanto tempo, durante a perfuração, a broca estará em pontos de altitude positiva? **19. d.** 8 horas

e. Por quanto tempo, durante a perfuração, a broca estará em pontos de altitude negativa? **19. e.** 12 horas

20. As retas representadas no plano cartesiano a seguir são os gráficos das funções f e g:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando a função h de lei $h(x) = f(x) - g(x)$, responda aos itens a seguir.

a. A função h é crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

b. Para que valores de x a função h assume valores positivos? **20. b.** $x > -1$

c. Para que valores de x a função h assume valores negativos? **20. c.** $x < -1$

21. Elabore, individualmente, um problema sobre o estudo do sinal de uma função afim. Ao terminar, troque seu problema com o de um colega e resolva-o. Depois, destroquem os problemas para corrigi-los. Por fim, discutam as resoluções. **21.** Resposta pessoal.

18. Respostas nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

20. a. A função h é crescente, pois sua taxa de variação (coeficiente de x) é positiva (e igual a 2).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Peça aos estudantes que considerem os gráficos das funções de domínio $\mathbb{R}$: $f(x) = x - 2$ e $g(x) = -x + 18$. Pergunte:
• Para que valores reais de x as funções f e g são positivas, simultaneamente? (Resposta: $2 < x < 18$)
• Para que valores reais de x as funções f e g são negativas, simultaneamente? (Resposta: Para nenhum valor de x.)
• Para que valores reais de x as funções f e g têm sinais contrários, simultaneamente? (Resposta: $x < 2$ ou $x > 18$)
Após a realização desta proposta, aponte que o estudo do sinal das funções f e g permite determinar o sinal do produto e do quociente delas para qualquer valor real de x. Pergunte: Para que valores de x tem-se: $(x - 2)(-x + 18) > 18$? (Resposta: $(x - 2)$ e $(-x + 18)$ devem ter o mesmo sinal para que o produto delas seja positivo.)

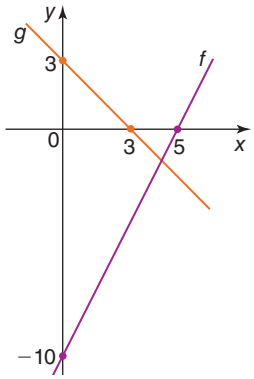
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

4. Inequação-produto

Considere os números representados pelas expressões $2x - 10$ e $-x + 3$, com $x \in \mathbb{R}$. Para que valores de x o produto dos números obtidos é positivo?

Em outras palavras, estão sendo pedidas as soluções reais da inequação $(2x - 10)(-x + 3) > 0$.

Para resolver essa inequação, podemos esboçar em um plano cartesiano os gráficos das funções f e g de lei $f(x) = 2x - 10$ e $g(x) = -x + 3$, determinando, nos domínios de f e g, os intervalos em que as duas funções têm o mesmo sinal (para que o produto $f \cdot g$ seja positivo).



Observe, no gráfico, que:

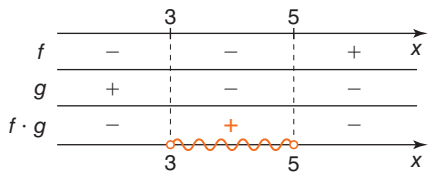
- para $x < 3$: f é negativa e g é positiva;
- para $3 < x < 5$: f é negativa e g é negativa;
- para $x > 5$: f é positiva e g é negativa.

Logo, as funções f e g têm o mesmo sinal para $3 < x < 5$ e, portanto, o conjunto solução da inequação $(2x - 10)(-x + 3) > 0$, no universo dos números reais, é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$

Dispositivo prático

Na inequação do exemplo anterior, $(2x - 10)(-x + 3) > 0$, podemos representar esquematicamente a variação de sinal de cada função, $f(x) = 2x - 10$ e $g(x) = -x + 3$, sem a necessidade de construir seus gráficos. Para isso, determinamos as raízes de f e g e construímos o seguinte quadro de sinais:



Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que esse produto seja positivo, pois $(2x - 10)(-x + 3) > 0$, o conjunto solução da inequação, no universo dos reais, é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$

Observação

O conjunto solução $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$ também pode ser representado por:

$$S =]3, 5[$$

Inequação-produto é toda inequação que pode ser apresentada sob uma das formas a seguir, em que f e g são funções quaisquer:

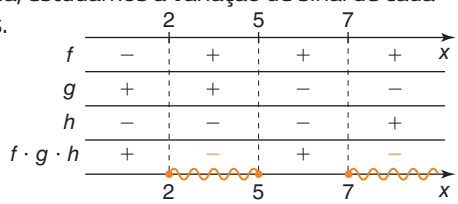
- $f(x) \cdot g(x) > 0$
- $f(x) \cdot g(x) < 0$
- $f(x) \cdot g(x) \neq 0$
- $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$
- $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

7. Resolva, no conjunto dos números reais, a inequação $(6x - 12)(5 - x)(2x - 14) \leqslant 0$.

Resolução

Inicialmente, obtemos as raízes das funções f, g e h de lei $f(x) = 6x - 12$, $g(x) = 5 - x$ e $h(x) = 2x - 14$. Em seguida, estudamos a variação de sinal de cada uma delas.



Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g \cdot h$. Queremos que esse produto seja negativo ou nulo.

Então, $(6x - 12)(5 - x)(2x - 14) \leqslant 0$.

Logo, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5 \text{ ou } x \geqslant 7\}$ ou, ainda, $S = [2, 5] \cup [7, +\infty[$.

Reflexão

É possível transformar a inequação $x^2 - 5x + 6 > 0$ em uma inequação-produto? Justifique sua resposta.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reflexão: Sim, basta fatorar o trinômio do 2º grau que forma o primeiro membro da inequação. Observe: as raízes do trinômio $x^2 - 5x + 6$ são 2 e 3; logo, a fatoração desse trinômio é $(x - 2)(x - 3)$. Assim, temos: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 3) > 0$

5. Inequação-quociente

Chama-se **inequação-quociente** toda inequação que pode ser apresentada em uma das formas a seguir, em que f e g são funções quaisquer, com g não identicamente nula.

- $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$
- $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$

Observação

Uma função g é identicamente nula quando $g(x) = 0$ para qualquer x pertencente ao domínio de g.

Exemplos

a. $\frac{5}{2x-8} < 0$

b. $\frac{3x+6}{4-x} \leqslant 0$

c. $\frac{(x+2)(x-3)}{2x} > 0$

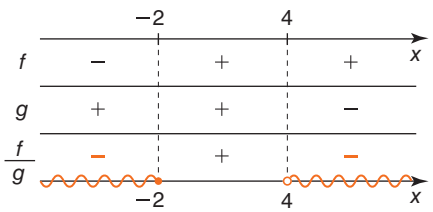
EXERCÍCIO RESOLVIDO

8. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $\frac{3x+6}{4-x} \leqslant 0$.

Resolução

Condição de existência: $4 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

Vamos estudar a variação de sinal de cada uma das funções f e g de lei $f(x) = 3x + 6$ e $g(x) = 4 - x$.



Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Como nos interessa que esse quociente seja negativo ou nulo, pois $\frac{3x+6}{4-x} \leqslant 0$, o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x > 4\}$$

Observação

Note que excluímos $x = 4$ do conjunto solução porque a condição de existência exige que $x \neq 4$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

22. b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{13}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 3\right\}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

22. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a. $(2x - 8)(2 - x) > 0$ **22. a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

b. $(4x + 13)(3 - x)(2x - 1) \leqslant 0$

c. $\frac{3x-6}{5-x} > 0$ **22. c.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

d. $\frac{1-2x}{x} \leqslant 1$ **22. d.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$.

23. O volume de medida V, em centímetro cúbico, de um corpo (amostra de matéria) varia em função da temperatura t, em grau Celsius. Essa variação ocorre de acordo com a função dada por $V(t) = \frac{(2-k)t}{k} + 2k$, sendo k uma constante real não nula. Para que valores de k a taxa de variação dessa função é positiva?

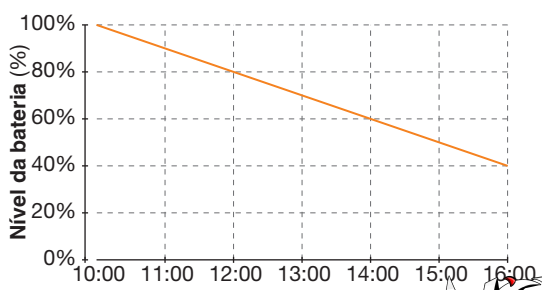
23. $S = \{k \in \mathbb{R} \mid 0 < k < 2\}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 10 e 11.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. (UFPR) O gráfico abaixo representa o consumo de bateria de um celular entre 10 h e 16 h de um determinado dia. Supondo que o consumo manteve o mesmo padrão até a bateria se esgotar, a que horas o nível da bateria atingiu 10%? **1.** alternativa **b**



a. 18 h

b. 19 h

c. 20 h

d. 21 h

e. 22 h

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. Um estudo com base em dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), revelou que de 2004 a 2014 a diferença entre a jornada de trabalho semanal feminina em relação à masculina aumentou cerca de 1 hora. O quadro a seguir sintetiza o resultado dessa pesquisa.

Jornada de trabalho semanal (fora de casa e afazeres domésticos)

Ano	2004	2014
Homens	53 h 6 min	51 h 18 min
Mulheres	57 h 12 min	56 h 18 min

Elaborado com base em: O PESO do trabalho doméstico por tipo de família. **O Globo**, [2014]. Disponível em: http://infograficos.oglobo.globo.com/economia/o-peso-do-trabalho-domestico-por-tipo-de-familia.html. Acesso em: 19 ago. 2024.

Indicando por y a diferença, em minuto, entre a jornada de trabalho semanal das mulheres e a dos homens, nessa ordem, e por x o ano, cujos valores 0, 1, 2, ..., 10 correspondam aos anos 2004, 2005, 2006, ..., 2014, respectivamente, faça o que se pede.

a. Construa o gráfico que expresse y em função de x, admitindo que essa função seja polinomial do 1º grau.

b. De acordo com a hipótese admitida no item **a**, obtenha a equação que expressa y em função de x.

2. b. $y = 5{,}4x + 246$

c. De acordo com a equação obtida no item **b**, a jornada de trabalho semanal das mulheres em 2009 tinha quantos minutos a mais que a dos homens?

2. c. 273 minutos

d. Pesquise dados atuais sobre a jornada de trabalho semanal (fora de casa e afazeres domésticos) das mulheres e dos homens. Em seguida, construa um gráfico que expresse a diferença entre a jornada de trabalho semanal das mulheres e a dos homens, nessa ordem, de 2014 até o ano atual.

ODS 5

2. d. Resposta depende dos dados da pesquisa.

e. A diferença entre as jornadas de trabalho semanal das mulheres e dos homens, nesta ordem, diminuiu ou aumentou ao longo do tempo? Por quais motivos você acha que isso ocorreu? Converse com os colegas.

2. e. Resposta depende dos dados da pesquisa.

3. Quando a temperatura interna de uma sala atinge 30 °C, um aparelho de ar-condicionado é ligado automaticamente, fazendo a temperatura decrescer linearmente em função do tempo. Sabe-se que o aparelho permanece ligado por mais de 10 minutos até desligar-se automaticamente e que, no intervalo de 5 a 10 minutos depois de ligado, a medida da temperatura da sala varia de 25 °C a 20 °C, respectivamente.

a. Obtenha uma equação que expresse a temperatura y, em grau Celsius, em função do tempo x, em minuto, enquanto o aparelho estiver ligado.

3. a. $y = -x + 30$

b. Qual é a temperatura da sala 8 minutos depois de ligado o aparelho? **3. b.** 22 °C

2. a. Resposta no final do livro.

4. Dada a função afim dada por $y = 4x + 5$, calcule a taxa média de variação de y em relação a x, quando x varia de:

a. 3 a 9. **4. a.** 4 **b.** 7 a 10. **4. b.** 4

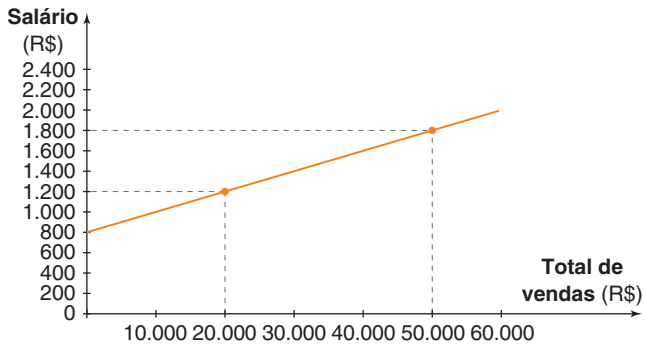
5. Um automóvel percorreu um trecho de uma estrada à velocidade constante de 90 km/h.

a. Obtenha uma equação que expresse a distância d percorrida, em quilômetro, em função do tempo t, em hora. **5. a.** $d = 90t$

5. b. 90 km/h

b. Calcule a taxa média de variação de d em relação a t no intervalo de 1 h a 4 h, sabendo que o tempo de duração da viagem nesse trecho foi maior que 4 h.

6. (Enem) No comércio é comumente utilizado o salário mensal comissionado. Além de um valor fixo, o vendedor tem um incentivo, geralmente um percentual sobre as vendas. Considere um vendedor que tenha salário comissionado, sendo sua comissão dada pelo percentual do total de vendas que realizar no período. O gráfico expressa o valor total de seu salário, em reais, em função do total de vendas realizadas, também em reais.



Qual o valor percentual da sua comissão?

a. 2,0% **b.** 5,0% **c.** 16,7% **d.** 27,7% **e.** 50,0%

6. alternativa **a**

7. (Enem) Um pescador tem um custo fixo diário de R$ 900,00 com combustível, iscas, manutenção de seu barco e outras pequenas despesas. Ele vende cada quilograma de peixe por R$ 5,00. Sua meta é obter um lucro mínimo de R$ 800,00 por dia. Sozinho, ele consegue, ao final de um dia de trabalho, pescar 180 kg de peixe, o que é suficiente apenas para cobrir o custo fixo diário. Portanto, precisa contratar ajudantes, pagando para cada um R$ 250,00 por dia de trabalho. Além desse valor, 4% da receita obtida pela venda de peixe é repartida igualmente entre os ajudantes. Considerando o tamanho de seu barco, ele pode contratar até 5 ajudantes. Ele sabe que com um ajudante a pesca diária é de 300 kg e que, a partir do segundo ajudante contratado, aumenta-se em 100 kg a quantidade de peixe pescada por ajudante em um dia de trabalho.

A quantidade mínima de ajudantes que esse pescador precisa contratar para conseguir o lucro diário pretendido é: **7.** alternativa **d**

a. 1. **b.** 2. **c.** 3. **d.** 4. **e.** 5.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

8. Acompanhe a situação a seguir.

Em geral, os impostos arrecadados dos cidadãos devem ser aplicados na manutenção da estrutura pública e em políticas sociais, econômicas e culturais do Estado. No Brasil, o imposto que o contribuinte paga sobre a renda adquirida é chamado de Imposto de Renda (IR), calculado em função da renda de cada cidadão, como mostra a tabela, para o cálculo anual do Imposto de Renda de Pessoa Física arrecadado em 2024, com base na renda do ano de 2023.

Tributação do Imposto de Renda (ano-calendário 2023) – Incidência anual

Base de cálculo anual (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do imposto (R$)
Até 24.511,92	0,0	0,00
De 24.511,93 até 33.919,80	7,5	1.838,39
De 33.919,81 até 45.012,60	15,0	4.382,38
De 45.012,61 até 55.976,16	22,5	7.758,32
Acima de 55.976,16	27,5	10.557,13

Fonte dos dados: BRASIL. Receita Federal. Tributação de 2023. **Gov.br**, 4 maio 2023. Disponível em: https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/meu-imposto-de-renda/tabelas/2023. Acesso em: 10 ago. 2024.

Por exemplo, uma pessoa que recebeu, em 2023, renda total de R$ 30.000,00, deverá pagar R$ 411,61 de imposto de renda, conforme mostram os cálculos a seguir.

$$7{,}5\% \cdot 30.000{,}00 - 1.838{,}39 = 2.250{,}00 - 1.838{,}39 = 411{,}61$$

Alíquota | Renda | Parcela a deduzir

De acordo com a tabela, se a renda anual de um cidadão em 2023 foi x reais, expresse por meio de uma função $f(x)$, com mais de uma sentença, o imposto de renda a pagar, em real.

9. No início do século XX, o astrofísico estadunidense Edwin Hubble (1889-1953) descobriu que o Universo está em constante expansão. Suas conclusões foram baseadas nas observações de estrelas conhecidas como cefeidas. Essas estrelas servem de referenciais que permitem determinar distâncias entre corpos celestes muito afastados da Terra. As medições efetuadas por Hubble permitiram concluir que as galáxias se afastam da Via Láctea a uma velocidade diretamente proporcional à distância em que se encontram dela: quanto mais distante, maior a velocidade de afastamento. Mais especificamente, Hubble determinou que, a cada megaparsec (Mpc) de distância da Via Láctea, uma galáxia aumenta sua velocidade em 71 km/s (1 Mpc equivale a 3.260.000 anos-luz). A lei da função linear, deduzida por Hubble, para descrever essa velocidade de afastamento da galáxia é: $V(R) = H_0 \cdot R$, em que $V(R)$ é a medida da velocidade de afastamento da galáxia, em relação à Via Láctea, em quilômetro por segundo; H_0 é a constante de Hubble, que vale aproximadamente 71 km/s/Mpc; e R é a distância, em megaparsec, entre a galáxia e a Via Láctea.

9. a. As velocidades de afastamento da Via Láctea das galáxias A, B e C são 71 km/s, 710 km/s e 7.100 km/s, respectivamente.
9. b. A galáxia em questão está a 0,047 Mpc de distância da Via Láctea.

A descoberta de Hubble fez surgir a hipótese de que, em algum instante, todas as galáxias estiveram em um mesmo ponto e, a partir de uma grande explosão, a do *Big Bang*, iniciou-se a expansão. Relacionando a velocidade de afastamento das galáxias com a variação das distâncias entre elas, pode-se calcular o instante em que ocorreu o *Big Bang* e, então, determinar a idade do universo, estimada entre 13 e 14 bilhões de anos.



HENNING DALHOFF/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Simulação do *Big Bang* feita por computador.

Elaborado com base em: LEI de Hubble. **Mundo Educação**, 2024. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/fisica/lei-hubble.htm. Acesso em: 19 jun. 2024.

a. Calcule a velocidade de afastamento de três galáxias A, B e C que, neste momento, se encontram a 1 Mpc, 10 Mpc e 100 Mpc de distância da Via Láctea, respectivamente.

b. A que distância da Via Láctea, em megaparsec, encontra-se uma galáxia cuja velocidade de afastamento, neste momento, é 11.928 quilômetros por hora?

c. Ano-luz, apesar de conter a palavra "ano", é uma unidade astronômica de comprimento. Um ano-luz é a distância percorrida pela luz em um ano, o que corresponde aproximadamente a $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km. A distância de 1 Mpc equivale a quantos quilômetros? (Dê a resposta em notação científica).

9. c. $3{,}08396 \cdot 10^{19}$ km

10. Leia o texto a seguir.

IBGE: país tem 2,1 milhões de trabalhadores de plataformas digitais

10. Resposta no final do livro.

[...] Estudo divulgado nesta quarta-feira [25 out. 2023] pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) traz uma radiografia do trabalho por meio de plataformas digitais no Brasil e aponta os desafios enfrentados pelos trabalhadores. De acordo com o levantamento, no setor privado, a população ocupada de 14 anos ou mais de idade somou 87,2 milhões de pessoas no quarto trimestre do ano passado. Deste total, cerca de 2,1 milhões realizavam trabalhos por meio de plataformas digitais, sendo 1,5 milhão - ou 1,7% da população ocupada no setor privado - por meio de aplicativos de serviços e, 628 mil, nas plataformas de comércio eletrônico. [...]

O aplicativo de transporte particular de passageiros foi a plataforma digital mais utilizada pelos usuários (47,2%), seguido do serviço de entrega de comida, produtos, etc (39,5%), do aplicativo de táxi (13,9%) e do aplicativo de prestação de serviços gerais ou profissionais (13,2%).

AGÊNCIA Brasil. **IBGE: país tem 2,1 milhões de trabalhadores de plataformas digitais**. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2023-10/ibge-pais-tem-21-milhoes-de-trabalhadores-de-plataformas-digitais. Acesso em: 20 ago. 2024.

ODS 8



FOCUS PIX/SHUTTERSTOCK

Trabalhador por aplicativo em uma avenida do Rio de Janeiro. Foto de 2024.

Suponha que um entregador de aplicativo de *delivery* precise otimizar suas entregas para maximizar seu lucro. A função dada por $V(d) = 5 + 2d$ é utilizada para calcular o valor V, em reais, que o entregador vai receber por entrega de acordo com a distância d percorrida, em quilômetro. Construa um quadro que relacione o valor das entregas para distâncias de 1 a 10 km. Em seguida, esboce o gráfico da função V, utilizando os dados da tabela que construiu.

11. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações a seguir.

a. $(2x - 1) \cdot (x + 5) > x + 5$

b. $\frac{x}{2x - 1} \leqslant -1$

11. a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 1\}$

11. b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant x < \frac{1}{2}\right\}$

(*Sugestão*: Transforme cada uma das inequações em uma equivalente em que um dos membros da desigualdade seja zero.)

OBJETO DIGITAL ***Vídeo*: Os aplicativos e os trabalhadores plataformizados**

TRABALHO E JUVENTUDES

Trabalhadores plataformizados

Nos últimos anos, a economia digital tem transformado radicalmente o mercado de trabalho, trazendo consigo o fenômeno dos trabalhadores plataformizados. Esses profissionais operam em plataformas digitais que conectam prestadores de serviços a clientes, oferecendo uma ampla gama de serviços, desde transporte e entrega de alimentos até tarefas especializadas como redação e design gráfico. Embora essas plataformas ofereçam flexibilidade e oportunidades de trabalho, elas também apresentam desafios significativos que precisam ser abordados.

Vantagens da plataforma digital:

- Flexibilidade: A possibilidade de escolher quando e onde trabalhar pode ser especialmente vantajosa para aqueles que buscam equilibrar trabalho e vida pessoal ou para quem precisa de uma fonte adicional de renda.
- Acesso a oportunidades: As plataformas digitais oferecem acesso a um mercado global de clientes e empregadores.
- Autonomia: Os trabalhadores podem operar como empresários independentes, com controle sobre como gerenciam seu tempo e suas atividades.

Desafios e preocupações

- Segurança: Trabalhadores plataformizados frequentemente enfrentam uma falta de segurança no trabalho. Eles não têm acesso a benefícios tradicionais como seguro de saúde, férias remuneradas ou aposentadoria. Além disso, estão sujeitos a riscos associados a acidentes e problemas de saúde, frequentemente sem apoio adequado.
- Renda instável: A renda desses trabalhadores pode ser altamente variável, dependendo da demanda e das condições do mercado. A falta de uma remuneração garantida pode causar incerteza financeira e estresse.
- Pressão: A pressão para atender às expectativas da plataforma, manter classificações elevadas e competir com outros trabalhadores pode levar a situações de exploração. As plataformas muitas vezes impõem taxas significativas sobre os ganhos dos trabalhadores, reduzindo seu rendimento líquido.

Quer saber mais sobre os trabalhadores plataformizados? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal.



CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Trabalhadores por aplicativo na Avenida Paulista, São Paulo. Foto de 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EDUCAÇÃO MIDIÁTICA

Essa informação é confiável?

Reúna-se em grupo para ler o texto e responder às questões propostas.

Você costuma interagir nas redes sociais? Quais você utiliza? E recebe ou acessa muitas postagens? Você se preocupa em verificar se os conteúdos divulgados são confiáveis? Já parou para pensar na quantidade de informações falsas e de notícias falsas (*fake news*) que são replicadas?



SVETAZI/ISTOCK/GETTY IMAGES

A expressão *fake news* é atualmente utilizada para indicar informações e notícias falsas veiculadas como se fossem fatos reais. Embora a divulgação de notícias falsas não seja recente, pois já ocorria muito tempo antes da criação da internet, a expressão *fake news* só passou a ser amplamente utilizada no período das eleições presidenciais dos Estados Unidos em 2016, em razão da grande quantidade de notícias falsas que passaram a ser disseminadas pelas mídias e redes sociais com o objetivo de comprometer o desempenho de candidatos à eleição.

O Conselho da Europa, principal organização de defesa dos direitos humanos no continente europeu, classifica as *fake news* em três categorias, como indicado a seguir.

***Misinformation* (informação incorreta)** – informação falsa que é compartilhada por pessoas **sem a intenção** de causar danos.

***Disinformation* (desinformação)** – informação falsa que é **intencionalmente** criada e divulgada com a intenção de enganar ou prejudicar outras pessoas, países etc.

***Mal-information* (informação com má intenção)** – informação verídica, mas que é divulgada **com a intenção** de causar dano (exemplo: vazamento de dados sigilosos de pessoas ou organizações, fotografias usadas fora de contexto).

Fonte: elaborado com base em INSTITUTO FEDERAL DE SÃO PAULO. Dicas para não cair em *fake news*. **Informativos [do IFSP]**, Birigui, 27 abr. 2020. Disponível em: https://bri.ifsp.edu.br/index.php/informativos/1790-infografico-fake-news. Acesso em: 18 jun. 2024.

O apelo emocional de determinadas postagens contribui para a disseminação de *fake news*, pois aumenta a chance de as pessoas as replicarem e, assim, de uma informação viralizar, principalmente se desperta raiva, medo, desconfiança de estudos científicos, caso dos grupos que negam a eficácia das vacinas, e sentimentos de ódio. Isso intensifica a replicação de *fake news* por aquelas pessoas que não refletem sobre as postagens que recebem e não tentam verificar se aquela informação é verdadeira, pois o objetivo de todas as *fake news* é induzir as pessoas a divulgá-las.

Leia, no quadro a seguir, algumas orientações que podem contribuir para identificar uma *fake news* e, consequentemente, evitar sua propagação.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Cuidado! Confira se é *fake* ou fato!

OBJETO DIGITAL Vídeo: Armadilhas das *fake news*

Desconfie de títulos que tenham apelo emocional chamativo e de textos que mencionem comprovação de algo por especialistas, mas não identificam quem são eles e as instituições onde desenvolvem suas pesquisas.

Há *sites* e agências que conferem se uma notícia é verdadeira ou falsa. Na dúvida, faça uma busca na internet e consulte-os.

Se tiver dúvida sobre a veracidade de um conteúdo, evite compartilhá-lo.

Lembre-se de que há influenciadores, *coachs* e produtores de conteúdo que lucram até mesmo com a replicação de boatos e de *fake news*. Ao reagir a essas postagens, você estará contribuindo para aumentar os ganhos financeiros dessas pessoas.



ROMAN SAMBORSKYI/SHUTTERSTOCK

A divulgação de *fake news* envolvendo crimes já provocou a morte de pessoas inocentes. Portanto, evite divulgar postagens incriminando pessoas.

Há grupos que são pagos com o objetivo de divulgar *fake news*, para que outros obtenham vantagens financeiras, políticas, entre outras, portanto, ignorar essas mensagens contribui para que não atinjam mais pessoas.

Denuncie as mensagens falsas em *sites* e plataformas de redes sociais.

Elaborado com base em: TRIBUNAL SUPERIOR ELEITORAL (TSE). **Antídoto contra a desinformação**: 7 passos para identificar uma notícia falsa Disponível em: https://www.tse.jus.br/comunicacao/noticias/2023/Novembro/antidoto-contra-a-desinformacao-aprenda-a-identificar-uma-noticia-falsa-em-7-passos. Acesso em: 19 jun. 2024.

CONSELHO NACIONAL DE JUSTIÇA (CNJ). **Onde checar se é *fake news***. Disponível em: https://www.cnj.jus.br/programas-e-acoes/painel-de-checagem-de-fake-news/onde-checar/. Acesso em: 19 jun. 2024.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Ainda reunidos em grupo, respondam às atividades a seguir. **1.** Resposta pessoal.

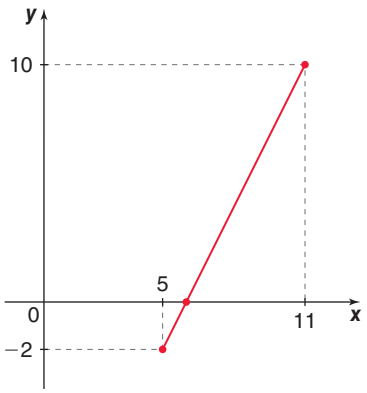
1. Vocês já compartilharam alguma notícia sem ter verificado se era um conteúdo confiável?
2. Com base no texto apresentado e em situações vivenciadas, vocês percebem que a responsabilidade de transmitir uma informação e compartilhar uma notícia é das pessoas que as recebem? Vocês pretendem mudar alguma atitude em relação a isso? **2.** Resposta pessoal.
3. No mundo físico, as tarefas e atividades têm um tempo próprio: ao começar e concluir um trabalho escolar, sua tarefa está pronta e você pode descansar. No entanto, no mundo digital das redes sociais e aplicativos de mensagens, as interações ocorrem continuamente, não há um fim. Ao dividir o tempo entre uma tarefa escolar e os aplicativos e redes sociais, nossa atenção fica fragmentada, o que compromete nosso desempenho e gera estresse, porque nem a tarefa é concluída com eficiência, nem o celular é deixado de lado. Reflitam sobre quanto tempo do seu dia é gasto em redes sociais e aplicativos e se isso está interferindo no seu desempenho escolar e no convívio com a família e os amigos. **3.** Resposta pessoal.
4. Agora, vocês vão elaborar uma campanha para alertar as pessoas para a importância de refletir sobre as notícias veiculadas pelas mídias e redes sociais e de verificar se são confiáveis antes de compartilhá-las. Vocês podem criar um roteiro explicando como verificar se uma informação é confiável, apresentar exemplos obtidos em sites e agências que as conferem, além de apresentar o que fazer caso uma pessoa seja vítima de dano causado por *fake news*. Escolham um recurso para divulgar a campanha, como um *podcast*, um vídeo a ser postado nas redes sociais da escola, cartazes distribuídos pela escola, ou outro recurso que considerarem mais adequado. **4.** Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 6

Utilize o texto a seguir para responder às questões **1** a **3**.

Em um dia de inverno, a medida y da temperatura de uma região do Rio Grande do Sul, em grau Celsius, em função do horário x, no período das 5 h às 11 h, pôde ser descrita pelo gráfico a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

1. Em que horário desse período a medida da temperatura era 0 °C? **1.** alternativa **b**

a. 5 h
b. 6 h
c. 7 h
d. 9 h
e. 11 h

2. Em que intervalo de tempo desse período a medida da temperatura esteve negativa? **2.** alternativa **b**

a. $5\text{ h} \leqslant x \leqslant 6\text{ h}$
b. $5\text{ h} \leqslant x < 6\text{ h}$
c. $5\text{ h} \leqslant x \leqslant 11\text{ h}$
d. $6\text{ h} \leqslant x \leqslant 11\text{ h}$
e. $6\text{ h} < x \leqslant 11\text{ h}$

3. Em que intervalo de tempo desse período a medida da temperatura esteve positiva? **3.** alternativa **e**

a. $5\text{ h} \leqslant x \leqslant 6\text{ h}$
b. $5\text{ h} \leqslant x < 6\text{ h}$
c. $5\text{ h} \leqslant x \leqslant 11\text{ h}$
d. $6\text{ h} \leqslant x \leqslant 11\text{ h}$
e. $6\text{ h} < x \leqslant 11\text{ h}$

4. O número real k para que os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 7)$ e $C(5, k)$ sejam colineares é: **4.** alternativa **d**

a. 5
b. 7
c. 9
d. 11
e. 13

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $(4x + 13)(3 - x)(2x - 1) \leqslant 0$. **5.** alternativa **c**

a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$
b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{13}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$
c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{13}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 3\right\}$
d. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{13}{4}\right\}$
e. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

6. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $\frac{3x - 6}{5 - x} > 0$.

a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$ **6.** alternativa **d**
b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 5\}$
d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$
e. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 5\}$

Ferramenta de estudo

Elaborar um resumo dos tópicos estudados é uma ferramenta de estudo que retoma o que foi estudado, em que você pode destacar conteúdos nos quais ainda apresenta dificuldades ou que ainda não foram compreendidos.

Para elaborar um resumo, você pode seguir algumas dicas, como as sugeridas a seguir.

I. A cada conteúdo estudado, faça anotações detalhadas com tudo o que você aprendeu.

II. Ao finalizar o estudo dos tópicos do capítulo, retome suas anotações e elabore um texto resumindo-as.

III. Para fazer o resumo, você também pode retomar os tópicos deste capítulo a fim de verificar ou relembrar conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

IV. Organize em tópicos a sequência das informações que você pretende apresentar no resumo antes de escrevê-lo.

Agora, elabore um resumo utilizando o que você aprendeu neste capítulo. Compartilhe seu resumo com outros colegas e leia o resumo deles também, a fim de aprimorar seu registro.

Se teve dificuldades em elaborar o resumo ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 7

Função polinomial do 2º grau ou função quadrática

Jogos dos Povos Indígenas

ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS



Abertura dos Jogos Indígenas do Xingu na Aldeia Aiha da etnia Kalapalo, Querência (MT). Foto de 2022.

Os Jogos dos Povos Indígenas é um evento esportivo-cultural que busca a valorização dos jogos tradicionais indígenas como forma de salvaguardar seu patrimônio cultural e incentivar a aproximação entre os diferentes povos. Essa é uma forma de celebração de seus costumes, tradições e valores, promovendo a paz e o respeito mútuo.

Uma das provas é o arremesso de lança, em que cada atleta pode realizar três arremessos e a contagem de pontos é feita com base na maior distância alcançada. Essa modalidade vai além do esporte, não apenas por celebrar a habilidade individual, promover o espírito de comunidade e o respeito pela tradição, mas também por transmitir valores culturais, fortalecendo a identidade desses povos.

Indígena em competição de arremesso de lança nos Jogos Indígenas do Xingu. Foto de 2022.



ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

Além da teoria

1. Você já ouviu falar dos Jogos dos Povos Indígenas?
2. Escreva com as próprias palavras qual é a trajetória da lança ao ser arremessada.
3. Você conhece outras situações que podem ser descritas com a mesma trajetória do arremesso de lança? Cite algumas.

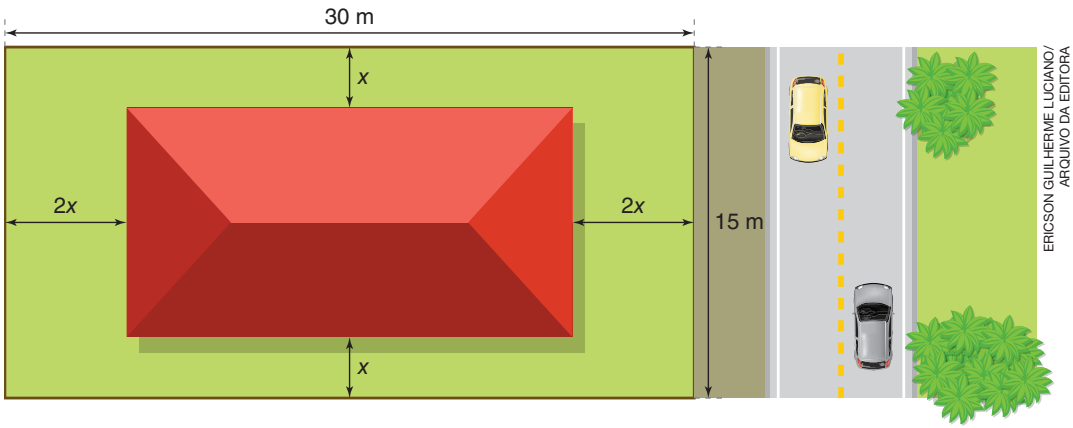
Além da teoria: 1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal. **3.** Respostas pessoais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática

Em um terreno retangular com medidas de 15 m de frente por 30 m de fundo será construída uma casa, ocupando uma região retangular com lados paralelos aos lados do terreno. As laterais do terreno devem estar a x metros de distância da casa, e a frente e o fundo do terreno devem estar a $2x$ metros de distância da casa, respectivamente, conforme representado na figura a seguir.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observando que a região onde será construída a casa é um retângulo com $(30 - 4x)$ metros de comprimento por $(15 - 2x)$ metros de largura, deduzimos que a área A dessa região, em metro quadrado, pode ser expressa em função de x pela seguinte equação:

$$A(x) = (30 - 4x)(15 - 2x)$$

que é equivalente a:

$$A(x) = 8x^2 - 120x + 450$$

Neste capítulo, estudaremos funções como essa. Note que essa função é representada por um polinômio do 2º grau. Por isso, é chamada de **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**.

Toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, é denominada **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**.

Exemplos

a. $y = 5x^2 - 3x + 8$

b. $y = -4x^2 + x$

c. $g(x) = x^2 - \sqrt{3}$

d. Em relação a uma trajetória orientada de origem O, a posição de um móvel em movimento uniformemente variado é expressa pela função polinomial do 2º grau: $s = s_0 + v_0 t + \frac{a t^2}{2}$, em que s_0 é a abscissa em que está o móvel no instante inicial ($t = 0$), v_0 é sua velocidade no instante inicial, a é a aceleração escalar constante do móvel e t é o tempo transcorrido desde o instante inicial.



VLADIMIR ZHOGA/SHUTTERSTOCK

Se desprezarmos a resistência do ar, podemos considerar hipoteticamente que um paraquedista caindo, antes de abrir o paraquedas, está em movimento uniformemente variado, pois a aceleração da gravidade é constante.

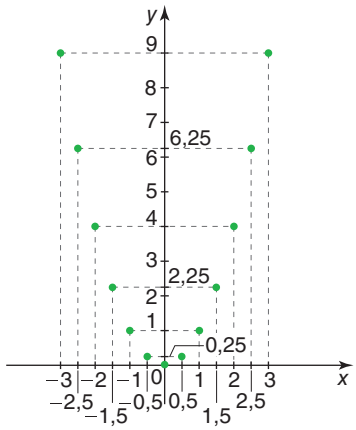
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. Gráfico da função quadrática

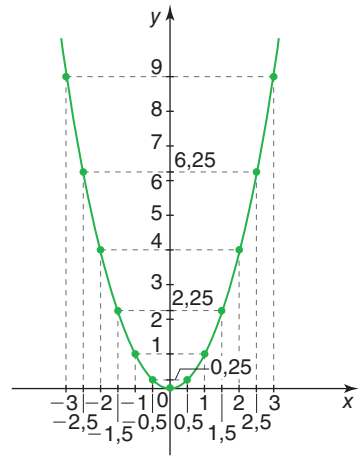
Observe no quadro alguns valores para os pontos representados no gráfico da função quadrática $y = x^2$:

$y = x^2$

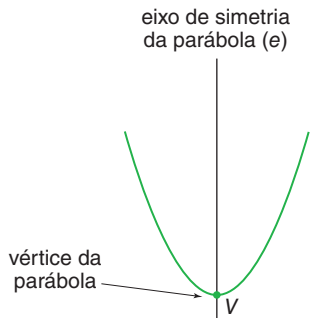
x	y
−3	9
−2,5	6,25
−2	4
−1,5	2,25
−1	1
−0,5	0,25
0	0
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4
2,5	6,25
3	9



Se atribuirmos a x os infinitos valores reais, obteremos o seguinte gráfico:



Essa curva é denominada **parábola**. Toda parábola é composta de dois ramos simétricos em relação a uma reta chamada de **eixo de simetria** (e). O ponto comum à parábola e ao eixo de simetria é o ponto V, chamado de **vértice da parábola**.



Demonstra-se que o gráfico de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c números reais e $a \neq 0$, é uma parábola.

Também se demonstra que essa parábola tem o eixo de simetria perpendicular ao eixo Ox e:

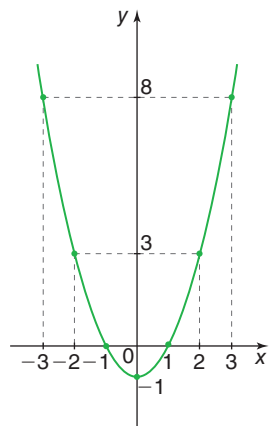
- se $a > 0$, sua concavidade é voltada para o sentido positivo do eixo Oy;
- se $a < 0$, sua concavidade é voltada para o sentido negativo do eixo Oy.

Observação

É comum se referir à concavidade voltada para o sentido positivo do eixo Oy como concavidade voltada para cima; e à concavidade voltada para o sentido negativo como concavidade voltada para baixo.

Exemplo

Sabemos que o gráfico da função quadrática $y = x^2 - 1$ é uma parábola. Assim, para obter um esboço desse gráfico, atribuímos alguns valores a x, representamos no plano cartesiano os pontos determinados e, em seguida, desenhamos a parábola que passa por eles. Observe a seguir.



$y = x^2 + 1$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = x^2 - 1$	8	3	0	−1	0	3	8

Reflexão

Qual é a definição de parábola?

Reflexão: Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Pontos notáveis da parábola

Alguns pontos da parábola, apresentados a seguir, merecem destaque por facilitarem a construção do gráfico da função polinomial do 2º grau.

Pontos de intersecção da parábola com o eixo *Ox*

Uma parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ pode ter um ou dois pontos em comum com o eixo das abscissas ou não interceptar esse eixo. Para identificar qual dessas possibilidades ocorre, basta atribuir valor zero à variável *y*, obtendo:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

Pela fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

- Se $\Delta > 0$, então $\pm\sqrt{\Delta}$ assumirá dois valores reais distintos. Logo, a equação (1) terá duas raízes reais e distintas: $x_1 \neq x_2$. Assim, os pontos de intersecção da parábola com o eixo *Ox* serão $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.
- Se $\Delta = 0$, então $\sqrt{\Delta}$ assumirá apenas o valor zero. Portanto, a equação (1) terá duas raízes reais e iguais: $x_1 = x_2$. Logo, a parábola será tangente ao eixo *Ox* no ponto de abscissa $x_1 = x_2$.
- Se $\Delta < 0$, então $\sqrt{\Delta}$ não existe no conjunto dos números reais. Logo, a equação (1) não terá raiz real. Portanto, a parábola não terá ponto em comum com o eixo *Ox*.

Observação

Note que as abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo *Ox* são as **raízes** da função que essa parábola representa.

Ponto de intersecção da parábola com o eixo *Oy*

Para obter esse ponto, atribuímos valor zero à variável *x* da equação da parábola, $y = ax^2 + bx + c$:

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c$$

Logo, o ponto de intersecção da parábola com o eixo *Oy* é $(0, c)$.

Exemplo

Para esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$, vamos obter os pontos de intersecção da parábola com os eixos *Ox* e *Oy*.

- Fazendo $y = 0$, temos:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

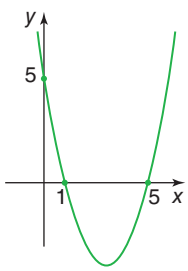
$$\therefore x = 5 \text{ ou } x = 1$$

Assim, a parábola intercepta o eixo *Ox* nos pontos (1, 0) e (5, 0).

- Fazendo $x = 0$, temos:

$$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 \Rightarrow y = 5$$

Portanto, a parábola intercepta o eixo *Oy* no ponto (0, 5).



Desse modo, o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 6x + 5$ é:

Observação

Observe a concordância entre o sinal do coeficiente *a* de x^2 e o sentido para o qual está voltada a concavidade da parábola: como $a > 0$, a concavidade é voltada para cima.

Vértice da parábola

Indicando por $V(p, q)$ o vértice da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, devemos ter:

$$q = ap^2 + bp + c, \text{ ou seja, } ap^2 + bp + c - q = 0.$$

Como o vértice *V* possui uma única abscissa (e uma única ordenada), a equação $ap^2 + bp + c - q = 0$, na variável *p*, deve ter uma única raiz real; portanto, o discriminante dessa equação deve ser nulo, isto é, $\Delta = 0$. Assim:

$$b^2 - 4a(c - q) = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac + 4aq = 0 \Rightarrow q = -\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Como $\Delta = b^2 - 4ac$, então podemos concluir que: $q = -\frac{\Delta}{4a}$

Substituindo q por $-\frac{(b^2 - 4ac)}{4a}$ na equação $ap^2 + bp + c - q = 0$, obtemos:

$$ap^2 + bp + c - \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = 0 \Rightarrow 4a^2p^2 + 4abp + \cancel{4ac} + b^2 - \cancel{4ac} = 0$$

$$\therefore 4a^2p^2 + 4abp + b^2 = 0 \Rightarrow (2ap + b)^2 = 0$$

$$\therefore 2ap + b = 0 \Rightarrow p = -\frac{b}{2a}$$

Concluímos, assim, que o vértice V da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

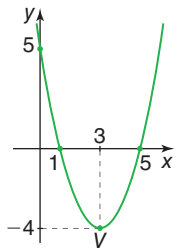
Reflexão: A abscissa do vértice (x_V) é a abscissa do ponto médio do segmento do eixo Ox cujos extremos têm como abscissas as raízes 1 e 5; logo, a abscissa do vértice é 3, ou seja, $x_V = 3$. Substituindo x por 3 na equação $y = x^2 - 6x + 5$, o valor de y correspondente é a ordenada do vértice (y_V): $y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$. Assim, temos $V(3, -4)$. Se julgar oportuno, pergunte aos estudantes se alguém raciocinou diferente e quer compartilhar a estratégia utilizada.

Exemplo

O vértice da parábola de equação $y = x^2 - 6x + 5$ é dado por $V(x_V, y_V)$, em que:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2 \cdot 1} = 3 \text{ e } y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{[(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5]}{4 \cdot 1} = -4$$

Portanto, o vértice da parábola é o ponto $V(3, -4)$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão

Como determinar o vértice $V(x_V, y_V)$ da parábola do exemplo sem usar as fórmulas $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$?

O boxe **Mentes brilhantes** permite um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias ao apresentar a teoria de Galileu e possibilitar reflexão sobre o funcionamento da dinâmica da vida, da Terra e do Cosmos com base em aspectos históricos da descoberta do cientista. As ideias de Galileu sobre a dinâmica dos planetas do Sistema Solar decorrem de análises matemáticas de eventos terrenos, cujas conclusões, acertadas, foram extrapoladas para os astros. Ao fazer isso, Galileu se opôs ao senso comum da época, e suas ideias foram consideradas extravagantes e pecaminosas. Não são raras as situações, em Ciências, nas quais as conclusões de um experimento contrariam até as expectativas do pesquisador que o realizou. Isso evidencia o caráter não dogmático da Ciência, que se caracteriza por produzir um conhecimento que está em constante transformação em função de novos fatos.

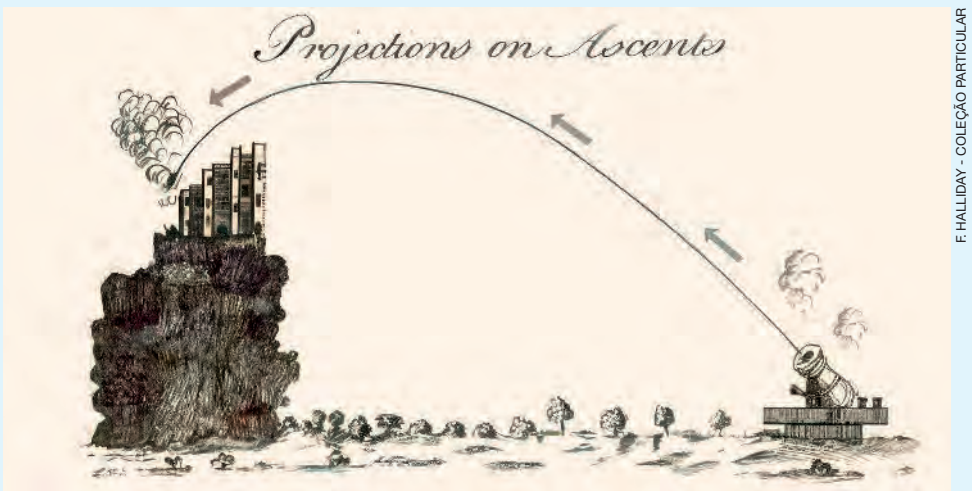
Mentes brilhantes

Eppur si muove!

Galileu Galilei (1564-1642) se contrapôs às concepções aristotélicas sobre movimento. Seus argumentos baseavam-se em experiências como a análise do movimento de uma bala de canhão, que lhe permitia um tempo maior de observação, graças à longa trajetória do projétil. Ele demonstrou que, desprezando as forças dissipativas, a trajetória de um projétil qualquer lançado obliquamente para cima é **parabólica**.

Com seus experimentos, Galileu estabeleceu as bases da Dinâmica, que estuda o comportamento dos corpos em movimento e a ação das forças que produzem ou modificam seus movimentos. A partir daí, estendeu seus estudos para o Sistema Solar, reafirmando a tese heliocêntrica de Nicolau Copérnico, segundo a qual os planetas se movem em torno do Sol. Isso lhe custou uma condenação do Tribunal da Santa Inquisição (a Igreja Católica defendia a tese geocêntrica, segundo a qual a Terra é o centro do Universo).

Galileu foi obrigado a negar a tese heliocêntrica na presença do papa Urbano VIII, em 1633. Conta-se que, ao retirar-se da audiência com o papa, teria dito em voz baixa, referindo-se à Terra: "*Eppur si muove!*" ("Mas ela se move!").



F. HALLIDAY - COLEÇÃO PARTICULAR

Ilustração do livro **Uma introdução fácil às fortificações e artilharia**, de F. Halliday. Londres, 1774.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Esboce o gráfico e indique o domínio e o conjunto imagem da função $y = -x^2 + 4x - 6$.

Resolução

- Fazendo $y = 0$, temos:

  $-x^2 + 4x - 6 = 0$

  $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-6) = -8$

  Como $\Delta < 0$, a função não tem raiz real; portanto, a parábola não intercepta o eixo Ox.

- Fazendo $x = 0$, temos:

  $y = -0^2 + 4 \cdot 0 - 6 \Rightarrow y = -6$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $(0, -6)$.

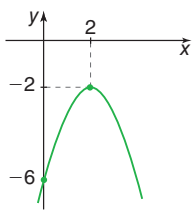
- O vértice V é dado por $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$:

  $-\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$

  $-\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(-8)}{4 \cdot (-1)} = -2$

  Logo: $V(2, -2)$

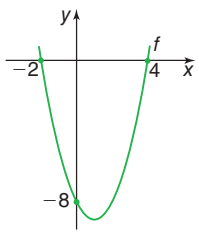
- Assim, esboçamos o gráfico de f:



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) =]-\infty, -2]$

2. O gráfico a seguir é uma parábola com eixo de simetria perpendicular ao eixo das abscissas. Obtenha a função $y = f(x)$, cujo gráfico é essa parábola.



Resolução

Por ter o eixo de simetria perpendicular ao eixo das abscissas, essa parábola é gráfico de uma função do tipo: $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Como os pontos $(0, -8)$, $(-2, 0)$ e $(4, 0)$ pertencem ao gráfico, temos que:

$$\begin{cases} f(0) = -8 \\ f(-2) = 0 \\ f(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -8 \\ a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0, \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = 0 \end{cases}$$

ou seja, $\begin{cases} c = -8 & (1) \\ 4a - 2b + c = 0 & (2) \\ 16a + 4b + c = 0 & (3) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2) e (3), obtemos:

$$\begin{cases} 4a - 2b - 8 = 0 \\ 16a + 4b - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -2$$

Como $a = 1$, $b = -2$ e $c = -8$, concluímos que $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

Outro modo:

Pelo gráfico, observamos que os números -2 e 4 são as raízes da função. Logo, a equação da parábola é da forma: $y = a(x + 2)(x - 4)$.

Como o ponto $(0, -8)$ pertence ao gráfico, temos que:

$-8 = a(0 + 2)(0 - 4) \Rightarrow a = 1$

Assim, concluímos que a função cujo gráfico é a parábola dada é $y = (x + 2)(x - 4)$, ou seja, $y = x^2 - 2x - 8$.

3. No quadro estão alguns valores para x e seus correspondentes para y.

Relação entre x e y

x	y
-2	2
-1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2

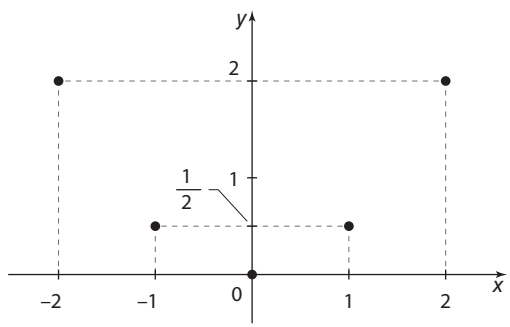
a. Represente no plano cartesiano os pontos apresentados no quadro.

b. Analisando a representação gráfica do pontos, é possível concluir que os pontos pertencem a uma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$? Justifique sua resposta.

c. Escreva a lei de associação da função que representa os valores de x e y.

Resolução

a.



b. Sim, pois o eixo y coincide com o eixo de simetria da parábola e o ponto $(0, 0)$ é o vértice.

c. Com base no item **b**, sabemos que função é do tipo $f(x) = ax^2$ (uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com b e c nulos). Para determinar o coeficiente a, basta conhecer um dos pontos da função.

$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow a \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Logo, $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Esboce o gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem de cada função.

a. $y = -x^2 - 1$

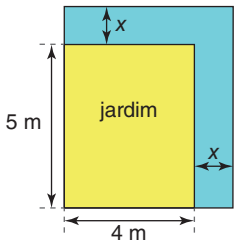
b. $y = x^2 - 8x + 7$

c. $y = -x^2 + 3x + 10$

d. $y = x^2 - 4$

1. Respostas no final do livro.

2. Deseja-se construir uma calçada de largura constante x, em metro, contornando dois lados consecutivos de um jardim de formato retangular, conforme mostra a figura a seguir.

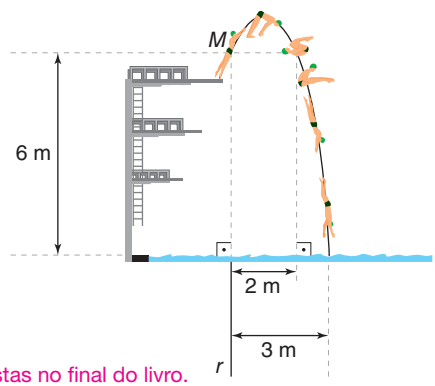


a. Expresse a área A da calçada, em metro quadrado, em função de x. **2. a.** $A(x) = x^2 + 9x$

b. Qual será a área da calçada se $x = 3$ m? **2. b.** 36 m²

c. Qual deverá ser a medida x, em metro, para que a área da calçada seja 4,75 m²? **2. c.** 0,5 m

3. Quando um nadador salta de um trampolim, o centro de massa M de seu corpo descreve uma trajetória parabólica. No momento do início do salto, M está em uma reta vertical r a 6 m de altura em relação à superfície da água da piscina. Quando essa altura se repete durante o salto, o centro de massa M está a 2 m de distância da vertical r, e quando M atinge a superfície da água, está a 3 m de distância da vertical r, conforme mostra a figura a seguir.



3. Respostas no final do livro.

4. a. Resposta no final do livro.

Façam um esboço dessa figura no caderno, junto com o desenho de um sistema cartesiano de eixos, xOy, adotando o metro como unidade nos eixos coordenados. A seguir, em relação ao sistema xOy, obtenham a equação da parábola que contém a trajetória do centro de massa M. (Escolhendo convenientemente a posição do sistema xOy, os cálculos podem ser significativamente simplificados.)

Nota: Em Física, o centro de massa de um corpo (amostra de matéria) é um ponto hipotético, no qual se admite que toda a massa do corpo está concentrada.

4. Responda aos itens seguintes.

a. No mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 3x + 2$ e $g(x) = -x + 5$.

b. Determine as coordenadas dos pontos comuns aos dois gráficos construídos no item **a**. **4. b.** (–1, 6) e (3, 2)

c. Observando os gráficos construídos no item **a**, determine os valores de x para os quais $f(x)$ e $g(x)$ têm sinais opostos, isto é, um deles é positivo e o outro é negativo. **4. c.** $1 < x < 2$ ou $x > 5$

d. De acordo com a sua resposta ao item **c**, qual é o conjunto solução da inequação $f(x) \cdot g(x) < 0$ no universo $\mathbb{R}$? **4. d.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } x > 5\}$

5. Construa o gráfico das funções:

a. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, \text{ se } x \leqslant 4 \\ 7, \text{ se } 4 < x \leqslant 6 \\ x + 1, \text{ se } x > 6 \end{cases}$

b. $g(x) = \begin{cases} x^2 + 4, \text{ se } x \leqslant 0 \\ -x^2 + 4, \text{ se } 0 < x \leqslant 2 \\ 5, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

5. Respostas no final do livro.

No exercício **6**, é importante acolher os contextos trazidos pelos estudantes na elaboração do problema, considerando o repertório, as culturas juvenis e os diferentes interesses deles.

6. Elabore um problema sobre a função polinomial do 2º grau que envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

6. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 6.

Conectado

Conectado: Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Usando um *software* de construção de gráficos, faça o que se pede.

a. Construa o gráfico de uma função polinomial do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, escolhendo quaisquer valores reais para a, b e c, com $a \neq 0$.

b. No mesmo plano cartesiano que foi construído o gráfico da função polinomial do item **a**, construa o gráfico das funções:

(1) $y = ax^2 + bx + c + 3$

(2) $y = ax^2 + bx + c - 3$

(3) $y = a(x + 3)^2 + b(x + 3) + c$

(4) $y = a(x - 3)^2 + b(x - 3) + c$

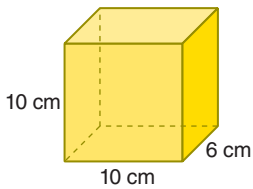
c. Para cada um dos subitens (1), (2), (3) e (4) do item **b**, redija um texto explicando a transformação que sofreu o gráfico em relação ao gráfico original, construído no item **a**. Tente generalizar suas conclusões.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

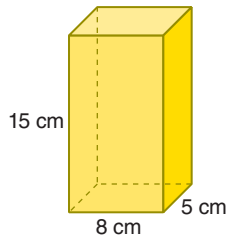
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Otimização da função quadrática

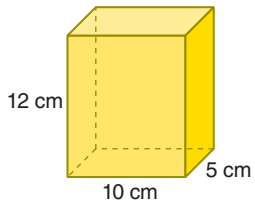
Um fabricante pretende lançar no mercado peças de queijo prato no formato de blocos retangulares medindo 600 cm³ de volume. Como essas peças terão um revestimento plástico, foi necessária uma avaliação de custos da embalagem. O departamento de projetos propôs as três possibilidades a seguir para as dimensões das peças de queijo.



Bloco A



Bloco B



Bloco C

Embora cada um desses três projetos represente um bloco retangular com volume de 600 cm³, observa-se que a área da superfície do bloco A é 440 cm², da do bloco B é 470 cm² e da do bloco C é 460 cm². Assim, o custo com o revestimento plástico será menor se as peças de queijo tiverem as dimensões do bloco A.

Essa situação provoca a seguinte dúvida: haverá dimensões para o bloco retangular com volume de 600 cm³ tal que a área de sua superfície seja mínima? A resposta é sim. Demonstra-se que o bloco retangular de menor área de superfície possível, com o volume citado, é um cubo de aresta medindo $\sqrt[3]{600}$ cm de comprimento.


Peça de queijo tipo prato.

RADOVAN1/SHUTTERSTOCK

Da mesma maneira que o problema anterior exigiu um valor mínimo, há situações que exigem um valor máximo; por exemplo, com os recursos disponíveis em determinado período de tempo, o departamento de planejamento de uma indústria calcula a quantidade de cada produto que deve ser fabricada e vendida para obter o máximo lucro.

Os valores, mínimo e máximo, citados nessas duas situações são calculados por meio de técnicas de **otimização**, as quais buscam **minimizar** ou **maximizar** uma função matemática com o objetivo de obter o melhor desempenho possível de um sistema. Neste tópico, daremos início ao estudo desses conceitos, tratando, por enquanto, apenas de funções quadráticas.

OBJETO DIGITAL
Carrossel de imagens: Embalagens

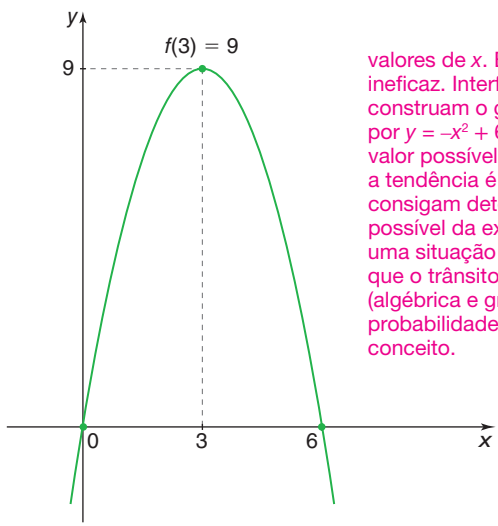
Pergunte aos estudantes: "Na linguagem cotidiana, o que significa a palavra 'otimizar'?" (Melhorar o quanto for possível.); "O que significa otimizar a velocidade de processamento de dados em um computador?" (Propiciar condições para que a máquina atinja a velocidade máxima de processamento.); "O que significa otimizar o custo da energia elétrica de uma residência?" (Adotar procedimentos que levem ao custo mínimo de energia elétrica.). Conclua que, em Matemática, otimizar uma função significa determinar seu valor máximo ou mínimo, quando existirem. Neste tópico, foi apresentado o Objeto Digital **Carrossel de imagens: Embalagens**. Esse recurso aborda o conceito e a importância das embalagens no contexto logístico.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Valor máximo de uma função quadrática

Considerando a função $f(x) = -x^2 + 6x$, cujo gráfico é representado a seguir.

No tópico **Valor máximo de uma função quadrática**, peça aos estudantes que calculem o valor máximo assumido pela expressão $-x^2 + 6x$, em que x pode assumir qualquer valor real (sugira o uso de uma calculadora eletrônica). A tendência, no primeiro momento, é que eles tentem obter o maior valor aumentando os valores de x. Essa tentativa vai se mostrar ineficaz. Interfira, então, pedindo que construam o gráfico da função definida por $y = -x^2 + 6y$ e determinem o maior valor possível de y. Com essa construção, a tendência é que muitos estudantes consigam determinar o maior valor possível da expressão $-x^2 + 6y$. Essa é uma situação interessante, que mostra que o trânsito entre duas representações (algébrica e gráfica) possibilita maior probabilidade de entendimento de um conceito.

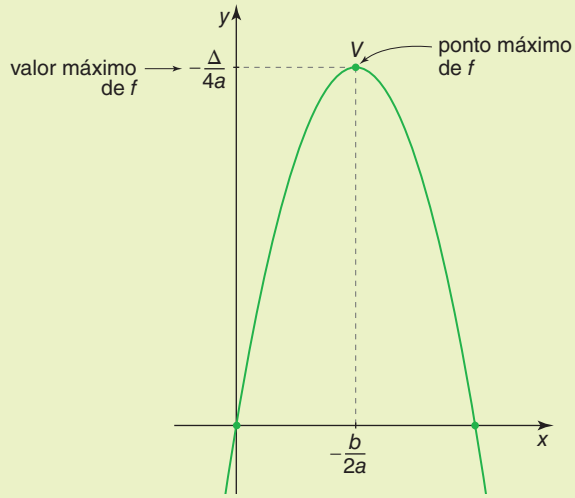


Note que $f(3) \geqslant f(x)$, para qualquer x pertencente ao domínio de f. Por isso, dizemos que $f(3) = 9$ é o **valor máximo** da função f e que 3 é a abscissa do ponto máximo da função.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

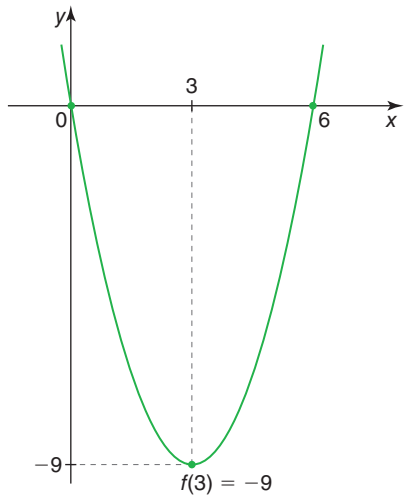
Para saber mais sobre o cálculo do lucro máximo por meio da função quadrática, assista ao vídeo **Roda de samba**, disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1172. Acesso em: 20 ago. 2024.

Se o ponto V é o vértice da parábola que representa graficamente a função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a < 0$, então V é chamado de **ponto máximo** da função, sendo sua ordenada, $-\frac{\Delta}{4a}$, o **valor máximo** de f.



Valor mínimo de uma função quadrática

Considerando a função $f(x) = x^2 - 6x$, cujo gráfico é:



No tópico **Valor mínimo de uma função quadrática**, peça aos estudantes que calculem o valor mínimo assumido pela expressão $x^2 - 6x$, em que x pode assumir qualquer valor real. Espera-se que, com base no exemplo anterior, os estudantes construam o gráfico da função definida por $y = x^2 - 6y$, calculando, assim, o valor mínimo da expressão $x^2 - 6y$.

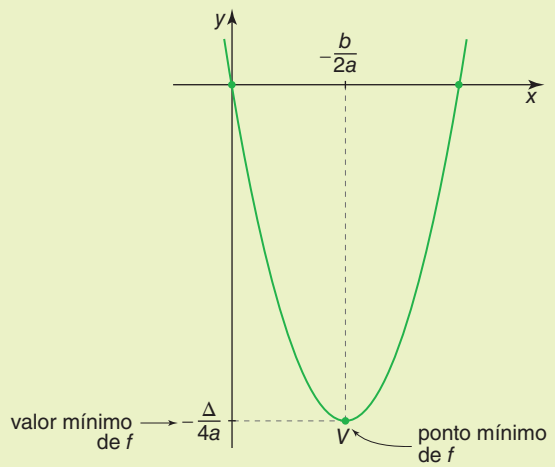
Note que $f(3) \leqslant f(x)$, para todo x pertencente ao domínio de f. Por isso, dizemos que $f(3) = -9$ é o **valor mínimo** da função f e que 3 é a abscissa do ponto mínimo da função.

Conectado

Construa um fluxograma para verificar se uma função quadrática tem ponto máximo ou ponto mínimo.

Conectado:
Resposta pessoal.

Se o ponto V é o vértice da parábola que representa graficamente a função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$, então V é chamado de **ponto mínimo** da função, sendo sua ordenada, $-\frac{\Delta}{4a}$, o **valor mínimo** de f.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

No item **a** do exercício resolvido, questione os estudantes sobre a ordem dos passos para a construção do gráfico. Verifique se eles concordam com os passos apresentados em que primeiro se determinam os pontos que interceptam o eixo das abscissas e o vértice. Caso algum estudante discorde, peça que compartilhe os passos que seguiria para a construção do gráfico.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

4. Sabe-se que, sob certo ângulo de lançamento, a altura h atingida por uma pedra, em metro, em função do tempo t, em décimo de segundo, é dada por $h(t) = -\frac{t^2}{60} + t$.

a. Construa o gráfico da altura atingida pela pedra em função do tempo.

b. Qual é a altura máxima atingida pela pedra em relação ao plano horizontal de onde foi lançada?

c. Em quanto tempo, após o lançamento, a pedra atinge a altura máxima?

d. Em quanto tempo, após o lançamento, a pedra atinge o solo, suposto no mesmo plano horizontal de onde ela foi lançada?

Resolução

a. Inicialmente, obtemos os pontos notáveis da parábola que contém a trajetória da pedra.

- Intersecção com o eixo das abscissas:

$$-\frac{t^2}{60} + t = 0 \Rightarrow t\left(-\frac{t}{60} + 1\right) = 0$$

$$t = 0 \text{ ou } -\frac{t}{60} + 1 = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ ou } t = 60$$

Logo, a parábola intercepta o eixo das abscissas nos pontos (0, 0) e (60, 0). Note, portanto, que a parábola intercepta o eixo das ordenadas também no ponto (0, 0).

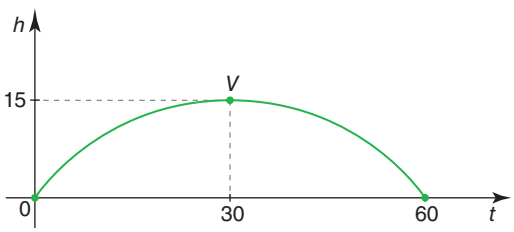
- Vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right)} = 30$$

e

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\left(1^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right) \cdot 0\right)}{4 \cdot \left(-\frac{1}{60}\right)} = 15$$

Portanto, o gráfico da altura atingida em função do tempo é:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

b. A altura máxima atingida pela pedra é a ordenada do vértice V do arco de parábola do item **a**, ou seja, 15 m.

c. O tempo para que a pedra atinja a altura máxima, após o lançamento, é a abscissa do vértice V do arco de parábola do item **a**, ou seja, 30 décimos de segundo.

d. A raiz positiva da função, obtida no item **a**, indica o tempo em que a pedra atinge o solo após o lançamento, isto é, 60 décimos de segundo.

5. Considere um quadrado de lado medindo x, em que x é um número real positivo.

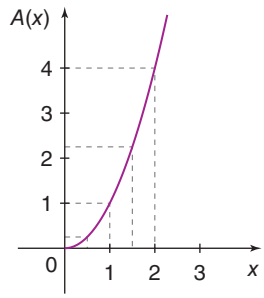
a. Escreva a função para $A(x)$, em que $A(x)$ é a área e classifique qual tipo de função é essa. Depois, construa o gráfico da função $A(x)$.

b. Escreva a função para $P(x)$, em que $P(x)$ é o perímetro, e classifique qual tipo de função é essa. Depois, construa o gráfico da função $P(x)$.

c. O que acontece com as medidas da área e do perímetro quando dobramos a medida x do lado?

Resolução

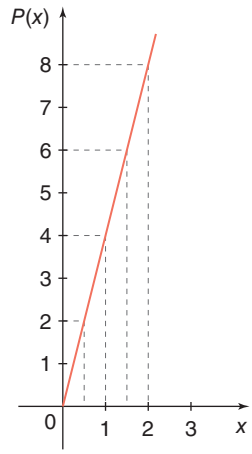
a. $A(x) = x^2$. É uma função quadrática.



$A(x) = x^2$

x	$A(x)$
0,5	0,25
1	1
1,5	2,25
2	4

b. $P(x) = 4x$. É uma função afim.



$P(x) = 4x$

x	$P(x)$
0,5	2
1	4
1,5	6
2	8

c. Dobrando a medida do lado, a medida da área é quadruplicada e a medida do perímetro é dobrada.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Em dupla, determinem qual foi o erro cometido e discutam o que pode ter causado o erro. Refaçam a resolução no caderno e depois conversem com o professor e outros colegas para expor a estratégia de raciocínio utilizada por vocês.

Exercício

O departamento de planejamento de uma indústria de motores para piscina estimou que o custo unitário de produção, C, em real, de um tipo de motor decresce em função do número x de unidades fabricadas por dia, de acordo com a função $C(x) = 10x^2 - 410x + 4.500$, com $x > 0$. Qual é o custo unitário mínimo, em real, para a produção desse tipo de motor?

Resolução

O custo unitário mínimo, em real, é o valor da ordenada y_v do vértice da parábola que representa a função C:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-410)^2 - 4 \cdot 10 \cdot 4.500}{4 \cdot 10} \Rightarrow y_V = 297{,}5$$

Logo, o custo unitário mínimo de produção é R$ 297,50.

Análise da resolução: A resposta está incorreta, pois a abscissa x_v do vértice da parábola representada pela função C é dada por:

$x_v = -\frac{b}{2a}$

$x_v = -\frac{(-410)}{2 \cdot 10} = 20{,}5$

Esse valor não pode ser atribuído a x, pois essa variável representa uma quantidade de motores e, portanto, só pode assumir valores naturais. Como o enunciado afirma que o custo unitário de produção decresce de acordo com a função C, devemos atribuir a x o primeiro número natural que antecede 20,5, isto é, 20. Assim, o custo unitário mínimo de produção, em real, é dado por:
$C(20) = 10 \cdot 20^2 - 410 \cdot 20 + 4.500 \Rightarrow C(20) = 300$
Ou seja, o custo unitário é R$ 300,00.
Aproveite o momento de conversa com a turma para verificar se alguém teve dificuldade para resolver o exercício e incentive os demais estudantes a ajudar os colegas na solução das dificuldades apontadas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

7. Determine o valor máximo (ou mínimo) e a abscissa do ponto máximo (ou do ponto mínimo) de cada uma das funções.

a. $y = 4x^2 + 2x - 2$

b. $y = -x^2 - 2x + 3$

c. $y = 3x^2 - 12x$

d. $y = -x^2 + x - \frac{1}{2}$

7. a. valor mínimo: $-\frac{9}{4}$; abscissa do ponto mínimo: $-\frac{1}{4}$

7. b. valor máximo: 4; abscissa do ponto máximo: -1

7. c. valor mínimo: -12; abscissa do ponto mínimo: 2

7. d. valor máximo: $-\frac{1}{4}$; abscissa do ponto máximo: $\frac{1}{2}$

8. Dada a função $f(x) = (x+3)(x+2) + 2k$, em que k é uma constante real, faça o que se pede.

a. Determine k para que o valor mínimo da função f seja 1. **8. a.** $k = \frac{5}{8}$

b. Determine a abscissa do ponto mínimo da função f. **8. b.** $k = -\frac{5}{2}$

9. Ao longo de uma curva, a velocidade v, em quilômetro por hora, de um carro de fórmula Indy variou em função da medida do tempo t, em segundo, de acordo com a função $v(t) = 20t^2 - 80t + 200$, para $0 \leqslant t \leqslant 3$, em que $t = 0$ e $t = 3$ são os instantes em que o carro entrou na curva e saiu dela, respectivamente.

a. Com qual velocidade o carro entrou nessa curva? **9. a.** 200 km/h

b. Com qual velocidade o carro saiu dessa curva? **9. b.** 140 km/h

c. Quantos segundos depois de o carro entrar na curva sua velocidade foi mínima? **9. c.** 2 segundos

d. Qual foi a velocidade mínima do carro ao longo da curva? **9. d.** 120 km/h

e. Usando um programa de construção de gráficos, construa o gráfico da função v descrita no enunciado, destacando os pontos $(t, v(t))$ para cada um dos itens anteriores. **9. e.** Resposta no final do livro.

10. Considere todos os retângulos com 20 cm de perímetro.

a. Qual é a área do retângulo com 8 cm de base? **10. a.** 16 cm²

b. Indicando por x a medida da base de um retângulo genérico, construa o gráfico da função $A(x)$ que expressa a área do retângulo, em centímetro quadrado, em função da medida x, em centímetro. **10. b.** Resposta no final do livro.

c. Qual é a área máxima que pode ter um desses retângulos? **10. c.** 25 cm²

11. (Enem) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leqslant T \leqslant 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leqslant T \leqslant 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como **11.** alternativa **d**

a. muito baixa. **c.** média. **e.** muito alta.
b. baixa. **d.** alta.

12. Um atacadista de roupas observou que, quando o preço de uma camiseta era R$ 40,00, eram vendidas 200 unidades por semana e que cada aumento de R$ 0,50 no preço unitário provocava uma diminuição de 2 camisetas nas vendas semanais. Essas observações levaram o comerciante a estabelecer o preço unitário de modo que a receita arrecadada com a venda semanal das camisetas fosse maximizada. O preço estabelecido para a camiseta foi: **12.** alternativa **d**

a. R$ 42,00. **c.** R$ 44,00. **e.** R$ 45,50.
b. R$ 42,50. **d.** R$ 45,00.

No exercício **12**, incentive os estudantes a usarem os pilares do pensamento computacional para resolver o exercício.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 7 e 8.

4. Variação de sinal da função quadrática

Uma expedição percorreu um trecho do deserto do Saara, localizado no norte do continente africano, em 14 horas, partindo em um instante do dia em que a temperatura era de 48 °C. Para avaliar a variação da temperatura durante o percurso, efetuaram-se medições desde o instante de partida até o de chegada. Os resultados podem ser expressos pela função a seguir, em que a temperatura f, em grau Celsius, é expressa em função do tempo x, em hora, em que $x = 0$ e $x = 14$ correspondem aos instantes de partida e de chegada, respectivamente.

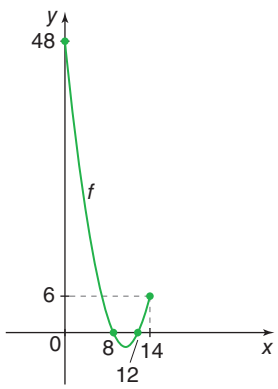
$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 10x + 48, \text{ com } 0 \leqslant x \leqslant 14$$



PHOTORK/SHUTTERSTOCK

Caravana no deserto do Saara, Tunísia. Foto de 2023.

O estudo da variação de sinal dessa função nos permite determinar os instantes em que a temperatura atingiu 0 °C e também os instantes em que esteve negativa ou positiva. Para isso, construímos o gráfico de f.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Analisando o gráfico, observamos que:

- $f(x) = 0 \Rightarrow x = 8$ ou $x = 12$
- $f(x) < 0 \Rightarrow 8 < x < 12$
- $f(x) > 0 \Rightarrow 0 \leqslant x < 8$ ou $12 < x \leqslant 14$.

Assim, concluímos que:

- a temperatura atingiu 0 °C nos instantes 8 h e 12 h após a partida;
- a temperatura esteve negativa após 8 horas e antes de 12 horas do instante de partida;
- a temperatura esteve positiva nos instantes pertencentes à seguinte união de intervalos de tempo, em hora: $[0, 8[\cup]12, 14]$.

Ao analisar esse caso, estudamos a variação de sinal de uma função polinomial do 2º grau em um domínio limitado ($0 \leqslant x \leqslant 14$). Do mesmo modo, podemos estudar a variação de sinal de funções quadráticas de domínio real, conforme mostra o exemplo a seguir.

Exemplo

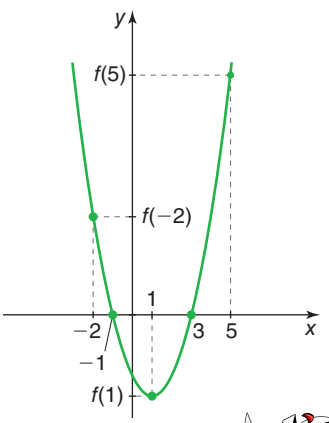
Considere o gráfico da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

A simples leitura do gráfico nos permite afirmar que:

- $f(-2)$ e $f(5)$ são positivas;
- $f(1)$ é negativa;
- $f(-1)$ e $f(3)$ são iguais a zero, pois -1 e 3 são as raízes da função.

Realizando o estudo da variação de sinal de f para todo o domínio real, temos:

- se $x = -1$ ou $x = 3$, então $f(x) = 0$;
- se $x < -1$ ou $x > 3$, então $f(x) > 0$;
- se $-1 < x < 3$, então $f(x) < 0$.

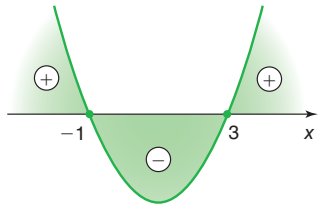


FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

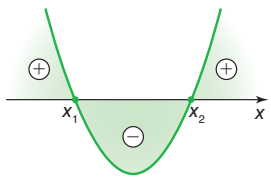
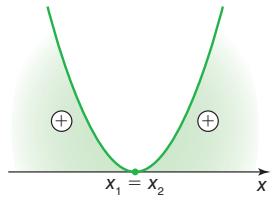
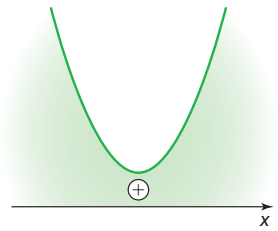
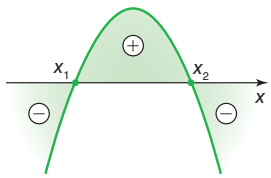
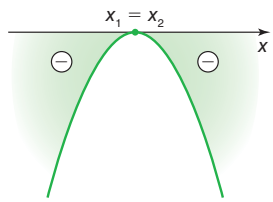
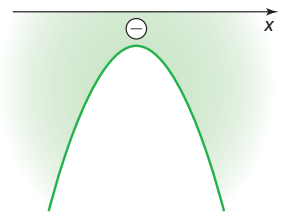
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Refaça na lousa o quadro de sinais que sintetiza a variação de sinal de qualquer função quadrática do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Peça aos estudantes que elaborem exemplos de funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que: f seja positiva para qualquer valor de x; f seja negativa para qualquer valor de x; f tenha duas raízes reais x_1 e x_2 tal que f seja negativa entre as raízes etc.

Podemos representar a variação de sinal da função f, resumidamente, em um esquema:



De maneira geral, a discussão da variação de sinal de uma função quadrática qualquer, $f(x) = ax^2 + bx + c$, de raízes x_1 e x_2, se existirem, recai sempre em um dos casos a seguir:

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

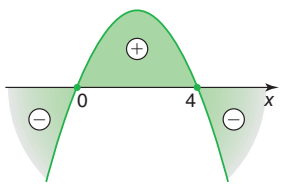
6. Analise a variação de sinal da função:
$f(x) = -x^2 + 4x$

Resolução

Vamos representar a variação de sinal de f em um esquema.

- Determinação das raízes de f:
  $-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(-x + 4) = 0$
  $\therefore x = 0$ ou $-x + 4 = 0$
  $\therefore x = 0$ ou $x = 4$
- Estudo do sinal de f:
  A parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 0 e 4.
  Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a = -1$), a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Assim, esquematizamos:



Logo:

- se $x = 0$ ou $x = 4$, então $f(x) = 0$;
- se $0 < x < 4$, então $f(x) > 0$;
- se $x < 0$ ou $x > 4$, então $f(x) < 0$.

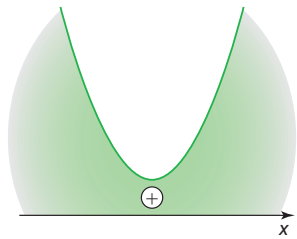
7. Analise a variação de sinal da função:
$f(x) = 2x^2 + 3x + 4$

Resolução

Vamos representar a variação de sinal de f em um esquema.

- Determinação das raízes de f:
  $2x^2 + 3x + 4 = 0$ $\qquad$ $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4$
  $\Delta = b^2 - 4ac$ $\qquad$ $\therefore \Delta = -23$
- Estudo do sinal de f:
  Como $\Delta < 0$, a equação não tem raiz real. Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox.
  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a = 2$), a parábola tem concavidade voltada para cima.

Assim, esquematizamos:



Logo, $f(x) > 0$, para todo x real.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

TRABALHO E JUVENTUDES

Engenheiro civil

O conceito de função polinomial de 2º grau é usado em diferentes profissões, seja para modelar fenômenos físicos, analisar e prever comportamentos de variáveis econômicas ou até mesmo calcular a posição de elementos arquitetônicos.

Para o engenheiro civil que lida com projeto e a construção de edifícios, rodovias, aeroportos, ferrovias, portos, pontes etc., uma aplicação da função polinomial do 2º grau está relacionada a estrutura, por exemplo, ao projetar uma ponte suspensa em que seu formato parabólico faz parte da estrutura de suporte da ponte, além de embelezá-la.



ANGELAMACARIO/ISTOCK/GETTY IMAGES

Ponte Juscelino Kubitschek (Ponte JK), localizada em Brasília (DF). Foto de 2022.

Quer saber mais sobre essa profissão? Faça uma pesquisa na internet e, depois, compartilhe pelas redes sociais um resumo de sua pesquisa.

Peça aos estudantes que leiam o texto sobre profissões, apresentado no boxe **Trabalho e juventudes**, que utiliza o conceito de função polinomial de 2º grau em algumas atividades. Depois, solicite a eles que relatem o que sabem sobre a profissão de engenharia civil. Incentive todos a participar e a argumentar para justificar suas opiniões. Pode-se aprofundar essa conversa inicial propondo aos estudantes que citem habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar engenheiro civil. Após a leitura e a discussão inicial, peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre essa profissão, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-na com os colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

5. Inequações polinomiais do 2º grau

Analisando o projeto de construção de um prédio, o departamento de controle de custos de uma construtora avaliou que, para até 10 andares, o custo médio de construção por andar será de 2 milhões de reais. Se forem construídos mais de 10 andares, o custo médio de construção por andar decresce 0,08 milhão de reais em relação ao custo médio por andar, calculado até a construção do andar imediatamente inferior. Sabendo que a lei de zoneamento do município não permite mais de 18 andares, qual o maior número possível de andares que pode ter o prédio para que o seu custo total não ultrapasse 24 milhões de reais?



GEBER86/SHUTTERSTOCK

Para responder a essa questão, construímos o quadro a seguir, em que x é o número de andares construídos sobre os 10 primeiros andares.

Relação entre número de andares construídos e custo médio por andar

Número de andares construídos	Custo médio por andar (em milhão de reais)
10	2
$10 + 1$	$2 - 0{,}08$
$10 + 2$	$2 - 2 \cdot 0{,}08$
$10 + 3$	$2 - 3 \cdot 0{,}08$
$\vdots$	$\vdots$
$10 + x$	$2 - x \cdot 0{,}08$

Para calcular o número de andares do prédio, que é $(10 + x)$, com $x \leqslant 8$, temos que calcular inicialmente os possíveis valores de x. Para isso, devemos resolver a inequação $(10 + x)(2 - 0{,}08x) \leqslant 24$, que é equivalente a:

$$-0{,}08x^2 + 1{,}2x - 4 \leqslant 0$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sentenças como essa são chamadas de **inequações polinomiais do 2º grau**, que definimos a seguir.

Chama-se **inequação polinomial do 2º grau** toda inequação que pode ser representada sob uma das formas a seguir, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$:

- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \neq 0$
- $ax^2 + bx + c \geqslant 0$
- $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

A resolução de uma inequação polinomial do 2º grau é fundamentada no estudo da variação de sinal de uma função quadrática, conforme mostram os exercícios resolvidos a seguir.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

8. Resolva, no conjunto dos números reais, a inequação $4x^2 - 36 < 0$.

Resolução

Vamos resolver por etapas para facilitar a resolução.

1. Compreender

Inicialmente, vamos identificar o que se pede no exercício e quais as informações apresentadas por ele. Neste caso, o exercício apresenta uma inequação e pede para resolver no conjunto dos números reais.

2. Elaborar um plano

Precisamos pensar e registrar um possível plano para a resolução. Para esta inequação, podemos estudar a variação de sinal da função $f(x) = 4x^2 - 36$ para identificar os valores reais de x para que $f(x) < 0$.

3. Executar o plano

Para executar o plano, vamos determinar as raízes e depois fazer o estudo do sinal de f(x).

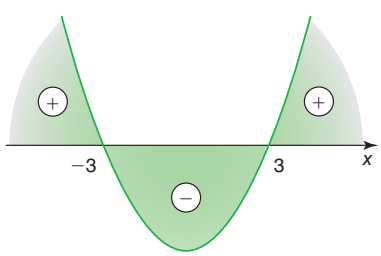
- Determinação das raízes de f:

  $4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 3$

- Estudo do sinal de f:

  A parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -3 e 3. Como o coeficiente de x^2 é positivo, a parábola tem concavidade voltada para cima.

Assim, esquematizamos:



Pelo esquema, observamos que a função é positiva para valores menores que -3 e maiores que 3 e, negativa, para valores entre -3 e 3.

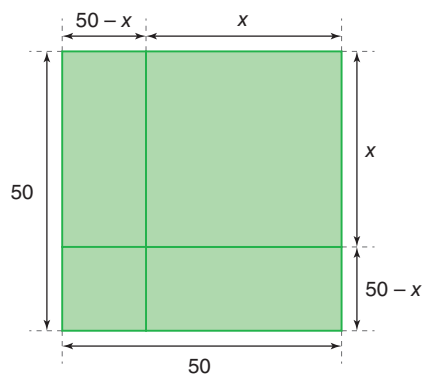
4. Verificar

Analisando a resolução da etapa anterior, percebemos que o conjunto solução S da inequação proposta é formado por todos os valores reais de x para os quais $f(x) < 0$, isto é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$.

9. Um terreno quadrado medindo 50 m de lado será dividido em quatro lotes retangulares, sendo dois deles quadrados. Por especificações do projeto arquitetônico, a área de um dos lotes quadrados deverá ser maior que a soma das áreas dos outros três. Quais são as possíveis medidas x, em metro, do lado do quadrado maior?

Resolução

Esquematizando a situação, temos:



Assim, deve ser obedecida a condição: $x^2 > 50^2 - x^2$, que é equivalente a $2x^2 - 2.500 > 0$.

Resolvendo essa inequação, em $\mathbb{R}$, obtemos:

$$x < -25\sqrt{2} \text{ ou } x > 25\sqrt{2} \quad (1)$$

Porém, no contexto do problema, a variável x deve ser positiva (pois representa uma medida de comprimento) e menor que 50 (medida do lado do terreno), isto é:

$$0 < x < 50 \quad (2)$$

As medidas x que satisfazem simultaneamente às condições (1) e (2) são as possíveis medidas do

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

lado do lote quadrado maior. Assim, concluímos que as possíveis medidas x, em metro, do lado do lote quadrado maior devem ser tais que $25\sqrt{2} < x < 50$.

10. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação-produto:

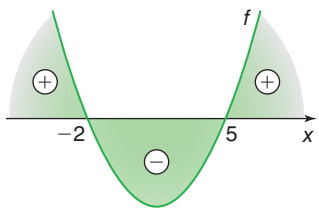
$(x^2 - 3x - 10)(-x^2 + 9) \geqslant 0$

Resolução

Inicialmente, estudamos a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 3x - 10$ e $g(x) = -x^2 + 9$.

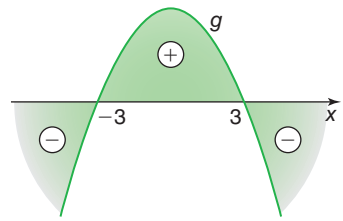
- Determinação das raízes de f:
  $x^2 - 3x - 10 = 0$
  $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$
  $\therefore x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2}$
  $\therefore x = 5$ ou $x = -2$
- Estudo do sinal de f:
  A parábola de equação $f(x) = x^2 - 3x - 10$ intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 5 e -2.
  Como o coeficiente de x^2 é positivo ($a > 0$), essa parábola tem concavidade voltada para cima.

Portanto, a variação de sinal de f é representada por:

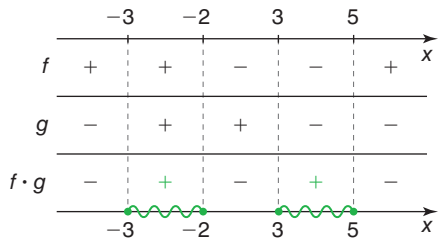


- Determinação das raízes de g:
  $-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$
  $\therefore x = 3$ ou $x = -3$
- Estudo do sinal de g:
  A parábola de equação $g(x) = -x^2 + 9$ intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 3 e -3.
  Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), essa parábola tem concavidade voltada para baixo.

Portanto, a variação de sinal de g é representada por:



- Quadro de sinais:
  Representando a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$ em um quadro de sinais, temos:



Os sinais da última linha foram obtidos pela regra de sinais para o produto $f \cdot g$. Como nos interessa que o produto seja positivo ou nulo, ou seja, $(x^2 - 3x - 10)(-x^2 + 9) \geqslant 0$, temos como conjunto solução:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant -2 \text{ ou } 3 \leqslant x \leqslant 5\}$$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

15. a. $f(x) = 6x$ e $g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$ **15. b.** Resposta no final do livro. **15. c.** Para $g(x) > f(x)$, $x > \frac{4\sqrt{3}}{3}$; para $g(x) < f(x)$, $0 < x < \frac{4\sqrt{3}}{3}$; para $g(x) = f(x)$, $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

13. Analise a variação de sinal de cada uma das funções.

a. $y = -x^2 - 2x + 3$

b. $f(x) = x^2 + 6x - 8$

c. $g(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 3$

d. $h(x) = -\frac{x^2}{4} + x - 1$

e. $f(x) = -3x^2 + 2x - 2$

13. Respostas no final do livro.

14. Para quais valores reais de k a função $f(x) = -2x^2 + x + k - 3$ é negativa para qualquer x real? **14.** $k < \frac{23}{8}$

15. Considere um hexágono regular com lado medindo x, com $x > 0$, e com as medidas do perímetro e da área são expressas, respectivamente, por f e g.

a. Escreva a lei de associação para f e g em função da medida do lado e, depois, classifique cada função.

b. Com o auxílio de um *software* o gráfico, represente no mesmo plano cartesiano os gráficos das funções f e g. As representações gráficas correspondem a funções afins ou quadráticas?

c. Analisando nos gráficos, quais valores de x para que $g(x) > f(x)$, $g(x) < f(x)$ e $g(x) = f(x)$?

16. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a. $x^2 + 3x - 10 > 0$ **16. a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 2\}$

b. $-2x^2 + 7x - 3 \geqslant 0$ **16. b.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$

c. $4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$ **16. c.** $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

d. $\frac{3x^2}{5} - \frac{3x}{2} \leqslant \frac{2x}{5} - 1$ **16. d.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

e. $\frac{x^2}{3} + x > \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{5}{6}$ **16. e.** $S = \varnothing$

f. $(x^2 - 9)(x^2 - 7x + 10) < 0$ **16. f.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

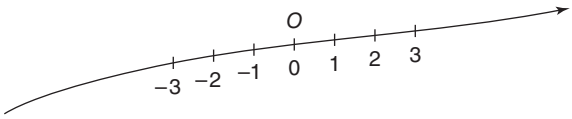
g. $(x^2 - 1)(x^2 + x + 1) \leqslant 0$ **16. g.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

h. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 8} \leqslant 0$ **16. h.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

i. $\frac{(x - 3)(x^2 - 9)}{x^2 - 2x - 3} > 0$ **16. i.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } x > 3\}$

17. Um sistema de coordenadas foi associado à trajetória de um móvel do seguinte modo:

- adotou-se um ponto *O* como origem da trajetória, ao qual se associou o número zero;
- adotou-se um sentido para a trajetória;
- a cada ponto *M* da trajetória, associou-se um número real *s*, chamado espaço, cujo módulo é a distância, em metro, entre o ponto *M* e a origem *O*, ao longo da trajetória;
- o espaço *s* é zero se *M* coincidir com *O*; é positivo se o sentido de *O* para *M* coincidir com o sentido adotado para a trajetória; e é negativo se o sentido de *O* para *M* for contrário ao sentido adotado para a trajetória.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Em relação a esse sistema de coordenadas, a equação $s(t) = t^2 - 5t + 4$ expressa o espaço *s*, em metro, do ponto em que se localiza o móvel no instante *t*, em segundo, com $0 \leqslant t \leqslant 6$.

17. a. Resposta no final do livro.

a. Construam o gráfico da função *s*.

b. Qual era o espaço *s* do ponto no início da medição do tempo? **17. b.** 4 m

17. c. para $t = 1$ e $t = 4$

c. Em que instantes do período de tempo considerado o móvel esteve localizado em pontos de espaço nulo?

d. Em que instantes do período de tempo considerado o móvel esteve localizado em pontos de espaço positivo? **17. d.** para $0 \leqslant t < 1$ e $4 < t \leqslant 6$

e. Em que instantes do período de tempo considerado o móvel esteve localizado em pontos de espaço negativo? **17. e.** para $1 < t < 4$

18. Durante uma viagem, o volume *V* de combustível do tanque de um automóvel decresceu com o passar do tempo *t* de acordo com a função afim:

$V(t) = \left(\frac{k^2 - 4}{k - 3}\right) t + 15$, em que *k* é uma constante real e *V* e *t* estão em unidades compatíveis.

Esse texto permite concluir que a constante *k* é algum valor tal que: **18.** alternativa **b**

a. $-2 \leqslant k < 2$

b. $k < -2$ ou $2 < k < 3$

c. $k < 2$ ou $k > 3$

d. $k < -2$ ou $k > 3$

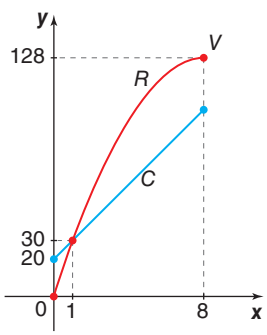
e. $2 < k < 3$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 9 e 10.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Para planejar a produção semanal de determinado xampu fabricado por uma indústria, os técnicos do departamento de planejamento construíram o gráfico a seguir, no qual estão representados um segmento de reta e um arco de parábola de vértice *V* e eixo de simetria vertical. O segmento de reta é o gráfico da função *C*(*x*), que representa o custo semanal de produção, em milhares de reais, de *x* quilolitros do xampu. O arco de parábola é o gráfico da função *R*(*x*), que representa a receita semanal, em milhares de reais, apurada com a venda de *x* quilolitros desse xampu.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Obtenha a lei de associação da função representada pelo gráfico *C*. **1. a.** $C(x) = 10x + 20$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$

b. Obtenha a lei de associação da função representada pelo gráfico *R*. **1. b.** $R(x) = -2x^2 + 32x$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$

c. Considerando que o lucro semanal $L(x)$, em milhares de reais, em função da quantidade *x* de quilolitros de xampu fabricados e vendidos, seja calculado por $L(x) = R(x) - C(x)$, obtenha a lei de associação da função *L*. **1. c.** $L(x) = -2x^2 + 22x - 20$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$

d. Qual é o lucro obtido com a produção e venda em uma semana na qual são produzidos 6 kL de xampu? **1. d.** R$ 40.000,00

2. Usando um aplicativo de desenhos, um triângulo equilátero com lado medindo 1 cm de comprimento é representado na tela de um computador. Aplicando o efeito *zoom*, amplia-se continuamente o triângulo, sem alterar seu formato, até se obter um triângulo equilátero com lado medindo 4 cm de comprimento.

a. Construa o gráfico da função $A(x)$, em que $A(x)$ é a área de um triângulo equilátero representado na tela do computador

b. Construa o gráfico da função $p(x)$, em que $p(x)$ é o perímetro de um triângulo equilátero representado na tela do computador.

2. a. e **b.** Respostas no final do livro.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. c. $x = 4\sqrt{3}$

2. d. No gráfico da função $p(x)$. Espera-se que os estudantes percebam que o perímetro tem variação diretamente proporcional à variação do comprimento do lado do triângulo equilátero, o que não acontece com a área.

c. Considerando as funções obtidas nos itens **a** e **b**, respectivamente, determine o valor de x para que $A(x)$ seja numericamente igual a $p(x)$. (Nesse contexto, a expressão "numericamente igual" significa "desconsiderando as unidades de medida".)

d. Analisando os gráficos dos itens **a** e **b**, em qual deles é possível observar um comportamento proporcional em relação à medida do lado?

3. Em dado momento de uma viagem, o motorista percebeu que a velocidade escalar constante x de seu veículo, em metro por segundo, estava maior que a velocidade máxima permitida na estrada. Por isso pisou no freio, imprimindo uma desaceleração escalar constante de 2 m/s², percorrendo uma distância y, em metro, até que o veículo atingisse a velocidade máxima permitida na estrada, que era de 25 m/s. **3. a.** $y = \frac{x^2}{4} - \frac{625}{4}$

a. Elabore uma equação que expresse a distância y em função da velocidade x. (Sugestão: Use a equação de Torricelli,
$v_f^2 = v_i^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta s$, estudada em Física.)

b. Se quando o motorista acionou o freio o veículo estava a uma velocidade constante de 30 m/s, qual foi a distância percorrida até que o veículo atingisse a velocidade máxima permitida na estrada? **3. b.** 68,75 m

4. Em cada quadro, os números de qualquer linha representam um ponto (x, y) do plano cartesiano xOy.

Quadro A

x	y
-2	12
-1	3
1	3
$\frac{3}{2}$	7

Quadro B

x	y
-3	$\frac{27}{4}$
0	0
2	3
4	12

Quadro C

x	y
0	0
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{3}{4}$
4	1

a. Analise a relação de cada valor de x e seu correspondente valor de y de cada quadro. Você percebe alguma relação entre esses valores? **4. a.** Resposta pessoal.

b. Considerando os valores de cada quadro, em qual ou quais desses quadros todos os pontos (x, y) pertencem a uma mesma equação $y = kx^2$, em que k é uma constante real não nula? **4. b.** Quadro B

c. Represente no plano cartesiano os pontos de cada quadro.

d. Escreva, para cada quadro, a equação que representa os valores de x e seu correspondente valores para y.

e. No mesmo plano cartesiano que você representou os pontos do item *c*, trace agora o gráfico da equação da parábola.

4. c. Resposta no final do livro.

4. d. Quadro A: não possui; Quadro B: $y = \frac{3x^2}{4}$; Quadro C: $y = \frac{x}{4}$

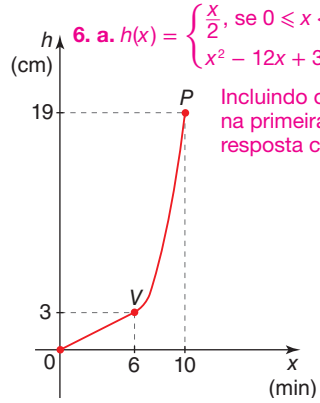
4. e. Resposta no final do livro.

5. Esboce o gráfico das funções. **5.** Respostas no final do livro.

a. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leqslant 2 \\ -x^2 + 6x - 8, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

b. $t(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x \leqslant 2 \\ 3, \text{ se } 2 < x \leqslant 4 \\ x^2 - 8x + 19, \text{ se } x > 4 \end{cases}$

6. Uma torneira encheu um reservatório de água em 10 minutos. O gráfico representa a altura h, em centímetro, do nível da superfície da água no reservatório em função do tempo x, em minuto, a partir do instante em que foi aberta a torneira.



6. a. $h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ se } 0 \leqslant x < 6 \\ x^2 - 12x + 39, \text{ se } 6 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases}$

Incluindo o número 6 na primeira sentença, a resposta continuaria certa.

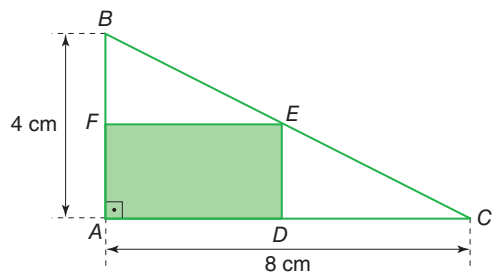
Dado que o gráfico é formado por um segmento de reta, $\overline{OV}$, e por um arco de parábola (de V a P) de vértice V e eixo de simetria vertical:

a. obtenha a lei de associação que expressa h em função de x;

b. calcule a altura h depois de 5 minutos de ser aberta a torneira; **6. b.** 2,5 cm

c. calcule a altura h depois de 8 minutos de ser aberta a torneira. **6. c.** 7 cm

7. Um triângulo ABC, retângulo em A, possui os catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medindo, respectivamente, 4 cm e 8 cm. Um retângulo $ADEF$ é inscrito nesse triângulo, de modo que os pontos D, E e F pertençam, respectivamente, aos lados $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{AB}$. Calcule a área máxima que pode ter esse retângulo. **7.** 8 cm²

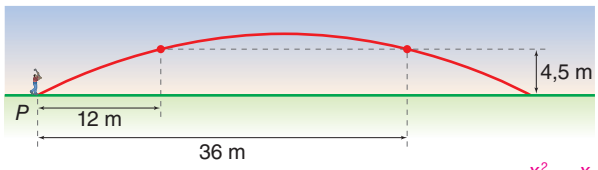


(*Sugestões*: Faça $EF = x$; pela semelhança entre os triângulos ABC e DEC, determine, em função de x, a medida do lado $\overline{DE}$; calcule a área S do retângulo em função de x.)

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8. Uma bola de golfe foi tacada a partir de um ponto *P* do terreno plano e horizontal, percorrendo uma trajetória parabólica. Nos dois instantes em que a bola esteve a 4,5 m de altura em relação ao terreno, sua projeção ortogonal sobre o solo esteve a uma distância de 12 m e 36 m do ponto *P*, respectivamente.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

8. a. $y = -\frac{x^2}{96} + \frac{x}{2}$

a. Considere um sistema cartesiano de eixos associado ao plano da trajetória da bola tal que: o ponto *P* coincida com a origem *O* do sistema; a unidade adotada nos eixos seja o metro; a parábola que contém a trajetória da bola tenha a concavidade voltada para o sentido negativo do eixo *Oy*; e o sentido do eixo *Ox* seja de *P* para o ponto em que a bola se chocou com o solo após a tacada. Em relação a esse sistema, determine a equação da parábola que contém a trajetória da bola. **8. b.** 6 m

b. Calcule a altura máxima atingida pela bola.

c. Calcule a distância entre o ponto *P* e o ponto em que a bola se chocou com o terreno após a tacada. **8. c.** 48 m

9. Em um mês de 30 dias, em certo país, os valores *E* e *I*, em milhão de dólares, das exportações e importações, respectivamente, acumulados até o dia *t*, podem ser descritos pelas funções $E(t) = \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4}$ e $I(t) = 3t$. Considerando o valor da balança comercial até o final de cada dia, responda às questões.

a. Durante quantos dias desse mês a balança comercial desse país esteve em déficit? **9. a.** 21 dias

b. Em algum dia desse mês a balança comercial desse país esteve em superávit acima dos 13 milhões de dólares? Em caso afirmativo, quais foram esses dias? **9. b.** Sim, do 27º dia ao 30º dia.

(**Nota:** A balança comercial de um país, em determinado período, é a diferença entre o valor monetário total das exportações e o das importações, nessa ordem.)

10. Uma única dose de medicamento foi injetada na circulação sanguínea de um paciente. A concentração *C* desse medicamento no sangue do paciente, em miligrama por litro, em função do tempo *t*, em hora, a partir do instante em que foi injetado, pode ser calculada pela função:

$$C(t) = \frac{t}{t^2 + 7}$$

Durante quantas horas, após a injeção, a concentração do medicamento na circulação sanguínea será de pelo menos 0,125 mg/L? **10.** 6 horas

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

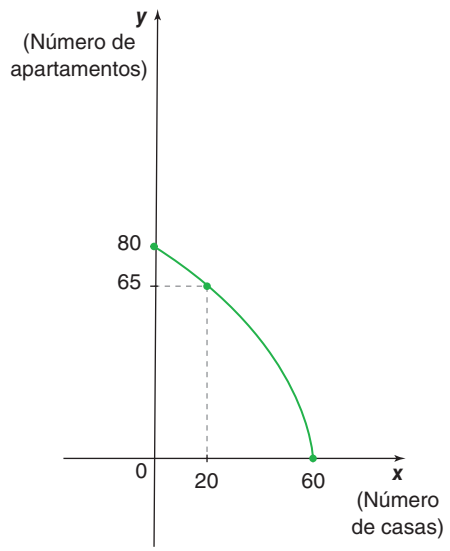
Curva de possibilidades de produção

Uma construtora destinou determinada verba para a construção de casas ou de apartamentos. O dinheiro pode ser empregado apenas na construção de um dos dois, ou ainda uma parte para a construção de casas e a outra para a de apartamentos.



DMITRII IARUSOV/SHUTTERSTOCK

Após o estudo das possibilidades de construção com os recursos disponíveis, a construtora obteve o gráfico a seguir, em que cada ponto (x, y) da curva representa, aproximadamente, o número *x* de casas e o número *y* de apartamentos que podem ser construídos com toda a verba disponível.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Significa que a verba disponível é insuficiente para a construção de 20 casas e 90 apartamentos, pois, pelo gráfico, com a construção de 20 casas é possível construir o máximo de 65 apartamentos.

Em Economia, esse gráfico é chamado de **curva de possibilidades de produção** e pode ser aproximado por um arco da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são constantes reais, com $a \neq 0$.

Para determinar os valores de a, b e c, observamos que o arco parabólico passa pelos pontos (0, 80), (20, 65) e (60, 0). Substituindo as variáveis x e y da equação pelas coordenadas de cada um desses pontos, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 80 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 65 = a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + c, \\ 0 = a \cdot 60^2 + b \cdot 60 + c \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} c = 80 \\ 400a + 20b + c = 65 \\ 3.600a + 60b + c = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a = -\frac{7}{480}$, $b = -\frac{11}{24}$ e $c = 80$.

Assim, a curva de possibilidades de produção é, aproximadamente, um arco da parábola de equação:

$$y = -\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

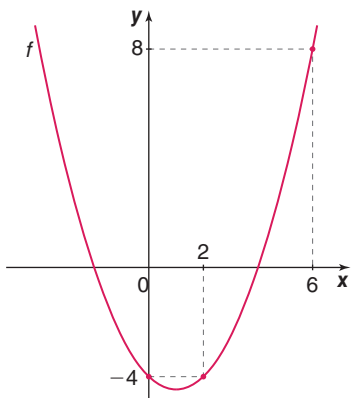
1. De acordo com o texto, qual é o número máximo de apartamentos que podem ser construídos se forem construídas 48 casas?
Matemática sem fronteiras: 1. 24 apartamentos
2. Observando o gráfico, constatamos que o ponto (20, 50) está abaixo da curva de possibilidades de produção. Isso significa que, com o montante disponível, construindo 20 casas e 50 apartamentos sobra verba, pois, com a construção de 20 casas, poderíamos construir o máximo de 65 apartamentos.

   Pelo gráfico, constata-se que o ponto (20, 90) está acima da curva. O que isso significa no contexto da situação apresentada?
3. Caso a construtora decida investir mais verba para a construção de casas e apartamentos, o que acontecerá com a curva de possibilidades de produção? **3.** Resposta pessoal.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 7

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

A parábola a seguir representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Com base na parábola, faça o que se pede nos exercícios 1 e 2.



1. Os valores das constantes reais a, b e c são: **1.** alternativa **e**

a. $a = -4$; $b = -1$; $c = \frac{1}{2}$

b. $a = -1$; $b = -4$; $c = \frac{1}{2}$

c. $a = \frac{1}{2}$; $b = -4$; $c = -1$

d. $a = -\frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = 4$

e. $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$; $c = -4$

Na seção **Verifique o que aprendeu no capítulo 3**, propomos uma avaliação e a elaboração de um mapa conceitual como ferramenta de estudo. Oriente os estudantes a fazer essas atividades com atenção e, caso encontrem dificuldades, incentive-os a revisitar os conteúdos estudados para reforçar a compreensão.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RACICART/ARQUIVO DA EDITORA

2. O ponto que representa o vértice V da parábola é: **2.** alternativa **b**

a. $V = (1, \frac{9}{2})$

b. $V = (1, -\frac{9}{2})$

c. $V = (\frac{9}{2}, 1)$

d. $V = (-1, \frac{9}{2})$

e. $V = (-1, -\frac{9}{2})$

3. Assinale a alternativa que apresenta o domínio e o conjunto imagem da função: **3.** alternativa **d**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, \text{ se } x \leqslant 5 \\ -2x + 17, \text{ se } x > 5 \end{cases}$$

a. $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) =]-4, +\infty]$

b. $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) =]7, -\infty[$

c. $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, 5]$

d. $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

e. $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-4, 7[$

4. Qual alternativa apresenta o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação-quociente $\frac{x^2 - 6x + 8}{3x - 6} \leqslant 0$. **4.** alternativa **a**

a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4 \text{ e } x \neq 2\}$

b. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4 \text{ e } x \neq 2\}$

c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$

d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$

e. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4\}$

5. Uma indústria têxtil vende diariamente 800 m² de certo tipo de tecido para sacaria ao preço de R$ 10,00 o metro quadrado. Uma pesquisa de mercado revelou que para cada desconto de R$ 0,04 por metro quadrado desse tecido haveria um acréscimo diário de 5 m² nas vendas. Considerando essa pesquisa, o departamento de vendas da indústria estabeleceu o preço por metro quadrado desse tecido para que a receita diária arrecadada com sua venda fosse máxima. Qual foi o preço estabelecido por metro quadrado desse tecido? **5.** alternativa **c**

a. R$ 8,00

b. R$ 8,10

c. R$ 8,20

d. R$ 8,50

e. R$ 8,80

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa de forma gráfica as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos. A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

1. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

2. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.

3. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se tiver dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte.

Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 8

Função modular

OBJETO DIGITAL Mapa clicável: Patrimônios da Humanidade no Brasil

Existem algumas cidades abaixo do nível do mar no mundo e Baku é uma delas. O desafio enfrentado por essas cidades inclui lidar com inundações frequentes e a necessidade de sistemas de drenagem eficientes para evitar danos causados pela água.

Baku é a capital do Azerbaijão e possui uma costa ao longo do Mar Cáspio, e está situada a altitude média de 28 m abaixo do nível do mar. Um dos lugares de destaque dessa cidade é a Icherisheher ou Zona Antiga, constituída de ruas empedradas estreitas e de edifícios históricos que formam um verdadeiro labirinto e é tida como **Patrimônio da Humanidade** pela Unesco.

Além das construções históricas, Baku se destaca por construções modernas. A avenida Nizami, por exemplo, é considerada o epicentro moderno de Baku com prédios de arquiteturas inovadoras que incorporam formas curvilíneas.



1STUDIO.AZ/SHUTTERSTOCK

Vista aérea da avenida Nizami em Baku, capital do Azerbaijão. Foto de 2021.

Comente com os estudantes sobre Patrimônios da Humanidade e incentive uma pesquisa a respeito de patrimônios da humanidade no Brasil. Aproveite o **Mapa clicável: Patrimônios da Humanidade no Brasil** e comente que, até 2024, 17 estados brasileiros possuíam atrativos desse tipo, sendo alguns exemplos o Centro Histórico de Olinda (PE) e o Complexo de Conservação da Amazônia Central (AM).

No item **3** do **Além da teoria**, a distância vertical, em metro, percorrida pelo helicóptero é dada por: 800 – (–28) = 828.

Além da teoria

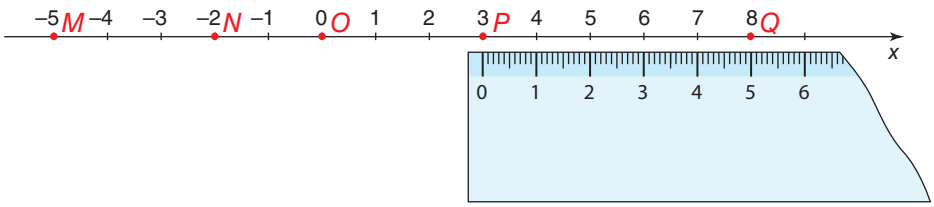
1. Você conhece outros Patrimônios da Humanidade? Pesquise a esse respeito e acerca de Icherisheher. **1.** Resposta pessoal.
2. Você sabe qual é a altitude média do município onde reside? Se não souber, pesquise para obter esse dado. **2.** A resposta depende do local onde os estudantes residem.
3. Um helicóptero que esteja a 800 m de altitude e pouse na praia do Mar Cáspio desloca-se a que distância vertical nesse processo de descida? **3.** 828 m

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Explore mais o exemplo introdutório com perguntas do tipo:
• Se a distância de um ponto R à origem O é 6 cm, quais são as possíveis abscissas de R? (6 ou –6)
• Se a distância de um ponto S à origem O é menor que 6 cm, quais são as possíveis abscissas de S? ($-6 < x < 6$)
• Se a distância de um ponto T à origem O é maior que 6 cm, quais são as possíveis abscissas de T? ($x < -6$ ou $x > 6$)
Enfatize que, de acordo com a definição, a distância d entre dois pontos do eixo real é um número positivo ou nulo ($d \geq 0$).

1. Distância entre dois pontos do eixo real

No eixo real representado a seguir, no qual a unidade de medida de comprimento adotada é o centímetro, destacamos os pontos M, N, O, P e Q de abscissas -5, -2, 0, 3 e 8, respectivamente. Qual é a distância, em centímetro, entre os pontos P e Q?



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Para responder a essa pergunta, podemos usar uma régua graduada e constatar que a distância entre P e Q é 5 cm.

Poderíamos calcular essa distância, sem usar a régua, efetuando $8 - 3 = 5$, isto é, a abscissa de Q menos a abscissa de P.

Analogamente, calculamos:

- a distância entre O e Q, efetuando $8 - 0 = 8$;
- a distância entre N e P, efetuando $3 - (-2) = 5$;
- a distância entre M e N, efetuando $-2 - (-5) = 3$.

Observe, portanto, que a distância entre dois pontos distintos do eixo real é a diferença entre as abscissas desses dois pontos: a maior menos a menor.

Observação

Se dois pontos são coincidentes, então a distância entre eles é zero.

Sejam A e B dois pontos do eixo real com abscissas x_A e x_B, respectivamente, com $x_B \geqslant x_A$.



Chama-se **distância** entre os pontos A e B, que indicaremos por d_{AB} ou d_{BA}, a diferença $x_B - x_A$:

$$d_{AB} = x_B - x_A$$

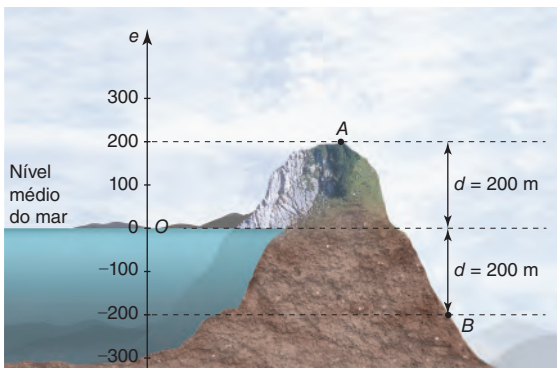
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Notas:

1. Observe, na definição, que $x_B \geqslant x_A$; logo, $x_B - x_A \geqslant 0$, isto é, a distância entre dois pontos é um número real positivo ou nulo.
2. A distância entre os pontos A e B também pode ser indicada por AB ou por BA.

2. Módulo, equações e inequações modulares

Módulo de um número real



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Considere o metro a unidade de medida em um eixo real vertical e, orientado para cima, tal que a origem O seja um ponto do nível médio do mar. Chama-se **altitude** de um ponto a abscissa desse ponto no eixo e. Por exemplo, na figura, a altitude do ponto A é 200 m, e a altitude de B é -200 m. Note que a distância d entre cada um desses pontos e o nível médio do mar é a mesma, 200 m, porém A está acima do nível médio do mar e B está abaixo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Se um ponto C estiver a uma altitude x, em metro, qual será a distância entre C e o nível médio do mar?

Como a medida da distância deve ser representada por um número não negativo, devemos analisar as duas possibilidades: C está no nível do mar ou acima dele, isto é, $x \geqslant 0$; ou C está abaixo do nível do mar, isto é, $x < 0$.

I. Se $x \geqslant 0$, então a distância entre C e o nível médio do mar é a própria medida x; por exemplo, se a altitude do ponto C é 50 m, a distância entre C e o nível do mar é a própria medida 50 m.

II. Se $x < 0$, então a distância entre C e o nível médio do mar, em metro, é $-x$ (note que, nesse caso, $-x$ representa um número positivo, pois x representa um número negativo); por exemplo, se a altitude do ponto C é -50 m, a distância entre C e o nível do mar é $-(-50)$ m, ou seja, 50 m.

Resumindo, a distância d entre o ponto C e o nível médio do mar é dada por:

$$d = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Observação

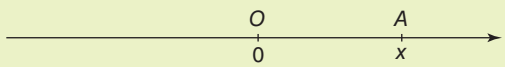
Note que $|x|$ é a distância entre dois pontos; logo, $|x|$ é um número positivo ou nulo para qualquer número real x.

Essas duas sentenças que descrevem a distância d podem ser sintetizadas em uma única sentença:

$$d = |x|$$

que é lida como "d é igual ao módulo de x".
A seguir, definimos esse conceito.

Consideremos, no eixo real de origem O, um ponto A de abscissa x.



Chama-se **módulo** de x, que indicaremos por $|x|$, a distância entre os pontos A e O.

Exemplos

a. 

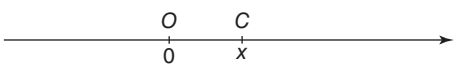
$|5| = d_{AO} = 5 - 0 \Rightarrow |5| = 5$

b. 

$|-5| = d_{BO} = 0 - (-5) \Rightarrow |-5| = 5$

c. 

$|0| = d_{OO} = 0 - 0 \Rightarrow |0| = 0$

d. 

sendo $x > 0$, temos:
$|x| = d_{CO} = x - 0 \Rightarrow |x| = x$

e. 

sendo $x < 0$, temos:
$|x| = d_{DO} = 0 - x \Rightarrow |x| = -x$

(*Atenção*: no item **e**, o número $-x$ é positivo, pois x representa um número negativo.)

Os exemplos **c**, **d** e **e** podem ser resumidos para qualquer número real x pela seguinte definição:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Exemplos

a. $|9| = 9$, pois, por definição, o módulo de um número positivo é o próprio número.

b. $|0| = 0$, pois, por definição, o módulo de zero é o próprio zero.

c. $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$, pois, por definição, o módulo de um número negativo é o oposto desse número.

d. $\left|\sqrt{7} - 2\right| = \sqrt{7} - 2$, pois, como $\sqrt{7} > 2$, temos $\sqrt{7} - 2 > 0$; e o módulo de um número positivo é o próprio número.

e. $\left|\sqrt{7} - 5\right| = 5 - \sqrt{7}$, pois, como $\sqrt{7} < 5$, temos $\sqrt{7} - 5 < 0$; e o módulo de um número negativo é o oposto desse número.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das sentenças a seguir.

a. $|7| = 7$ **1. a.** verdadeira

b. $|0| = 0$ **1. b.** verdadeira

c. $|-3| = 3$ **1. c.** verdadeira

d. $\left|\sqrt{3} - 2\right| = \sqrt{3} - 2$ **1. d.** falsa

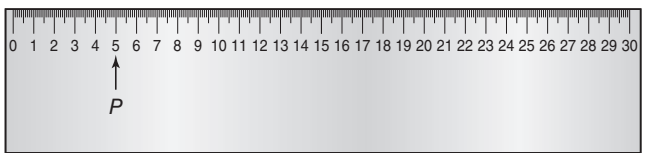
e. $\left|\sqrt{3} - 2\right| = 2 - \sqrt{3}$ **1. e.** verdadeira

f. $\left|-3 - \sqrt{7}\right| = \left|3 + \sqrt{7}\right|$ **1. f.** verdadeira

g. $\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| + \sqrt{2} = \sqrt{3}$ **1. g.** verdadeira

h. $\left|\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{5}\right| - \left|\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{9}\right| = 2\sqrt[3]{9}$ **1. h.** falsa

2. A figura mostra um ponto P associado ao traço correspondente à medida 5 cm de uma régua graduada.



Associando um segundo ponto Q ao traço correspondente à medida x cm dessa régua, qual das alternativas representa a distância PQ, em centímetro?

2. alternativa **c**

a. $5 - x$

b. $x - 5$

c. $|x - 5|$

d. $|x| - 5$

e. $x + 5$

3. Sendo a um número real não negativo e n um número natural não nulo, define-se $\sqrt[n]{a}$, no conjunto dos números reais, da seguinte maneira:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ se, e somente se, } b^n = a \text{ e } b \geqslant 0$$

Por exemplo:

$$\sqrt{9} = b \text{ se, e somente se, } b^2 = 9 \text{ e } b \geqslant 0$$

Logo: $\sqrt{9} = 3$.

Note que, embora $(-3)^2$ também seja igual a 9, o número -3 não obedece à condição $b \geqslant 0$; por isso, -3 não é a raiz quadrada de 9 no conjunto dos reais.

De acordo com essa definição, classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. $\sqrt{x^2} = x$, para qualquer número real x. **3. a.** falsa

b. $\sqrt{x^2} = x$, para qualquer número real não negativo x. **3. b.** verdadeira

c. $\sqrt{x^2} = x$, para qualquer número real negativo x. **3. c.** falsa

d. $\sqrt{x^2} = |x|$, para qualquer número real x. **3. d.** verdadeira

e. $\sqrt[4]{x^4} = x$, para qualquer número real x. **3. e.** falsa

4. Dado que $x \in [4, 8]$, junte-se a um colega e calculem o valor de cada uma das expressões:

a. $A = |x - 9| + |x - 2|$ **4. a.** $A = 7$

b. $B = \frac{|x - 10|}{x - 10}$, com $x \neq 10$ **4. b.** $B = -1$

5. Construa um fluxograma que permita determinar um módulo de um número.

5. Resposta no final do livro

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 3.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Propriedades do módulo

P1. Para qualquer número real x, temos: $|x| \geqslant 0$
P2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
P3. Sendo d um número real positivo: $|x| = d \Leftrightarrow x = \pm d$

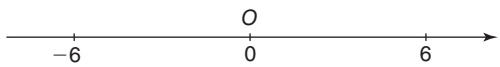
A propriedade P1 decorre imediatamente da definição de módulo, pois, sendo uma distância entre dois pontos, o módulo de um número real é positivo ou nulo.

A propriedade P2 decorre do fato de existir um único ponto do eixo real que dista zero unidade da origem O. É o próprio ponto O.

A propriedade P3 decorre do fato de que, no eixo real, apenas os pontos associados aos números opostos d e $-d$, com d real positivo, distam igualmente d unidades da origem O.

Exemplo

Vamos determinar os números reais x tais que $|x| = 6$. Os pontos associados a esses números, no eixo real, distam 6 unidades da origem O; logo, os números são 6 e -6. Observe:



$|x| = 6 \Leftrightarrow x = \pm 6$

P4. Para quaisquer números reais x e y: $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$

A justificativa da propriedade P4 é análoga à da anterior: sendo números de mesmo módulo, x e y estão à mesma distância da origem O do eixo real; logo, esses números ou são iguais ou são opostos.

Exemplo

$|2x + 1| = |x - 1| \Leftrightarrow 2x + 1 = x - 1$ ou $2x + 1 = -x + 1$.

Portanto: $x = -2$ ou $x = 0$.

P5. Para quaisquer números reais x e y: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Ou seja, o módulo do produto de dois números é igual ao produto dos módulos desses números.

Podemos justificar essa propriedade observando que:

- se x é um número real positivo ou nulo: $\sqrt{x^2} = x$
- se x é um número real negativo: $\sqrt{x^2} = -x$

Assim, para qualquer número real x, temos: $\sqrt{x^2} = |x|$

Aplicando essa última relação, temos:

$$|x \cdot y| = \sqrt{(x \cdot y)^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$$

Observação

A propriedade P5 pode ser estendida para uma multiplicação com mais de dois fatores.

Exemplos

a. $|-3 \cdot 4| = |-3| \cdot |4| = 3 \cdot 4 = 12$
b. $|2x| = |2| \cdot |x| = 2|x|$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

P6. Para quaisquer números reais x e y, com $y \neq 0$: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Ou seja, o módulo do quociente de dois números é igual ao quociente dos módulos desses números.

Vamos justificar a propriedade P6 de modo análogo à justificativa da propriedade anterior. Temos:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$$

Exemplos

a. $\left|\frac{-7}{2}\right| = \frac{|-7|}{|2|} = \frac{7}{2}$

b. $\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{|x|}{|2|} = \frac{|x|}{2}$

Reflexão

Dê um contraexemplo que justifique por que a propriedade P7 não vale para n ímpar.

Reflexão: $|-3|^3 = 3^3 = 27$ e $(-3)^3 = -27$

P7. Dado um número real x e um número natural n: $|x|^n = x^n \Leftrightarrow n$ é um número natural par.

Note que essa propriedade decorre imediatamente de P5, pois:

- para $n = 0$, temos $|x|^0 = 1 = x^0$;
- para n natural par e $n \neq 0$, temos:

$$|x|^n = \underbrace{|x| \cdot |x| \cdot |x| \cdot \ldots \cdot |x|}_{n \text{ fatores}} = |x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x| = |x^n| \qquad \text{(I)}$$

(extensão de P5)

Como n é par, temos $x^n \geqslant 0$; logo: $|x^n| = x^n$ (II)

Por (I) e (II), concluímos que: $|x|^n = x^n$, para n natural par.

Nota:

Lembrando que $|x|^{-k} = \frac{1}{|x|^k}$, para qualquer número inteiro k e qualquer número real x não nulo, podemos estender a P7 da seguinte maneira:

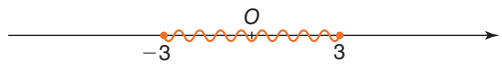
$$|x|^k = x^k \Leftrightarrow k \text{ é um número inteiro par.}$$

P8. Para qualquer número real positivo d: $|x| \leqslant d \Leftrightarrow -d \leqslant x \leqslant d$

A justificativa para a propriedade P8 pode ser: os pontos do eixo real que distam, no máximo, d unidades da origem O são somente aqueles de abscissas pertencentes ao intervalo $[-d, d]$.

Exemplo

Vamos determinar todos os números reais x tais que $|x| \leqslant 3$. Esses números devem distar, no máximo, 3 unidades da origem O do eixo real. Então, esses números pertencem ao intervalo $[-3, 3]$, como representado a seguir.



Assim: $|x| \leqslant 3 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 3$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

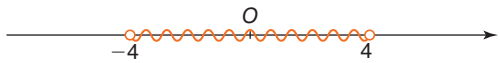
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

P9. Para qualquer número real positivo d: $|x| < d \Leftrightarrow -d < x < d$

A justificativa para a propriedade P9 é similar à da propriedade P8.

Exemplo

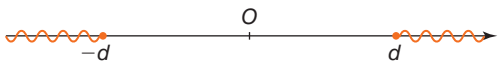
Vamos determinar todos os números reais x tais que $|x| < 4$. Em relação à origem O do eixo real, esses números devem ficar a uma distância menor que 4. Então, esses números pertencem ao intervalo $]-4, 4[$. Observe:



Assim: $|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4$

P10. Para qualquer número real positivo d: $|x| \geqslant d \Leftrightarrow x \leqslant -d$ ou $x \geqslant d$

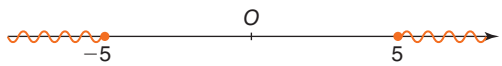
Podemos justificar a propriedade P10 do seguinte modo: os números reais x tais que $|x| \geqslant d$ são aqueles que distam, no mínimo, d unidades da origem O do eixo real. Esses números são todos os que pertencem à seguinte união de intervalos: $]-\infty, -d] \cup [d, +\infty[$



Neste momento, retome com os estudantes o significado do símbolo ∞. É o símbolo que representa o infinito.

Exemplo

Vamos determinar todos os números reais x tais que $|x| \geqslant 5$. Esses números devem distar, no mínimo, 5 unidades da origem O do eixo real. Então, esses números pertencem à seguinte união de intervalos: $]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$



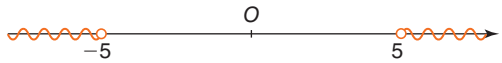
Assim: $|x| \geqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant -5$ ou $x \geqslant 5$

P11. Para qualquer número real positivo d: $|x| > d \Leftrightarrow x < -d$ ou $x > d$

Podemos justificar a propriedade P11 de modo similar ao da justificativa dada para a propriedade anterior.

Exemplo

Vamos determinar todos os números reais x tais que $|x| > 5$. Esses números devem distar, da origem O do eixo real, mais do que 5 unidades. Então, esses números pertencem à seguinte união de intervalos: $]-\infty, -5[\cup]5, +\infty[$



Assim: $|x| > 5 \Leftrightarrow x < -5$ ou $x > 5$

Reflexão:
Sim, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Reflexão

Há alguma propriedade que relacione o módulo da soma de dois números reais com a soma dos módulos desses números?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Com base na discussão dos exemplos introdutórios (altitude do avião e pressão interna do pneu), defina equação e inequação modular.
A resolução de equações e inequações modulares pode ser estudada por meio dos **exercícios resolvidos 2** a **5** (da próxima página), que apresentam todos os tipos de equação e inequação modulares exploradas no livro do estudante.

Equações modulares



SANDI SMOLKER/ISTOCK/GETTY IMAGES

Um piloto voava a 1.800 m de altitude quando recebeu instruções para alterá-la. Obedecendo às orientações, ele alterou em 300 m a altitude da aeronave. A qual nova altitude ele passou a voar?

Um avião monomotor que pode atingir até 4.120 m de altitude.

Traduzimos a relação entre as altitudes para a linguagem matemática, indicando por x a nova altitude, em metro, e considerando as duas hipóteses seguintes:

- se $x > 1.800$, então $x - 1.800 = 300$;
- se $x < 1.800$, então $1.800 - x = 300$.

Observe que, usando o conceito de módulo de um número real, essas duas hipóteses podem ser sintetizadas em uma única equação:

$$|x - 1.800| = 300$$

ou, de modo equivalente:

$$|1.800 - x| = 300$$

Equações como essa, que apresentam o módulo de pelo menos uma expressão que tenha a incógnita, são chamadas de **equações modulares**.

Exemplos

a. $|31 - x| = 65$

b. $|4x - 12| = |x^2 - 9|$

c. $3x^2 + 5|x| - 1 = 0$

d. $\frac{1}{2} + x = |x - 1|$

Inequações modulares

Observação

Para entender o que é 1 *psi*, imagine um corpo de 1 libra (0,45 kg, aproximadamente), sujeito apenas à força da gravidade, apoiado sobre uma superfície horizontal cuja área é 1 polegada quadrada (6,45 cm^2, aproximadamente). A pressão exercida por esse corpo sobre essa superfície é de 1 *psi*.

Durante uma viagem, a pressão interna p do pneu de um automóvel variou de 30 a 34 *psi* (*pound force per square inch*), devido à variação da temperatura. Assim, calculando a média aritmética entre essas duas medidas, $\frac{30 + 34}{2} = 32$, temos que a pressão p, em *psi*, em qualquer momento da viagem, esteve sob uma das seguintes condições:

- se $p \geqslant 32$, então $p - 32 \leqslant 2$;
- se $p < 32$, então $32 - p \leqslant 2$.

Essas condições também podem ser descritas por meio do conceito de módulo de um número real, que sintetiza as duas condições em uma única inequação: $|p - 32| \leqslant 2$, ou, de maneira equivalente, $|32 - p| \leqslant 2$.

Inequações como essa, que apresentam o módulo de pelo menos uma expressão contendo a incógnita, são chamadas de **inequações modulares**.

Exemplos

a. $|-x + 17| < 10$

b. $\frac{3}{10} + x \geqslant \left|2x - \frac{1}{2}\right|$

c. $\left|2x^2 + \sqrt{2}\right| > |x|$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Antes da discussão do **exercício resolvido 5**, revise as definições de intersecção e união de conjuntos. Reforce que no item **a**, o conectivo "e" indica a intersecção dos conjuntos solução de (I) e (II); no item **b**, o conectivo "ou" indica a união dos conjuntos solução de (I) e (II).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|x-3|=4$.

Resolução

Pela propriedade P3, sabemos que existem dois, e somente dois, números reais cujo módulo é igual a 4. São eles: 4 e -4. Logo, temos:

$$|x-3|=4 \Rightarrow x-3=4 \text{ ou } x-3=-4$$

$$\therefore\ x=7 \text{ ou } x=-1$$

Portanto: $S=\{7,-1\}$

2. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $|x+5|=2x-1$.

Resolução

Pela propriedade P1, impomos a condição de existência: $2x-1\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant \frac{1}{2}$

Pela propriedade P3, temos:

$$|x+5|=2x-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+5=2x-1 \text{ ou } x+5=-2x+1$$

$$\therefore\ x=6 \text{ ou } x=-\frac{4}{3}$$

Observando que apenas $x=6$ satisfaz a condição de existência, concluímos que o conjunto solução é $S=\{6\}$.

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $x^2-3|x|-4=0$.

Resolução

Pela propriedade P7, temos: $x^2=|x|^2$. Logo, a equação pode ser escrita na forma:

$$|x|^2-3|x|-4=0$$

Fazendo $|x|=t$, temos:

$$t^2-3t-4=0 \Rightarrow t=4 \text{ ou } t=-1$$

Assim: $|x|=4 \Rightarrow x=\pm 4$; ou $|x|=-1$.

Como não existe x real com $|x|=-1$, concluímos que $S=\{4,-4\}$.

4. Em uma prova ciclística, todos os participantes largaram simultaneamente, lado a lado, em um mesmo sentido da pista. As distâncias, d_{I}, d_{II} e d_{III}, em metro, percorridas durante a prova por três ciclistas, I, II e III, respectivamente, podem ser expressas em função do tempo t, em minuto, pelas equações: $d_{\text{I}}=600t$, $d_{\text{II}}=650t$ e $d_{\text{III}}=4t^2+500t$. Sabendo que a prova durou mais de 50 min, podemos concluir que, após a largada, o número de vezes em que a distância, ao longo da pista, entre os corredores I e II foi igual à distância entre os corredores II e III é:

a. 1 **c.** 3 **e.** 5

b. 2 **d.** 4

Resolução

Em qualquer instante da prova, a distância entre os corredores I e II é $|650t-600t|$ e a distância entre II e III é $|4t^2+500t-650t|$. Assim, devemos ter:

$$|650t-600t|=|4t^2+500t-650t| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |50t|=|4t^2-150t|$$

$$\therefore\ 50t=4t^2-150t \text{ ou } 50t=-4t^2+150t$$

$$\therefore\ 4t^2-200t=0 \text{ ou } 4t^2-100t=0$$

$$\therefore\ t=0 \text{ ou } t=50 \text{ ou } t=25$$

Como devemos considerar os instantes após a largada, não nos interessa o instante $t=0$. Assim, a distância entre os corredores I e II foi igual à distância entre II e III nos instantes 25 min e 50 min após a largada.

Logo, a alternativa **b** é a correta.

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações a seguir.

a. $|4x-3|\leqslant 13$ **b.** $|5x+1|>21$

Resolução

a. Pela propriedade P8, temos:

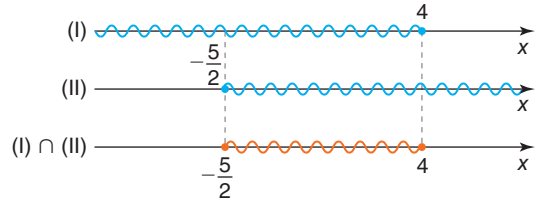
$$|4x-3|\leqslant 13 \Leftrightarrow -13\leqslant 4x-3\leqslant 13$$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$$4x-3\leqslant 13 \text{ e } 4x-3\geqslant -13$$

$$\therefore\ x\leqslant 4 \text{ (I) e } x\geqslant -\frac{5}{2} \text{ (II)}$$

O conectivo "e" indica a intersecção dos conjuntos solução dessas últimas inequações, ou seja:



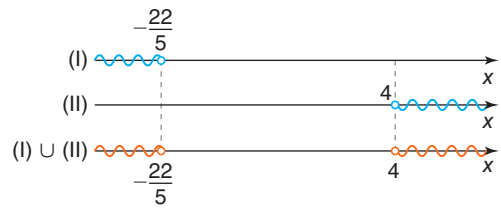
Logo: $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4\right\}$

b. Pela propriedade P11, temos:

$$|5x+1|>21 \Leftrightarrow 5x+1<-21$$
$$\text{ou } 5x+1>21$$

$$\therefore\ x<-\frac{22}{5} \text{ (I) ou } x>4 \text{ (II)}$$

O conectivo "ou" indica a união dos conjuntos solução dessas últimas inequações, ou seja:



Logo: $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<-\frac{22}{5} \text{ ou } x>4\right\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

6. b. $x = 19$ ou $x = 27$

6. Dois amigos fazem aniversário no mesmo dia, porém um deles tem 4 anos a mais que o outro.
Sabe-se que um deles tem 23 anos de idade e o outro, x anos de idade. **6. a.** $|23 - x| = 4$ ou $|x - 23| = 4$

a. Represente, por meio de uma equação modular, a relação entre as idades desses amigos.

b. Resolva a equação obtida no item **a**.

c. Quais são as possíveis idades desses dois amigos?

6. c. 19 e 23 anos ou 23 e 27 anos

7. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir.

a. $|2x - 1| = 0$ **7. a.** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b. $|3x - 1| = -4$ **7. b.** $S = \varnothing$

c. $|k^2 - 5k| = 6$ **7. c.** $S = \{-1, 2, 3, 6\}$

d. $|9x - 5| = |6x + 10|$ **7. d.** $S = \left\{-\frac{1}{3}, 5\right\}$

e. $|t| \cdot |t - 2| = 1$ **7. e.** $S = \{1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}\}$

f. $x^2 + 2|x| = 15$ **7. f.** $S = \{-3, 3\}$

g. $(x - 1)^2 + 4|x - 1| + 3 = 0$ **7. g.** $S = \varnothing$

8. Considerando $\mathbb{R}$ o conjunto universo, determine o conjunto solução de cada uma das equações a seguir.

a. $|2x + 3| = 3x - 6$ **8. a.** $S = \{9\}$

b. $|7x + 2| = 3x - 1$ **8. b.** $S = \varnothing$

c. $|x^2 - 5x| = 9 - 5x$ **8. c.** $S = \{-3, 1\}$

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações.

a. $|5x + 7| \geqslant 13$ **9. a.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant \frac{6}{5}\}$

b. $|3x - 4| < 8$ **9. b.** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} < x < 4\}$

c. $\left|\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{5}$ **9. c.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{14}{15} \leqslant x \leqslant -\frac{2}{5}\right\}$

10. Os valores reais de x que satisfazem o sistema $\begin{cases} 2x - 14 \leqslant 0 \\ -3x - 9 < 0 \end{cases}$ são tais que: **10.** alternativa **b**

a. $|x - 8| = x - 8$

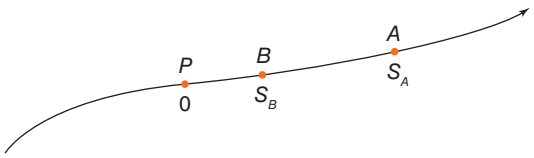
b. $|x - 2| \leqslant 5$

c. $|x| = x$

d. $|x| \leqslant 1$

e. $|x| \geqslant 8$

11. Junte-se a um colega para resolver este problema.
Um automóvel A passa por um ponto P de uma estrada à velocidade constante de 1.400 m/min. Dois minutos depois, um automóvel B passa por P à velocidade constante de 1.500 m/min, ultrapassando o automóvel A algum tempo depois.



Durante quanto tempo a distância entre os dois automóveis, ao longo da estrada, foi menor do que 600 m, sabendo que durante esse tempo eles continuavam na estrada e mantinham a mesma velocidade com que passaram pelo ponto P?

11. 12 min

12. Elabore e resolva um problema sobre equação modular e outro sobre inequação modular. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega, para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **12.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 4 a 6.

Retome com os estudantes a definição de módulo de um número real. Depois, defina função modular e solicite aos estudantes que construam o gráfico da função modular. Se possível, utilize um *software* de geometria dinâmica para essa construção ou folhas de papel quadriculado para representar o plano cartesiano.

3. Função modular

Já foi apresentado que cada número real x tem um único módulo, definido por:

$$|x| = x, \text{ se } x \geqslant 0$$

e

$$|x| = -x, \text{ se } x < 0$$

Logo, podemos definir uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa cada número real x a seu módulo, isto é, $f(x) = |x|$.

Essa função, chamada **função modular**, pode ser representada da seguinte forma:

$$f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } < 0 \end{cases}$$

Para esboçar o gráfico da função f, vamos estudar cada uma de suas sentenças separadamente.

I. $f(x) = x$, para $x \geqslant 0$

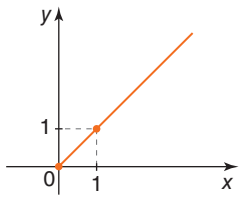
II. $f(x) = -x$, para $x < 0$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

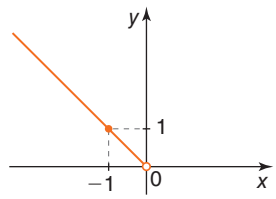
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

I. $f(x) = x$, para $x \geqslant 0$



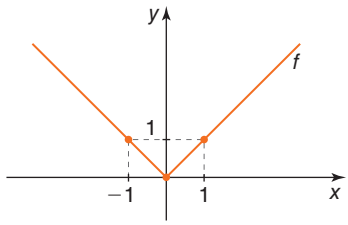
Valores de x e $f(x)$	
x	$f(x)$
0	0
1	1

II. $f(x) = -x$, para $x < 0$



Valores de x e $f(x)$	
x	$f(x)$
0	0
−1	1

A reunião dos gráficos obtidos em I e II é o gráfico da função modular $f(x) = |x|$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

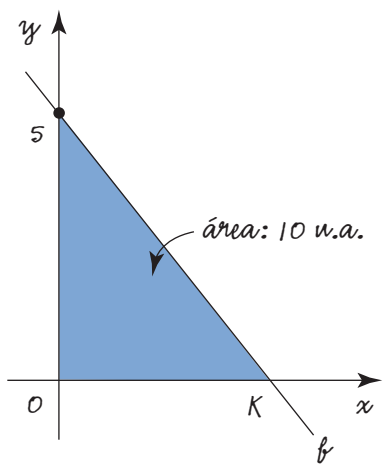
Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Junte-se a um colega, apontem o erro e refaçam a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Obtenha a lei de associação da função cujo gráfico é a reta que passa pelo ponto (0, 5) e determina, com os eixos coordenados, um triângulo com 10 unidades de área (u.a.).

Resolução

Como a área do triângulo é 10 u.a.:



$\frac{K \cdot 5}{2} = 10 \rightarrow 5K = 20$

$\therefore K = 4$

Como o gráfico é uma reta, a função é da forma $y = ax + b$.

- *Para* $x = 0$ *e* $y = 5$:
  $5 = a \cdot 0 + b \Rightarrow 5 = 0 + b$
  $\therefore b = 5$ (I)
- *Para* $x = 4$ *e* $y = 0$:
  $0 = a \cdot 4 + b \rightarrow 4a + b = 0$ (II)

Substituindo (I) em (II), obtemos: $4a + 5 = 0 \rightarrow 4a = -5$

$\therefore a = -\frac{5}{4}$

Logo, a função é dada por: $y = -\frac{5x}{4} + 5$

Utilize essa atividade para realizar uma avaliação diagnóstica e identificar o que os estudantes já conhecem sobre o assunto. Depois, enfatize o diálogo amigável e valorize o princípio do respeito à diversidade e à inclusão, procurando trabalhar com os diferentes níveis de conhecimentos, comportamentos, crenças e valores.

O estudante cometeu um erro ao admitir apenas o caso em que o gráfico intercepta o eixo *Ox* à direita da origem, pois o gráfico também poderia interceptar o eixo *Ox* à esquerda da origem, passando pelo ponto (0, 5) e formando um triângulo de área 10 u.a., limitado pelos eixos coordenados e pelo gráfico. Para evitar esse erro, a resolução pode ser iniciada admitindo que k é a abscissa do ponto comum ao eixo das abscissas e ao gráfico da função, com o que obtemos:

$\frac{|k| \cdot 5}{2} = 10 \Rightarrow |k| = 4 \Rightarrow k = 4$ ou $k = -4$

Assim, a lei da função seria:

$y = -\frac{5}{4}|x| + 5$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ELISA NIEVAS/ARQUIVO DA EDITORA

Com a participação dos estudantes, explore o **exercício resolvido 6**. Comente que o gráfico da função $f(x) = |x - 1|$ é obtido por uma translação horizontal (paralela ao eixo Ox) de uma unidade para a direita do gráfico da função $g(x) = |x|$.
Pergunte: Como se obtém o gráfico da função $h(x) = |x + 1|$ por meio do gráfico da função $g(x) = |x|$? (O gráfico de g é uma translação horizontal (paralela ao eixo Ox) de uma unidade para a esquerda do gráfico da função g.)

EXERCÍCIO RESOLVIDO

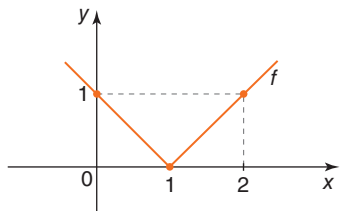
6. Construa o gráfico da função $f(x) = |x - 1|$ e determine seu domínio e conjunto imagem.

Resolução

Para construir o gráfico de f, vamos transformá-la em uma função dada por duas sentenças.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$$

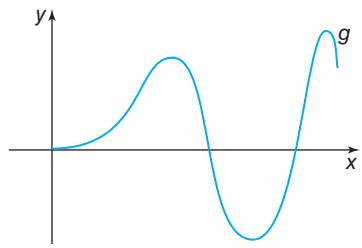
Assim, temos o gráfico a seguir.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente: $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [0, +\infty[$

Outra maneira de construir gráficos

Seja g a função que apresenta o seguinte gráfico:



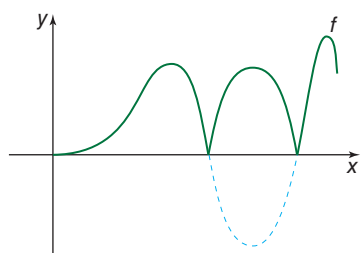
Para construir o gráfico da função $f(x) = |g(x)|$, podemos representar $f(x)$ da seguinte maneira:

$$f(x) = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} g(x), \text{ se } g(x) \geqslant 0 \\ -g(x), \text{ se } g(x) < 0 \end{cases}$$

Da equivalência apresentada, concluímos que:

- quando $g(x) \geqslant 0$, o gráfico de $|g(x)|$ é o próprio gráfico de $g(x)$;
- quando $g(x) < 0$, o gráfico de $|g(x)|$ é o gráfico de $-g(x)$, que é simétrico ao gráfico de $g(x)$ em relação ao eixo das abscissas.

Assim, conservando os pontos de ordenadas não negativas do gráfico da função g e transformando os pontos de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtemos o gráfico da função f.



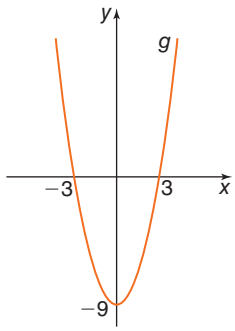
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

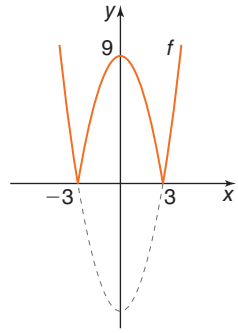
7. Construa o gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = |x^2 - 9|$.

Resolução

Inicialmente, construímos o gráfico da função $g(x) = x^2 - 9$.



Depois, no gráfico de g, conservamos os pontos de ordenadas não negativas e transformamos os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo, assim, o gráfico de f.



O domínio e o conjunto imagem de f são, respectivamente, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+$.

Comente a pergunta do boxe **Reflexão** e oriente os estudantes de modo que concluam que o gráfico da função g é translação vertical (paralela ao eixo Oy) de duas unidades para cima do gráfico da função f.
O gráfico da função h é translação vertical (paralela ao eixo Oy) de duas unidades para baixo do gráfico da função f.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão **Reflexão:** Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Com base no gráfico da função $f(x) = |x^2 - 9|$, obtido no exercício resolvido **7**, como é possível obter o gráfico da função $g(x) = |x^2 - 9| + 2$? E o gráfico da função $h(x) = |x^2 - 9| - 2$?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

As respostas dos Exercícios Propostos 13 e 14 estão no final do livro.

Faça os exercícios no caderno.

13. Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem.

a. $y = |2x - 1|$

b. $f(x) = |2x^2 - 4x|$

c. $f(x) = -|3x + 1|$

14. Construa o gráfico das funções f e g, determinando seu domínio e conjunto imagem.

a. $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$

b. $g(x) = |x^2 - 2x| - 2$

15. Um sistema de abscissas de origem O foi associado a uma estrada reta, adotando o quilômetro como unidade de medida de comprimento. Em relação a esse sistema, as abscissas s_A e s_B, que determinam, respectivamente, a localização de duas bicicletas A e B, em função do tempo t, em hora, são dadas por $s_A = 16t - 20$ e $s_B = 10 - 14t$, em que $t = 0$ e $t = 3$ representam, respectivamente, o início e o fim da medição do tempo. Considerando apenas esse intervalo de tempo, junte-se a um colega e façam o que se pede.

a. Construam o gráfico que descreve a distância d, em quilômetro, entre as bicicletas, em função do tempo t, em hora. **15. a.** Resposta no final do livro.

b. A partir do início da marcação de tempo, determinem o primeiro instante em que a distância entre as bicicletas foi 15 km. **15. b.** $t = 0{,}5$ h

c. Construam o gráfico que descreve a distância d, em quilômetro, entre as bicicletas em função do tempo t, em hora, para $d < 15$.
15. c. Resposta no final do livro.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 7 e 8.

Conectado **Conectado:** Para mais informações, consulte as **Orientações Específicas** deste capítulo.

Usando um programa de construção de gráficos, faça o que se pede.

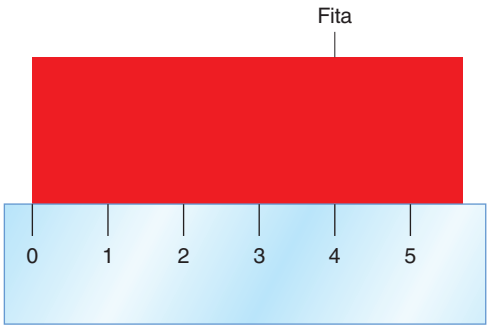
a. No mesmo plano cartesiano (na mesma tela), construa o gráfico de uma função polinomial do 2º grau de lei $y = ax^2 + bx + c$, escolhendo quaisquer valores reais para a, b e c, com $a > 0$ e $b < 0$, e o gráfico da função de lei $y = |ax^2 + bx + c|$. Por qual transformação passou o segundo gráfico em relação ao primeiro? Explique o porquê dessa transformação.

b. Construa o gráfico de uma função polinomial do 2º grau de lei $y = ax^2 + bx + c$, escolhendo valores reais para a, b e c, de modo que o gráfico da função de lei $y = |ax^2 + bx + c|$ não passe por nenhuma modificação em relação ao gráfico da função polinomial do 2º grau construído inicialmente. Explique o critério que você usou para escolher os parâmetros reais a, b e c.

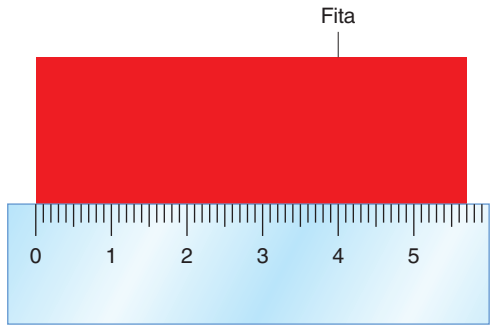
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. O erro relativo

As ciências experimentais dependem, em grande parte, de medições. Porém, as medições diretas, realizadas por meio de instrumentos (régua graduada, paquímetro, transferidor, termômetro, altímetro, voltímetro, dinamômetro etc.), inevitavelmente apresentam imprecisões. Por exemplo, ao medir o comprimento de uma fita com uma régua graduada apenas em centímetro, haverá imprecisão na casa dos milímetros; se a régua for graduada em centímetro e milímetro, haverá imprecisão na casa dos décimos de milímetro, e assim por diante.



Régua graduada em centímetro.



Régua graduada em centímetro e milímetro.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

O conteúdo apresentado tem dois objetivos: primeiro, contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais; segundo, despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Nesse caso, exploramos o erro relativo.

Por isso, os cientistas devem conhecer a teoria dos erros, para avaliar criteriosamente as inevitáveis imprecisões de medidas realizadas por instrumentos.

Um dos conceitos estudados na teoria dos erros é o erro relativo, que, como o nome indica, expressa o erro cometido no resultado de uma medição em relação à verdadeira medida do objeto em questão. Se a verdadeira medida de um objeto é x_v e, por meio de um instrumento, obteve-se a medida x, então o erro relativo r é calculado por:

$$r = \frac{|x - x_v|}{x_v}$$

em que x e x_v estão expressos na mesma unidade de medida.

Nota:

Se quisermos expressar o erro relativo como uma porcentagem, basta observar que:

$$r = \frac{r \cdot 100}{100} = (r \cdot 100)\ \%$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

8. Qual é o erro que se comete ao estimar em 9 min uma medida de tempo de exatamente 13 min? Dê a resposta com aproximação de 7 casas decimais.

A medida de tempo real é 13 min e a estimada é 9 min. Utilizando a fórmula, temos:

$$r = \frac{|9 - 13|}{13} \Rightarrow r = \frac{|-4|}{13} = 0{,}307692307$$

Fazendo o arredondamento para aproximar para 5 casas decimais, temos:

$$0{,}307692307 = 0{,}30769231 = 0{,}3076923$$

Para expressar esse erro relativo como uma porcentagem, multiplicamos por 100:

$$0{,}3076923 \cdot 100 = 30{,}76923\%$$

Ao diminuir as quantidade de casas decimais, a aproximação nos fornece um resultado menor do que o exato. Portanto, o erro relativo que se comete é $r < 0{,}3076923$ ou $r < 30{,}76923\%$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

16. Pelo teorema de Pitágoras, calculamos a medida d da diagonal de um quadrado de lado 1 cm, obtendo $d = \sqrt{2}$ cm. Porém, se medíssemos essa diagonal com uma régua graduada em centímetro e milímetro, conseguiríamos precisão apenas até a casa dos milímetros, obtendo 1,4 cm. Calcule o erro relativo cometido nessa medição. (Indique a resposta com aproximação de 5 casas decimais.) **16.** $r \approx 0{,}01005$ ou $r \approx 1{,}005\%$

17. Um paquímetro eletrônico tem precisão até décimos de milímetro. Assim, qualquer medida, em milímetro, mostrada no visor do instrumento apresenta apenas uma casa decimal, pois da segunda casa decimal em diante não se tem precisão no valor. Medindo-se com esse paquímetro a diagonal de um quadrado cujos lados medem 10 mm, com a melhor aproximação possível, qual é o erro relativo que se comete? (Dê a resposta com aproximação de 6 casas decimais.)
17. $r \approx 0{,}002979$ ou $r \approx 0{,}2979\%$

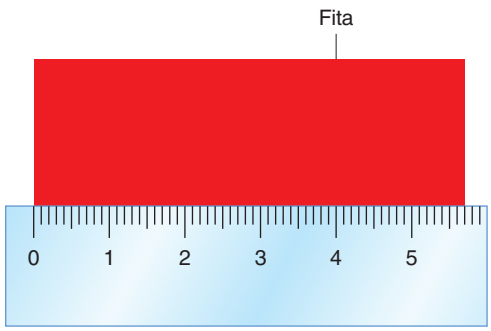


Paquímetro eletrônico.

PHICHAI/SHUTTERSTOCK

Algarismos significativos

Observe na medição da fita com a régua milimetrada que temos certeza da medida até os milímetros, mas não temos certeza a partir dos décimos de milímetros.



Régua graduada em centímetro e milímetro.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, se estimarmos a medida da fita em 5,24 cm, temos que os algarismos 5 e 2 são corretos na medida, mas o 4 é algarismo duvidoso. Por isso, concluímos que a medida 5,24 cm possui três algarismos significativos.

Os algarismos significativos de uma medida são os algarismos corretos e um único algarismo duvidoso.

Convenção: Toda medida deve ser apresentada com todos os seus algarismos significativos e somente eles.

Assim, por exemplo, ao nos depararmos com a medida 2,374 kg, entenderemos que os algarismos 2, 3 e 7 são corretos, e o algarismo 4 é duvidoso. (O último algarismo de uma medida é sempre duvidoso.)

Às vezes a contagem dos algarismos significativos de uma medida pode ser confusa, principalmente quando a medida apresenta zeros. Para evitar confusão, vamos adotar as regras a seguir para qualquer medida.

- Algarismos diferentes de zero são sempre significativos.
- Zeros à esquerda do primeiro algarismo não nulo não são significativos.
- Zeros que estão entre algarismos significativos também são significativos.
- Zero(s) no final da parte decimal são significativos.
- Se uma medida terminada por zero(s) for representada sem a parte decimal (sem vírgula), o número de algarismos significativos é indeterminado. (Nesse caso será necessária uma referência para determinar o número de algarismos significativos; por exemplo, deve ser dada a precisão do instrumento de medida.)

Para aprofundar o assunto, sugerimos a leitura do artigo a seguir, que trata de metodologias e regras internacionais para determinação da incerteza de medição e significância dos algarismos.

CRUZ, A. *et al*. Medições e incertezas de medição: um contributo baseado nas convenções e resoluções internacionais. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 26, n. 1, p. 125-135, abr. 2009.

OBJETO DIGITAL Vídeo: Medidas e incertezas

Observação

A diferenciação entre algarismos significativos exatos e duvidosos é importante para a análise de medidas e a avaliação da precisão dos instrumentos utilizados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

Lembrando que toda medida deve ser apresentada com todos os seus algarismos significativos e somente eles, temos que:

a. 15,82 m tem quatro algarismos significativos, pois algarismos diferentes de zero são significativos.

b. 0,000059 kg tem dois algarismos significativos, pois zero(s) à esquerda do primeiro algarismo não nulo não são significativos.

c. 29,306 L tem cinco algarismos significativos, pois o zero está entre dois algarismos significativos.

d. 24,30 °C tem quatro algarismos significativos, pois zero no final da parte decimal é significativo.

e. 100 m pode ter um, dois ou três algarismos significativos. É indeterminado.

Observação

A menor medida que um instrumento é capaz de determinar corresponde à sua precisão. Desse modo, o algarismo duvidoso é aquele que não pode ser observado diretamente por meio do instrumento utilizado, ou seja, é resultado de uma estimativa.

Operações com algarismos significativos

Ao efetuar **adições e subtrações** envolvendo medidas com partes decimais não nulas, o resultado deve conter a mesma quantidade de casas decimais da parcela com a menor quantidade de algarismos após a vírgula. Acompanhe o exemplo.

$$225{,}16 + 918{,}116 = 1.143{,}276$$

A parcela com menor precisão tem duas casas decimais. Assim, o resultado também deve ter apenas duas casas decimais. Para isso, fazemos um arredondamento:

$$1.143{,}276 = 1.143{,}28$$

Em **multiplicações e divisões**, a lógica é a mesma: o resultado deve conter a mesma quantidade de casas decimais do fator com a menor quantidade de algarismos após a vírgula. Acompanhe o exemplo.

$$18{,}2 \cdot 25{,}34 = 461{,}188$$

O produto dessa multiplicação deve ter apenas um algarismo significativo. Desse modo, fazemos um arredondamento:

$$461{,}188 = 461{,}2$$

Atenção! Na adição e na subtração de medidas, o resultado deve ser arredondado considerando o termo com menor quantidade de **casas decimais**. Na multiplicação e na divisão, o resultado deve ser arredondado considerando o termo com menor quantidade de **algarismos significativos**.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

9. Os números −1,2 e 1,1111 representam medidas, em uma determinada unidade de medida. O módulo do produto desses números, considerando os algarismos significativos, é igual a:

a. 1,3 **c.** 1,34 **e.** 1,5

b. 1,33 **d.** 1,4

Resolução

Multiplicando os números, temos:

$$-1{,}2 \cdot 1{,}1111 = -1{,}3332$$

Como −1,2 é o fator com a menor quantidade de algarismos significativos, o resultado deve ter a mesma quantidade de algarismos significativos do −1,2, ou seja, dois. Arredondando o resultado para dois algarismos significativos, obtemos −1,3.

Como $|-1{,}3| = 1{,}3$, a resposta correta é a da alternativa **a**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

18. Determine a quantidade de algarismos significativos em cada uma das medidas.

a. 0,123 m **18. a.** 3

b. 7,001 km **18. b.** 4

c. 0,0000009 mm **18. c.** 1

d. 23,0 kg **18. d.** 2

19. As expressões a seguir envolvem medidas. Calcule o módulo de cada uma, expressando o resultado com algarismos significativos.

a. 264,058 + 3,21 **19. a.** 267,27

b. 1,01 − 9,9 **19. b.** 8,9

c. −2,53 · 89,6 **19. c.** 226,9

d. 88,264 : (−2,2) **19. d.** 40,1

20. Um engenheiro civil estima que para cimentar cada metro quadrado de um terreno são necessários 22,45 kg de cimento. Sabendo que para cimentar todo o terreno são necessários 76,6892 kg de cimento, calcule a área do terreno em metro quadrado. Indique essa medida com algarismos significativos. **20.** 3,416 m²

21. Um automóvel consome, em média, 0,15 litro de gasolina para percorrer 1 quilômetro. Mantendo essa média, qual é a distância percorrida por esse automóvel, em quilômetro, para consumir 8,7642 litros de gasolina? (Dê a resposta com o número adequado de algarismos significativos.) **21.** 58 km

22. (Cesgranrio-RJ) Um estudante, tendo medido o corredor de sua casa, encontrou os seguintes valores: comprimento = 5,7 m e largura = 1,25 m. Desejando determinar área deste corredor com a maior precisão possível, o estudante multiplica os dois valores anteriores e registra o resultado com o número correto de algarismos, isto é, somente com os algarismos que sejam significativos. Assim fazendo, ele deve escrever:

a. 7,125 m²;

b. 7,12 m²;

c. 7,13 m²;

d. 7,1 m²;

e. 7 m².

22. alternativa **d**

23. Elabore e resolva um problema envolvendo algarismos significativos relacionado a uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega, para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

23. Resposta pessoal.

TRABALHO E JUVENTUDES

Metalúrgico e metrologia

A metrologia é a ciência que se dedica à medição, englobando tanto os conceitos teóricos quanto as práticas associadas, como as unidades de medida e os instrumentos utilizados. Um dos principais instrumentos nessa área é o paquímetro, que permite realizar medições precisas entre duas superfícies opostas, sejam elas internas ou externas, ou até mesmo para determinar a altura e profundidade de uma peça. Esse instrumento tem uma escala graduada que permite medir as dimensões em polegadas ou milímetros.



PRIMAGEFACTORY/ISTOCK/GETTY IMAGES

Profissional fazendo medições com um paquímetro.

Metalúrgico é o termo que se refere a profissionais que trabalham na indústria metalúrgica ou na área da metalurgia. A metalurgia é o estudo e a gestão dos metais, desde a extração até a transformação em produtos. Os metalúrgicos trabalham com uma variedade de metais, como o ferro, o aço, o cobre e o alumínio. É necessário ter conhecimento técnico específico para manipular e tratar cada um deles.

Na indústria de fundição, os metalúrgicos utilizam frequentemente o paquímetro para medir com precisão as dimensões das peças fundidas. Esse processo é essencial para o controle de qualidade, assegurando que as peças atendam aos padrões desejados e estejam livres de defeitos, rachaduras ou deformações. Para garantir a precisão e a confiabilidade das medições, os paquímetros são calibrados regularmente.

No Brasil, o dia 21 de abril é celebrado como o Dia Nacional dos Trabalhadores Metalúrgicos, uma data que homenageia esses profissionais tão importantes para o desenvolvimento industrial do país.

Quer saber mais sobre essa profissão? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe um resumo de suas descobertas com os colegas e o professor.

Trabalho e juventudes: Pesquisa pessoal. Incentive os estudantes a pesquisarem sobre as profissões citadas e outras cujos profissionais precisam utilizar medidas com certa precisão.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Hábito saudável e longevidade

ODS 3

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

Muitos foram os avanços na medicina ao longo dos últimos anos, e a Matemática também contribuiu para isso, seja por meio da modelagem ou de análises estatísticas de diferentes estudos, ou até mesmo para garantir dosagens mais seguras de diferentes medicamentos. Nesse último caso, particularmente, o uso de algarismos significativos tem sua aplicação, garantindo maior precisão ao tratamento aplicado.



MESQUITAFMS/E+/GETTY IMAGES

Casal de idosos fazendo caminhada em um parque público. Foto de 2021.

A melhora generalizada nas condições de saúde e o desenvolvimento da medicina estão entre os fatores que atuaram em conjunto para o avanço da média de expectativa de vida. Acompanhe o texto a seguir.

> Em pouco mais de dez anos, o número de idosos no Brasil aumentou em 11 milhões de pessoas. Em 2010, o país tinha 19 milhões de habitantes com mais de 60 anos de idade. Em 2021, esse número chegou a 30,3 milhões de pessoas, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).
>
> A expectativa para as próximas décadas é que esse número continue aumentando. Projeções estimam que, em 2060, três em cada dez brasileiros serão idosos.
>
> [...]
>
> Segundo a geriatra Roberta França, o aumento da longevidade está relacionado com uma série de fatores como: a prática de exercícios, a alimentação saudável e o avanço da ciência que permitiu a descoberta de novos tratamentos.
>
> ALMEIDA, M. Avanço da medicina e hábito saudável permitem vida mais longa a idosos. *Agência IBGE*. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/saude/noticia/2022-04/avanco-da-medicina-e-habito-saudavel-permitem-vida-mais-longa-idosos. Acesso em: 16 ago. 2024.

A prática de exercícios e a longevidade são essenciais para evitar doenças crônicas não transmissíveis, como artrite, diabetes, hipertensão, problemas cardíacos e câncer. Essas doenças são também responsáveis pela perda de capacidade funcional, pela maior demanda de cuidados e pela menor qualidade de vida das pessoas idosas.

Assim, com os novos desafios com o aumento da longevidade, faz-se necessária a criação de políticas públicas, em especial na área da saúde, para garantir que essa população tenha qualidade de vida.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1. Substância **A**: 1,28 mL; substância **B**: 0,34 mL; substância **C**: 21,75 mL; substância **D**: 0,03 mL.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Em tratamentos médicos, a precisão no uso de medicamentos se faz necessária. Para manipular um determinado medicamento, um farmacêutico deveria usar 1,2758 mL de uma substância **A**, 0,335 mL de uma substância **B**, 21,748 mL de uma substância **C**, e 0,0256 mL de uma substância **D**. Considerando que o equipamento usado para medição só tem precisão de até 2 casas decimais, quanto o farmacêutico usará de cada substância?

2. Uma das doenças crônicas que pode ser evitada pela prática de atividade física e por uma alimentação saudável é a hipertensão. Pelas informações do Ministério da Saúde de 2022, a hipertensão arterial mata, anualmente, aproximadamente 300 mil brasileiros – quase 820 mortes por dia. Cerca de 32% da população adulta brasileira, ou o equivalente a 36 milhões de indivíduos, têm hipertensão. Somente 50% sabem que são hipertensos, e apenas metade faz tratamento. Com base nos números indicados, quantos milhões de brasileiros tratam a hipertensão? **2.** 9 milhões de brasileiros.

3. Respostas pessoais.

3. A hipertensão também pode atingir pessoas mais jovens, por isso, fazer atividades físicas e ter uma alimentação saudável é importante para todos.

a. Você faz atividade física? Se sim, quais atividades e com que frequência? Converse com os colegas e o professor sobre os efeitos que você sente após realizá-las.

b. Pesquise na internet informações sobre a prática de atividades físicas e compartilhe com a turma os principais benefícios trazidos por elas e quais podem ser incorporadas ao cotidiano de todos os colegas.

4. Em 2023, foi publicada a pesquisa **Envelhecimento e as desigualdades sociais**, realizada com a população dos municípios de São Paulo, Salvador e Porto Alegre pelo Centro Brasileiro de Análise e Planejamento (Cebrap). Leia um trecho do relatório desta pesquisa.

> [...] A análise da variável racial no envelhecimento apresenta uma realidade dramática para idosos negros de baixa escolaridade, que recebem os menores salários e são frequentemente excluídos do mercado de trabalho formal, entre outros aspectos que apontam desigualdades (Silva, 2019. Batista, Proença & Silva. 2019).
>
> Em termos populacionais, estima-se que a população idosa no Brasil é de 32 milhões, sendo este grupo composto por 48% de idosos negros (Silva, 2021). A dinâmica de preconceito e discriminação que atinge os idosos, de modo geral, é reforçada pelas desigualdades raciais que incidem nessa parcela da população. O **racismo estrutural** e **institucional** acarreta processos de exclusão social e leva à ausência de direitos sociais básicos ao longo da vida, além de instituir barreiras de acesso para sujeitos negros que desejam alcançar determinados espaços, direitos e posições sociais (Moura *et al.*, 2023; Gonçalves, 2017). [...]
>
> É importante salientar que as desigualdades raciais se iniciam na infância, acumulam-se ao longo de toda vida e, ao chegar na velhice, assumem formas específicas e singulares de vulnerabilidade. A ausência de políticas públicas, a dificuldade de acessar serviços e direitos sociais ao longo da vida exercem uma pressão negativa que gera consequências nos corpos e nas condições de vida da população idosa negra. [...]

Racismo estrutural: o conceito se refere à forma naturalizada de expressão do racismo na sociedade brasileira.

ODS 10

Racismo institucional: o conceito se refere à forma como o racismo se manifesta nas instituições e organizações públicas ou privadas.

VIEIRA, P. P. F. *et al.* **Envelhecimento e desigualdades raciais**. 1. ed. São Paulo: Cebrap, 2023. p. 11. Disponível em: https://cebrap.org.br/envelhecimento-de-desigualdades-raciais/. Acesso em: 23 set. 2024.

Reúna-se em grupo para conversar sobre esse texto. Depois, escrevam um relatório sobre quais ações os órgãos governamentais podem realizar para diminuir o problema que foi apontado no texto. Apresentem o relatório elaborado para os colegas e o professor.

4. Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8. Resposta no final do livro deste capítulo. Se achar conveniente, sugerir aos estudantes dois métodos de resolução: por tabela de valores e pela definição de módulo.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Um ônibus partiu da estação rodoviária A com destino a uma cidade B. Sua primeira parada é um ponto *P*, distante 120 km da estação rodoviária A, posicionado antes da cidade B.

a. Se em determinado instante da viagem o ônibus já tiver percorrido 90 km, qual será a distância entre o ônibus e o ponto *P*? **1. a.** 30 km

b. Se em determinado instante da viagem o ônibus já tiver percorrido 150 km, qual será a distância entre o ônibus e o ponto *P*? **1. b.** 30 km

c. Considerando o percurso dessa viagem, obtenha uma equação que expresse a distância *d*, em quilômetro, entre o ônibus e o ponto *P*, em função da distância *x*, em quilômetro, percorrida pelo ônibus desde a partida. **1. c.** $d = |x - 120|$ ou $d = |120 - x|$

2. Se $5 \leqslant x \leqslant 9$, então a expressão $E = ||2x - 21| - 2|$ é equivalente a: **2.** alternativa **a**

a. $E = -2x + 19$

b. $E = 2x - 21$

c. $E = 2x - 23$

d. $E = 23$

e. $E = 21$

3. Sabendo que *x* pertence ao intervalo [2, 11], calcule o menor valor possível da expressão: $E = \dfrac{1}{|1 - x|}$ **3.** $\frac{1}{10}$

4. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir. **4. c.** $S = \{-4, 4\}$

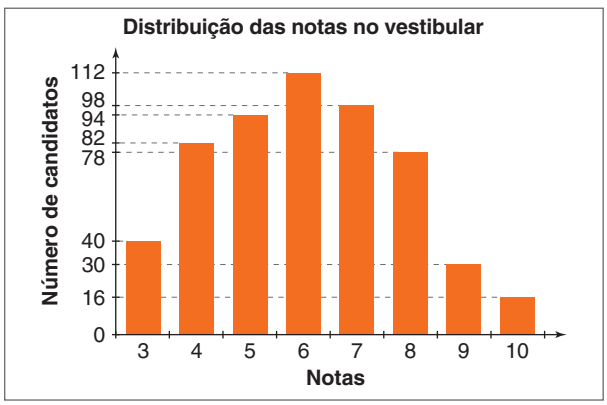
a. $|5x - 7| = 1$ **4. a.** $S = \left\{\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right\}$

b. $|x^2 + x| = 2x - 4$ **4. b.** $S = \varnothing$

c. $n^2 - 2 \cdot |n| - 8 = 0$

d. $k^2 - |5k| + 4 = 0$ **4. d.** $S = \{-4, -1, 1, 4\}$

5. O gráfico a seguir mostra a distribuição das notas atribuídas às avaliações de todos os candidatos que participaram de determinado vestibular.



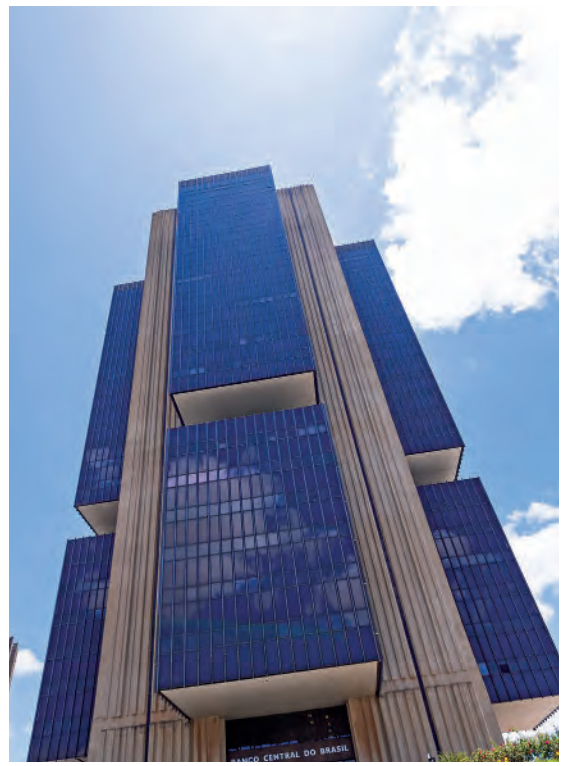
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado para fins didáticos.

a. Quantos candidatos obtiveram uma nota *m*, com $|m - 6| < 2$? **5. a.** 304

b. Quantos candidatos obtiveram uma nota *n*, com $|n - 7| > 1$? **5. b.** 262

6. Uma das atribuições do Banco Central do Brasil é estabelecer uma meta anual de inflação. Essa estimativa é apresentada por um intervalo fechado cujo ponto médio é chamado de **centro da meta**. Por exemplo, se a meta for apresentada pelo intervalo fechado [0,06; 0,08], entende-se que o índice mínimo esperado é de 6% e o máximo de 8%, tendo como centro da meta 7%.



RAFAEL DE MATOS CARVALHO/ISTOCK/GETTY IMAGES

Edifício sede do Banco Central do Brasil, em Brasília (DF). Foto de 2023.

Suponha que, ao mesmo tempo que o Banco Central divulgou sua previsão de inflação para o ano, uma instituição privada também o fez. Para o Banco Central, o centro da meta foi estabelecido em 4%, tal que o índice inflacionário anual *x* estaria dentro das expectativas se, e somente se, $|x - 0{,}040| \leqslant 0{,}020$. Para a instituição privada, o centro da meta foi estabelecido em 5%, tal que o índice inflacionário anual *x* estaria dentro das expectativas se, e somente se, $|x - 0{,}050| \leqslant 0{,}025$. Ao final do ano, constatou-se um índice inflacionário x_0, que satisfazia as duas previsões. Determine x_0.

6. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

7. Construa o gráfico de cada uma das funções e determine seu domínio e conjunto imagem.

a. $f(x) = 3 \cdot |2x - 4|$

b. $f(x) = 3 \cdot |2x - 1| + 2$

c. $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 1| - 4$

7. Respostas no final do livro.

8. (Faap-SP) Construa o gráfico da função: $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

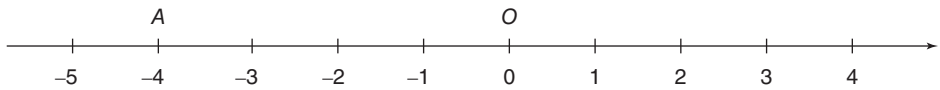
VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 8

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é importante que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Considere que parte de uma avenida possa ser associada a um sistema de abscissas, isto é, a um intervalo do eixo real, em que a unidade adotada seja o quilômetro. Um carteiro está localizado no ponto A de abscissa -4 dessa avenida e deve entregar uma correspondência no ponto B de abscissa k dessa avenida.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



A distância, em quilômetro, que o carteiro deve percorrer de A até B é: **1.** alternativa **d**

a. $k+4$ **c.** $|k-4|$ **e.** $|k|+4$

b. $-4-k$ **d.** $|k+4|$

2. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a. $|x-4| = -7$ **2. a.** $S = \varnothing$ **c.** $|x^2+1| = x^2+1$ **2. c.** $S = \mathbb{R}$

b. $|3x-4| = |2x+6|$ **2. b.** $S = \left\{10, -\frac{2}{5}\right\}$

3. Em um período de eleições, uma pesquisa de opinião revelou que um candidato A tinha 28% das intenções de voto. Se a margem de erro da pesquisa era de 3 pontos percentuais, para mais ou para menos, e x é o percentual de votos que efetivamente teria esse candidato na época da pesquisa, podemos afirmar que: **3.** alternativa **e**

a. $x - 28\% = 3\%$ **d.** $|x - 28\%| < 3\%$

b. $x - 28\% \leqslant 3\%$ **e.** $|x - 28\%| \leqslant 3\%$

c. $|x - 28\%| = 3\%$

4. Construa o gráfico e dê o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = |x^2 - 4x| + 3$.
4. Resposta no final do livro.

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno a ficha de autoavaliação que foi apresentada no capítulo 1. Essa ficha lhe fornecerá uma visão geral sobre seu desempenho neste capítulo. Assinale com um X em cada célula se a resposta for "sim".

Sempre que considerar necessário verificar sua aprendizagem, copie essa ficha e preencha-a, adequando o número de colunas ao número de exercícios.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, peça orientação ao professor na aula seguinte.

Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CAPÍTULO 9

Função exponencial

A Lei do resfriamento de Newton

As ciências são a base para produzir provas a partir de evidências encontradas em ambientes de delitos e acidentes, e, para isso, contam com contribuições da Matemática. Acompanhe, a seguir, uma dessas contribuições.



A polícia ambiental recebe a denúncia da morte de um animal, possivelmente devido a uma doença que ataca animais confinados, e envia ao local um veterinário para examiná-lo. Ao chegar, o especialista mede a temperatura do corpo do animal em dois instantes diferentes. Após alguns cálculos, determina-se o horário da morte do animal.
Essa cena certamente já despertou sua curiosidade. Como é possível determinar o horário da morte de um animal?

A resposta é dada por uma função matemática, descoberta em 1701 por Isaac Newton, conhecida por "Lei do resfriamento de Newton". De acordo com ela, se um objeto é colocado em um meio de temperatura constante (o ar, por exemplo), de modo que esta não se altere com a presença do objeto, a taxa de variação da temperatura do objeto em relação ao tempo é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e o meio. Newton descreveu esse fenômeno por meio da função dada pela lei:

$$T(t) = A + [T_0 - A]\, e^{-kt}$$

em que k é uma constante positiva que depende do material do qual a superfície do objeto é constituída; e é um número irracional, conhecido como número de Neper, que vale, aproximadamente, 2,71; $T(t)$ é a temperatura do objeto, em grau Celsius, em função do tempo t, em hora; T_0 é a temperatura do objeto no instante inicial das medições; e A é a temperatura do meio.

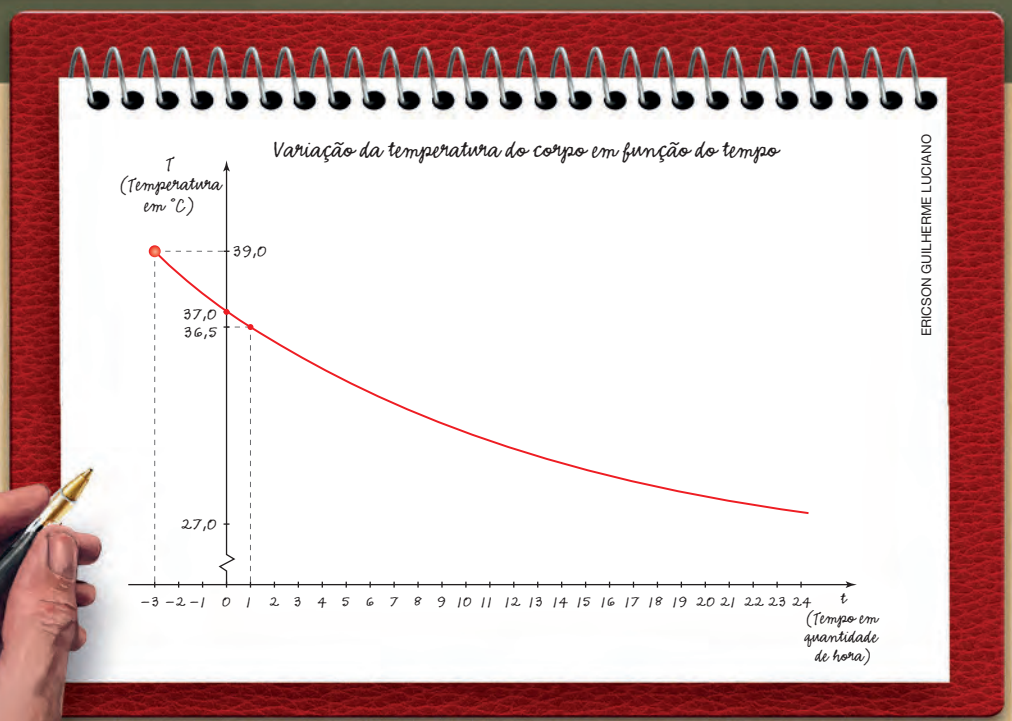
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MILTON RODRIGUES ALVES/ARQUIVO DA EDITORA





Neste gráfico, por exemplo, a temperatura do corpo do animal foi medida às 7 h e às 8 h, indicadas no eixo das abscissas por $t = 0$ e $t = 1$, respectivamente. Considerando que a temperatura ambiente do local se manteve constante em 27 °C e que a temperatura normal do animal vivo fosse 39 °C, conclui-se que sua morte ocorreu 3 horas antes da primeira medição, ou seja, por volta das 4 h, que foi indicada pelo instante $t = -3$ no gráfico.





Além da teoria

De acordo com os dados observados no gráfico apresentado, é possível calcular a constante k da equação de Newton, obtendo-se $k \approx 0{,}05$. Adotando esse valor, calcule a temperatura do corpo desse animal 5 horas após a morte. **Além da teoria:** 36°, aproximadamente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MILTON RODRIGUES ALVES/ARQUIVO DA EDITORA

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

1. Potenciação e radiciação

As notícias falsas, chamadas *fake news*, são divulgadas principalmente pelas redes sociais da internet, com objetivos suspeitos, em sua maioria visando prejudicar pessoas ou empresas. Uma maneira de tentar combater esse mal é não divulgar uma notícia antes de constatar sua autenticidade em órgãos confiáveis da mídia.

Observe a seguir uma situação fictícia, mas perfeitamente possível, mostrando a velocidade com que as notícias se espalham pelas redes sociais.



SYDA PRODUCTIONS/SHUTTERSTOCK

Uma ferramenta importante no combate às *fake news* é buscar informações em fontes confiáveis, como *sites* de universidades ou órgãos governamentais.

Suponha que alguém decida enviar uma notícia falsa por uma rede social da internet para duas pessoas e que cada uma delas envie a mesma notícia para mais duas, e assim por diante, ou seja, cada pessoa que receba a notícia a envie a outras duas. Considere que a notícia seja enviada sempre a pessoas diferentes daquelas que já a receberam. Indicando por 1ª geração de destinatários aquela formada pelas primeiras duas pessoas que receberam a notícia; 2ª geração de destinatários aquela formada pelas 4 pessoas às quais a 1ª geração enviou a notícia, e assim por diante, temos o quadro:

Geração de destinatários	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	...	*n*-ésima
Número de destinatários	2	4	8	16	32	...	2^n

Se uma geração de destinatários é formada a cada hora, o número de pessoas que recebem essa notícia em 30 horas é a soma:

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{30}$$

Essa soma pode ser calculada como:

$$2^{31} - 2 = 2.147.483.646$$

Essa situação fictícia mostra o crescimento assustador da função dada por $f(x) = 2^x$. Igualmente espantoso é o decrescimento de $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Funções como essas, chamadas **funções exponenciais**, serão estudadas neste capítulo. Os pré-requisitos para esse estudo são os conceitos e as propriedades envolvidos na potenciação e na radiciação de números reais (que revisaremos a seguir).

Potência de expoente inteiro

Enfatize que o estudo da função exponencial tem como pré-requisitos a potenciação e a radiciação em $\mathbb{R}$, por isso faremos uma breve revisão desses assuntos.

Sendo a um número real e n um número inteiro, definimos:

$a^0 = 1$, se $a \neq 0$

$a^1 = a$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$, se $n > 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, se $a \neq 0$

Observação

Não há unanimidade entre os matemáticos quanto à atribuição do valor 1 para a potência 0^0; por isso, excluímos essa possibilidade na definição $a^0 = 1$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Na potência a^n, o número a é a **base** da potência, e o número n é o **expoente**.

Exemplos

a. $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

b. $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$

c. $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{125}{8}$

d. $8^1 = 8$

e. $7^0 = 1$

f. $(-5)^0 = 1$

g. $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

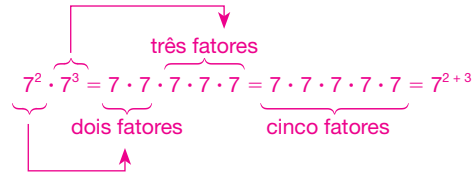
h. $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{49}{9}} = \frac{9}{49}$

Observação

Para agilizar o cálculo de $\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}$, podemos inverter a base e trocar o sinal do expoente, isto é:

$\left(\frac{7}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$

Reflexão: Podemos justificar o procedimento de conservar a base e adicionar os expoentes no cálculo $7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+3}$ do seguinte modo:



Propriedades das potências de expoente inteiro

Dados os números reais a e b e os números inteiros m e n, e obedecidas as condições para que existam as potências, temos:

P1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (conserva-se a base e adicionam-se os expoentes)

P2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ (conserva-se a base e subtraem-se os expoentes)

P3. $(a^m)^n = a^{mn}$ (conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes)

P4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ (distributiva da potenciação em relação à multiplicação)

P5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (distributiva da potenciação em relação à divisão)

Analogamente, podemos justificar o procedimento de conservar a base e subtrair os expoentes no cálculo $2^5 : 2^3 = 2^{5-3}$ da seguinte maneira:

$2^5 : 2^3 = \frac{2^5}{2^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} = 2^{5-3}$

Reflexão

Por que na multiplicação $7^2 \cdot 7^3$ deve-se conservar a base e adicionar os expoentes e na divisão $2^5 : 2^3$ deve-se conservar a base e subtrair os expoentes?

Exemplos

a. $7^2 \cdot 7^3 = 7^{2+3} = 7^5$

b. $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$

c. $3^4 : 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$

d. $(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$

e. $(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$

f. $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{7^2}{5^2} = \frac{49}{25}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Calcule o valor das potências.

a. $(-5)^2$ **1. a.** 25

b. -5^2 **1. b.** -25

c. $(-2)^3$ **1. c.** -8

d. 9^0 **1. d.** 1

e. 1^{43} **1. e.** 1

f. $(-1)^{13}$ **1. f.** -1

g. $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2}$ **1. g.** $\frac{4}{25}$

h. $(-2)^{-3}$ **1. h.** $-\frac{1}{8}$

2. Obedecidas as condições de existência, efetue:

a. $x^5 \cdot x^3$ **2. a.** x^8

b. $y^6 : y^2$ **2. b.** y^4

c. $\left(\frac{2xy^5}{z^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{xz^3}{y}\right)^4$ **2. c.** $8x^7y^{11}z^6$

d. $\left(\frac{3a^2b^3}{cd}\right)^3 : \left(\frac{c^2d^3}{3ab^4}\right)^{-2}$ **2. d.** $3a^4bcd^3$

3. Considerando que um ano tem, aproximadamente, 360 dias e que o ser humano tem, em média, 72 batimentos cardíacos por minuto, em 70 anos o número de batimentos cardíacos de uma pessoa é, aproximadamente:

a. $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 7$

b. $2^{13} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

c. $2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2$

d. $2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7$

e. $2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$

3. alternativa **e**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Comente que a notação científica simplifica a representação e as operações com números reais.
Aproveite esse momento e defina ordem de grandeza de um número real: A ordem de grandeza de um número real x é a potência de 10 mais próxima de x. Por exemplo: O número 85 é tal que $10^1 < 85 < 10^2$; como 10^2 é a potência de 10 mais próxima de 85, deduzimos que a ordem de grandeza do número 85 é 10^2. O número 0,08 é tal que $10^{(-2)} < 0{,}08 < 10^{(-1)}$; como $10^{(-1)}$ é a potência de 10 mais próxima de 0,08, deduzimos que a ordem de grandeza do número 0,08 é $10^{(-1)}$.

Notação científica

No dia a dia, os números, em geral, expressam grandezas, como o preço de um produto, a duração de um filme, o custo de um carro etc., que, por serem representadas com poucos algarismos, não apresentam grande dificuldade de entendimento. Porém, no universo científico, há números "gigantescos" ou "minúsculos" em relação àqueles aos quais estamos habituados. Observe dois exemplos.

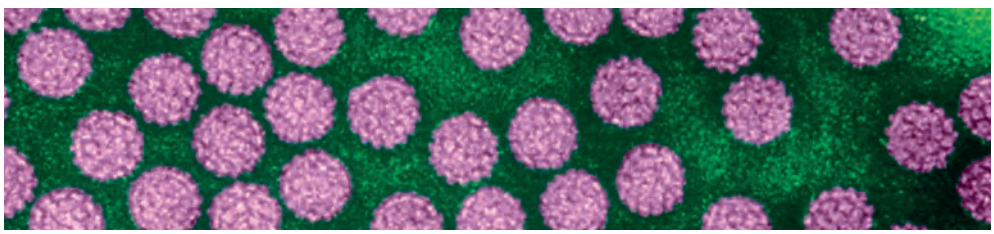
- Segundo dados da Agência Nacional do Petróleo (ANP), as reservas provadas de petróleo no mundo, em 2023, eram da ordem de 1.800.000.000.000 de barris.



SAULO FERREIRA ANGELO/SHUTTERSTOCK

Plataforma de petróleo na Baía de Guanabara, no Rio de Janeiro. Foto de 2023.

- O HPV (sigla em inglês para Papilomavírus Humano) é uma doença que causa lesões cutâneas ou nas mucosas, como verrugas e condilomas. O diâmetro do HPV mede cerca de 0,00000005 m.



KWANGSHIN KIM/SCIENCE SOURCE/FOTOARENA

Representação do papilomavírus humano (imagem de microscopia eletrônica, aumento aproximado de 36.000 vezes; colorido artificialmente).

A dificuldade de trabalhar com esses números levou os cientistas a estabelecerem uma notação simplificada para representá-los: a **notação científica**. Para entender essa notação, observe que o número 1.800.000.000.000 é igual ao produto:

$$1{,}8 \cdot \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{12 \text{ fatores}}$$

Assim, as reservas mundiais de petróleo, em 2023, eram de $1{,}8 \cdot 10^{12}$ barris.

Analogamente, observando que:

$$0{,}00000005 = \frac{5}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{5}{10^8}$$

podemos representar o diâmetro do papilomavírus humano, em notação científica, por $5 \cdot 10^{-8}$ m.

Se considerar adequado, explique aos estudantes que o HPV é responsável pela infecção sexualmente transmissível mais frequente no mundo. Está associado ao desenvolvimento da quase totalidade dos cânceres de colo de útero, bem como a diversos outros tumores em homens e mulheres. Além disso, provoca verrugas anogenitais (região genital e no ânus), a depender do tipo de vírus. Para saber mais, consulte o *site*: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-de-a-a-z/h/hpv. Acesso em: 21 set. 2024.

De maneira geral, todo número real não nulo, com expressão decimal finita, pode ser representado na forma:

$$k \cdot 10^m,$$

em que m é um número inteiro e k é um número real tal que $1 \leqslant |k| < 10$.

Essa representação é denominada **notação científica**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

TRABALHO E JUVENTUDES

Microscopista

Trabalho e juventudes: Você encontrará informações nas **Orientações específicas** deste capítulo.

O microscópio é um instrumento de pesquisa pluridisciplinar que exige a manipulação, extremamente especializada, de um profissional em microscopia: o microscopista. Seu trabalho, além de operar microscópio, envolve a preparação, a leitura e a interpretação das informações contidas nas amostras, como aspecto, composição química, textura, morfologia etc.

A microscopia possibilita estudos e pesquisas em escalas micrométricas e nanométricas em diversas áreas do conhecimento, como química, geologia, física, engenharia, entre outras, e requer um bom conhecimento de matemática no que se refere a unidades de medidas, crescimento e decaimento de populações de organismos vivos ou meia-vida de fármacos ou elementos radioativos (função exponencial) etc.

Quer saber mais sobre essa profissão? Pesquise na internet e compartilhe nas redes sociais um resumo de sua pesquisa.



DRS PRODUCOES/ISTOCK/GETTY IMAGES

Um microscopista, em exercício da função, frequentemente analisa imagens para identificar características minuciosas e realizar diagnósticos ou descobertas científicas. Foto de 2023.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

OBJETO DIGITAL *Podcast:* Imunização

Faça os exercícios no caderno.

4. No vácuo, a luz viaja em linha reta a uma velocidade de 300.000 km por segundo. Para se ter uma ideia dessa velocidade, em 1 segundo a luz percorre uma distância equivalente a, aproximadamente, 7,5 voltas em torno da Terra.

A distância que a luz percorre em um ano (365 dias) é uma unidade usada para medir distâncias astronômicas chamada ano-luz (símbolo: l.y., do inglês, *light-year*, ou a.l., em português).

Dentre as alternativas, qual apresenta a medida mais próxima de 1 ano-luz? **4.** alternativa **b**

a. $8{,}52 \times 10^{14}$ km

b. $9{,}46 \times 10^{12}$ km

c. $7{,}24 \times 10^{15}$ km

d. $5{,}62 \times 10^{18}$ km

e. $3{,}04 \times 10^{25}$ km

5. Elabore um problema sobre notação científica que envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **5.** Resposta pessoal.

6. Poliomielite, também chamada de pólio ou paralisia infantil, é uma doença viral que pode afetar os nervos e levar à paralisia parcial ou total. O vírus causador dessa doença é o poliovírus, que mede aproximadamente 0,00002 mm. O Brasil não registra casos de pólio desde 1989 devido a ampla cobertura vacinal. Porém, em 2023, levantamentos realizados pela Comissão Regional para a Certificação da Erradicação da Poliomielite na Região das Américas classificou o país como de alto risco para a reintrodução do poliovírus.



PREFEITURA DE AÇAILÂNDIA/MINISTÉRIO DA SAÚDE/GOVERNO FEDERAL

6. a. Resposta pessoal.

a. O texto menciona o alto risco de reintrodução do vírus no país. Por que você acha que isso pode ocorrer e como isso reflete na saúde da população?

b. Escreva, em notação científica, a medida em milímetro do poliovírus. **6. b.** $2 \cdot 10^{-5}$ mm

c. Escreva, em notação científica, a medida em centímetro do poliovírus. **6. c.** $2 \cdot 10^{-6}$ cm

d. Uma unidade de comprimento muito usada para expressar medidas de estruturas microscópicas é o **angstrom**, cujo símbolo é Å, definido por: $1\ \text{Å} = 10^{-10}$ m. Escreva, em notação científica, a medida do poliovírus em angstrom. **6. d.** $2 \cdot 10^{2}$ Å

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 e 2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Radiciação no conjunto dos números reais

No dia a dia, realizamos várias operações inversas, como **atar** e **desatar** o cinto de segurança, **amarrar** e **desamarrar** o tênis, **abrir** e **fechar** a porta da geladeira etc.



ANDREY POPOV/SHUTTERSTOCK

Atar Desatar



ERICLEFRANCAIS/SHUTTERSTOCK

Amarrar Desamarrar



SASHKIN/SHUTTERSTOCK



PPART/SHUTTERSTOCK

Abrir Fechar

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Intuitivamente, entendemos que duas operações são inversas entre si quando uma desfaz o que a outra fez.

A Matemática também apresenta operações inversas, como a adição e a subtração; a multiplicação e a divisão. Neste tópico, vamos estudar duas operações inversas. Para compreendê-las, observe as situações a seguir.

(1) Sabendo que, em determinada unidade de medida, o comprimento do lado de um quadrado é 5, temos que a área A do quadrado é calculada pela potência 5^2. Logo, $A = 25$.

(2) Sabendo que, em determinada unidade de medida, a área de um quadrado é 25, temos que a medida do lado do quadrado é a base positiva da potência x^2 tal que $x^2 = 25$. Logo, $x = 5$.

Nessas situações, são realizadas **operações inversas**: em (1), é conhecida a medida 5 do lado do quadrado e calcula-se sua área por meio da potência 5^2; em (2), é conhecida a área 25 do quadrado e calcula-se a medida x do lado, que é o valor positivo da base da potência x^2 tal que $x^2 = 25$. A operação efetuada em (2), que é a inversa da potenciação, chama-se **radiciação**.

Vamos separar o estudo de radiciação em dois casos.

1º caso

Sendo n um número natural não nulo, dizemos que a raiz n-ésima de um número real não negativo a é o número real não negativo b se, e somente se, $b^n = a$.

Em símbolos, sendo $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}_+$, temos:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a, \text{ com } b \in \mathbb{R}_+$$

No radical $\sqrt[n]{a}$, o número n é o **índice do radical**, e o número a é o **radicando**.

Observação

Em um radical de índice 2, o índice não precisa ser escrito, pois fica subentendido. Por exemplo, o símbolo $\sqrt{9}$ deve ser entendido como $\sqrt[2]{9}$.

Exemplos

a. $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$ e $2 \in \mathbb{R}_+$

b. $\sqrt{16} = \sqrt[2]{16} = 4$, pois $4^2 = 16$ e $4 \in \mathbb{R}_+$

c. $\sqrt[1]{5} = 5$, pois $5^1 = 5$ e $5 \in \mathbb{R}_+$

d. $\sqrt[5]{0} = 0$, pois $0^5 = 0$ e $0 \in \mathbb{R}_+$

Notas:

1. Se n é um número natural par não nulo, existem dois números opostos, b e $-b$, com $b > 0$, tais que $b^n = a$ e $(-b)^n = a$. Por convenção, adota-se apenas o número positivo b como valor de $\sqrt[n]{a}$. Por exemplo, embora $4^2 = 16$ e $(-4)^2 = 16$, apenas o número positivo 4 é a raiz quadrada de 16, no conjunto dos números reais. Assim, $\sqrt{16} = 4$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. De acordo com a nota **1**, para qualquer x real temos $\sqrt{x^2} = |x|$, pois a sentença $\sqrt{x^2} = x$ será falsa se x for negativo.

3. Os símbolos $\sqrt[1]{\ }$, $\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, ..., $\sqrt[n]{\ }$ devem ser lidos, respectivamente, como: raiz primeira, raiz quadrada (ou segunda), raiz cúbica (ou terceira), raiz quarta, raiz quinta, ..., raiz n-ésima (ou enésima).

2º caso

Se n é um número natural ímpar, dizemos que a raiz n-ésima de um número real negativo a é o número real negativo b se, e somente se, $b^n = a$.

Em símbolos, sendo $n \in \mathbb{N}$ com n ímpar e $a \in \mathbb{R}_-^*$, temos: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$.
Nessa definição, b é obrigatoriamente negativo.

Enuncie as propriedades dos radicais, enfatizando que sua validade está condicionada ao fato de os radicandos serem positivos ou nulos. Elas não são válidas para radicandos negativos. Observe a contradição a que chegaríamos se as aplicássemos a radicandos negativos:

$2 = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[1]{-2} = -2$ (ABSURDO!)

Propriedade P3

Exemplos

a. $\sqrt[3]{-8} = -2$, pois $(-2)^3 = -8$

b. $\sqrt[5]{-1} = -1$, pois $(-1)^5 = -1$

Observe que, no conjunto dos números reais, não existem radicais de índice par com radicando negativo. Por exemplo, $\sqrt{-9}$ seria o número real cujo quadrado é -9, o que é absurdo, pois o quadrado de qualquer número real é positivo ou nulo.

Também é importante observar que, se a é um número real qualquer e n um número natural ímpar, temos:

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

Por exemplo: $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$.

Demonstre pelo menos uma das propriedades. Por exemplo: Sendo $n \in \mathbb{N}^* \in \{a,b\} \subset \mathbb{R}_+$, demonstre que $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.

Demonstração
Sendo x e y os valores de $\sqrt[n]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$, respectivamente, temos:
$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$ e $x \geqslant 0$
$\sqrt[n]{b} = y \Leftrightarrow y^n = b$ e $y \geqslant 0$
Multiplicamos x^n por y^n: $x^n \cdot y^n = a \cdot b$
Pela propriedade distributiva da potenciação em relação à multiplicação e pela hipótese de que $ab \geqslant 0$, temos: $(xy)^n = ab$, com $ab \geqslant 0$. Por definição de raiz n-ésima, continuamos:
$(xy)^n = ab$, com $ab \geqslant 0 \Leftrightarrow xy = \sqrt[n]{ab}$
Substituindo, nessa última igualdade, x por $\sqrt[n]{a}$ e y por $\sqrt[n]{b}$, concluímos:
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
Peça aos estudantes que tentem, em casa, demonstrar as demais propriedades.

Propriedades dos radicais com radicandos não negativos

Sendo a e b números reais não negativos, e n, k e p números naturais não nulos, temos:

P1.	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	(distributiva da radiciação em relação à multiplicação)
P2.	$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, com $b \neq 0$	(distributiva da radiciação em relação à divisão)
P3.	$\sqrt[nk]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^p}$	(dividem-se por um fator comum o índice do radical e o expoente do radicando)
P4.	$(\sqrt[n]{a})^q = \sqrt[n]{a^q}$, com $q \in \mathbb{R}$	(a potência da raiz é a raiz da potência)
P5.	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	(multiplicam-se os índices)

Exemplos

a. $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{7 \cdot 2} = \sqrt[3]{14}$

b. $\frac{\sqrt[4]{15}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{15}{3}} = \sqrt[4]{5}$

c. $\sqrt[15]{5^6} = \sqrt[5]{5^2}$

d. $\sqrt[3]{8^5} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32$

e. $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$

8. a. verdadeira
8. b. falsa
8. c. verdadeira
8. d. verdadeira
8. e. falsa
8. f. verdadeira

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

7. Calcule mentalmente.

a. $\sqrt{25}$ **7. a.** 5

b. $\sqrt{0{,}25}$ **7. b.** 0,5

c. $\sqrt[3]{8}$ **7. c.** 2

d. $\sqrt[3]{0{,}008}$ **7. d.** 0,2

e. $\sqrt[5]{-32}$ **7. e.** –2

f. $\sqrt{\frac{1}{100}}$ **7. f.** $\frac{1}{10}$

g. $\sqrt[5]{1}$ **7. g.** 1

h. $\sqrt[3]{0}$ **7. h.** 0

i. $\sqrt[1]{12}$ **7. i.** 12

8. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações a seguir.

a. $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{2 \cdot 7}$

b. $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{9 + 16}$

c. $\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{2}$

d. $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$

e. $\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[5]{7}$

f. $\sqrt{2\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{40}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. Aplicando a propriedade P3 dos radicais, podemos reduzir radicais ao mesmo índice. Por exemplo, para obter dois radicais de mesmo índice, respectivamente equivalentes a $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{5}$, podemos seguir estes passos:

- No primeiro radical, multiplicamos por 4 o índice 3 do radical e o expoente 1 do radicando, obtendo:
$$\sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3\cdot 4]{2^{1\cdot 4}} = \sqrt[12]{2^4}$$
- No segundo radical, multiplicamos por 3 o índice 4 do radical e o expoente 1 do radicando, obtendo:
$$\sqrt[4]{5^1} = \sqrt[4\cdot 3]{5^{1\cdot 3}} = \sqrt[12]{5^3}$$

Note, portanto, que os radicais assim obtidos têm o mesmo índice 12.

Aplicando essa ideia, determine o que se pede em cada item.

a. Reduza ao mesmo índice os radicais $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{2^3}$.

b. Efetue: $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5}$. **9. b.** $\sqrt[12]{5^7}$ **9. a.** $\sqrt[6]{5^2}$ e $\sqrt[6]{2^9}$

c. Efetue: $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[5]{3}}$. **9. c.** $\sqrt[20]{3}$

d. Escreva os números $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt[4]{5}$ em ordem decrescente. **9. d.** $\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$

Simplificação de radicais

Para facilitar o trabalho com radicais, é conveniente transformá-los, por meio das propriedades estudadas, na forma mais simples possível.

Revise a decomposição de um número natural em fatores primos. Com a participação dos estudantes, refaça os exemplos, destacando as propriedades aplicadas em cada um.

Exemplos

a. Para simplificar o radical $\sqrt[3]{16}$, decompomos o radicando 16 em fatores primos, obtendo:
$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \sqrt[3]{2^3\cdot 2} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

b. Para simplificar o radical $\sqrt{160}$, decompomos o radicando 160 em fatores primos, obtendo:
$$\sqrt{160} = \sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5} = \sqrt{2^4\cdot 2\cdot 5} = \sqrt{2^4}\cdot\sqrt{2\cdot 5} = 2^2\cdot\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$$

Operações com radicais

Para operar com radicais, aplicamos suas propriedades e as propriedades operatórias da adição e da multiplicação de números reais.

Inicie mostrando que $\sqrt{16}+\sqrt{9} \neq \sqrt{(16+9)}$ e $\sqrt{16}-\sqrt{9} \neq \sqrt{16-9}$. Os estudantes tendem a supor que a soma de radicais é a raiz da soma dos radicandos e que a diferença de radicais é a raiz da diferença dos radicandos.

Exemplos

a. $4\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}(4+6-2) = 7\sqrt{2}$
(fator comum em evidência)

b. $4\sqrt{12} + 6\sqrt{75} = 4\cdot 2\sqrt{3} + 6\cdot 5\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 30\sqrt{3} = 38\sqrt{3}$

c. $6\sqrt[5]{3}\cdot 4\sqrt[5]{2} = (6\cdot 4)\cdot\left(\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{2}\right) = 24\sqrt[5]{6}$

d. $12\sqrt[3]{10} : 4\sqrt[3]{5} = \dfrac{12\sqrt[3]{10}}{4\sqrt[3]{5}} = \dfrac{12}{4}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}} = 3\cdot\sqrt[3]{\dfrac{10}{5}} = 3\sqrt[3]{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

10. Aplicando as propriedades dos radicais, calcule.

a. $\sqrt[3]{729}$ **10. a.** 9

b. $\sqrt[4]{625}$ **10. b.** 5

c. $\sqrt{1.024}$ **10. c.** 32

d. $\sqrt[3]{\dfrac{512}{125}}$ **10. d.** $\dfrac{8}{5}$

e. $\sqrt{0{,}1296}$ **10. e.** 0,36

f. $\sqrt[5]{-32}$ **10. f.** −2

g. $\sqrt[3]{-0{,}027}$ **10. g.** −0,3

h. $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{2}$ **10. h.** −1

11. Simplifique cada um dos radicais a seguir.

a. $\sqrt{12}$ **11. a.** $2\sqrt{3}$

b. $\sqrt{18}$ **11. b.** $3\sqrt{2}$

c. $\sqrt[3]{24}$ **11. c.** $2\sqrt[3]{3}$

d. $\sqrt[4]{32}$ **11. d.** $2\sqrt[4]{2}$

e. $\sqrt{40}$ **11. e.** $2\sqrt{10}$

f. $\sqrt[5]{96}$ **11. f.** $2\sqrt[5]{3}$

g. $\sqrt{\dfrac{48}{25}}$ **11. g.** $\dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

h. $\sqrt[3]{\dfrac{81}{8}}$ **11. h.** $\dfrac{3\sqrt[3]{3}}{2}$

i. $\sqrt{\dfrac{75}{64}}$ **11. i.** $\dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

12. Efetue.

a. $4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}$ **12. a.** $8\sqrt{3}$

b. $2\sqrt{50} + \sqrt{125} - 6\sqrt{5}$ **12. b.** $10\sqrt{2} - \sqrt{5}$

c. $4\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128}$ **12. c.** $18\sqrt[3]{2}$

d. $4\sqrt[5]{3}\cdot 2\sqrt[5]{4}$ **12. d.** $8\sqrt[5]{12}$

e. $12\sqrt[3]{4}\cdot 6\sqrt[3]{2}$ **12. e.** 144

f. $6\sqrt{10} : 2\sqrt{5}$ **12. f.** $3\sqrt{2}$

g. $12\sqrt[3]{16} : 6\sqrt[3]{2}$ **12. g.** 4

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

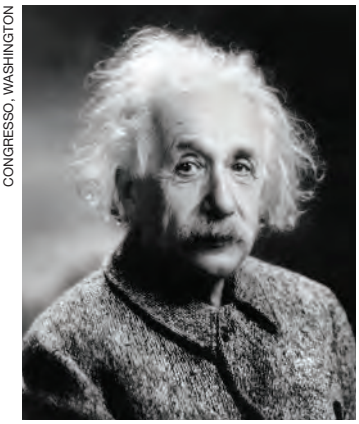
13. Em sua teoria da relatividade, Albert Einstein afirma que, se um objeto viajar próximo à velocidade da luz, sua massa aumentará para o valor m, dado por:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

13. $v = \frac{\sqrt{3}c}{2}$ ou $v \approx 0{,}87c$

em que m_0 é a massa do objeto em repouso, v é a velocidade do objeto em movimento e c é a velocidade da luz.

Considerando que um objeto em repouso tem massa m_0, obtenham, em função de c, a velocidade v em que ele deve viajar para que sua massa duplique.



OREN JACK TURNER - BIBLIOTECA DO CONGRESSO, WASHINGTON

Albert Einstein (1879-1955) defendia que "a imaginação é mais importante que o conhecimento". Foto de 1947.

Potência de expoente racional

A propriedade P3 dos radicais afirma que, para $\{n, k, p\} \subset \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}_+$, temos:

$$\sqrt[nk]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^p}$$

Vamos estender essa propriedade, admitindo a existência de potência com qualquer expoente racional. Por exemplo, dividindo por 5 o índice do radical e o expoente do radicando de $\sqrt[5]{3^2}$, obtemos:

$$\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[1]{3^{\frac{2}{5}}}$$

Como a raiz primeira de qualquer número real é esse próprio número, concluímos que:

$$\sqrt[5]{3^2} = 3^{\frac{2}{5}}$$

Esse procedimento sugere que uma potência de expoente racional seja definida como um radical do seguinte modo:

Sendo a um número real positivo e os números inteiros k e n, com $n \geqslant 1$, definimos:

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$$

Observação

Se os números inteiros k e n forem ambos positivos, define-se:

$$0^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{0^k} = 0$$

Exemplos

a. $3^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{3^7}$

b. $9^{0,5} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

c. $16^{-0,25} = 16^{-\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^{-1}} = \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

As propriedades P1 a P5 das potências para expoentes inteiros continuam válidas para expoentes racionais.

Exemplos

a. $7^{\frac{3}{2}} \cdot 7^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = 7^{\frac{7}{4}}$

b. $3^{0,9} : 3^{0,4} = 3^{0,9 - 0,4} = 3^{0,5}$

c. $(5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 5^1$

d. $(2x)^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}$ (com $x \geqslant 0$)

e. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Calcule o valor da expressão:

$$E = 81^{0,5} + 125^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,25}$$

Resolução

Podemos resolver essa questão de dois modos.

1º modo

A expressão é equivalente a:

$$E = (3^4)^{0,5} + (5^3)^{\frac{1}{3}} + (2^4)^{0,25}$$

Aplicando as propriedades das potências de expoente racional, temos:

- $(3^4)^{0,5} = 3^{4 \cdot 0,5} = 3^2 = 9$
- $(5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 5^1 = 5$
- $(2^4)^{0,25} = 2^{4 \cdot 0,25} = 2^1 = 2$

Logo: $E = 9 + 5 + 2 = 16$.

2º modo

Podemos calcular o valor da expressão E aplicando a definição de potência de expoente racional, isto é:

- $81^{0,5} = 81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{81} = 9$
- $125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125} = 5$
- $16^{0,25} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$

Logo: $E = 9 + 5 + 2 = 16$.

Mentes brilhantes

Um passo além dos expoentes inteiros

O sábio parisiense Nicole Oresme (1323-1382), que se destacou com trabalhos pioneiros e precursores da Geometria analítica e do Cálculo infinitesimal, foi um dos importantes matemáticos que proporcionaram uma visão mais ampla da proporcionalidade.

Embora as notações usadas fossem diferentes das atuais, na sua obra *Algorismus proportionum*, ele sugere o uso de notações especiais para potências fracionárias. Adotando a notação moderna, o raciocínio de Oresme pode ser descrito, para qualquer número real a não negativo, da seguinte maneira:

$$\sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2} = a^{\frac{1}{2}}$$

A partir dessa igualdade, ele generalizou, para qualquer número natural não nulo n e qualquer número inteiro p:

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}},$$

e, no caso em que $a = 0$, deve-se ter $p > 0$, para que exista a potência a^p.

Elaborado com base em: BOYER, Carl B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Potência de expoente irracional

Como poderíamos definir a potência $3^{\sqrt{2}}$?

Sabemos que $\sqrt{2} = 1,41421356...$ Assim, definimos $3^{\sqrt{2}}$ como o número para o qual convergem os valores nas duas colunas do quadro, em que, na primeira coluna, os expoentes de 3 são aproximações de $\sqrt{2}$ por falta e crescem indefinidamente e, na segunda, os expoentes de 3 são aproximações de $\sqrt{2}$ por excesso e decrescem indefinidamente.

Valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$ (aproximações por falta)	Valores aproximados de $3^{\sqrt{2}}$ (aproximações por excesso)
$3^{1,4} \approx 4,655536722$	$3^{1,5} \approx 5,196152423$
$3^{1,41} \approx 4,706965002$	$3^{1,42} \approx 4,758961394$
$3^{1,414} \approx 4,727695035$	$3^{1,415} \approx 4,732891793$
$3^{1,4142} \approx 4,72873393$	$3^{1,4143} \approx 4,729253463$
⋮	⋮

Observação

As aproximações apresentadas no quadro foram obtidas usando uma calculadora científica.

Observe que, até onde calculamos nas duas colunas, podemos garantir que:

$$4{,}72873393 < 3^{\sqrt{2}} < 4{,}729253463$$

Assim, podemos ter certeza da parte inteira e das duas primeiras casas decimais para o resultado $3^{\sqrt{2}}$, isto é, a melhor aproximação para esse resultado, com duas casas decimais, é $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}72$. Se continuarmos os cálculos nas duas colunas do quadro, mais casas decimais corretas poderão ser acrescentadas a esse resultado.

De maneira análoga, define-se qualquer potência de expoente irracional e base a com $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Para a base 0 (zero) e o expoente t irracional positivo, define-se: $0^t = 0$. Por exemplo, $0^{\sqrt{3}} = 0$.

Demonstra-se que as propriedades P1 a P5 das potências para expoentes inteiros continuam válidas para expoentes irracionais.

Exemplos

a. $4^{\sqrt{3}} \cdot 4^{5\sqrt{3}} = 4^{\sqrt{3}+5\sqrt{3}} = 4^{6\sqrt{3}}$

b. $7^{3\pi} : 7^{\pi} = 7^{3\pi-\pi} = 7^{2\pi}$

c. $(2^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} = 2^{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = 2^5 = 32$

d. $(6x)^{\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2}} \cdot x^{\sqrt{2}}$ (com $x \geqslant 0$)

e. $\left(\frac{4}{5}\right)^{\sqrt{7}} = \frac{4^{\sqrt{7}}}{5^{\sqrt{7}}}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

14. Represente as potências sob a forma de radical.

a. $9^{\frac{2}{5}}$ **14. a.** $\sqrt[5]{81}$ **c.** $5^{\frac{2}{3}}$ **14. c.** $\sqrt[3]{5^2}$ **e.** $3^{0,75}$ **14. e.** $\sqrt[4]{27}$

b. $6^{\frac{1}{2}}$ **14. b.** $\sqrt{6}$ **d.** $7^{0,5}$ **14. d.** $\sqrt{7}$ **f.** $123^{0,1}$ **14. f.** $\sqrt[10]{123}$

15. Represente os radicais sob a forma de potência.

a. $\sqrt[5]{2}$ **15. a.** $2^{\frac{1}{5}}$ **c.** $\sqrt[4]{18^2}$ **15. c.** $18^{\frac{1}{2}}$ ou $324^{\frac{1}{4}}$

b. $\sqrt[9]{7^3}$ **15. b.** $7^{\frac{3}{9}}$ ou $7^{\frac{1}{3}}$ **d.** $\sqrt[3]{a^2}$ (com $a \geqslant 0$) **15. d.** $a^{\frac{2}{3}}$

16. Calcule o valor das expressões a seguir.

a. $36^{\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}} - 16^{\frac{3}{4}}$ **16. a.** $-\frac{5}{3}$

b. $100^{0,5} - 81^{0,75} + 16^{-1,25}$ **16. b.** $-\frac{543}{32}$

17. Em uma calculadora científica, ao pressionar as teclas 3, ^, 2 e =, aparecerá no visor o valor da potência 3^2, isto é, 9. Porém, nenhuma sequência de teclas fará surgir no visor o valor exato de $2^{0,5}$. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Redija um texto justificando sua resposta.

17. Verdadeira. Essa potência equivale a $\sqrt{2}$, que é um número irracional; portanto, não será possível obter o valor exato da potência $2^{0,5}$.

18. Calcule o valor de:

a. $\left[(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$ **18. a.** 3 **c.** $1^{\sqrt{5}} + 0\pi$ **18. c.** 1

b. $\left(3^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}}$ **18. b.** 13.824 **d.** $\frac{81^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{81}}$ **18. d.** 3

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 3 e 4.

2. A função exponencial

No início do período de chuvas, a área da superfície de um lago era de 1 km². Ao longo desse período, a cada dia a área da superfície desse lago aumentou 2% em relação ao dia anterior. Para prevenir a população ribeirinha sobre um possível alagamento, os técnicos da Defesa Civil elaboraram uma equação que previsse a área da superfície do lago em função tempo t, em dia. Para isso, raciocinaram do seguinte modo: se a área da superfície do lago, que inicialmente media 1 km², cresce 2% ao dia, então, ao final de t dias, a área A da superfície do lago, em quilômetro quadrado, pode ser calculada por:

$$A = 1 \cdot (1 + 0{,}02)^t \Rightarrow A = (1{,}02)^t$$

Observações

- $2\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$
- O raciocínio usado pelos técnicos é o mesmo empregado para o cálculo do montante com juro composto.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Por apresentar a variável t como expoente de uma constante positiva e diferente de 1, a função de lei $A = (1{,}02)^t$ é chamada função exponencial. Embora, nesse caso, a variável t só possa assumir valores reais não negativos, pois t representa o tempo, podemos conceituar esse tipo de função com domínio $\mathbb{R}$, conforme a definição a seguir.

Chama-se **função exponencial** toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ tal que $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$.

Exemplos

a. $f(x) = 2^x$ **b.** $g(x) = 5^x$ **c.** $h(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Gráfico da função exponencial

Vamos esboçar o gráfico de funções exponenciais determinando alguns pontos, conforme mostram os exemplos a seguir.

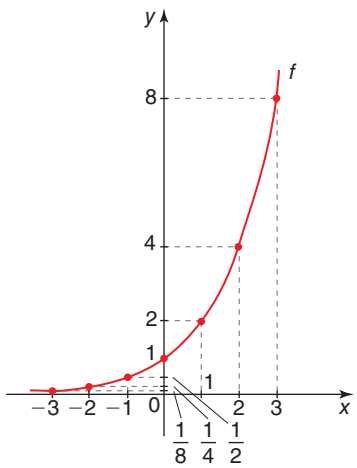
Exemplos

a. $f(x) = 2^x$

Atribuindo a x os infinitos valores reais, obtemos o gráfico:

$f(x) = 2^x$

x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$
- f é crescente em todo seu domínio.

Se achar conveniente, ressaltar que, nesses gráficos, a curva se aproxima do eixo Ox sem tocá-lo.

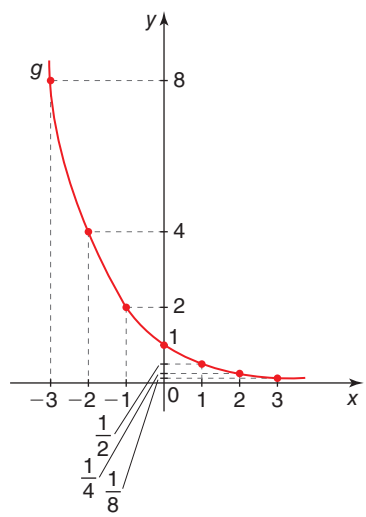
É esperado que os estudantes percebam que assim como 2^x é crescente, $h(x)$ também é crescente em todo seu domínio, e, assim como $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é descrente, $j(x)$ também é decrescente em todo seu domínio.

b. $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Atribuindo a x os infinitos valores reais, obtemos o gráfico:

$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$g(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



- $D(g) = \mathbb{R}$
- $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$
- g é decrescente em todo seu domínio.

Reflexão

Assim como esboçamos os gráficos das funções 2^x e $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, podemos esboçar as funções com lei de formação $h(x) = a^x$ e $j(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$, $a \in \mathbb{N}^*$. O que é possível observar nessas funções?

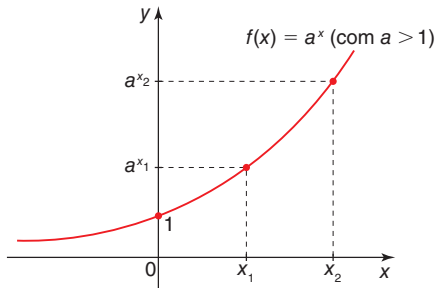
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedades da função exponencial

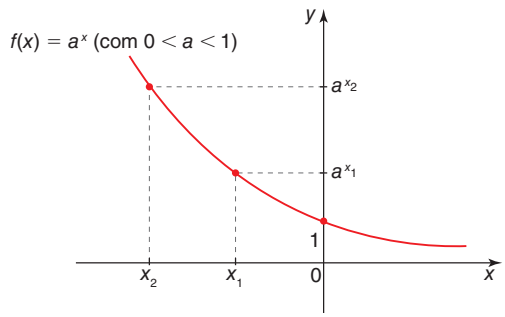
P1. Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

P2. A função exponencial com lei $f(x) = a^x$ é **crescente** em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$.



Tem-se, então: $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$, para qualquer a real maior que 1.

P3. A função exponencial com lei $f(x) = a^x$ é **decrescente** em todo seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$.



Tem-se, então: $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1$, para qualquer a real com $0 < a < 1$.

Observação

A propriedade P1 decorre do fato de a função exponencial ser uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

2. Uma população de vírus, estimada em 100.000 indivíduos, foi submetida à ação de uma droga, que a reduziu à taxa de 10% ao dia.

a. Qual é a equação que expressa o número N de indivíduos dessa população, em função do tempo t, em dia, a partir do instante inicial de submissão à droga?

b. A quantos indivíduos se reduziu a população de vírus ao final de 4 dias, a partir do instante inicial de submissão à droga?

Resolução

a. Raciocinando como no cálculo do montante a juro composto, temos que o valor M de uma grandeza qualquer, a partir de seu valor inicial C, do tempo t e da taxa constante i de crescimento ou decrescimento, pode ser calculado pela fórmula:

$$M = C(1 + i)^t,$$

em que t e i se referem à mesma unidade de tempo.

Nesse caso, como temos um decrescimento de um valor positivo C, a taxa i é negativa:

$i = -10\% = -0{,}1$. Assim, a equação pedida é:

$N = 100.000 \cdot (1 - 0{,}1)^t$, ou seja,

$N = 100.000 \cdot (0{,}9)^t$

b. Para calcular o número N de indivíduos da população 4 dias após o instante inicial de submissão à droga, basta substituir por 4 a variável t da equação obtida no item **a**:

$N = 100.000 \cdot (0{,}9)^4 \Rightarrow N = 65.610$

Assim, a população se reduziu a 65.610 indivíduos 4 dias após o instante inicial de submissão à droga.

Análise da resolução: Embora os cálculos realizados estejam corretos, o estudante cometeu um erro na conclusão, pois uma função exponencial é da forma $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Como $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, temos que f é uma função exponencial decrescente, pois a base da potência, $\left(\frac{1}{2}\right)^x$, está entre 0 e 1.

Aproveite o momento de conversa com a turma para verificar se alguém teve dificuldade para resolver o exercício e estimule os demais estudantes a ajudar os colegas na solução das dificuldades apontadas.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Em dupla, encontrem qual foi esse erro e discutam o que pode tê-lo causado. Refaçam a resolução no caderno e depois conversem com o professor e outros colegas para expor a estratégia de raciocínio usada por vocês.

Exercício

Classifique em crescente ou decrescente a função com lei $f(x) = \frac{1 + 2^{-x}}{1 + 2^x}$, justificando sua resposta.

Resolução

Temos que:

$$f(x) = \frac{1 + 2^{-x}}{1 + 2^x} = \frac{1 + \frac{1}{2^x}}{1 + 2^x} = \frac{\frac{2^x + 1}{2^x}}{1 + 2^x} =$$

$$= \frac{2^x + 1}{2^x} \cdot \frac{1}{1 + 2^x} = \frac{1}{2^x}$$

$\therefore f(x) = 2^{-x}$

Como a base da potência, 2^{-x}, é um número maior que 1, concluímos que a função exponencial $f(x) = 2^{-x}$ é crescente.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

19. Respostas no final do livro

19. Construa o gráfico e determine o domínio e o conjunto imagem das funções a seguir.

a. $f(x) = 3^x$

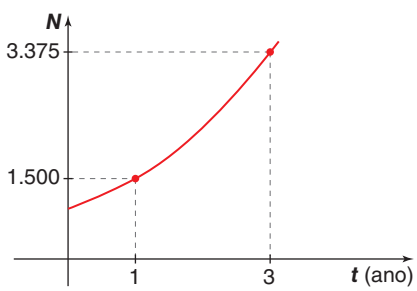
b. $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c. $h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$

d. $t(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

20. (UFSM-RS) As matas ciliares desempenham importante papel na manutenção das nascentes e estabilidade dos solos nas áreas marginais. Com o desenvolvimento do agronegócio e o crescimento das cidades, as matas ciliares vêm sendo destruídas. Um dos métodos usados para a sua recuperação é o plantio de mudas.

O gráfico mostra o número N de mudas, $N(t) = ba^t$ ($0 < a \neq 1$ e $b > 0$), a serem plantadas no tempo t (em ano), numa determinada região.



De acordo com os dados, o número de mudas a serem plantadas, quando $t = 2$ anos, é igual a:

a. 2.137.

b. 2.150.

c. 2.250.

d. 2.437.

e. 2.500.

20. alternativa **c**

21. Do início do ano de 1701 ao final de 1900, a população mundial cresceu, em média, 0,2% ao ano. Sabendo que, no início de 1701, a população mundial era de 600 milhões de pessoas, utilize as aproximações $(1{,}002)^{40} \approx 1{,}08$ e $(1{,}002)^{200} \approx 1{,}49$.

21. a. $P = 600(1{,}002)^t$

a. Determine a equação que expresse a população mundial P, em milhão de habitantes, em função do tempo t, em ano, desde o início de 1701 até o final de 1900.

b. Calcule, aproximadamente, a população mundial ao final do ano 1740. **21. b.** 648 milhões de pessoas

c. Calcule, aproximadamente, a população mundial ao final de 1900. **21. c.** 894 milhões de pessoas

22. No início de um período de seca, o volume de água de uma represa era estimado em 240 milhões de metros cúbicos. A Companhia de Saneamento Básico do Estado previu que, a partir daquele momento, haveria um decréscimo mensal de 3% no volume de água da represa durante os 8 meses seguintes. Em relação às expectativas da Companhia de Saneamento Básico do Estado, responda aos itens a seguir, adotando, se necessário, a aproximação: $(0{,}97)^5 \approx 0{,}86$.

a. Determine a equação que expressa o volume de água da represa, em milhão de metro cúbico, em função do tempo, em mês, para os 8 meses iniciais do período de seca. **22. a.** $V(t) = 240(0{,}97)^t$

b. Qual era o volume da represa ao final do 5º mês do período de seca? **22. b.** 206,4 milhões de metros cúbicos

23. Elabore um problema sobre função exponencial que envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

23. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares de 5 a 7.

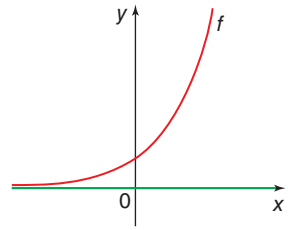
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Conectado

Conectado: Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

No gráfico da função com lei $y = 2^x$, construído na página 262, observamos que, percorrendo o eixo Ox até o $-\infty$, o gráfico se aproxima indefinidamente desse eixo, mas sem tocá-lo. Por isso, a reta Ox é chamada **assíntota** (horizontal) do gráfico da função com lei $y = 2^x$.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Usando um *software* de construção de gráficos, faça o que se pede.

a. Construa o gráfico de algumas funções com lei de formação $y = p + 2^x$, escolhendo valores reais para p. Depois, determine a reta (horizontal) assíntota de cada um desses gráficos.

b. Construa o gráfico de algumas funções com lei de formação $y = 2^{x+p}$, escolhendo valores reais para p. Em seguida, determine a reta (horizontal) assíntota de cada um desses gráficos.

c. Elabore um texto sobre a relação entre a escolha de p e a determinação dessas assíntotas, usando as imagens geradas no programa de construção de gráficos como exemplos.

Assista ao vídeo **Breve relato do fim** para entender um pouco mais sobre funções exponenciais. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1057. Acesso em: 8 jul. 2024.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3. Equação exponencial

Uma substância radioativa se desintegra à razão de 20% ao ano. Considerando que, neste momento, uma amostra dessa substância tem a massa igual a 100 g, podemos expressar a massa m remanescente dessa amostra, em grama, em função da medida do tempo t, em ano, do seguinte modo:

$$m = 100 \cdot (1 - 0{,}2)^t, \text{ ou seja, } m = 100 \cdot (0{,}8)^t$$

Qual o tempo necessário para que a massa m seja reduzida a 51,2 g?
Para que $m = 51{,}2$, devemos ter:

$$100 \cdot (0{,}8)^t = 51{,}2$$

Os métodos de resolução desse tipo de equação, que vamos estudar a seguir, permitem deduzir que $t = 3$, com o que concluímos que daqui a 3 anos a massa remanescente dessa amostra será de 51,2 g.

Note que essa equação apresenta a variável no expoente de uma potência de base positiva e diferente de 1, por isso ela é chamada de **equação exponencial**.



FRANCO VOLPATO/SHUTTERSTOCK

Radioatividade é a desintegração espontânea de núcleos atômicos mediante a emissão de partículas subatômicas, chamadas **partículas alfa** e **partículas beta**, e de radiações eletromagnéticas, denominadas **raios X** e **raios gama**.

A situação introdutória apresenta a relação das equações exponenciais com substância radioativa, possibilitando análise das relações entre matéria e energia e favorecendo o trabalho interdisciplinar com Física. Se possível, promova a participação do professor de Física para explorar o assunto com os estudantes. Destaque novamente a aplicação da fórmula $M = C(1 + i)^t$ no estudo da função exponencial. Reforce a importância dessa fórmula.

Equação exponencial é toda equação que apresenta a incógnita no expoente de uma ou mais potências de base positiva e diferente de 1.

Exemplos

a. $5^x = 25$ **b.** $9^x - 3^x = 6$ **c.** $2^{x+1} = 0{,}5$

A resolução de uma equação exponencial baseia-se na propriedade P1 das funções exponenciais, isto é, sendo a um número real qualquer, com $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $64^x = 32$.

Resolução

Decompondo em fatores primos os números 64 e 32, obtemos uma igualdade de potências de mesma base positiva e diferente de 1. Assim:

$$64^x = 32 \Rightarrow (2^6)^x = 2^5$$

$$\therefore 2^{6x} = 2^5$$

Pela propriedade P1 das funções exponenciais, temos:

$$2^{6x} = 2^5 \Rightarrow 6x = 5$$

$$\therefore x = \frac{5}{6}$$

Logo, o conjunto solução da equação é $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$.

4. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $3^x = 1$.

Resolução

O número 1 pode ser representado por 3^0. Assim, a equação proposta é equivalente a $3^x = 3^0$.

Pela propriedade P1 das funções exponenciais, temos:

$$3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{0\}$.

5. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $7^x = 5^x$.

Resolução

Dividindo por 5^x ambos os membros da equação, temos:

$$\frac{7^x}{5^x} = \frac{5^x}{5^x} \Rightarrow \left(\frac{7}{5}\right)^x = 1$$

O número 1 pode ser representado por $\left(\frac{7}{5}\right)^0$.

Assim, a equação proposta é equivalente a:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^x = \left(\frac{7}{5}\right)^0 \Rightarrow x = 0$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{0\}$.

6. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $3^{x+2} + 3^{x-1} = 84$.

Resolução

$$3^{x+2} + 3^{x-1} = 84 \Rightarrow 3^x \cdot 3^2 + 3^x : 3^1 = 84$$

$$\therefore 9 \cdot 3^x + \frac{3^x}{3} = 84$$

Fazendo a mudança de variável $3^x = k$, temos:

$$9k + \frac{k}{3} = 84 \Rightarrow 27k + k = 252$$

$$\therefore 28k = 252 \Rightarrow k = 9$$

Retornamos à variável original x, substituindo k por 3^x:

$$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2$$

$$\therefore x = 2$$

Logo, $S = \{2\}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

24. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações. **24. b.** $S = \{-11\}$

a. $64^x = 256$ **24. a.** $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

b. $25^{x+2} = 125^{x+5}$

c. $\left(\frac{8}{125}\right)^{2x-1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2x}$ **24. c.** $S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$

d. $5^{2x-1} = 1$ **24. d.** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

e. $7^x = 8^x$ **24. e.** $S = \{0\}$

f. $\sqrt[3]{25^x} = \sqrt{5}$ **24. f.** $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

25. Determine o conjunto dos valores reais de x que satisfaçam cada uma das equações.

a. $2^{x+1} + 2^{x-1} = 20$ **25. a.** $S = \{3\}$

b. $3^{x+1} - 3^{x+2} = -54$ **25. b.** $S = \{2\}$

c. $2^{x+1} + 2^{1-x} - 5 = 0$ **25. c.** $S = \{1, -1\}$

26. Em um estudo sobre dois tipos de espécie animal, um grupo de cientistas chegou à conclusão de que as populações dos grupos A e B podem ser estimadas pelas funções $f(t) = 2^{t+1} + 200$ e $g(t) = 4^t + 152$, em que t representa o tempo, em ano, sendo $t = 0$ o instante atual, e as expressões $f(t)$ e $g(t)$ representam o número de indivíduos de A e B, respectivamente. Supondo que essas estimativas continuem válidas por tempo suficiente, daqui a quantos anos essas duas populações terão o mesmo número de indivíduos? **26.** 3 anos.

27. Atualmente, uma amostra de substância radioativa tem massa igual a 6 kg. Sabendo que essa amostra se desintegra à razão de 48,8% ao ano, responda às questões a seguir. **27. a.** $M = 6(0{,}512)^t$

a. Qual é a equação que expressa a massa M dessa amostra, em quilograma, em função do tempo t, em ano, a partir do momento atual?

b. Calcule a massa dessa amostra, em quilograma, daqui a quatro meses. **27. b.** 4,8 kg

28. Elabore um problema sobre equação exponencial que envolva uma situação do cotidiano. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **28.** Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares de 8 a 10.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Conectado

Nos capítulos anteriores, vimos que o juro composto está associado à função exponencial, enquanto o juro simples está relacionado à função linear. Acompanhe a seguir uma situação hipotética em que podemos observar esse fato.

A direção de uma escola propôs um projeto escolar de captação de recursos para comprar materiais e equipamentos eletrônicos. Para financiar o projeto, os estudantes decidiram explorar duas opções de empréstimo oferecidas por uma instituição bancária. Cada uma tem uma modalidade de capitalização diferente: juro simples e juro composto.

As opções de empréstimo oferecidas pela instituição bancária foram as indicadas a seguir.

- Opção 1: Empréstimo com aplicação de juro simples

  Valor do empréstimo: R$ 5.000,00
  Taxa de juros: 8% ao mês
  Prazo: 12 meses

- Opção 2: Empréstimo com aplicação de juro composto

  Valor do empréstimo: R$ 5.000,00
  Taxa de juros: 8% ao mês
  Prazo: 12 meses

Vamos comparar os dois tipos de juro em termos de crescimento e custo do empréstimo. Para isso, vamos utilizar uma planilha eletrônica e gráficos para representar visualmente os dois casos.

Caso 1

Para calcular o custo do empréstimo, mês a mês, da aplicação de juro simples, devemos utilizar a fórmula $M = C + Cit$. Como $C = 5.000$ e $i = 0{,}08$, podemos escrever:

$$M = C + Cit \Rightarrow M = 5.000 + 5.000 \cdot 0{,}08t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M = 5.000 + 400t$$

Note que essa relação é a lei de uma função afim.

Agora, vamos utilizar uma planilha eletrônica para obter os valores do custo do empréstimo, mês a mês.

Passo 1: Na planilha eletrônica, organize as colunas com os títulos "Tempo (t)", "Juro (R$)" e "Custo do empréstimo (R$)", como apresentado a seguir.

	A	B	C
1	Tempo (t)	Juro (R$)	Custo do empréstimo (R$)
2			
3			
4			
5			
6			
7			

Passo 2: Na coluna Tempo (t), preencha com os números 0 a 12, que representam os meses de aplicação. A linha 2 indica o início da aplicação, e, por isso, na célula B2 é digitado 0, pois ainda não gerou juro, e na célula C2, digitado 5.000, que é o valor inicial do empréstimo.

	A	B	C
1	Tempo (t)	Juro (R$)	Custo do empréstimo (R$)
2	0	0	5.000,00
3	1		
4	2		
5	3		
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		
10	8		
11	9		
12	10		
13	11		
14	12		
15			
16			
17			

Passo 3: Para calcular o juro do primeiro mês, digite =0,08*C2 na célula B3 e tecle *enter*, e, para calcular o custo do empréstimo do primeiro mês, digite =C2+B3 na célula C3 e tecle *enter*.

Passo 4: Como em uma aplicação com regime de juro simples, a taxa de juro incide apenas sobre o capital inicial, o valor pago de juro será o mesmo todo mês. Então, para obter o custo do empréstimo nos demais meses, selecione a célula C3 e, em seguida, clique no quadrinho localizado na parte inferior direita da célula selecionada e arraste até a linha 14 (correspondente ao 12º mês).

	A	B	C
1	Tempo (t)	Juro (R$)	Custo do empréstimo (R$)
2	0	0	5.000,00
3	1	400,00	5.400,00
4	2	400,00	5.800,00
5	3	400,00	6.200,00
6	4	400,00	6.600,00
7	5	400,00	7.000,00
8	6	400,00	7.400,00
9	7	400,00	7.800,00
10	8	400,00	8.200,00
11	9	400,00	8.600,00
12	10	400,00	9.000,00
13	11	400,00	9.400,00
14	12	400,00	9.800,00
15			
16			
17			

Portanto, o custo do empréstimo ao fim dos 12 meses foi R$ 9.800,00.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Apresentamos uma situação que envolve representações gráficas e a análise de planilhas sobre empréstimos com aplicação de juros simples e composto. Espera-se que os estudantes identifiquem que o juro composto está relacionado à função exponencial, enquanto o juro simples se associa à função linear. Além disso, devem observar que o gráfico do juro simples apresenta crescimento linear, enquanto o do juro composto exibe crescimento exponencial.
Esta atividade também promove o desenvolvimento da **competência geral 5**, ao incentivar a resolução de problemas com o uso de tecnologias digitais.

Caso 2

Para calcular o custo do empréstimo, mês a mês, da aplicação de juro composto, devemos utilizar a fórmula $M = C(1 + i)^t$. Como $C = 5.000$ e $i = 0{,}08$, podemos escrever:

$$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 5.000(1 + 0{,}08)^t \Rightarrow M = 5.000(1{,}08)^t$$

Note que essa relação é a lei de uma função exponencial.

Agora, vamos utilizar uma planilha eletrônica para obter os valores do custo do empréstimo, mês a mês.

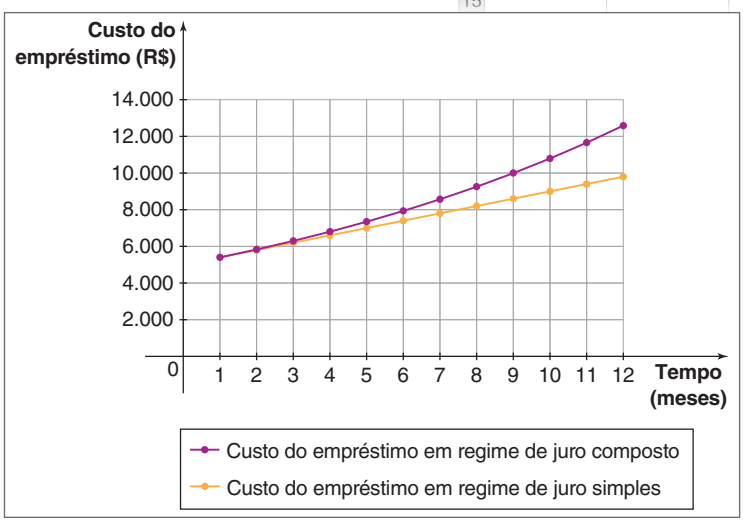
Repita os passos 1 a 3 apresentados anteriormente.

Passo 4: Para obter o juro e o custo do empréstimo nos demais meses, selecione as células B3 e C3 e, em seguida, clique no quadrinho localizado na parte inferior direita das células selecionadas e arraste até a linha 14 (correspondente ao 12º mês).

Passo 5: Ainda com as células selecionadas, clique no ícone **Excluir casa decimal** para deixar os valores em formato de duas casas decimais.

Portanto, o custo do empréstimo ao fim dos 12 meses foi R$ 12.590,85.

	A	B	C
1	Tempo (t)	Juro (R$)	Custo do empréstimo (R$)
2	0	0	5.000,00
3	1	400,00	5.400,00
4	2	432,00	5.832,00
5	3	466,56	6.298,56
6	4	503,88	6.802,44
7	5	544,20	7.346,64
8	6	587,73	7.934,37
9	7	634,75	8.569,12
10	8	685,53	9.254,65
11	9	740,37	9.995,02
12	10	799,60	10.794,62
13	11	863,57	11.658,19
14	12	932,66	12.590,85
15			



Agora, vamos utilizar um *software* de construção de gráficos para analisar o gráfico das duas funções (linear e exponencial) em um mesmo plano cartesiano.

Note que:

- O gráfico para o juro simples apresenta um crescimento linear.
- O gráfico para o juro composto apresenta um crescimento exponencial.

Com base na análise e na comparação dos dois gráficos, a opção de empréstimo mais adequada ao projeto escolar, considerando o custo total e o crescimento do saldo devedor ao longo do tempo, é o empréstimo em regime de juro simples.

Agora é com você! Resolva a atividade a seguir, utilizando uma planilha eletrônica.

Dois impostos, A e B, têm o mesmo valor nominal de R$ 1.000,00 e a mesma data-limite para pagamento. Após essa data de vencimento, o montante da dívida de cada imposto passa a ser o valor nominal acrescido de juros pelo atraso. O montante da dívida do imposto A cresce em regime de juro simples à taxa constante de 10% ao mês, e o do imposto B cresce em regime de juro composto à taxa de juro composto de 10% ao mês.

Supondo que um contribuinte pagou os dois impostos simultaneamente com 5 meses de atraso, faça o que se pede: **a.** Resposta no final do livro.

a. Elabore uma planilha em que constem o valor nominal de cada imposto e o montante da dívida, mês a mês, em real, até o final do 5º mês, quando os impostos foram pagos.

b. Qual foi o montante pago pelo imposto A, em real? **b.** R$ 1.500,00

c. Qual foi o montante pago pelo imposto B, em real? **c.** R$ 1.610,51

d. Em um *software* de construção de gráficos, construa os gráficos utilizando os dados da planilha.

d. Resposta no final do livro.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. Qual é a capacidade de armazenamento de dados do disco rígido (*HD*) de seu computador?

Ao responder a essa pergunta, você sabe exatamente o significado de sua resposta? Caso tenha dúvidas, este exercício vai ajudá-lo.

Na linguagem da informática, um *bit* (*binary digit*) é cada um dos dois impulsos elétricos identificados pelo computador na codificação de expressões literais, numéricas ou simbólicas. Um desses impulsos é representado pelo dígito 1; e o outro, pelo dígito 0 (zero).

Um *byte* (*binary term*) é um conjunto de 8 *bits* quaisquer, representando uma letra, um algarismo ou um símbolo; por exemplo, no sistema de códigos American Standard Code Information Interchange (ASCII), o *byte* 01000110 representa a letra F, e o *byte* 01000000 representa o símbolo @ (arroba). O quadro a seguir apresenta os múltiplos do *byte*, que é simbolizado pela letra B.

Múltiplos do *byte* (Sistema Internacional)

Nome	Símbolo	Equivalência
Byte	B	10^0 B
Kilobyte	KB	10^3 B
Megabyte	MB	10^3 KB
Gigabyte	GB	10^3 MB
Terabyte	TB	10^3 GB
Petabyte	PB	10^3 TB
Exabyte	EB	10^3 PB
Zettabyte	ZB	10^3 EB
Yottabyte	YB	10^3 ZB

Com base nessas informações, responda aos itens seguintes, adotando a notação científica nas respostas.

a. A capacidade de armazenamento de dados do disco rígido de um computador pessoal (*PC*) é de 500 *gigabytes* (GB). Qual é a capacidade desse disco em *bytes* (B)? **1. a.** $5 \cdot 10^{11}$ B

b. Em 2023, o *Frontier* era o supercomputador mais rápido do mundo. Sua capacidade de armazenamento de dados era cerca de 700 *petabytes* (PB). Essa capacidade equivale a quantas vezes a capacidade de armazenamento do *PC* citado no item **a**?

1. b. $1{,}4 \cdot 10^6$ vezes

2. Em muitas situações, contamos unidades em agrupamentos com denominações especiais; por exemplo, em vez de 12 ovos, dizemos 1 dúzia de ovos; em vez de 100 anos, dizemos 1 século; em vez de 1.000 metros, dizemos 1 quilômetro etc. Do mesmo modo, na contagem de átomos, elétrons, moléculas etc. é comum usar um agrupamento de $6{,}02 \cdot 10^{23}$ unidades como uma grandeza denominada **mol**. Por exemplo:

- $6{,}02 \cdot 10^{23}$ átomos = 1 mol de átomos;
- $6{,}02 \cdot 10^{23}$ elétrons = 1 mol de elétrons;
- $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas = 1 mol de moléculas etc.

De acordo com esse conceito, resolva o problema a seguir.

Um cubo maciço de alumínio medindo ℓ cm de aresta é formado por $4{,}816 \cdot 10^{24}$ átomos. Expresse, em mol, a quantidade de átomos que formam um cubo maciço de alumínio medindo 2ℓ cm de aresta. **2.** 64 mols

Nota: O número $6{,}02 \cdot 10^{23}$ é conhecido como constante de Avogadro, em homenagem ao físico Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro (1776-1856).

3. Com uma calculadora científica, sem usar as teclas que apresentam símbolo de radical, obtenha uma aproximação com quatro casas decimais para cada um dos radicais a seguir.

a. $\sqrt{3}$ **3. a.** 1,7321

b. $\sqrt[4]{7}$ **3. b.** 1,6266

c. $\sqrt[5]{9}$ **3. c.** 1,5518

4. Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule as potências a seguir, com a aproximação de quatro casas decimais.

a. $3^{\sqrt{2}}$ **4. a.** 4,7288

b. $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ **4. b.** 1,8226

c. 4^{π} **4. c.** 77,8802

5. A cada hora, o número de bactérias no sangue de um paciente se reduz à metade, a partir do instante em que um antibiótico é injetado na corrente sanguínea. No momento da injeção do antibiótico, a população P de bactérias no sangue do paciente era estimada em 512.000 indivíduos, e a redução da população ocorreu durante 8 horas. **5. a.** 32.000 bactérias

a. Determine a quantidade de bactérias no sangue do paciente ao final de 4 horas da injeção do antibiótico.

b. Determine a função que indica o número P de bactérias presentes no organismo do paciente ao final de t horas da injeção do antibiótico, para $0 \leqslant t \leqslant 8$. **5. b.** $P(t) = 512.000\left(\frac{1}{2}\right)^t$

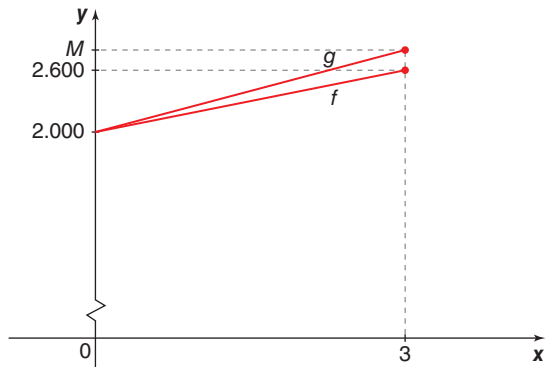
c. Faça um esboço do gráfico da função obtida no item **b**. **5. c.** Resposta no fim do livro.

6. Em um mesmo instante, Vítor tomou dois empréstimos, A e B, de R$ 2.000,00 cada um, por um prazo de 3 meses, à mesma taxa mensal de juros. Porém, o montante da dívida do empréstimo A cresceu em regime de juros simples, e o de B cresceu em regime de juros compostos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

6. a. Empréstimo A: $y = 2.000 + 200x$, com $0 \leqslant x \leqslant 3$; empréstimo B: $y = 2.000 \cdot (1{,}1)^x$, com $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Os gráficos *f* e *g*, a seguir, descrevem, respectivamente, o montante *y* da dívida dos empréstimos A e B, em real, em função do tempo *x*, em mês.



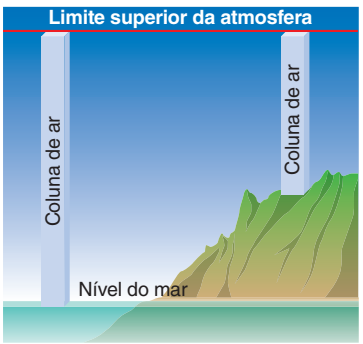
ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com essas informações, faça o que se pede.

a. Obtenha a lei de associação entre *y* e *x* para cada um dos empréstimos.

b. Ao final dos 3 meses dos empréstimos, qual era o montante *M* da dívida do empréstimo B? **6. b.** R$ 2.662,00

7. A pressão que a atmosfera exerce sobre a superfície terrestre é chamada **pressão atmosférica**. A medida dessa pressão sobre uma superfície depende da altitude em que se encontra essa superfície, pois, quanto maior a altitude, menor a coluna de ar cuja base é essa superfície. Observe o esquema a seguir.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

(Modelo didático sem escala e com cores fantasia.)

Uma das unidades de medida da pressão atmosférica é chamada atmosfera (atm), que é a pressão, ao nível do mar, exercida sobre uma superfície horizontal por uma coluna vertical de mercúrio (Hg) medindo 76 cm de altura, cuja base é essa superfície.

Ao nível do mar, a pressão atmosférica é de uma atmosfera (1 atm) e diminui 9%, aproximadamente, para cada quilômetro de aumento na altitude, até a mesopausa (90 quilômetros de altitude), quando essa regularidade deixa de valer. Supondo que esse percentual seja exato, responda às questões a seguir.

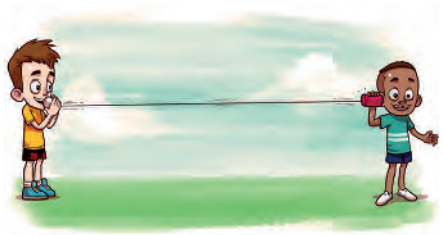
a. Obtenha uma equação que expresse a pressão atmosférica *P*, em atmosfera, em função da altitude *h*, em quilômetro, abaixo da mesopausa.

b. Qual é a pressão atmosférica, em atmosfera, a 5 km de altitude? **7. b.** $\approx 0{,}624$ atm **7. a.** $P = (0{,}91)^h$

8. O montante *M*, em real, de um investimento financeiro em função do tempo *t*, em mês, pode ser aproximado pela equação $M(t) = a \cdot 2^{0{,}0625 \cdot t}$, em que *a* é uma constante real positiva. Se hoje forem investidos R$ 1.000,00, em quantos meses o montante será igual a R$ 8.000,00? **8.** alternativa **e**

a. 3 **b.** 6 **c.** 12 **d.** 24 **e.** 48

9. Dois garotos brincam de telefone com duas latas ligadas por um barbante esticado. Se a voz do garoto que fala tem um nível sonoro de 50 dB (decibéis), que diminui 10% a cada metro de barbante, chegando ao ouvido do outro garoto com 32,805 dB, qual é o comprimento do barbante? **9.** 4 metros



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

10. Nas competições esportivas, o uso de drogas ou qualquer substância que melhore artificialmente o desempenho de um atleta durante a competição é considerado *doping*.



ANDRIANO_CZ/ISTOCK/GETTY IMAGES

Tubo de ensaio com amostra de sangue para exame de *doping*.

Devido a uma enfermidade, um jogador de futebol ingeriu um medicamento que continha uma substância proibida pela Agência Nacional Antidoping (Anad). Ao relatar esse fato ao médico do clube, este realizou uma medição da substância no organismo do atleta, constatando que o nível *N* dessa substância, em grama por litro de sangue, era maior do que o permitido pela Anad. Supondo que o nível *N* dessa substância no sangue do atleta decresça em função do tempo *t*, em hora, de acordo com a função dada pela lei $N(t) = 2 \cdot (0{,}5)^t$, responda às questões seguintes.

10. a. 2 g/L

a. Qual era o nível *N* da substância no sangue do atleta no instante da medição?

10. b. 2 horas

b. Quanto tempo, depois da medição inicial, o nível da substância no sangue do atleta atingiu 0,5 g/L?

c. Três horas depois da medição inicial, qual era o nível *N* da substância no sangue do atleta? **10. c.** 0,25 g/L

d. O atleta estará apto a participar de uma partida oficial de futebol quando o nível da substância no sangue for menor que 0,0625 g/L. Quanto tempo o atleta deve esperar, depois da medição inicial, para participar de uma partida oficial de futebol?

10. d. O atleta deve esperar mais de 5 horas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 9

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo deste instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

Na seção **Verifique o que aprendeu no capítulo 9**, propomos uma avaliação e a elaboração de um mapa conceitual como ferramenta de estudo. Oriente os estudantes a fazerem essas atividades com atenção e, caso encontrem dificuldades, incentive-os a revisitar os conteúdos estudados para reforçar a compreensão.

1. A estrela Alpha Scorpii está a 5.702.400.000.000.000 km de distância da Terra, aproximadamente. Sabendo que a velocidade da luz é de 300.000 km/s, qual das alternativas apresenta, aproximadamente, o tempo necessário para que a luz percorra o trajeto dessa estrela à Terra representado sob a forma de notação científica? **1.** alternativa **b**

a. $22 \cdot 10^4$ dias **c.** $1{,}9008 \cdot 10^8$ dias **e.** $0{,}325 \cdot 10^{10}$ dias

b. $2{,}2 \cdot 10^5$ dias **d.** $3{,}25 \cdot 10^{10}$ dias

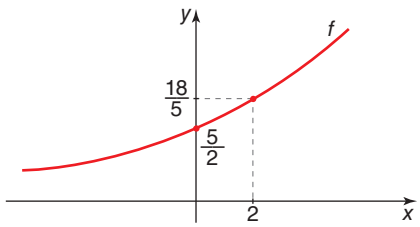
2. alternativa **d**

2. Para o tratamento de uma doença, um paciente recebeu uma dose única de 800 mg de um medicamento, cuja meia-vida é de 2 horas, isto é, a cada 2 horas a quantidade do medicamento na corrente sanguínea do paciente reduz-se à metade. Por exemplo, depois de 2 horas da ingestão de 800 mg do fármaco, 400 mg permanecerão na corrente sanguínea; depois de mais 2 horas, 200 mg permanecerão na corrente sanguínea, e assim por diante. De acordo com essa informação, quanto tempo depois da aplicação do medicamento haverá exatamente 6,25 mg do medicamento na corrente sanguínea do paciente?

a. 11 horas **b.** 12 horas **c.** 13 horas **d.** 14 horas **e.** 15 horas

3. O gráfico a seguir representa a função f, definida por $f(x) = ka^x$, em que k e a são constantes reais, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Assinale a alternativa que contém o resultado de $f(3)$.

3. alternativa **a**



a. $\frac{108}{25}$ **b.** $\frac{18}{5}$ **c.** $\frac{75}{4}$ **d.** $\frac{75}{24}$ **e.** $\frac{108}{5}$

Ferramenta de estudo

O mapa conceitual é uma ferramenta que representa, de forma gráfica, as relações entre conceitos, ou entre palavras que usamos para representar conceitos.

A seguir, apresentamos uma sugestão de elaboração de um mapa conceitual.

I. Retome os tópicos deste capítulo e faça um levantamento de informações relevantes para a elaboração do mapa. Por exemplo: conceitos, palavras-chave, situações-problema etc.

II. Escolha uma estrutura para o mapa e defina quais serão os recursos visuais a serem utilizados. Por exemplo: caixas, linhas, setas, cores, imagens, entre outros.

III. Organize a sequência das informações compondo ramificações que relacionem os conteúdos.

Agora, construa um mapa conceitual utilizando o que você aprendeu neste capítulo.

Se você teve dificuldades em construir o mapa conceitual ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, esclareça suas dúvidas com o professor na aula seguinte.

Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos passo a passo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

CAPÍTULO 10

O conteúdo proposto nesta abertura explica como reconhecemos os sons, mas o principal objetivo é comparar os níveis de energia sonora e as respectivas intensidades sonoras de dois sons. Uma sugestão para o estudo desse infográfico é pedir aos estudantes que discutam, em grupos, as questões propostas no boxe **Além da teoria**.

Função logarítmica

Decibel (dB) não é uma unidade de medida, mas uma comparação de uma intensidade sonora com outra tomada como referência. A intensidade sonora tem como unidade de medida o watt (W) por unidade de área (W/cm²).

Como reconhecemos os sons?

Os melhores microfones de que precisamos estão encravados em nosso crânio: são as cócleas, capazes de captar muitas nuanças dos sons, desde murmúrios até batidas de escolas de samba.

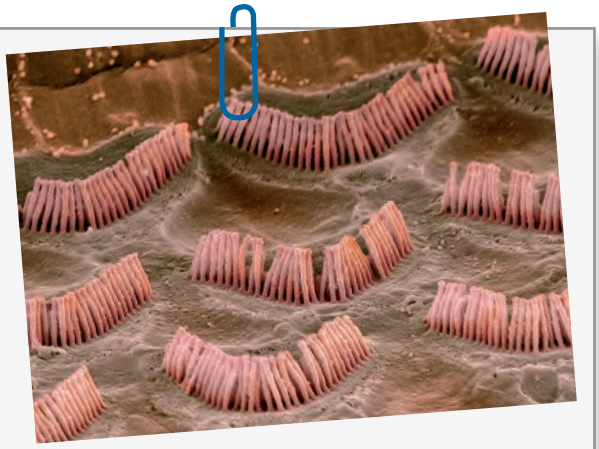
Por isso, ao associar uma intensidade sonora a um valor *x*, em decibel, diremos que o nível da intensidade sonora é *x* dB, subentendendo-se que 0 dB corresponde à intensidade sonora de W/cm², que é a menor intensidade sonora que o ouvido humano é capaz de perceber.

1 **As ondas sonoras conduzidas pelo ar fazem vibrar a membrana timpânica e um trio de ossículos, que transmitem a energia sonora para a cóclea.**

2 **A cóclea é como uma concha espiral, oca e cheia de fluido. No interior da cóclea, de uma ponta a outra do caminho percorrido pelas ondas sonoras, existem células sensoriais ciliadas.**

Se possível, desenvolva um trabalho interdisciplinar com Ciências da Natureza e suas Tecnologias, explorando conceitos relacionados à Acústica. Convide o professor dessa área do conhecimento para participar da aula.

3 **Quando ondas sonoras fazem as células sensoriais ciliadas vibrarem, elas enviam impulsos nervosos que, no cérebro, são interpretados como sons.**



STEVE GSCHMEISSNER/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Microfotografia de células sensoriais ciliadas. Imagem obtida por microscopia eletrônica, colorida artificialmente e ampliada 3.300 vezes.

8 horas de exposição a 85 dB, ou 30 minutos a 110 dB, causam danos irreversíveis às células sensoriais – a principal causa de perda auditiva.

O que é o som?
Som é a propagação de uma perturbação em um meio elástico, por exemplo, o ar, captada pelo sentido da audição e interpretada de acordo com sua frequência – número de oscilações por segundo, expresso em hertz (Hz) – e o nível de intensidade sonora – expresso em decibel (dB).



CESAR DINIZ/PULSAR IMAGENS

Vista aérea de ruas no entorno do Largo da Concórdia em São Paulo (SP). Foto de 2023.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



MURATART/SHUTTERSTOCK

O decibel

O decibel (dB) é a décima parte do bel (B), portanto, 1 B = 10 dB.

Se um nível de intensidade sonora β, em decibel, corresponde a uma intensidade sonora I, em W/m^2, então $\beta + 10$ corresponde a $10I$, ou seja, quando um nível de intensidade sonora aumenta 10 dB, a correspondente intensidade sonora é multiplicada por 10.



PEOPLEIMAGES/ISTOCK/GETTY IMAGES

Uma máquina de lavar louça com ruído de 60 dB tem 1.000 vezes a intensidade sonora de um sussurro de 30 dB

Nível de intensidade sonora (dB)									
	120 dB								Avião decolando
	110 dB							*Show* de *rock*	
	80 dB						Ônibus		
	70 dB					Carro			
	60 dB				Máquina de lavar louça				
	40 dB			Área residencial silenciosa					
	30 dB		Sussurro						
	10 dB	Respiração normal							
		10^{-11}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-1}	1
		Intensidade sonora (W/m^2)							

1. A intensidade sonora de um avião decolando é 1 W/m^2 e o nível de intensidade sonora é 120 dB.

2. A intensidade sonora de um show de *rock* é 1.000 vezes a intensidade sonora de um ônibus em movimento.

Elaborado com base em: VEJA SAÚDE. **Poluição sonora: um problema do barulho (e de saúde pública)**. Disponível em: https://saude.abril.com.br/medicina/poluicao-sonora-um-problema-do-barulho-e-de-saude-publica/. Acesso em: 8 jul. 2024.

Limiar sonoro da dor

Sons acima de 120 dB causam dor, e não é à toa, pois atingem intensidades sonoras maiores que um milhão de vezes a intensidade sonora de uma máquina de lavar louça.



JOA SOUZA/SHUTTERSTOCK

Tráfego intenso em uma avenida da cidade de Salvador (BA). Foto de 2024.

Além da teoria

Oriente os estudantes a consultar as páginas 6 e 7 para saber mais sobre este e os demais Objetivos de Desenvolvimento Sustentável.

1. De acordo com o quadro apresentado, quais são a intensidade sonora e o nível de intensidade sonora de um avião decolando?
2. Os 110 dB de um *show* de *rock* têm quantas vezes a intensidade sonora dos 80 dB de um ônibus em movimento?
3. A Organização Mundial da Saúde aponta que a poluição sonora é um grave problema, pois ela é capaz de desencadear reações de estresse, distúrbios de sono, doenças, problemas auditivos, entre outros. Faça uma pesquisa sobre os índices de poluição sonora aceitáveis. Em seguida, discuta com os colegas esses índices.

ODS 3



ROBERTO RESSTON FO/SHUTTERSTOCK

3. A Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) definiu índices de poluição sonora aceitáveis. Em zonas residenciais urbanas, o limite é de 55 dB de dia e 50 dB à noite. Em centros de cidades, o limite é 65 dB de dia e 60 dB à noite. Em áreas industriais, 70 dB de dia e 65 dB à noite.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Peça aos estudantes que leiam o texto introdutório. Ao final da leitura, faça perguntas sobre o entendimento do texto. Por exemplo:
• Qual foi a motivação da criação dos logaritmos? (Simplificar cálculos aritméticos, que eram um entrave na navegação, devido ao longo tempo necessário para realizá-los.)
• Qual é o princípio básico dos logaritmos? (Transformar multiplicação em adição e divisão em subtração.)
Refaça as operações usando a tabela. Explique detalhadamente, pois são muitas informações nesse momento do estudo.

1. Os fundamentos da teoria dos logaritmos



BRUNO MOTA/ARQUIVO DA EDITORA

A partir do final do século XV, o contexto político-econômico da Europa levou algumas nações europeias, especialmente Portugal e Espanha, a expandir as rotas das navegações marítimas, até então restritas a regiões próximas da costa.

Para enfrentar o mar aberto, os marinheiros deviam basear as rotas na posição dos astros, como o Sol e as estrelas. Precisavam, então, conhecer com precisão a localização e o movimento relativo dos astros. Essa necessidade impulsionou o desenvolvimento da Astronomia.

Estabelecer a posição de um ponto na superfície do mar, com base no movimento relativo dos astros, envolvia cálculos trigonométricos complexos e precisos, com grande quantidade de casas decimais. Um erro poderia provocar um desvio com graves consequências para as frotas. Esse processo era demorado, pois os cálculos eram números, compreendendo longas multiplicações e divisões, o que levou vários cientistas a estudar maneiras de simplificar os cálculos.

Apesar dos esforços, apenas no século XVII surgiu a solução desse problema. Em 1614, o escocês John Napier (1550-1617), também conhecido como Neper, publicou o resultado dos estudos que introduziram o **sistema de logaritmos**.



SAMUEL FREEMAN - BIBLIOTECA DA UNIVERSIDADE DA CALIFÓRNIA, LOS ANGELES

Representação artística de John Napier, criador dos logaritmos.

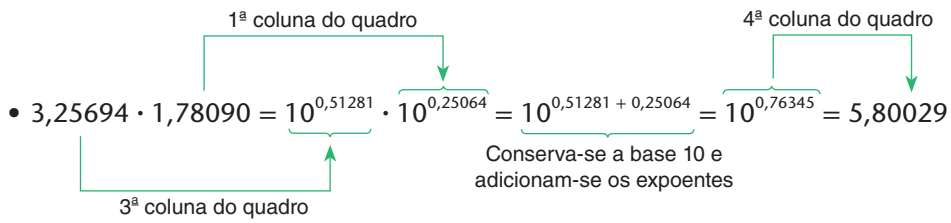
O princípio básico dos logaritmos é este: transformar uma multiplicação em adição ou uma divisão em subtração, uma vez que adicionar ou subtrair números é normalmente mais rápido que multiplicá-los ou dividi-los. Na verdade, essas substituições já haviam sido aplicadas muito antes de Neper, mas ele fez isso de uma maneira mais eficaz e de fácil execução.

A ideia de Neper é relativamente simples: representam-se os números positivos como potências de um mesmo número. Por exemplo, cada coluna do quadro a seguir apresenta um número e a respectiva representação como potência de base 10. Assim, na primeira coluna, temos $1{,}78090 = 10^{0{,}25064}$.

Representação de números como potências de base 10

Número	1,78090	1,82881	3,25694	5,80029
Potência de base 10	$10^{0{,}25064}$	$10^{0{,}26217}$	$10^{0{,}51281}$	$10^{0{,}76345}$

Com esse quadro, podemos calcular:



Observe que o produto foi calculado pela adição dos expoentes das potências de 10.

• $3{,}25694 : 1{,}78090 = 10^{0{,}51281} : 10^{0{,}25064} = 10^{0{,}51281 - 0{,}25064} = 10^{0{,}26217} = 1{,}82881$

Observe que o quociente foi calculado pela diferença dos expoentes das potências de 10.

Nota:

Neper criou o vocábulo *logarithmus* com as palavras gregas *logos*, que significa "razão" ou "cálculo", e *arithmós*, que significa "número".

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2. O conceito de logaritmo

O conceito de **logaritmo** está relacionado ao conceito de expoente de uma potência, conforme explicamos a seguir.

Considere uma potência qualquer de base positiva e diferente de 1; por exemplo:

$$3^4 = 81$$

Ao **expoente** dessa potência (4) damos o nome de **logaritmo**. Dizemos que "o logaritmo de 81 na base 3 é igual a 4". Em notação matemática, escrevemos:

$$3^4 = 81 \Leftrightarrow \log_3 81 = 4$$

Para saber mais sobre a história dos logaritmos, assista ao vídeo **História dos logaritmos.** Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=YC9BzwyjlwY. Acesso em: 27 ago. 2024.

Exemplos

a. $2^4 = 16 \Leftrightarrow \log_2 16 = 4$

b. $3^{-2} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \log_3 \frac{1}{9} = -2$

c. $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125} = 3$

Definimos:

Sendo a e b números reais positivos, com $b \neq 1$, chama-se **logaritmo** de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$.

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Conceitue logaritmo, enfatizando que é um expoente; por exemplo, na igualdade $3^4 = 81$, o expoente 4 é o logaritmo de 81 na base 3.
Com a participação dos estudantes, refaça os exemplos.
Defina logaritmo, enfatizando a condição de existência sobre o logaritmando e a base.
Reforce a nota 1, apresentada na página seguinte, que explica o porquê da condição de existência.
Comente a nota 2, que relaciona o logaritmo com a função exponencial.
Mais adiante, vamos estudar a função logarítmica como inversa da função exponencial.

Na sentença $\log_b a = x$:

- a é o **logaritmando**;
- b é a **base do logaritmo**;
- x é o **logaritmo de a na base b**.

Exemplos

a. $\log_5 25$ é o expoente x da potência de base 5 tal que $5^x = 25$.

Então:

$$5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2$$
$$\therefore x = 2$$

Assim: $\log_5 25 = 2$

b. $\log_2 \frac{1}{32}$ é o expoente x da potência de base 2 tal que $2^x = \frac{1}{32}$.

Então:

$$2^x = \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-5}$$
$$\therefore x = -5$$

Assim: $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

c. $\log_3 1$ é o expoente x da potência de base 3 tal que $3^x = 1$.

Então:

$$3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0$$
$$\therefore x = 0$$

Assim: $\log_3 1 = 0$

d. $\log_7 \sqrt[5]{7^2}$ é o expoente x da potência de base 7 tal que $7^x = \sqrt[5]{7^2}$.

Então:

$$7^x = \sqrt[5]{7^2} \Leftrightarrow 7^x = 7^{\frac{2}{5}}$$
$$\therefore x = \frac{2}{5}$$

Assim: $\log_7 \sqrt[5]{7^2} = \frac{2}{5}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Comente o texto introdutório, que trata da tabela de logaritmos decimais construída por Henry Briggs.
Defina o logaritmo decimal, convencionando que sua base fica subentendida (não precisa ser escrita), isto é, $\log_{10} a = \log a$.
Comente que a tabela de logaritmos decimais, construída por Briggs, equivalia, na época, às atuais calculadoras eletrônicas. Era por meio dessa tabela que as operações aritméticas eram realizadas com facilidade.
Uma dúvida relevante dos estudantes no entendimento dos logaritmos decimais é como foi construída a tabela desses logaritmos; em outras palavras, como transformar um número real positivo qualquer em uma potência de base 10. Para o esclarecimento dessa dúvida, sugerimos o texto apresentado nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

Notas:

1. A existência e a unicidade de $\log_b a$ são garantidas pelas condições: $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Ou seja, se alguma dessas restrições não for obedecida, não estará garantida a existência ou a unicidade do logaritmo. Por exemplo, de acordo com a definição:
   - $\log_2 (-4)$ deveria ser um único número x tal que $2^x = -4$, o que é impossível, pois qualquer potência de base positiva é positiva;
   - $\log_1 2$ deveria ser um único número x tal que $1^x = 2$, o que é impossível, pois qualquer potência de base 1 é igual a 1;
   - $\log_1 1$ deveria ser um único número x tal que $1^x = 1$, porém existem infinitos valores de x que satisfazem essa igualdade.
2. É importante observar a estreita ligação entre o logaritmo e a função exponencial. Por exemplo, o cálculo de um logaritmo recai na resolução de uma equação exponencial. Mais adiante, no estudo da função logarítmica, vamos detalhar melhor essa relação.

Logaritmo decimal

O sucesso do sistema de logaritmos, após sua publicação em 1614, foi imediato. Um dos admiradores mais entusiásticos desse sistema foi o matemático inglês Henry Briggs (1561-1630), que, em uma visita a Neper em 1615, sugeriu o uso da base 10 como padrão para os logaritmos. Neper disse que já havia pensado nisso e pediu ao colega que levasse a ideia adiante, pois ele já estava sem forças para essa tarefa (Neper morreu em 1617). Atendendo ao pedido de Neper, Briggs criou a primeira tabela de logaritmos de base 10, conhecidos como **logaritmos decimais**.

Chama-se **logaritmo decimal** aquele cuja base é 10.
Indica-se o logaritmo decimal de um número a simplesmente por $\log a$ (a base 10 fica subentendida).

Exemplos

a. Representamos $\log_{10} 100$ simplesmente por $\log 100$.
$\log 100$ é o expoente x da potência de base 10 tal que $10^x = 100$.
Então:

$$10^x = 100 \Leftrightarrow 10^x = 10^2$$
$$\therefore\ x = 2$$

Assim, concluímos que $\log 100 = 2$.

b. O logaritmo decimal é um dos mais utilizados nas ciências, como na Sismologia, conforme apresenta a situação a seguir.

Suponha que um pequeno dado seja solto sobre a superfície terrestre: o impacto da sua queda liberará energia e fará a superfície vibrar levemente. Se o dado for substituído por um tijolo, a energia liberada fará vibrar mais intensamente essa superfície. Imagine, agora, que um cubo maciço de granito com 2 km de aresta seja solto de uma altura de 280 km: a energia liberada será equivalente a 200 trilhões de quilowatt-hora (kWh). Essa foi a medida da energia liberada pelo terremoto ocorrido em São Francisco, Califórnia, em 1906. Mais violento ainda foi o terremoto que arrasou Lisboa em 1755, liberando energia equivalente a 350 trilhões de kWh.

A intensidade de um terremoto pode ser medida pela escala Richter, desenvolvida em 1935 pelos sismólogos Charles Francis Richter (1900-1985) e Beno Gutenberg (1889-1960). Nessa escala, a intensidade I de um terremoto em função da energia E liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora, é dada por:

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{E}{E_0},$$

em que $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh e o logaritmo é decimal, isto é, tem base 10.


HISTORIC PHOTO ARCHIVE/GETTY IMAGES

Vista da cidade de São Francisco, Califórnia, nos Estados Unidos, após o terremoto de 1906.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Propriedades dos logaritmos

Aplicando as propriedades estudadas na função exponencial, obtemos as seguintes propriedades dos logaritmos, para quaisquer números reais positivos a e b, com $b \neq 1$:

P1. $\log_b b = 1$

De fato, indicando $\log_b b$ por x, temos:

$$\log_b b = x \Leftrightarrow b^x = b$$
$$\therefore x = 1$$

Assim: $\log_b b = 1$

P2. $\log_b 1 = 0$

De fato, indicando $\log_b 1$ por x, temos:

$$\log_b 1 = x \Leftrightarrow b^x = 1$$
$$\therefore b^x = b^0 \Rightarrow x = 0$$

Assim: $\log_b 1 = 0$

P3. $\log_b a^y = y \cdot \log_b a$ (para qualquer número real y)

De fato, indicando $\log_b a$ por x, temos:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Elevando ao expoente y ambos os membros da última igualdade, obtemos:

$$(b^x)^y = a^y \Leftrightarrow b^{yx} = a^y$$

E, pela definição de logaritmo, temos:

$$b^{yx} = a^y \Leftrightarrow yx = \log_b a^y$$

Como x representa o $\log_b a$, concluímos que:

$$y \cdot \log_b a = \log_b a^y$$

P4. $\log_b b^x = x$ (para qualquer número real x)

De fato, pelas propriedades P3 e P1, temos:

$$\log_b b^x = x \cdot \log_b b = x \cdot 1 = x$$

P5. $b^{\log_b a} = a$

De fato, indicando $\log_b a$ por x, temos:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Como x representa o $\log_b a$, concluímos que:

$$b^{\log_b a} = a$$

Demonstre as propriedades P1 a P5, a partir das propriedades da função exponencial.

Reforce a observação apresentada no exercício resolvido **2**. Se achar conveniente, enuncie o teorema a seguir, que trata da irracionalidade de determinados logaritmos.

Sejam a e b números inteiros positivos, com $b > 2$. Se as decomposições em fatores primos de a e b apresentam pelo menos um fator primo que não é comum às duas decomposições, então $\log_b a$ é um número irracional.

Por exemplo, os números inteiros positivos 300 e 40 têm pelo menos um fator primo não comum, pois $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ e $40 = 2^3 \cdot 5$, ou seja, o fator primo 3 não é comum às duas decomposições; assim, $\log_{20} 300$ é um número irracional.

Atenção! A recíproca desse teorema não é verdadeira, isto é, sendo p e q números inteiros positivos, com $p \geqslant 2$, o número $\log_q p$ pode ser irracional mesmo que p e q tenham todos os fatores primos comuns. Por exemplo, 250 e 10 têm todos os fatores primos comuns, pois $250 = 2 \cdot 5^3$ e $10 = 2 \cdot 5$, no entanto, $\log_{10} 250$ é um número irracional, como mostra a justificativa a seguir.

$\log_{10} 250 = \log_{10} (2 \cdot 5 \cdot 5^2) = \log_{10} 10 + \log_{10} 5^2 = 1 + \log_{10} 25$

Como os números inteiros positivos 25 e 10 têm pelo menos um fator primo não comum, deduzimos pelo teorema apresentado que $\log_{10} 25$ é um número irracional. Logo, $1 + \log_{10} 25$ é um número irracional, pois é a soma de um racional com um irracional.

Reflexão
Por P4, se $\log_a a_x = 3$, temos $x = 3$.
Então, podemos escrever: $a^3 = 27$
Logo, $a = 3$, pois $3^3 = 27$.

Reflexão

Sabendo que $a^x = 27$ e $\log_a a^x = 3$, qual é o valor de a?

Observação

Essas propriedades serão utilizadas, mais adiante, em outras propriedades dos logaritmos.

Exemplos

a. $\log_5 5 = 1$

b. $\log_3 1 = 0$

c. $\log_{10} 2^5 = 2 \cdot \log_{10} 5$

d. $\log_3 3^4 = 4$

e. $8^{\log_8 6} = 6$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Sugerimos a leitura do livro de Eli Maor, **A história de um número**.

A obra explora o impacto do número de Neper ao longo da história. Ela oferece uma visão envolvente sobre como esse número irracional tem desempenhado um papel crucial em diversas áreas da Matemática e da Ciência.

Dedique um tempo para a discussão do texto do boxe **Mentes brilhantes**, pois é a primeira referência ao número e ao logaritmo neperiano. Com o auxílio de uma calculadora eletrônica, obtenha valores de $M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, atribuindo a n os valores 10, 100, 1.000, 10.000 etc., comentando a convergência para o número: $e = 2{,}718281828\ldots$

Mentes brilhantes

Crescimento instantâneo

No século XVII, o matemático suíço Jacques Bernoulli (1654-1705) propôs o seguinte problema: Qual é a lei segundo a qual cresce um capital aplicado a juro composto quando o juro é acrescido ao capital instantaneamente?

Bernoulli talvez não imaginasse que a lei geral a que chegaria seria aplicada em diversas áreas além da Matemática, como Física, Química, Medicina e Engenharia.

O problema de Bernoulli propõe que se calcule o juro composto não ano a ano, ou mês a mês, ou dia a dia, mas instantaneamente, a partir do momento da aplicação. Para concretizar essa ideia, vamos supor que R$ 1,00 seja aplicado a juro composto à taxa de $\frac{100\%}{n}$ a cada uma das n partes iguais em que se dividiu um período de tempo qualquer.

Aplicando a fórmula do montante acumulado a juro composto, $M = C(1 + i)^t$, para $C = 1$, $i = \frac{100\%}{n} = \frac{1}{n}$ e $t = n$, obtemos o montante M, acumulado ao fim das n partes: $M = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Atribuindo a n os valores 1, 2, 3, 4, ..., 1.000.000, ..., obtêm-se, respectivamente, os montantes: 2; 2,25; 2,37037037; 2,44140625; ...; 2,718280469; ...

Prova-se que, para n tendendo ao infinito, esse montante tende ao número irracional 2,718281828..., conhecido como **número de Neper** ou **número de Euler**, pois John Napier (Neper) foi o descobridor desse número, mas foi Leonard Euler quem apresentou uma fórmula para calculá-lo com qualquer número de casas decimais. Esse número é indicado pela letra e:

$$e = 2{,}718281828\ldots$$

O número neperiano está presente em todas as situações em que se deseja calcular a variação instantânea de uma grandeza que cresce ou decresce através do produto por uma taxa constante, por isso ele é muito usado nas ciências, por exemplo, como base dos logaritmos. O logaritmo de um número a na base e é simbolizado por $\ln a$ e é chamado de logaritmo neperiano ou logaritmo natural do número a:

$$\ln a = \log_e a$$

No **Mentes brilhantes**, pode-se explorar o logaritmo neperiano, como o exemplo a seguir.

Em certo país, com população A (em milhão de habitantes), é noticiada pela televisão a implantação de um novo plano econômico pelo governo. O número $f(t)$ de pessoas que já sabiam da notícia após t horas de sua divulgação, com $t > 0$, é dado por:

$$f(t) = \frac{A}{1 + 4e^{-\frac{At}{40}}}$$

Sabe-se também que, decorrida 1 hora da divulgação do plano, 50% da população já estava ciente da notícia.

a. Qual é a porcentagem da população que tomou conhecimento do plano no instante em que ele foi noticiado? (20%)

b. Utilizando uma calculadora eletrônica, determine o número de habitantes do país. (55,45 milhões de habitantes, aproximadamente)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Calcule os logaritmos.

a. $\log_{32} 64$

b. $\log_{25} \frac{1}{125}$

c. $\log \sqrt[3]{10.000}$

d. $\log_{\frac{7}{3}} \frac{9}{49}$

e. $\log_{0,1} 0{,}0001$

Resolução

a. $\log_{32} 64 = x \Leftrightarrow 32^x = 64$

Decompomos em fatores primos as bases 32 e 64:

$(2^5)^x = 2^6 \Rightarrow 2^{5x} = 2^6$

$\therefore 5x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$

Assim: $\log_{32} 64 = \frac{6}{5}$

b. $\log_{25} \frac{1}{125} = x \Leftrightarrow 25^x = \frac{1}{125}$

$\therefore 5^{2x} = 5^{-3} \Rightarrow 2x = -3$

$\therefore x = -\frac{3}{2}$

Assim: $\log_{25} \frac{1}{125} = -\frac{3}{2}$

c. $\log \sqrt[3]{10.000} = x \Leftrightarrow 10^x = \sqrt[3]{10.000}$

$\therefore 10^x = \sqrt[3]{10^4} \Rightarrow 10^x = 10^{\frac{4}{3}}$

$\therefore x = \frac{4}{3}$

Assim: $\log \sqrt[3]{10.000} = \frac{4}{3}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

d. $\log_{\frac{7}{3}} \frac{9}{49} = x \Leftrightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^x = \frac{9}{49}$

$\therefore \left(\frac{7}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{7}{3}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^{-2}$

$\therefore x = -2$

Assim: $\log_{\frac{7}{3}} \frac{9}{49} = -2$

e. $\log_{0,1} 0{,}0001 = x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}1^x = 0{,}0001$

$\therefore 10^{-1 \cdot x} = 10^{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x = -4$

$\therefore x = 4$

Assim: $\log_{0,1} 0{,}0001 = 4$

2. Adotando $\log_2 5 = 2{,}32$, calcule $\log_2 125$.

Resolução

$\log_2 125 = \underbrace{\log_2 5^3}_{\text{propriedade P3}} = 3 \cdot \log_2 5 = 3 \cdot 2{,}32 = 6{,}96$

Observação

O número 2,32 é um valor aproximado do $\log_2 5$. Com o intuito de simplificar os enunciados e as resoluções, em outras questões também adotaremos valores aproximados como se fossem valores exatos de logaritmos.

3. Determine o valor da expressão:

$$E = 7^{\log_7 6} - \log_4 4 + \log_3 1$$

Resolução

Pela propriedade P5: $7^{\log_7 6} = 6$

Por P1: $\log_4 4 = 1$

Por P2: $\log_3 1 = 0$

Assim: $E = 6 - 1 + 0 = 5$

4. Determine o valor da expressão:

$$E = 3^{5\log_3 2}$$

Resolução

Por P3: $5 \log_3 2 = \log_3 2^5 = \log_3 32$

Portanto: $E = 3^{5 \log_3 2} = \underbrace{3^{\log_3 32}}_{\text{propriedade P5}} = 32$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

1. Calcule os logaritmos.

a. $\log_2 256$ **1. a.** 8

b. $\log_7 \frac{1}{49}$ **1. b.** -2

c. $\log_{\frac{5}{2}} \frac{125}{8}$ **1. c.** 3

d. $\log_{\frac{3}{2}} \frac{16}{81}$ **1. d.** -4

e. $\log 10.000$ **1. e.** 4

f. $\log_{256} 128$ **1. f.** $\frac{7}{8}$

g. $\log \sqrt[5]{100}$ **1. g.** $\frac{2}{5}$

h. $\log_{0,5} 0{,}125$ **1. h.** 3

2. Calcule os logaritmos a seguir adotando $\log_3 2 = 0{,}63$.

a. $\log_3 8$ **2. a.** 1,89

b. $\log_3 \frac{1}{16}$ **2. b.** $-2{,}52$

c. $\log_3 \sqrt[3]{4}$ **2. c.** 0,42

d. $9^{\log_3 4}$ **2. d.** 16

3. Calcule o valor da expressão $E = \log_2 [\log_3 (\log_2 512)]$.

3. $E = 1$

4. O altímetro para aeronaves é um instrumento que mede a altitude de voo em função da pressão atmosférica. Suponha que a altitude h, em quilômetro, medida pelo altímetro de um avião seja dada, em função da pressão atmosférica p, em atmosfera, pela equação: $h = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{p}\right)$, com $0 < p \leqslant 1$.



ROMAN SOTOLA/SHUTTERSTOCK

Aplicando essa equação e, se necessário, adotando a aproximação $\log 2 \approx 0{,}3$, calcule:

a. A altitude de voo do avião quando a pressão atmosférica é 0,5 atm. **4. a.** 6 km

b. A altitude de voo do avião quando a pressão atmosférica é 0,25 atm. **4. b.** 12 km

c. A pressão atmosférica quando o avião se encontra a 20.000 m de altitude. (Essa altitude é alcançada por aviões supersônicos.) **4. c.** 0,1 atm

5. O tempo n, em ano, para que um capital de R$ 1.000,00, aplicado à taxa de juro composto de 10% ao ano, produza o montante de R$ 1.430,00 é:

a. $n = \log_{1,43} 1{,}1$

b. $n = \log_{1,1} 1{,}43$

c. $n = \log_{1,43} 1$

d. $n = \log_{1,1} 1{,}1$

e. $n = \log_{1,1} (1{,}43)^2$

5. alternativa **b**

6. Podemos relacionar os conceitos de acidez e alcalinidade com sua vivência. Você já deve ter percebido que ao beber, separadamente, um pouco de água, de vinagre e de suco de caju sem açúcar têm-se sensações diferentes. A água não causa nenhum desconforto na degustação, o vinagre provoca um azedume e o suco de caju causa uma sensação adstringente ("amarra a boca"). Isso se deve à concentração de íons de hidrogênio H^+ na solução.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A acidez, a neutralidade e a alcalinidade de uma solução são expressas pelo pH (potencial hidrogeniônico) da solução, definido por:

$$pH = -\log [H^+],$$

em que $[H^+]$ é a concentração de íons hidrogênio H^+, em mol/L.

Assim, o valor do pH aumenta à medida que a concentração de íons hidrogênio decresce. Quanto menor o pH, mais ácida é a solução. O valor 7 do pH indica que a solução é neutra (nem ácida, nem alcalina); um pH abaixo de 7 indica acidez; e acima de 7, alcalinidade. Por exemplo, o pH da água é 7, o do vinagre é menor que 7 e o do suco de caju é maior que 7.

Considere as seguintes soluções ácidas: o suco de limão, cujo pH é 2, e o suco de tomate, cujo pH é 4.

a. Qual é a concentração de íons H^+, em mol/L, no suco de limão? **6. a.** 10^{-2} mol/L

b. A concentração de íons H^+, em mol/L, no suco de limão equivale a quantas vezes essa concentração no suco de tomate? **6. b.** 100 vezes

7. (Enem) A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_W), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina · cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. **Historic Earthquakes**. Disponível em: https://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. **USGS Earthquakes Magnitude Policy**. Disponível em: https://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina · cm)?

a. $10^{-5{,}10}$ **c.** $10^{12{,}00}$ **e.** $10^{27{,}00}$

b. $10^{-0{,}73}$ **d.** $10^{21{,}65}$

7. alternativa **e**

8. Pesquise uma aplicação do conceito de logaritmo e, com base nessa pesquisa, elabore um problema que possa ser resolvido por logaritmo (é permitido o uso de uma calculadora científica). Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o do outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções.

8. Resposta pessoal.

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 1 a 5.

TRABALHO E JUVENTUDES

Químico

Trabalho e juventudes: Pesquisa e resumo pessoais. Incentive os estudantes a pesquisarem cursos técnicos, tecnólogos ou de graduação em Química em instituições de ensino do município ou da região em que moram.

O químico é um profissional da área de Ciências da Natureza dedicado ao estudo da composição, transformação e das propriedades de substâncias, ou seja, elementos definidos por uma única e idêntica constituição, e compostos, isto é, substâncias cujas moléculas são constituídas por diferentes átomos. Valores de temperatura, densidade e acidez também fazem parte dos estudos de Química. Os químicos podem atuar em várias indústrias e em laboratórios de pesquisa.



FG TRADE/ISTOCK/GETTY IMAGES

Química fazendo a análise de uma substância em um experimento.

As habilidades matemáticas, como o uso de logaritmos, também estão presentes no cotidiano do químico. É por meio do uso dos logaritmos que o profissional determina, entre outros parâmetros, o grau de acidez ou alcalinidade de substâncias e compostos ou o tempo que demoram para passar de um estado para o outro.

Quer saber mais sobre a profissão de químico? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe com os colegas um resumo das informações que você obteve.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Outras propriedades dos logaritmos

Estudos sobre desertificação de uma região mostraram que esse processo avança a uma taxa de 2,4% ao ano. Atualmente, estima-se que 6.100 km^2 do local já estão desertificados. Após quanto tempo essa área dobrará de tamanho?

Podemos equacionar a situação do seguinte modo:

$$6.100 \cdot (1{,}024)^x = 12.200 \Rightarrow (1{,}024)^x = 2$$

Para resolver equações do tipo $(1{,}024)^x = 2$, utilizaremos mais algumas propriedades do logaritmo, apresentadas a seguir.

Sendo a, b e c números reais positivos, com $b \neq 1$, temos:

P6. $\log_b (ac) = \log_b a + \log_b c$

De fato, sendo $(\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a)$ e $(\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c)$, podemos afirmar que $b^x \cdot b^y = a \cdot c$, o que equivale a $b^{x+y} = (ac)$.

Pela definição de logaritmo, temos:

$$b^{x+y} = ac \Leftrightarrow x + y = \log_b (ac)$$

E, portanto:

$$\log_b a + \log_b c = \log_b (ac)$$

Exemplos

a. $\log_3 (9 \cdot 3) = \log_3 9 + \log_3 3$

b. $\log_2 (32 \cdot 4) = \log_2 32 + \log_2 4$

P7. $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$

De fato, sendo $(\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a)$ e $(\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c)$, podemos afirmar que $\frac{b^x}{b^y} = \frac{a}{c}$, o que é equivalente a $b^{x-y} = \frac{a}{c}$.

Pela definição de logaritmo, temos:

$$b^{x-y} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow x - y = \log_b \frac{a}{c}$$

E, portanto:

$$\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$$

Exemplos

a. $\log_5 \frac{25}{5} = \log_5 25 - \log_5 5$

b. $\log_2 \frac{64}{4} = \log_2 64 - \log_2 4$

P8. Mudança de base: $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$ (para qualquer número real k, positivo e diferente de 1)

De fato, sendo $(\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a)$, $(\log_k a = y \Leftrightarrow k^y = a)$ e $(\log_k b = z \Leftrightarrow k^z = b)$, podemos afirmar que: $b^x = a = k^y \Rightarrow b^x = k^y$

Como $b = k^z$, temos:

$$b^x = k^y \Rightarrow (k^z)^x = k^y$$
$$\therefore k^{zx} = k^y \Rightarrow zx = y$$
$$\therefore x = \frac{y}{z}$$

E, portanto: $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$



PABLO PORCIUNCULA/AFP/GETTY IMAGES

Vista aérea de uma área da Caatinga em processo de desertificação em Baixinha, Bahia, 2024. A Caatinga é um bioma único do Brasil, caracterizado por uma biodiversidade adaptada ao calor intenso e à escassez de água. No entanto, enfrenta ameaças crescentes devido à desertificação.

ODS 13

Demonstre as propriedades P6, P7 e P8.

Mostre como se calcula o logaritmo em qualquer base em uma calculadora eletrônica. Comente que a maioria das calculadoras eletrônicas apresenta apenas as teclas para o cálculo de logaritmo neperiano (ln) e de logaritmo decimal (log), porém essas teclas são suficientes para calcular logaritmos em qualquer base. Por exemplo, para calcular $\log_2 5$, usando a calculadora, basta aplicar a propriedade P8, transformando esse logaritmo em um quociente de logaritmos decimais:

$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2}$

A seguir, calculam-se log 5 e log 2, usando a calculadora, e efetua-se a divisão dos resultados, também usando a calculadora.

Pergunte: "É possível calcular $\log_2 5$ usando a tecla de logaritmo neperiano?"

(Sim. Basta efetuar $\log_2 5 = \frac{\log_e 5}{\log_e 2}$.)

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reforce a nota, comentando que o principal objetivo de Nepier foi alcançado com as propriedades P6 e P7, que transformam multiplicações em adições e divisões em subtrações.
Este é o momento oportuno para perguntar: "Por que devemos estudar a teoria dos logaritmos se as calculadoras fornecem o valor de qualquer logaritmo?".
Após a discussão, conclua que as calculadoras eletrônicas não resolvem problemas. Elas, simplesmente, calculam logaritmos decorrentes da resolução. Por exemplo: qual é o tempo necessário para duplicar um capital de R$ 1.000,00 aplicado em regime de juros compostos à taxa constante de 1,2% ao mês? Enfatize que, se o estudante não conhecer o conceito de logaritmo, implícito nesse problema, a calculadora será inútil.

Exemplos

a. $\log_{27} 81 = \dfrac{\log_3 81}{\log_3 27}$

b. $\log_{32} 16 = \dfrac{\log_2 16}{\log_2 32}$

Nota:

O principal objetivo de John Napier foi atingido com as propriedades P6 e P7, uma vez que, com elas, as multiplicações e as divisões são transformadas em adições e subtrações, respectivamente. Com isso, a partir da publicação dos logaritmos, em 1614, os cientistas tiveram seu trabalho com cálculos significativamente atenuado. O surgimento das calculadoras eletrônicas reduziu ainda mais a dificuldade de realizar cálculos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

5. Adotando $\log_5 7 = 1{,}21$ e $\log_5 2 = 0{,}43$, calcule:

a. $\log_5 14$ **b.** $\log_5 3{,}5$ **c.** $\log_2 7$ **d.** $\log_5 28$ **e.** $\log_5 0{,}7$ **f.** $\log_{14} \sqrt{7}$

Resolução

a. $\log_5 14 = \log_5 (7 \cdot 2) = \log_5 7 + \log_5 2 = 1{,}21 + 0{,}43 = 1{,}64$

propriedade P6

b. $\log_5 3{,}5 = \log_5 \dfrac{7}{2} = \log_5 7 - \log_5 2 = 1{,}21 - 0{,}43 = 0{,}78$

propriedade P7

c. $\log_2 7 = \dfrac{\log_5 7}{\log_5 2} = \dfrac{1{,}21}{0{,}43} \approx 2{,}81$

propriedade P8

d. $\log_5 28 = \log_5 (2^2 \cdot 7) = \log_5 2^2 + \log_5 7 = 2 \log_5 2 + \log_5 7 = 2 \cdot 0{,}43 + 1{,}21 = 2{,}07$

e. $\log_5 0{,}7 = \log_5 \dfrac{7}{10} = \log_5 7 - \log_5 10 = \log_5 7 - \log_5 (2 \cdot 5) =$

$= \log_5 7 - (\log_5 2 + \log_5 5) = 1{,}21 - (0{,}43 + 1) = -0{,}22$

f. $\log_{14} \sqrt{7} = \dfrac{\log_5 \sqrt{7}}{\log_5 14} = \dfrac{\log_5 7^{\frac{1}{2}}}{\log_5 (2 \cdot 7)} = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot \log_5 7}{\log_5 2 + \log_5 7} =$

propriedade P8

propriedades P3 e P6

$= \dfrac{\frac{1}{2} \cdot 1{,}21}{0{,}43 + 1{,}21} = \dfrac{0{,}605}{1{,}64} \approx 0{,}37$

6. Em uma experiência de laboratório, uma barra de alumínio, cuja temperatura inicial era de 33 °C, foi aquecida de modo que sua temperatura aumentou 2,4% por minuto até atingir o ponto de fusão, que é 660 °C. Dado que $\log 2 = 0{,}301$, calcule o tempo, em minuto, decorrido desde o início do aquecimento até o instante em que a barra atingiu o ponto de fusão.

Resolução

A fórmula do cálculo do montante acumulado em regime de juro composto, $M = C(1 + i)^t$, pode ser aplicada na relação entre o tempo e a temperatura da barra de alumínio.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Assim, calcula-se t, em minuto, do seguinte modo:

$$660 = 33(1 + 0{,}024)^t$$

$$20 = (1{,}024)^t$$

$$t = \log_{1{,}024} 20$$

Aplicando as propriedades P8 (mudança de base), P6, P7 e P3, temos:

$$t = \log_{1{,}024} 20 \overset{\text{P8}}{=} \frac{\log 20}{\log 1{,}024} \overset{\text{P6 e P7}}{=} \frac{\log(2 \cdot 10)}{\log\left(\frac{1.024}{1.000}\right)} = \frac{\log 2 + \log 10}{\log 1.024 - \log 1.000} =$$

$$= \frac{\log 2 + \log 10}{\log 2^{10} - \log 10^3} \overset{\text{P3}}{=} \frac{\log 2 + \log 10}{10 \cdot \log 2 - 3 \cdot \log 10} = \frac{0{,}301 + 1}{10 \cdot 0{,}301 - 3 \cdot 1}$$

$$\therefore t = 130{,}1$$

Concluímos, então, que o tempo decorrido para que a barra atingisse o ponto de fusão foi de 130,1 minutos.

Aproveite o contexto do exercício proposto 18 e incentive os estudantes a pesquisarem a participação das mulheres no desenvolvimento da Ciência. Possibilite uma conversa a fim de que eles possam compartilhar os resultados da pesquisa e expor, de maneira respeitosa, a própria opinião em relação às questões de valorização da mulher. Aproveite o objeto digital ***Carrossel de imagens***: **Mulheres na Ciência** para complementar esse debate.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

9. Adotando $\log_6 11 = 1{,}34$ e $\log_6 2 = 0{,}39$, calcule:

a. $\log_6 22$ **9. a.** 1,73 **c.** $\log_6 5{,}5$ **9. c.** 0,95 **e.** $\log_{11} 2$

b. $\log_6 \frac{2}{11}$ **9. b.** −0,95 **d.** $\log_2 11$ **9. d.** aproximadamente 3,44 **f.** $\log_6 16$ **9. f.** 1,56

9. e. aproximadamente 0,29

10. Considerando $\log 5 = 0{,}70$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule $\log 6$. **10.** 0,78

11. Adotando $\log 2 = 0{,}301$, calcule o valor de $\log 5$.

12. Determine x tal que $x = \log_7 25 \cdot \log_5 7$. **12.** $x = 2$

13. (Fuvest-SP) Se $x = \log_4 7$ e $y = \log_{16} 49$, então $x - y$ é igual a: **13.** alternativa **e**

a. $\log_4 7$ **d.** 2

b. $\log 7$ **e.** 0

c. 1

14. Se $\log_2 3 = x$, então a expressão $8^x + 4^{2x-1}$ é igual a:

a. 52,25 **d.** 93,54

b. 47,25 **e.** 67,54

c. 49,84 **14.** alternativa **b**

15. Até atingir a idade adulta, a massa média m, em quilograma, de um indivíduo de certa espécie de animal é calculada em relação ao tempo, em ano, aproximadamente por $m = 0{,}5 + \log(2t + 1)$.

a. Calcule a massa média de um indivíduo dessa espécie ao nascer. **15. a.** 0,5 kg

b. Adotando $\log 3 = 0{,}48$ e $\log 5 = 0{,}70$, calcule a massa média de um indivíduo dessa espécie quando atingir a idade adulta, aos 7 anos de vida. **15. b.** 1,68 kg

16. Até este instante, o incêndio em uma floresta já devastou 50 ha (hectares) e, pela ação dos ventos, a área destruída cresce 2,4% a cada hora. Se essa taxa de crescimento se mantiver constante, em quantas horas, a partir deste instante, a área atingida pelo incêndio dobrará de tamanho? (Adote $\log 2 = 0{,}301$.)

16. Concluímos que, a partir deste instante, a área atingida pelo incêndio dobrará de tamanho em 30,1 h.

17. (Enem) Uma liga metálica sai do forno a uma temperatura de 3.000 °C e diminui 1% de sua temperatura a cada 30 min. Use 0,477 como aproximação para $\log_{10}(3)$ e 1,041 como aproximação para $\log_{10}(11)$.

O tempo decorrido, em hora, até que a liga atinja 30 °C é mais próximo de: **17.** alternativa **d**

a. 22. **b.** 50. **c.** 100. **d.** 200. **e.** 400.

18. Toda substância radioativa se desintegra a uma taxa constante, isto é, seu decaimento é exponencial. O tempo necessário para que sua massa se reduza à metade é chamado de meia-vida da substância.

O rádio é um metal radioativo cujo isótopo Ra-226 tem meia-vida de 1.600 anos. Qual é o tempo, em ano, necessário para que 10 g desse isótopo se reduzam a 1 g?

18. aproximadamente 5.300 anos

OBJETO DIGITAL **Carrossel de imagens: Mulheres na Ciência**

Em 1911, a cientista francesa de origem polonesa Marie Curie (1867-1934) ganhou o prêmio Nobel de Química por descobrir dois novos elementos químicos, que vieram a ser chamados de polônio e rádio.



BETTMANN/GETTY IMAGES

Para retomar os conteúdos estudados, resolva os exercícios complementares 6 e 7

11. Espera-se que os estudantes recorram às propriedades do logaritmo, fazendo:

$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$

3. Função logarítmica

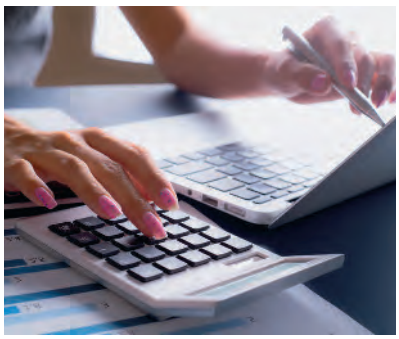
Na modalidade de juro composto, se um capital inicial C é aplicado durante t unidades de tempo, à taxa percentual constante i por unidade de tempo, então o montante M acumulado ao final do período de aplicação pode ser calculado pela fórmula:

$$M = C(1 + i)^t,$$

em que t e i se referem à mesma unidade de medida de tempo.

Como a variável t é um expoente, podemos supor que a teoria dos logaritmos deve ter grande utilidade nesses cálculos. E, de fato, tem. Como exemplo, acompanhe o problema a seguir.

Por quanto tempo deve ser aplicado o capital de R$ 10.000,00 à taxa constante de 2% ao mês para que o montante acumulado ao final da aplicação seja:



PORTRAIT IMAGES ASIA BY NONWARIT/SHUTTERSTOCK

a. o dobro do capital aplicado?

b. $k \cdot$ R$ 10.000,00, com $k \in \mathbb{R}_+^*$?

Para resolver esse problema, aplicamos a fórmula apresentada anteriormente.

a. Para $C = 10.000$, $i = 0{,}02$ e $M = 20.000$, temos:

$$20.000 = 10.000\,(1 + 0{,}02)^t$$

De onde concluímos que a medida do tempo, em mês, é dada por:

$$t = \log_{1{,}02} 2$$

b. Para $C = 10.000$; $i = 0{,}02$ e $M = k \cdot 10.000$, temos:

$$k \cdot 10.000 = 10.000\,(1 + 0{,}02)^t$$

De onde concluímos que o tempo, em mês, é dado por:

$$t = \log_{1{,}02} k$$

Note que, no item **b**, o valor de t é dado em função de k por meio de um logaritmo. Neste tópico, vamos estudar funções desse tipo, chamadas de **funções logarítmicas**.

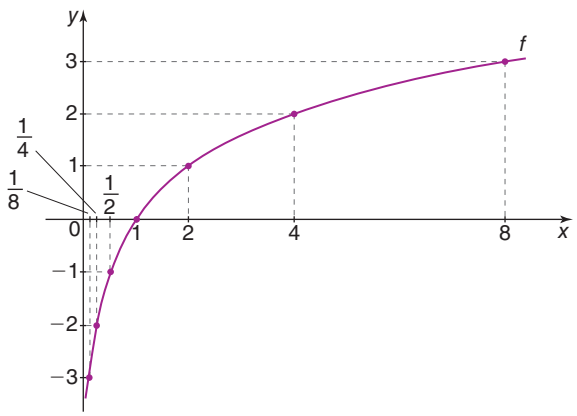
Chama-se **função logarítmica** toda função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \log_b x$, em que b é um número real, positivo e diferente de 1.

Exemplos

a. $f(x) = \log_2 x$ é a lei de uma função logarítmica. No quadro a seguir, obtemos alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçamos o gráfico de f. Acompanhe.

$f(x) = \log_2 x$

x	$\log_2 x$
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- $f(x) = \log_2 x$ é uma função crescente em todo o seu domínio

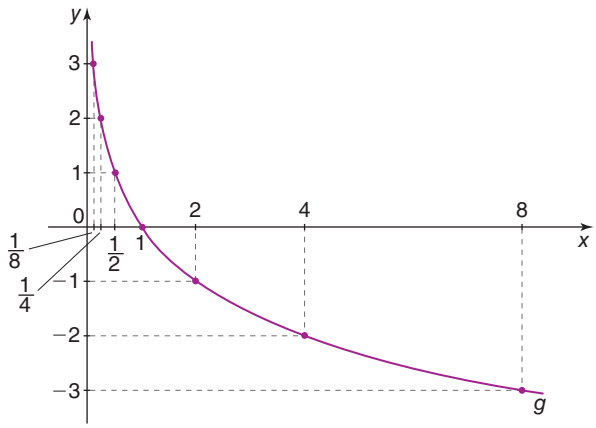
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

AUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

b. $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é a lei de uma função logarítmica. No quadro a seguir, obtemos alguns pontos dessa função e, a partir deles, esboçamos o gráfico de g. Acompanhe.

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$\log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3

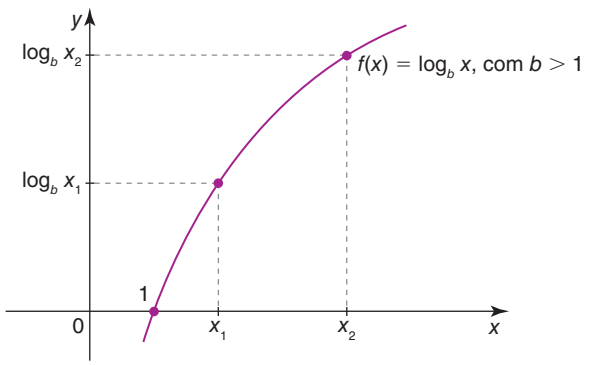


- $D(g) = \mathbb{R}_+^*$
- $Im(g) = \mathbb{R}$
- $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é uma função decrescente em todo o seu domínio

Propriedades da função logarítmica

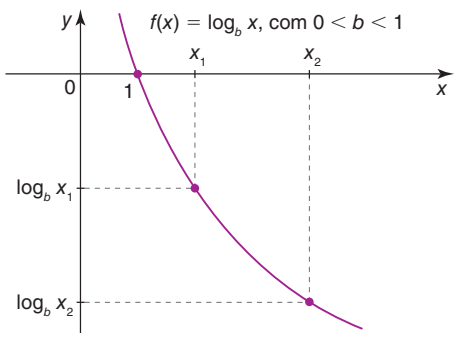
P1. $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$, para quaisquer números reais positivos x, y e b, com $b \neq 1$.

P2. A função logarítmica do tipo $f(x) = \log_b x$ é **crescente** em todo o seu domínio se, e somente se, $b > 1$.



Tem-se, então:
$\log_b x_2 > \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$,
para quaisquer números reais positivos x_1, x_2 e b, com $b > 1$.

P3. A função logarítmica do tipo $f(x) = \log_b x$ é **decrescente** em todo o seu domínio se, e somente se, $0 < b < 1$.



Tem-se, então:
$\log_b x_2 < \log_b x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$,
para quaisquer números reais positivos x_1, x_2 e b, com $0 < b < 1$.

Conectado: Verifique a possibilidade de desenvolver essa atividade no laboratório de informática ou em sala de aula com um computador e projetor multimídia. Antecipadamente, verifique se os computadores possuem um *software* de Geometria dinâmica adequado para a atividade. Incentive os estudantes a compararem os gráficos obtidos, analisando os valores que cada estudante considerou para x, b e o que acontece com o gráfico em cada caso, percebendo quando a função logarítmica é crescente ou decrescente.

Conectado

Para verificar as propriedades 2 e 3 da função logarítmica, construa, usando um *software* de construção de gráficos, o gráfico de uma função logarítmica do tipo $y = \log_b x$, atribuindo quaisquer valores reais e positivos para x e:

- qualquer número real maior que 1 para b.
- qualquer número real entre 0 e 1 para b.

Em seguida, compartilhe os gráficos construídos com os colegas e discutam sobre as funções crescente e decrescente obtidas.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Vacinação de adolescente contra coronavírus em Presidente Prudente (SP). Foto de 2021.

A função logarítmica e a função exponencial

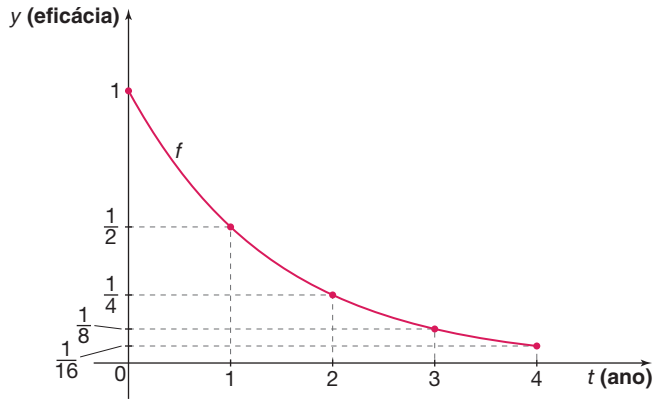
Algumas vacinas perdem a sua eficácia ao longo do tempo e, por esse motivo, é necessário tomar reforços. Como exemplo, temos a vacina antitetânica, em que o reforço deve ser tomado a cada 10 anos após completar o esquema das 3 doses iniciais.

Acompanhe a situação hipotética a seguir.

Experiências científicas constataram que a meia-vida de uma nova vacina no organismo humano é de 1 ano. Dado que a eficácia desse medicamento é de 100%, que indicaremos por 1, observe o gráfico da função f, a seguir, que expressa a eficácia (y) da vacina no organismo humano, em função do tempo t, em ano, durante 4 anos, a partir da aplicação da primeira dose.

Eficácia da vacina em função do tempo

y (eficácia)	t (ano)
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{16}$	4

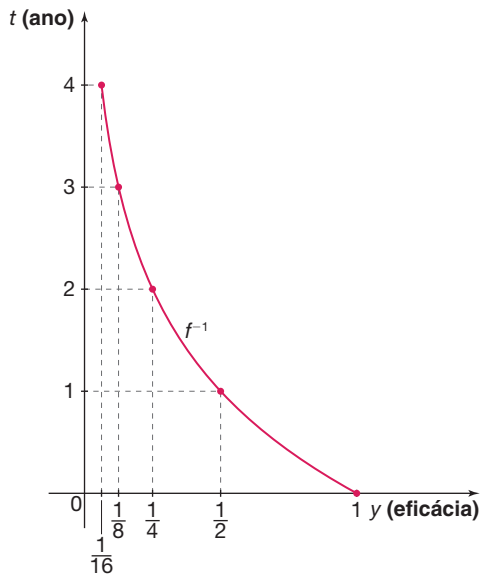


Observação

A meia-vida da vacina no corpo humano é o tempo necessário para que a eficácia do medicamento se reduza à metade.

Observando que a função f estabelece uma correspondência biunívoca entre o domínio $D(f) = [0, 4]$ e o conjunto imagem $Im(f) = \left[\frac{1}{16}, 1\right]$, concluímos que existe a inversa f^{-1}, que é aquela que expressa t em função de y e tem como gráfico:

t (ano)	y (eficácia)
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$



No mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções $y = \log_2 x$ e $y = 2^x$, destacando a simetria deles em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Faça o mesmo para os gráficos das funções $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Conclua que as funções $y = \log_2 x$ e $y = 2^x$ são inversas entre si, o mesmo acontecendo com as funções $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Note que a lei de associação da função f é $y(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, e que a lei de associação de f^{-1} é $t(y) = \log_{\frac{1}{2}} y$, o que nos leva a conjecturar que as funções exponencial e logarítmica têm um vínculo de inversibilidade.

De fato, isso é verdade! Podemos generalizar essa afirmação do seguinte modo:

Dado um número real qualquer b, positivo e diferente de 1, temos:

I. Para todo número real positivo x, existe um **único** número real y tal que $y = \log_b x$.

II. Para todo número real y, existe um **único** número real positivo x tal que $y = \log_b x$.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

As condições (I) e (II) mostram que a função do tipo $y = \log_b x$ é uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$ e, portanto, essa função admite inversa, que podemos encontrar substituindo x por y e y por x, obtendo:

$$x = \log_b y$$

Em seguida, isolamos a variável y, obtendo:

$$x = \log_b y \Rightarrow y = b^x$$

Assim, concluímos que a inversa de $y = \log_b x$ é $y = b^x$.

Exemplo

A figura 1 apresenta os gráficos das funções inversas definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $f^{-1}(x) = 2^x$; e a figura 2, os gráficos das funções inversas definidas por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Note, em cada figura, a simetria dos gráficos em relação à reta r, bissetriz dos quadrantes ímpares.

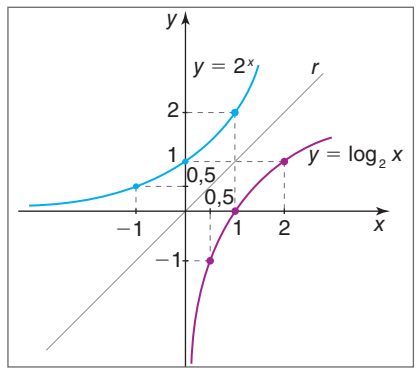


figura 1

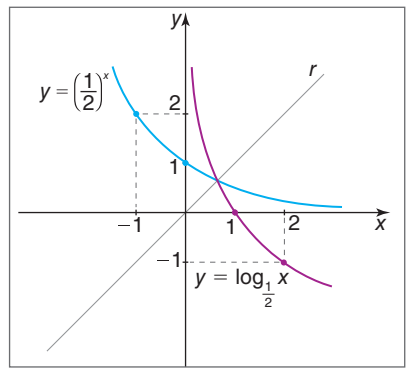


figura 2

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

7. Determine o domínio da função f de lei $f(x) = \log_4 (2x - 12)$.

Resolução

A condição de existência de qualquer $\log_b a$ é $\{a, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$ e $b \neq 1$.

Como na função f a base (4) do logaritmo é positiva e diferente de 1, basta impor a condição sobre o logaritmando, isto é:

$$2x - 12 > 0 \Rightarrow x > 6$$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$.

8. Obtenha a inversa da função y definida por $y = \log_2 (2x + 1)$.

Resolução

Inicialmente, trocamos x por y e y por x:

$$x = \log_2 (2y + 1)$$

Em seguida, isolamos a variável y:

$$x = \log_2 (2y + 1) \Rightarrow 2^x = 2y + 1$$

$$\therefore\ y = \frac{2^x - 1}{2}$$

Logo, a inversa de $y = \log_2 (2x + 1)$ é: $y = \frac{2^x - 1}{2}$

9. Determine a inversa da função y definida por $y = 2 + 5^{x+1}$.

Resolução

Inicialmente, trocamos x por y e y por x:

$$x = 2 + 5^{y+1}$$

Em seguida, isolamos a variável y:

$$x - 2 = 5^{y+1} \Rightarrow y + 1 = \log_5 (x - 2)$$

$$\therefore\ y = -1 + \log_5 (x - 2)$$

Logo, a inversa de $y = 2 + 5^{x+1}$ é:

$$y = -1 + \log_5 (x - 2)$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

19. Resposta no final do livro.

19. Construa o gráfico de cada função dada pela sua lei.

a. $f(x) = \log_3 x$ **b.** $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

20. Classifique em crescente ou decrescente cada uma das funções.

a. $f(x) = \log_9 x$ **20. a.** crescente

b. $g(x) = \log_{0,4} x$ **20. b.** decrescente

c. $h(x) = \log_{\frac{\pi}{3}} x$ **20. c.** crescente

d. $t(x) = \log_{\frac{\pi}{4}} x$ **20. d.** decrescente

21. Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações, sendo x, a e b números reais positivos.

a. $\log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$ **21. a.** verdadeira

b. $\log_3 a > \log_3 b \Leftrightarrow a > b$ **21. b.** verdadeira

c. $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a > b$ **21. c.** falsa

d. $\log_{0,7} a < \log_{0,7} b \Leftrightarrow a > b$ **21. d.** verdadeira

e. $\log_{\sqrt{1,5}} a \geqslant \log_{\sqrt{1,5}} b \Leftrightarrow a \geqslant b$ **21. e.** verdadeira

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

22. Como estudamos no exercício proposto 6, o pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ é a concentração, em mol/L, de íons hidrogênio H^+ na solução.

O pH, expresso em função de $[H^+]$, representa uma função crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

22. Resposta no final do livro.

23. Determine o domínio das funções dadas pelas suas leis.

a. $f(x) = \log_7 (5x - 6)$ **23. a.** $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{6}{5}\right\}$

b. $g(x) = \log (x^2 - 5x + 6)$

c. $t(x) = \log_5 \frac{2x - 6}{x - 2}$ **23. b.** $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$ **23. c.** $D(t) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

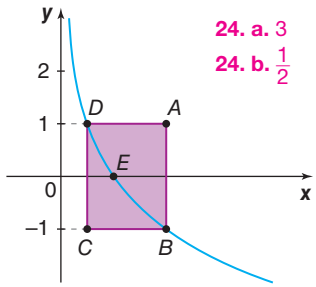
24. Considerando o gráfico da função f definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, representado a seguir, determine:

a. a área do retângulo *ABCD*.

b. a área do triângulo *CDE*.

c. o perímetro do triângulo *ABE*.

24. c. $2(1 + \sqrt{2})$



24. a. 3

24. b. $\frac{1}{2}$

25. Obtenha a inversa das funções dadas pelas suas leis.

a. $f(x) = \log_3 x$ **25. a.** $f^{-1}(x) = 3^x$

b. $g(x) = \log\sqrt{x + 1}$ **25. b.** $g^{-1}(x) = 10^{2x} - 1$

c. $h(x) = \log_2 5 + \log_2 (2x + 1)$ **25. c.** $h^{-1}(x) = \frac{2^x - 5}{10}$

d. $p(x) = \log_5 2 - \log_5 (x + 1)$ **25. d.** $p^{-1}(x) = \frac{2}{5^x} - 1$

26. A superfície de um lago, com 1 km² de área, foi totalmente invadida por uma planta aquática nociva a peixes e répteis. Adicionou-se à água, então, um inibidor de crescimento, que reduz a área ocupada pela planta em 50% ao mês.

a. No quadro a seguir, determine os valores a, b, c e d, que correspondem à área ocupada pela planta no fim de cada mês, a partir do momento atual, registrado pelo tempo zero.

26. a. $a = 0{,}5$; $b = 0{,}25$; $c = 0{,}125$; $d = 0{,}0625$

Área ocupada pela planta no fim de cada mês

Tempo (mês)	Área (km²)
0	1
1	a
2	b
3	c
4	d
⋮	⋮

26. b. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

b. Indicada por x a área, em quilômetro quadrado, ocupada pela planta daqui a y meses, elabore uma lei que expresse y em função de x.

c. O gráfico da função do item **b** é parte do gráfico de uma função logarítmica f. Construa o gráfico da função f e explique por que o gráfico da função do item **b** não é o próprio gráfico de f.

26. c. Resposta nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

27. Observou-se, em laboratório, que o número N de bactérias em uma cultura, que tinha inicialmente 100 mil indivíduos, dobrou a cada 3 horas durante certo período de tempo. **27. a.** $N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$

a. Obtenha uma equação que expresse o número N de bactérias, em milhares de indivíduos, em função do tempo t, em hora, durante o período de observação.

b. A partir da função obtida no item **a**, expresse t em função de N. **27. b.** $t = \log_2 \left(\frac{N}{100}\right)^3$

c. Que relação você destacaria entre as funções obtidas nos itens **a** e **b**? **27. c.** As funções obtidas nos itens **a** e **b** são inversas entre si.

28. Elabore um problema sobre logaritmo. Em seguida, troque o problema elaborado com um colega para que um resolva o do outro. Por fim, analisem e discutam as resoluções. **28.** Resposta pessoal.

Conectado

Conectado: Resposta no final do livro.

No gráfico da função definida por $y = \log_2 x$, construído na página 284, observamos que, percorrendo o eixo Oy até o $-\infty$, o gráfico se aproxima indefinidamente desse eixo, mas sem tocá-lo. Por isso, a reta Oy é chamada de **assíntota** (vertical) do gráfico da função definida por $y = \log_2 x$. Usando um *software* de construção de gráficos, faça o que se pede.

a. Construa o gráfico de uma função definida por $y = p + \log_2 x$, escolhendo qualquer valor real para p, e determine a reta (vertical) assíntota desse gráfico.

b. Construa o gráfico de uma função definida por $y = \log_2 (x + p)$, escolhendo qualquer valor real para p, e determine a reta (vertical) assíntota desse gráfico.

c. Tente generalizar suas observações.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

OBJETO DIGITAL Infográfico clicável: Arqueologia

Matemática sem fronteiras: 1. Pela propriedade da mudança de base dos logaritmos, temos: $\log_{0,9998791} 0,337 = \frac{\log_{10} 0,337}{\log_{10} 0,9998791}$

Para efetuar esse cálculo em uma calculadora científica, pressionamos a seguinte sequência de teclas:

log	0	·	3	3	7	
:	log	0	·	9	9	
9	8	7	9	1	=	

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

A idade dos fósseis

O carbono-14 (C14) é um isótopo radioativo formado na atmosfera terrestre por meio de reações químicas provocadas pelo constante bombardeamento de raios cósmicos.

Os seres vivos, animais e plantas, absorvem e perdem o C14 ao longo da vida, mantendo constante a quantidade desse isótopo em seu organismo, por unidade de volume. A morte põe fim a esse equilíbrio, pois, a partir de então, só há perda do C14 por meio da desintegração. Como o C14 se desintegra a uma taxa constante de aproximadamente 0,01209% ao ano, os cientistas conseguem calcular a idade dos fósseis ao medir a quantidade de C14 remanescente nesses materiais.

Para exemplificar, vamos mostrar como os cientistas estimaram a idade das flautas de osso encontradas no sítio arqueológico de Jiahu, no leste da China.



ZHANG JUZHONG E LEE YUN KUEN - INSTITUTO DE RELÍQUIAS CULTURAIS E ARQUEOLOGIA DA PROVÍNCIA DE HENAN, ZHENGZHOU, CHINA.

As seis flautas de Jiahu são os mais antigos instrumentos musicais de que se tem notícia.

Com um contador Geiger (aparelho que mede a radioatividade), constatou-se que a massa de C14 remanescente nos instrumentos era 0,337 da massa que teriam se tivessem sido confeccionados com ossos de animais mortos recentemente. A fórmula $M = C(1 + i)^t$ pode ser aplicada na relação entre o tempo e a massa de C14 remanescente nos fósseis:

$$0,337 = (1 - 0,0001209)^t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0,337 = (0,9998791)^t$$
$$\therefore t = \log_{0,9998791} 0,337$$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos $t \approx 8.996$.

Logo, as flautas têm, aproximadamente, 9.000 anos.

A técnica de datação por meio do carbono-14 é capaz de estimar a idade de fragmentos orgânicos de até 50 mil anos. A partir disso, a radiação remanescente do C14 nesses materiais torna-se muito baixa para ser detectada com precisão suficiente, embora existam outras técnicas que permitem a datação de fósseis mais antigos.

Atividades

Faça os exercícios no caderno.

Reúna-se com um colega para resolverem as atividades propostas.

1. A maioria das calculadoras científicas apresenta apenas as teclas log e ln para o cálculo de logaritmos. Nesse tipo de máquina, o cálculo de logaritmos, em qualquer base possível, exige alguns procedimentos fundamentados nas propriedades dos logaritmos. Conversem sobre os procedimentos que devem ser aplicados no cálculo de $\log_{0,9998791} 0,337$ usando esse tipo de calculadora. Em seguida, expliquem esses procedimentos.

2. Nos processos radioativos, a meia-vida de um radioisótopo é o tempo necessário para desintegrar a metade da massa desse isótopo. Por exemplo, se a meia-vida de um material radioativo é 10 anos, isso significa que qualquer porção de massa m desse material se reduz a uma porção de massa $\frac{m}{2}$ em 10 anos.

De acordo com esse conceito, calculem a meia-vida do C14 com base nos dados fornecidos no texto apresentado. **2.** aproximadamente 5.700 anos

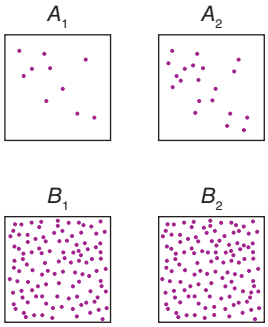
Nota: As calculadoras não adotam as mesmas convenções de cálculo; por isso, se alguma calculadora acusar erro de sintaxe, é porque ela adota outra convenção na sequência de teclas. Nesse caso, oriente os estudantes a consultar o manual da calculadora.

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4. Equações logarítmicas



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos considerar os quadrados A_1, A_2, B_1 e B_2 representados.

a. Entre os quadrados A_1 e A_2, qual tem mais pontos marcados em seu interior?

b. Entre os quadrados B_1 e B_2, qual tem mais pontos marcados em seu interior?

Essa experiência ilustra a lei que queremos destacar nesta introdução.

Observando os quadrados A_1 e A_2, percebe-se, facilmente, que há mais pontos marcados no interior de A_2 do que no interior de A_1. Já os quadrados B_1 e B_2 parecem ter o mesmo número de pontos em seu interior. Na realidade, os quadrados A_1 e A_2 têm 10 e 20 pontos marcados, respectivamente, e os quadrados B_1 e B_2 têm 110 e 120 pontos marcados, respectivamente.

Embora o acréscimo de pontos de A_1 para A_2 e de B_1 para B_2 seja o mesmo, nossa percepção é diferente nos dois casos: ela "diminui" no segundo caso, em relação ao primeiro.

O mesmo acontece com a percepção da luz. Se uma sala tem uma lâmpada acesa e for acesa uma segunda lâmpada de mesma capacidade luminosa, percebemos facilmente o aumento na iluminação. Mas se a sala já tivesse acesas cinco lâmpadas de mesma capacidade luminosa e fosse ligada mais uma lâmpada com a mesma capacidade luminosa, talvez nem percebêssemos o aumento na iluminação.

Essa variação na percepção sensorial humana ocorre também em relação ao som, ao calor, à pressão, ao sabor etc. Enfim, todos os sentidos humanos estão sujeitos a esse fenômeno. Mas de que maneira varia a percepção sensorial humana?

Vários cientistas, como Ernst Heinrich Weber (1795-1878) e Gustav Theodor Fechner (1801-1887), estudaram a relação existente entre a intensidade física de um estímulo e o grau dessa intensidade percebido pelo ser humano.

As pesquisas desses cientistas resultaram em uma lei que ficou conhecida como lei de Weber-Fechner, cujo enunciado é: A resposta do organismo humano a qualquer estímulo é proporcional ao logaritmo decimal da intensidade do estímulo. Essa lei vale para qualquer percepção sensorial: auditiva, visual, térmica, tátil, gustativa ou olfativa.

Portanto, a lei de Weber-Fechner, aplicada a uma dessas situações, conduz a uma função logarítmica e, via de regra, à resolução de uma equação. Em relação à percepção auditiva, essa lei resulta em uma função que expressa o nível sonoro N, em decibel (dB), em termos da potência I de som, em watt por centímetro quadrado (W/cm^2), dada por:

$$N = \log\left(\frac{I}{10^{-16}}\right)^{10}$$

Assim, por exemplo, se em dado momento o nível sonoro, em dB, em um *show* era equivalente a uma vez e meia o nível sonoro medido no centro da cidade de São Paulo na hora de trânsito intenso, em que a potência era de 10^{-8} W/cm^2, podemos determinar a potência sonora no *show* por meio da equação:

$$\log\left(\frac{I}{10^{-16}}\right)^{10} = 1{,}5 \cdot \log\left(\frac{10^{-8}}{10^{-16}}\right)^{10}$$

Os métodos de resolução que vamos estudar neste tópico permitem determinar o valor de I, que é 10^{-4}. Assim, a potência do som naquele *show* era de 10^{-4} W/cm^2.

A lei de Weber-Fechner possibilita inúmeras aplicações práticas que recaem em equações como essa, chamada de **equação logarítmica.**

Comente a lei de Weber-Fechner cujo enunciado geral é: Seja x_0 a medida de um estímulo tomado como referência ao qual se atribui o nível de resposta 0 (zero) e seja i uma taxa tal que determinada variação da taxa i no nível de um estímulo produz a variação de uma unidade no nível de resposta. Nessas condições, tem-se que o nível de resposta y a um estímulo de medida x é tal que: $x = x_0 (1 + i)^y$, do qual se conclui: $y = k \log\left(\frac{x}{x_0}\right)$, com $k = \frac{1}{\log (1 + i)}$

Nota: A taxa i é escolhida como a menor taxa de variação que propicie a distinção da resposta.



LUCIANO QUEIROZ/PULSAR IMAGENS

Show de forró de São João no centro histórico da cidade de Mucugê (BA). Foto de 2023.

> **Equação logarítmica** é toda equação que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo.

Exemplos

a. $\log_6 (3x - 1) = \log_6 (x + 7)$

b. $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3$

c. $\log_x (x - 1) + \log_x 9 - \log_x 2 = 2$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A resolução de uma equação logarítmica baseia-se na propriedade P1 das funções logarítmicas, ou seja:

$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$, para quaisquer números reais positivos x, y e b, com $b \neq 1$.

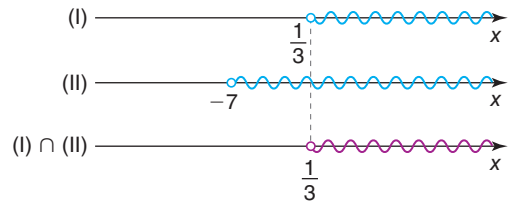
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

10. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_6 (3x - 1) = \log_6 (x + 7)$.

Resolução

- Condição de existência:

$$\begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ x + 7 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} & \text{(I)} \\ x > -7 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência se resume a $x > \frac{1}{3}$.

- Resolução da equação:
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas, temos:

$\log_6 (3x - 1) = \log_6 (x + 7) \Rightarrow 3x - 1 = x + 7$

$\therefore x = 4$

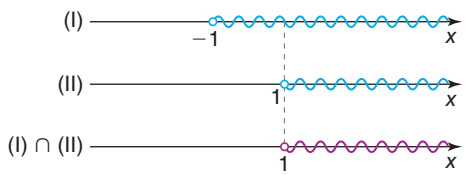
Observando que $x = 4$ satisfaz à condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{4\}$.

11. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3$.

Resolução

- Condição de existência:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, a condição de existência é $x > 1$.

- Preparação da equação:
Transformamos os dois membros da igualdade em logaritmos de mesma base. O número 3 pode ser representado como logaritmo de base 2 do seguinte modo:

$$3 = 3 \cdot \log_2 2 = \log_2 2^3$$

propriedade P3

Assim:

$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = \log_2 2^3$

$\therefore \log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = \log_2 8$

Aplicamos a propriedade P6 dos logaritmos, obtendo:

$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x - 1) = \log_2 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 [(x + 1)(x - 1)] = \log_2 8$

$\therefore \log_2 (x^2 - 1) = \log_2 8$

- Resolução da equação:
Pela propriedade P1 das funções logarítmicas, temos:

$\log_2 (x^2 - 1) = \log_2 8 \Rightarrow x^2 - 1 = 8$

$\therefore x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Observando que apenas $x = 3$ satisfaz à condição de existência, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{3\}$.

12. (Unicamp-SP) As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8 (1 + t)^6$ e $B(t) = \log_2 (4t + 4)$, em que a variável t representa o tempo em ano.

a. Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?

b. Após certo instante t, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine esse instante t e especifique a cidade cuja população é maior após esse instante.

Resolução

a. $A(1) = \log_8 (1 + 1)^6 = \log_8 2^6 =$

$= \log_8 (2^3)^2 = \log_8 8^2 = 2 \log_8 8 = 2 \cdot 1 = 2$

$A(7) = \log_8 (1 + 7)^6 = \log_8 8^6 = 6 \log_8 8 = 6 \cdot 1 = 6$

Logo, nos instantes $t = 1$ e $t = 7$, a população da cidade A era de, respectivamente, 2 mil e 6 mil habitantes.

$B(1) = \log_2 (4 \cdot 1 + 4) =$

$= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$

$B(7) = \log_2 (4 \cdot 7 + 4) = \log_2 32 =$

$= \log_2 2^5 = 5 \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, nos instantes $t = 1$ e $t = 7$, a população da cidade B era de, respectivamente, 3 mil e 5 mil habitantes.

b. Nas funções que representam as populações de A e B, as bases dos logaritmos são maiores que 1 e, portanto, ambas são funções crescentes. No item **a**, obtivemos $A(1) < B(1)$ e $A(7) > B(7)$; isso significa que, para certo instante t entre 1 e 7, $B(t) = A(t)$ e, a partir desse instante, a população da cidade A é sempre maior que a da cidade B. Para determinar o instante t, basta resolver a equação apresentada a seguir, para $t > 0$:

$$\log_8 (1 + t)^6 = \log_2 (4t + 4)$$

Pela propriedade da mudança de base, transformamos o logaritmo do primeiro membro para a base 2:

$$\frac{\log_2 (1 + t)^6}{\log_2 8} = \log_2 (4t + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 (1 + t)^6}{3} = \log_2 (4t + 4)$$

$$\therefore \log_2 (1 + t)^6 = 3 \log_2 (4t + 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (1 + t)^6 = \log_2 (4t + 4)^3$$

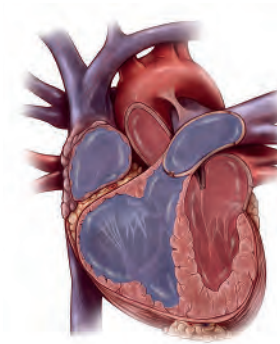
$$\therefore (1 + t)^6 = (4t + 4)^3 \Rightarrow (1 + t)^6 = 4^3 \cdot (1 + t)^3$$

Como $1 + t \neq 0$, pois $t > 0$, podemos dividir ambos os membros dessa igualdade por $(1 + t)^3$, obtendo: $(1 + t)^3 = 4^3 \Rightarrow t = 3$

Concluímos que, no instante t igual a 3 anos, as populações das duas cidades eram iguais e, a partir desse instante, a população de A foi sempre maior que a de B.

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO

Análise da resolução: Os cálculos efetuados pelo estudante estão corretos, mas a conclusão (último parágrafo) está incorreta, pois: $0 < \frac{70}{95} < 1 \Rightarrow \log_e \frac{70}{95} < 0$.



EVAN OTO/SCIENCE SOURCE/FOTOARENA

Esquema em corte de coração e artérias. Modelo didático sem escala e em cores fantasia.

Um estudante resolveu o exercício conforme a reprodução a seguir. Um erro foi cometido. Indique o erro e refaça a resolução no caderno, corrigindo-a.

Exercício

Quando as válvulas da artéria aorta se fecham, a pressão P, em mmHg (milímetro de mercúrio), no interior dessa artéria, durante o fechamento, pode ser expressa em função do tempo t, em segundo, por meio da equação $P = 95 \cdot e^{-0,49t}$. Após o fechamento das válvulas, em quanto tempo a pressão atingirá 70 mmHg? Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule o valor obtido para t.

Nota:

O número e, conhecido como número de Neper ou número de Euler, é um número irracional que vale aproximadamente 2,7. Na calculadora científica, o logaritmo de base e, isto é, $\log e$, corresponde à tecla [ln].

Resolução

Para $P = 70$, temos: $70 = 95 \cdot e^{-0,49t} \Rightarrow e^{-0,49t} = \frac{70}{95}$

Assim: $-0,49t = \log_e \frac{70}{95} \Rightarrow t = -\frac{\log_e \frac{70}{95}}{0,49}$

Como chegamos a um valor negativo, e o tempo deve ser positivo, concluímos que a pressão não atingirá 70 mmHg.

Logo, o valor obtido para t é positivo. Na calculadora científica, o logaritmo de base e corresponde à tecla [ln].
Assim, uma possível sequência de teclas que podem ser digitadas para se obter o valor de t é:

[−] [ln] [(] [7] [0] [:] [9] [5] [)] [:] [0] [.] [4] [9] [=]

Obtemos, então, $t \approx 0,62$ s.

Nota:
As calculadoras não adotam as mesmas convenções de cálculo; por isso, se a calculadora acusar erro de sintaxe, é porque ela adota outra convenção na sequência de teclas. Nesse caso, consulte o manual da calculadora.
Por exemplo, em algumas calculadoras, para calcular ln 5, devemos apertar primeiro a tecla [5] e, depois, a tecla [ln].

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Faça os exercícios no caderno.

29. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir.

a. $\log_3 (5x - 6) = 2$ **29. a.** $S = \{3\}$

b. $\log_3 (8x + 1) - \log_3 (x - 1) = 2$ **29. b.** $S = \{10\}$

c. $\log_2 (x - 2) + 2 \log_4 x = 3 \log_8 (2x)$ **29. c.** $S = \{4\}$

30. A partir de um mesmo instante, um biólogo começou a estudar as populações de duas colônias, A e B, de formigas. Após alguns meses de observação, o cientista estabeleceu as funções: $f(x) = \log_3 (2x + 50)$ e $g(x) = 1 + \log_3 \frac{x + 40}{2}$, em que $f(x)$ e $g(x)$ representam, aproximadamente, o número de milhares de indivíduos das colônias A e B, respectivamente, após x semanas do início do estudo. Em quantas semanas, após o início do estudo, as populações de A e B atingiram o mesmo número de indivíduos? **30.** 20 semanas

31. Um investidor aplicou, durante o mesmo tempo, 3.200 reais em um fundo A e 1.600 reais em um fundo B. As taxas mensais de juro composto dos fundos A e B foram 1% e 2%, respectivamente. Adotando $\log_{1,01} 1{,}02 = 2$, conclui-se que os montantes M_A e M_B, acumulados pelas aplicações A e B, respectivamente, são tais que: **31.** alternativa **d**

a. $M_A = 60M_B$

b. $M_A = 40M_B$

c. $M_A = 60 \cdot \sqrt[4]{M_B}$

d. $M_A = 80 \cdot \sqrt{M_B}$

e. $M_A = 40 \cdot \sqrt[3]{M_B}$

Para retomar os conteúdos estudados, resolva o exercício complementar 8.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

Faça os exercícios no caderno.

1. a. $A = 10.000 \cdot 2^t$

1. No início de um estudo do Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (Ibama), a área desmatada de uma região era de 10.000 ha. Durante o período desse estudo, constatou-se que a área desmatada dobrou a cada década.

a. Formule uma equação que expresse a medida A da área desmatada, em hectare, em função da medida t do tempo, em década, desse período de estudo.

b. Considerando que, durante o período do estudo, a área desmatada atingiu 90.000 ha, quantos anos se passaram, a partir do início do estudo, para que esse montante fosse atingido? (Adote $\log_2 3 = 1{,}58$.)

1. b. 31,6 anos

2. (Vunesp) O brilho de uma estrela percebido pelo olho humano, na Terra, é chamado de magnitude aparente da estrela. Já a magnitude absoluta da estrela é a magnitude aparente que a estrela teria se fosse observada a uma distância padrão de 10 *parsecs* (1 *parsec* é aproximadamente 3×10^{13} km). As magnitudes, aparente e absoluta, de uma estrela são muito úteis para se determinar sua distância ao planeta Terra. Sendo m a magnitude aparente e M a magnitude absoluta de uma estrela, a relação entre m e M é dada aproximadamente pela fórmula:

$M = m + 5 \cdot \log_3 (3 \cdot d^{-0{,}48})$, onde d é a distância da estrela ao planeta Terra, em *parsecs*. A estrela Rigel tem aproximadamente magnitude aparente 0,2 e magnitude absoluta −6,8. Determine a distância, em quilômetro, de Rigel ao planeta Terra.

2. $7{,}29 \cdot 10^{15}$ quilômetros

3. (Vunesp) Os átomos de um elemento químico radioativo têm a tendência natural de se desintegrar (emitindo partículas e transformando-se em outro elemento). Assim, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui. Suponhamos que certa quantidade de um elemento radioativo, com inicialmente m_0 gramas de massa, decomponha-se conforme a equação matemática $m(t) = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}}$, em que $m(t)$ é a quantidade de massa radioativa restante no tempo t (em ano). Usando a aproximação $\log 2 = 0{,}3$, determine:

a. $\log 8$; **3. a.** 0,9

b. quantos anos demorará para que esse elemento se decomponha até atingir um oitavo da massa inicial.

3. b. 63 anos

4. (Enem) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos, e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, em que A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10} 2$.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial? **4.** alternativa **e**

a. 27 **b.** 36 **c.** 50 **d.** 54 **e.** 100

5. (Uerj) Um fabricante de equipamentos de informática anuncia um disco rígido de 30 *gigabytes*. Na linguagem usual da computação, essa medida corresponde a $p \cdot 2^{30}$ *bytes*.

Calcule o valor de p considerando a tabela de logaritmos abaixo e que 1 *gigabyte* equivale a 10^9 *bytes*.

5. $p = 28$

x	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
$\log x$	0,301	0,342	0,380	0,415	0,447	0,477

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

6. b. Você encontrará informações nas **Orientações Específicas** deste capítulo.

6. Ao perceber uma mancha de óleo no mar, o capitão de um navio-petroleiro comunicou o vazamento imediatamente à Capitania dos Portos.

a. Algum tempo depois, os técnicos da Defesa Ambiental mediram a área da mancha de óleo, constatando que ela cobria 12 km^2 da superfície do mar e crescia 8% por hora. Concluíram também que, no momento do comunicado à Capitania dos Portos, a área da mancha de óleo era 10 km^2. Supondo que essa taxa de crescimento tenha sido constante a partir do momento do comunicado até o momento da medição, quanto tempo decorreu desde o momento do comunicado à Capitania dos Portos até a conclusão da medição da área da mancha de óleo? (Adote log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48.) **6. a.** 2 horas

b. Pesquise os impactos ambientais causados por acidentes como o descrito no texto e explore estratégias para prevenir tais incidentes.

ODS 14

7. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é um indicador criado pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), com o objetivo de classificar os países segundo o grau de desenvolvimento econômico e a qualidade de vida de seus habitantes. Várias medidas são utilizadas no cálculo do IDH, uma delas é o Índice de Rendimento (IDH_R), calculado por:

$$IDH_R = \frac{\log(PIB_{pc}) - 2}{2(1 + \log 2)},$$

em que a variável PIB_{pc} representa o produto interno bruto *per capita*, em dólares estadunidenses, e varia de 100 a 40.000.

Adotando que $10^{0,3} = 2$, responda aos itens seguintes.

a. Se o PIB_{pc} de um país é 16.000 dólares, qual é o IDH_R desse país? **7. a.** $IDH_R \approx 0,846$

b. Se o IDH_R de um país é 0,500, qual é o PIB_{pc} desse país? **7. b.** 2.000 dólares

c. Pesquise mais informações sobre IDH e PIB e escreva um breve texto justificando a seguinte afirmação: Quanto maior o PIB_{pc} de um país, maior será o IDH_R. **7. c.** Resposta pessoal.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 10

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que você, estudante, realize uma autoavaliação. O objetivo desse instrumento é mensurar seu nível de aprendizagem em relação ao assunto desenvolvido no capítulo. Para ajudá-lo nessa tarefa, apresentamos as seguintes questões.

1. Indique a alternativa que apresenta corretamente os resultados dos logaritmos: **1.** alternativa **a**

$\log_2 32$; $\log_3 \sqrt[6]{3}$; $\log \frac{1}{1.000}$; $\log_{16} 8^{12}$; $\log_{\frac{1}{7}} 49$

a. 5; $\frac{1}{6}$; −3; 9; −2

b. $\frac{1}{6}$; −3; 2; 9; 7

c. 6; −2; −3; 16; 2

d. −5; 3; 9; 8; −2

e. 5; $\frac{1}{6}$; 3; 9; −7

2. Dado que $\log_6 2 = 0,39$ e $\log_6 11 = 1,34$, calcule os logaritmos a seguir. **2. a.** 2,12 **2. b.** 0,95

a. $\log_6 44$ **b.** $\log_6 \frac{11}{2}$ **c.** $\log_2 11$ **2. c.** aproximadamente 3,44

3. Determine a medida t do tempo, em ano, para que um capital de R$ 1.000,00 aplicado em regime de juros compostos, à taxa de 10% ao ano, produza um montante de R$ 1.430,00. **3.** alternativa **b**

a. 1,69 ano **b.** 3,75 anos **c.** 4,12 anos **d.** 5,33 anos **e.** 6,72 anos

4. A partir de determinado instante, a concentração C (número de indivíduos por litro) de um tipo de bactéria poluente em um lago decresce de acordo com a função C definida por $C(t) = 90 \cdot 2^{-6t} + 30 \cdot 2^{-3t}$, em que t representa o tempo em anos. Considerando o ano com 365 dias, log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, determine o valor aproximado do tempo necessário, em dias, para que a concentração seja reduzida a 20 indivíduos por litro. **4.** alternativa **b**

a. 193 dias **b.** 195 dias **c.** 197 dias **d.** 199 dias **e.** 201 dias

Ferramenta de estudo

Ao término da resolução dos exercícios, copie no caderno a ficha apresentada no Capítulo 1, que lhe fornecerá uma visão geral sobre o seu desempenho neste capítulo. Assinale com um X a cada célula se a resposta for "sim".

A ficha de autoavaliação foi apresentada neste momento, mas você pode copiá-la e preenchê-la sempre que considerar necessário verificar sua aprendizagem, adequando o número de colunas ao número de exercícios.

Se teve dificuldades ou não resolveu algum exercício, retome os conteúdos abordados no capítulo. Após algumas tentativas, anote as dúvidas e converse com um colega que possa ajudá-lo. Se mesmo assim a dúvida persistir, pergunte ao professor na aula seguinte. Gerencie bem seu tempo de estudo em casa e estabeleça metas diárias alcançáveis, planejando seus estudos, passo a passo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RESPOSTAS

CAPÍTULO 1

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

9. **a.** $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
b. $A \cap B = \{0, 1, 2\}$
c. $A \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
d. $A \cap D = \varnothing$
e. $A \cup B \cup D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
f. $A \cap B \cap C = \{0, 1, 2\}$
g. $A \cap B \cap C \cap D = \varnothing$
h. $(A \cup D) \cap (B \cup C) = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$
i. $(A \cap D) \cup (B \cap C) = \{0, 1, 2, 3\}$

10. alternativa **d** **11.** alternativa **d**

15. **a.** {1, 2, 9} **d.** {1, 2, 3, 5, 7, 9}
b. {5, 7} **e.** {1, 2, 9}
c. {5, 7} **f.** {1, 2, 3, 9}
g. Não existe, pois $G \not\subset F$.
h. ∅ **i.** {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9}

16. $x = 6$; $y = 8$; $z = 7$; $w = 1$

17. **a.** $\overline{A} = \{x \in U \mid x \text{ é do sexo feminino}\}$
b. $\overline{B} = \{y \in U \mid y \text{ tem menos de 1,5 m de altura}\}$
c. $\overline{C} = \{z \in U \mid z \text{ tem mais de 1,7 m de altura}\}$
d. $\overline{B \cap C} = \{p \in U \mid p \text{ tem menos de 1,5 m ou mais de 1,7 m de altura}\}$
e. $\overline{B} < \overline{C}$ $\{q \in U \mid q \text{ tem menos de 1,5 m ou mais de 1,7 m de altura}\}$

19. 15 pessoas **20.** 988 pessoas
21. 10 estudantes **22.** **a.** 116 pessoas
23. alternativa **a**

26. **a.** $\frac{5}{2}$ **c.** $\frac{3}{100}$ **e.** $\frac{311}{90}$
b. $\frac{381}{100}$ **d.** $\frac{38}{9}$

28. $a = 0$; $b = -9$; $c = \frac{5}{6}$; $d = \sqrt{7}$

31. **a.**]9, 12] **d.** $]-\infty, 9]$
b. [4, 19[**e.** $]-\infty, 0] \cup]8, 14]$
c.]14, 19[**f.**]0, 19[**g.** ∅

32. alternativa **c**

33. **a.** Pelo menos 4 °C e no máximo 65 °C.
b. Pelo menos −5 °C e no máximo 70 °C.
c. Pelo menos −5 °C e inferiores a 4 °C.
d. Superiores a 65 °C e no máximo 70 °C.
e. Inferiores a −5 °C ou superiores a 70 °C.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. 254 árvores **2.** 27 candidatos
3. 22 pessoas **4.** alternativa **c**
6. alternativa **c**
9. alternativa **d**

10. **a.** $\frac{34}{9}$ **c.** $\frac{50.754}{9.900}$
b. $\frac{661}{90}$ **d.** $\frac{12.473}{999}$

11. **a.** Resposta possível: 5
b. Resposta possível: 2,5
c. Sim, porque o produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

12. 719 militares

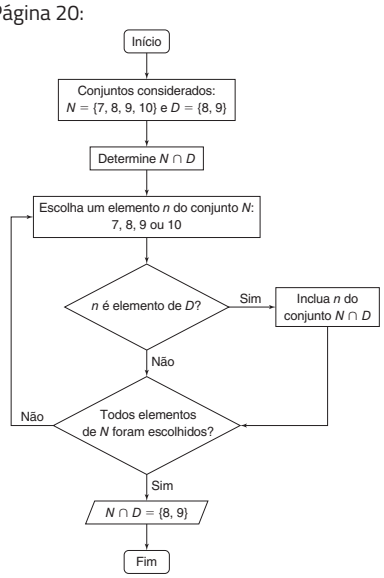
14. **a.** [14; 16,75] **c.** [14; 15[
b. [15; 16,2] **d.**]16,2; 16,75]

15. O fornecedor não vai conseguir visitar os três compradores naquele dia, pois o tempo disponível seria menor que 2 horas.

16. alternativa **c**

Conectado

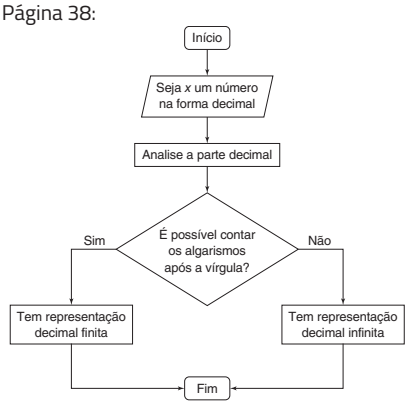
Página 20:



Página 36:



Página 38:



Verifique o que aprendeu no Capítulo 1

1. alternativa **d** **2.** alternativa **c**
3. alternativa **d** **4.** alternativa **d**
5. alternativa **a** **6.** alternativa **a**
7. alternativa **b**

CAPÍTULO 2

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** 2 **b.** −3 **c.** $-\frac{7}{5}$

2. **a.** $S = \{6\}$ **b.** $S = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$

3. alternativa **a** **4.** alternativa **e**
5. alternativa **a** **6.** 60 L

7. **a.** R$ 4,74 **b.** 7,25 **c.** 9 mulheres

9. **a.** $S = \{3, 4, 5, 6, ...\}$
b. $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
c. $S = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

10. **a.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{40}{3}\right\}$
b. $S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid k < \frac{16}{37}\right\}$
c. $S = \left\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq -\frac{2}{3}\right\}$

11. Será mais vantajoso alugar um carro na agência A se o total de quilômetros rodados por dia for superior a 100.

12. **a.** $S = \{(8, -1)\}$ **c.** $S = \left\{\left(\frac{9}{23}, \frac{2}{23}\right)\right\}$
b. $S = \{(1, 2)\}$ **d.** $S = \{(0, -1)\}$

13. alternativa **a**

14. 0,4 kg de café tupi e 0,6 kg de café catuaí amarelo.

16. **a.** $S = \{5, -5\}$ **e.** $S = \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$
b. $S = \{4, -4\}$ **f.** $S = \{3\}$
c. $S = \{0, 7\}$ **g.** $S = \varnothing$
d. $S = \left\{-\frac{2}{5}, 0\right\}$ **h.** $S = \{-3, 2\}$

17. alternativa **c**

18. **a.** soma 5; produto 6; raízes 2 e 3
b. soma 9; produto 20; raízes 4 e 5
c. soma −5; produto 6; raízes −2 e −3
d. soma −2; produto −8; raízes −4 e 2

19. 34 apartamentos

20. **a.** $S = \left\{(3, 1), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)\right\}$
b. $S = \{(-5, 14), (2, 0)\}$
c. $S = \{(1, 1), (6, 16)\}$

21. **a.** $(p - 3)(p - 1)$
b. $2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y + 2)$

22. alternativa **e**

24. **a.** $\frac{63}{20}$; $\frac{3}{100}$ **c.** 0,3%; 132%
b. 0,0023; 0,46 **d.** 34%; 240%

26. 16,2 litros de etanol anidro

27. 2.280 italianos

28. **a.** ≈ 172.222.222 pessoas
c. ≈ 222%

29. alternativa **b** **30.** R$ 64,00

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

31. 10% **32.** 32%
33. **a.** ≈ 7,4% **b.** 8%
34. **a.** R$ 204,00 **b.** R$ 544,00
35. **a.** 1,5% **b.** 15 meses **c.** R$ 335,36
36. R$ 5.000,00 **37.** 25%
38. alternativa **d**
40. **a.** R$ 5.650,00 **b.** R$ 650,00
41. ≈ 14,2 anos
42. ≈ R$ 20.000,00
43. R$ 1.540,00; R$ 140,00
44. 9 meses
45. **a.** R$ 12.592,80 **b.** R$ 2.592,80
46. **a.** R$ 8.395,00 **b.** Investimento B
47. **a.** 0,81092p **b.** 18,908%

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. 130 m
2. 11.200 sacas
3. 191 ingressos
4. 1.500 L do conteúdo do reservatório A e 500 L do conteúdo do reservatório B
5. Faltam dados para determinar a quantia que cada um tinha ao iniciar as compras.
6. Um lote tinha 12, e o outro, 15 animais.
7. $x = 44{,}20$; $y = 57{,}46$; 30%
8. **a.** 64.359.861 mulheres brasileiras
9. 51,2%
10. **a.** Juro: R$ 56,40; montante: R$ 996,40
b. Juro: R$ 327,60; montante: R$ 2.077,60
c. Juro: R$ 30,51; montante: R$ 2.560,51
11. **a.** ≈ 2,128%
b. ≈ 2,174%
12. **a.** R$ 1.711,75
13. R$ 4,05
14. **a.** ≈ 510,2 milhões de km^2
b. ≈ 40,13 milhões de km^2
c. ≈ 17,71 milhões de km^2
d. ≈ 74,06% da área do Brasil
15. R$ 73.830,19
16. alternativa **d**
17. Raquel possuía R$ 115.000,00, e Iraci possuía R$ 100.000,00.
18. R$ 12.000,00
19. alternativa **c**
20. R$ 53.352,00

Conectado
Página 70: **2.** R$ 82,10
3. R$ 13.939,21

Reflexão
Página 55: Sim, 64 convites ou mais.

Matemática sem fronteiras
Página 70: **1.** ≈ R$ 1.288,55
2. ≈ R$ 282,50

Educação Midiática
3. ≈ 431.855

Verifique o que aprendeu no Capítulo 2
1. alternativa **e** **4.** alternativa **a**
2. alternativa **c** **5.** alternativa **b**
3. alternativa **d** **6.** alternativa **d**

CAPÍTULO 3

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** 125° **b.** 30°
2. 75°
3. **a.** Quadrilátero: $2 \cdot 180° = 360°$; pentágono: $3 \cdot 180° = 540°$; hexágono: $4 \cdot 180° = 720°$
b. $180° \cdot (n - 2)$
4. $x = 110°$ e $y = 40°$
6. alternativa **a** **7.** 1.260 m
8. alternativa **c** **9.** 70°
11. **a.** 6 **c.** 18
b. $x = 12$; $y = 15$ **d.** $x = 6$
12. 167 °F **14.** $AE = 12$ e $AD = 8$
15. $x = 14$ e $y = 24$
16. **a.** $x = 12$ **b.** $y = 1{,}6$
17. $x = 3$ cm
18. alternativa **d** **19.** 187 m
20. alternativa **c** **21.** 46 polegadas
23. $a = 5$; $h = 2{,}4$; $m = 1{,}8$; $n = 3{,}2$
24. **a.** 5 cm
b. $\frac{60}{13}$ cm
c. $\frac{25}{13}$ cm
25. $x = 12$ cm e $y = 9$ cm
26. 500 m
27. alternativa **a**
28. Perímetro de $AEFD$: 88 m; perímetro de $EBCF$: 136 m
29. 80 cm
31. **a.** $4\sqrt{3}$ cm **b.** $4\sqrt{6}$ cm
32. $3{,}5\sqrt{2}$ km ou, aproximadamente, 4,9 km
33. 5 m

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. $x = 40°$ e $y = 60°$ **2.** $x = 14°$
3. **a.** 70° **b.** 140° **c.** 10°
4. 80 m; 60 m; 40 m
5. 50,4 m **10.** alternativa **b**
6. ≈ 3.450 km **11.** 30 cm
7. alternativa **d** **12.** $5\sqrt{5}$ cm
8. alternativa **c** **13.** 0,61238
9. alternativa **c**

Reflexão
Página 89: **a.** 120° **b.** $\frac{180° \cdot (n-2)}{n}$

Verifique o que aprendeu no Capítulo 3
1. alternativa **b** **3.** alternativa **b**
2. alternativa **c** **4.** alternativa **e**

CAPÍTULO 4

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. 10 cm
2. **a.** 5 cm **b.** $4\sqrt{5}$ cm **c.** 2,4 cm
3. 40 m
4. **a.** 10 cm **b.** 2,25 cm
5. $\sqrt{6}$ m ≈ 2,4 m **6.** alternativa **d**
8. **a.** 50° **b.** 46° **c.** 40°
9. alternativa **e**
10. **a.** 90°
b. triângulo retângulo
11. $x = 68°$ **12.** 25° **13.** 20°
14. 4π m ≈ 12,56 m
15. $R = 2$ m
16. **a.** ≈ 40.053,84 km
b. ≈ 1.112,61 km
17. 192 azulejos
18. 5 m
19. alternativa **a**
20. 24 cm^2
21. 4,5 dm
22. **a.** 12 m^2
b. 48 cm^2
c. $\left(6 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$ dm^2
d. $9\sqrt{3}$ cm^2
23. $r = \frac{12}{7}$ cm
24. 142 m^2
25. **a.** $AF = 15$ m, $FH = 20$ m e $HB = 25$ m
b. 294 m^2
26. 2.396 cm^2
27. 9,6 m
28. 26 cm; 14 cm
29. 36 cm^2
30. alternativa **b**
31. $150(\sqrt{3} + 4)$ cm^2
33. **a.** 9π cm^2 **b.** 18π cm^2
34. alternativa **a**
35. alternativa **a**
36. 4π cm^2
37. 0,5 m
38. **a.** 10π cm^2 **c.** $\beta = 130°$
b. $\alpha = 80°$ **d.** 5π cm^2
39. **a.** $4(\pi - 2)$ cm^2
b. $3(2\pi - 3\sqrt{3})$ cm^2
40. alternativa **c**
41. **a.** 120°
b. $s = \frac{r^2(8\pi - 6\sqrt{3})}{12}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. **a.** $20.000\sqrt{2}$ km
b. 21.630 km
2. alternativa **e**
3. alternativa **d**
4. alternativa **b**
5. **a.** $8{,}28 \cdot 10^8$
b. 30.646.605
6. $48\sqrt{2}$ cm^2
7. **a.** $A = 10\sqrt{2}$
b. Não existe o triângulo.
c. $A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$, em que $p = \frac{x+y+z}{2}$
8. **a.** 7.000 cm^2
b. $40(7 + \sqrt{2})$ cm
9. $6\sqrt{3}$ m^2 **10.** 430 m^2
11. 400π cm^2
12. **a.** $\frac{\pi - 2}{4}$ m^2 **b.** $8(\pi - 2)$ dm^2
13. $10 \cdot \sqrt{3}$ km

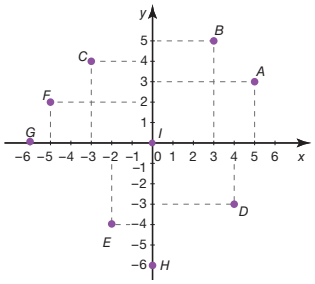
Verifique o que aprendeu no Capítulo 4
1. alternativa **b** **3.** alternativa **d**
2. alternativa **e** **4.** alternativa **c**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

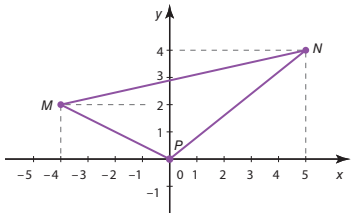
CAPÍTULO 5

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

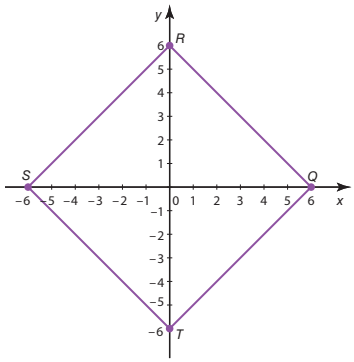
1. a.



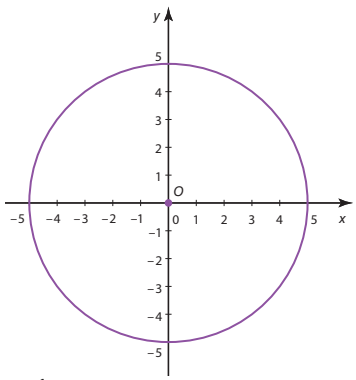
b.



c. Como é um quadrado, então o par ordenado que corresponde ao ponto T é $(0, -6)$.



d.



2. **a.** $p = \frac{1}{4}$; **b.** $q = 3$ ou $q = -3$; **c.** $r < 4$;
d. $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$; **e.** $t = 3$

3. $m = 4$ e $n = -2$

4. **a.** 10 **b.** 13

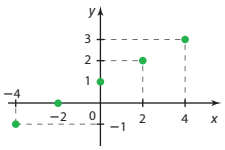
5. $y = 10.000 + 200x$ **6.** $y = 30x$

7. **a.** 10.600 L
b. $y = 10.000 + 200x$
c. $z = -2x^2 + 800x + 45.000$

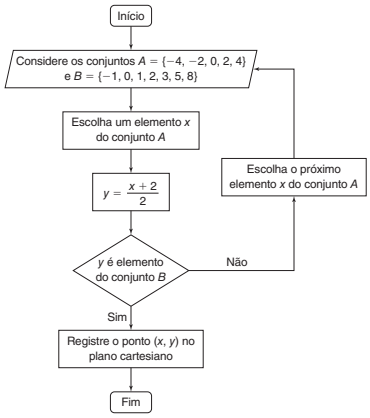
8. **a.** 40 min **c.** $Q = 900 - 15t$
b. $C = 15t$ **d.** 30 min

9. **a.** $y = \sqrt{9 + (4 - x)^2}$
b. $S = \frac{3(4 - x)}{2}$

13.



$D(f) = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$;
$Im(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

14. **b.** R$ 288,00 **c.** $v = 60x$

16. **a.** 8 **d.** $\frac{15}{2}$ **g.** $\frac{17}{3}$
b. 6 **e.** −1 **h.** 12
c. 12 **f.** −1

17. $a = -3$ **18.** **a.** $a = 5$ e $b = -2$
b. Faltam dados para a solução do problema.

19. **a.** 52 dólares **c.** 50 sacas
b. 51 dólares

20. alternativa **a**

22. **a.** 8 **c.** −4 **e.** −4
b. 0 **d.** 5

24. alternativa **c**

25. **a.** 32 L **b.** 8 L

26. **b.** 2 jogadores **c.** 3 jogadores

31. **a.** $D(f) = \mathbb{R}$
b. $k > \frac{1}{3}$

32. **a.** $V(x) = (20 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x$
b. $D(V) =]0, 5[$

33. **a.** 1 e 3
b. $-\frac{3}{5}$
c. 3 e −3
d. 0, 2 e −2
e. Não existem raízes.
f. 0, 2 e 4
g. Não existem raízes.
h. 9, 3 e −3

35. **a.** $k < \frac{9}{8}$ **b.** $k = \frac{9}{8}$ **c.** $k > \frac{9}{8}$

36. **a.** −2 bilhões de dólares
b. 2 e 5
c. A balança comercial esteve em equilíbrio nos meses de fevereiro e maio.
d. Para $t^2 - 7t + 10 = -3$, temos $\Delta = -3$. Como $\Delta < 0$, concluímos que em nenhum dos meses do período citado houve déficit de 3 bilhões de dólares.

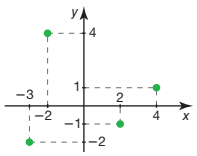
37. 6 segundos

42. **a.** $t_1 > t_2 \Rightarrow -10t_1 < -10t_2$
$\therefore 90.000 - 10t_1 < 90.000 - 10t_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow v(t_1) < v(t_2)$
b. esvaziada

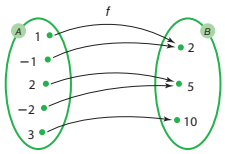
44. 36 km/h **45.** −1,5 °C/h

46. −0,25 °C

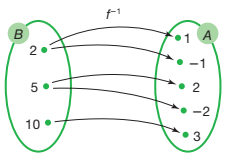
48. **a.**



50. **a.**



b.



c. A correspondência f^{-1} não é função porque há elementos do conjunto B que possuem mais de um correspondente em A.

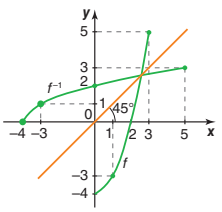
54. **a.** $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$
b. $f^{-1}(x) = \frac{x - 2}{4}$
c. $f^{-1}(x) = \frac{8 - 2x}{3x}$
d. $f^{-1}(x) = \frac{4x + 1}{2x - 1}$
e. $f^{-1}(x) = \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2$
f. $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{x - 1}\right)^3$

55. alternativa **a**

56. **a.** $p = 5 + 2d$ **b.** $d = \frac{p - 5}{2}$
c. A relação $d = \frac{p - 5}{2}$ expressa a distância d percorrida pelo táxi, em quilômetro, em função do preço p, em real.

57. **a.** $P'(5, 3)$ **b.** $M(7, 7)$ **c.** $Q'(b, a)$
d. Como todo ponto do gráfico de qualquer uma das funções f e f^{-1} é simétrico de um ponto da outra, em relação à bissetriz r dos quadrantes ímpares, deduzimos que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação a r. Assim, conhecendo o gráfico de f, construímos o simétrico desse gráfico em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, obtendo o gráfico de f^{-1}.

58. $D(f^{-1}) = Im(f) = [-4, 5]$ e
$Im(f^{-1}) = D(f) = [0, 3]$



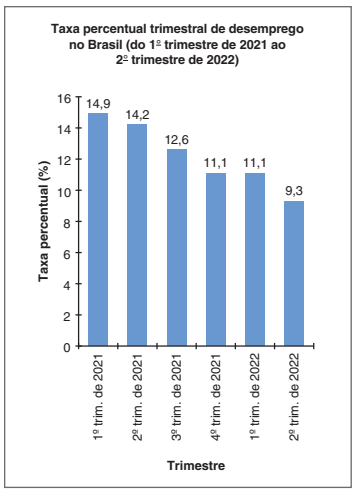
59. **a.** $a = 200$ e $b = 5.000$ **c.** 75 m³
b. R$ 3.012,50

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

61. a.



Fonte: BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua**. IBGE, 2024. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/9173-pesquisa-nacional-poramostra-de-domicilioscontinua-trimestral.html. Acesso em: 8 out. 2024.

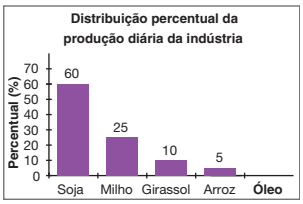
b. 9.951.000 trabalhadores

62. a. US$ 8.434,20 milhões

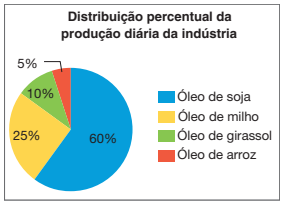
b. Fevereiro; US$ 5.164,10 milhões

c. Não, pois as exportações foram sempre superiores às importações.

63. a.

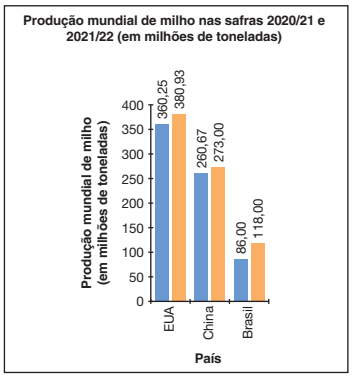


Elaborado para fins didáticos.



Elaborado para fins didáticos.

64. a.



Fonte: FORMIGONI, I. Maiores produtores mundiais de milho, safra 2021/22: dados de setembro. **Farmnews**, 20 set. 2021. Disponível em: https://www.farmnews.com.br/mercado/maiores-produtores-mundiais-de-milho-safra-2021-22-dados-de-setembro/. Acesso em: 8 out. 2024.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. 5

2. alternativa **d**

3. alternativa **c**

4. a. 188

b. 5 minutos

5. alternativa **d**

6. a. 78.000 L

b. 120.000 L

c. 6 h

7. a. 32 bactérias b. 85 bactérias c. 187,5%

8. alternativa **b**

9. a. 8 s

b. $5x - 4y + 40 = 0$

10. a. $0 < t < 12$ ou $16 < t < 20$ ou $22 < t \leqslant 24$

b. $12 < t < 16$ ou $20 < t < 22$

c. $t = 0$ ou $t = 12$ ou $t = 16$ ou $t = 20$ ou $t = 22$

11. alternativa **d**

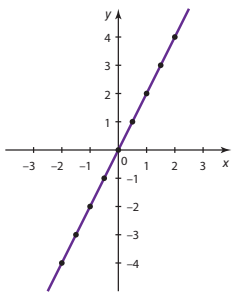
12. a. $p = 4x + 20$

b. $D(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid 80 \leqslant x \leqslant 105\}$

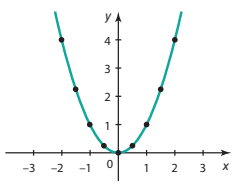
c. $Im(p) = \{p \in \mathbb{R} \mid 340 \leqslant p \leqslant 440\}$

13. $D(n) = \{x \in \mathbb{N} \mid 2.000 \leqslant x \leqslant 8.400\}$

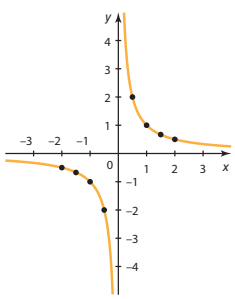
14. a.



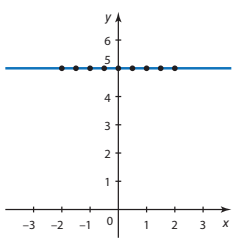
b.



c.



d.



15. a. [0, 2] b. [7, 10] c. [2, 7]

16. a. Sendo c_1 e c_2 elementos do domínio da função com $c_1 > c_2$, temos:

$c_1 > c_2 \Rightarrow c_1 - 2.400 > c_2 - 2.400$

$\therefore 9{,}07(c_1 - 2.400) > 9{,}07(c_2 - 2.400) \Rightarrow$

$\Rightarrow m(c_1) > m(c_2)$

Logo, a função é crescente.

b. 907 gramas d. 2.511 quilocalorias

c. 2.600 quilocalorias

17. Sejam t_1 e t_2 dois instantes desse período, com $t_2 > t_1$. Em ambos os membros dessa desigualdade, vamos multiplicar por (−1), depois adicionamos 1.000 e, por último, dividimos por 5. Assim, temos:

$$\underbrace{\frac{1.000 - t_1}{5}}_{V(t_1)} > \underbrace{\frac{1.000 - t_2}{5}}_{V(t_2)}$$

Resumindo: $t_2 > t_1 \Rightarrow V(t_1) > V(t_2)$, ou seja, a função V é decrescente no período considerado, logo, o reservatório estava sendo esvaziado.

18. a. R$ 3,50

b. $p = \frac{6n + 5}{2n}$; decrescente, pois, quanto maior o número de horas, menor será o custo de produção.

c. $n = \frac{5}{2p - 6}$; decrescente, pois, quanto menor o custo de produção, maior será o número de horas.

19. 0,125 m/s²

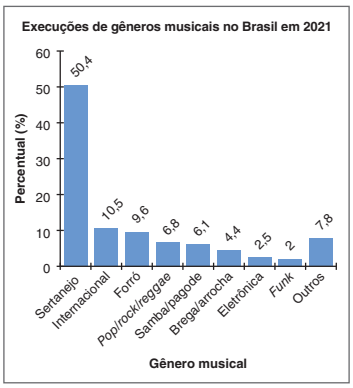
21. a. $f(x) = 102 + 2x$, com $-20 \leqslant x \leqslant 50$

b. $f^{-1}(x) = \frac{x - 102}{2}$

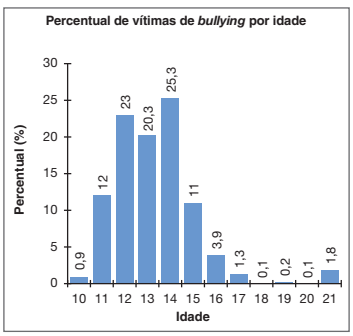
22. a. 14.138.466 músicas, aproximadamente

b. 147.275.683 execuções musicais, aproximadamente

c.



23 a.



b. 3.545 estudantes, aproximadamente

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Verifique o que aprendeu no Capítulo 5

1. alternativa **c**
2. alternativa **d**
3. alternativa **b**
4. alternativa **b**
5. alternativa **c**

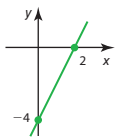
CAPÍTULO 6

Além da teoria

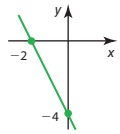
1. 98.000 litros **2.** $y = 98.000x$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

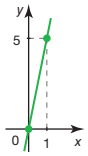
1. a.



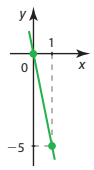
b.



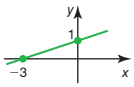
c.



d.



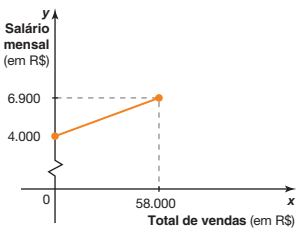
e.



2. a. $a = 2$ e $b = 1$ **b.** $-\frac{1}{2}$

3. a. R$ 6.900,00 **b.** $y = 4.000 + 0{,}05x$

c.



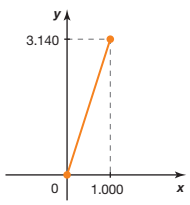
4. a. $y = \frac{9x}{5} + 32$ **b.** −20 °C

5. a. $y = -0{,}06x + 27$ **b.** 24,6 °C

6. a. $p = \frac{1}{10}x + 1$ **b.** 1 atm **c.** 2,8 atm

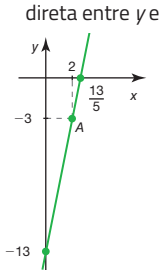
8. a. $y = 3{,}14x$

b.



c. Sim, pois:
Se $x = 0$, então $y = 0$.
Se $x \neq 0$, existe uma proporcionalidade direta entre y e x, ou seja, $\frac{y}{x} = 3{,}14$.

9.



10. a. $y = 400 - 4x$

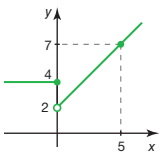
11. a. $y = -\frac{1}{150}x + 30$

b. 30 °C

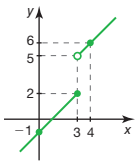
c. −50 °C

13. alternativa **a**

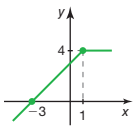
14. a.



b.

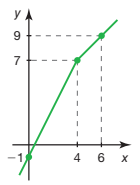


15. a.



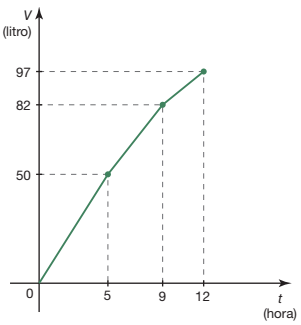
$D(f) = \mathbb{R}$ $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 4\}$

b.



$D(f) = \mathbb{R}$
$Im(f) = \mathbb{R}$

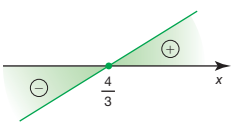
16. a.



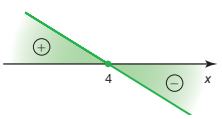
b. $V(t) = \begin{cases} 10t, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant 5 \\ 8t + 10, \text{ se } 5 < t \leqslant 9 \\ 5t + 37, \text{ se } 9 < t \leqslant 12 \end{cases}$

17. alternativa **c**

18. a.



b.



19. a. $y = -25x + 200$ **b.** 8 horas **c.** 20 horas **d.** 8 horas **e.** 12 horas

20. a. A função h é crescente, pois sua taxa de variação (coeficiente de x) é positiva (igual a 2).

b. $x > -1$

c. $x < -1$

22. a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{13}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 3\right\}$

c. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

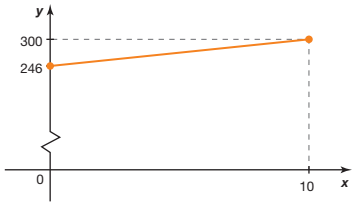
d. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$

23. $S = \{k \in \mathbb{R} \mid 0 < k < 2\}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Alternativa **b**.

2. a.



b. $y = 5{,}4x + 246$ **c.** 273 minutos

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

3. a. $y = -x + 30$ **b.** 22 °C

4. a. 4 **b.** 4

5. a. $d = 90t$ **b.** 90 km/h

6. alternativa **a**

7. alternativa **d**

8. $f(x) = 0$, se $x \leqslant 24.511{,}92$

$f(x) = 0{,}075x - 1.838{,}39$, se $24.511{,}93 \leqslant x \leqslant 33.919{,}80$

$f(x) = 0{,}15x - 4.382{,}38$, se $33.919{,}81 \leqslant x \leqslant 45.012{,}60$

$f(x) = 0{,}225x - 7.758{,}32$, se $45.012{,}61 \leqslant x \leqslant 55.976{,}16$

$f(x) = 0{,}275x - 10.557{,}13$, se $x > 55.976{,}16$

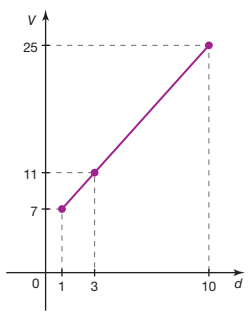
9. a. 71 km/s, 710 km/s e 7.100 km/s

b. 0.047 Mpc

c. $3{,}08396 \cdot 10^{19}$ km

10.

d	$V(d)$
1	7
3	11
10	25



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

11. a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 1\}$

b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant x < \frac{1}{2}\right\}$

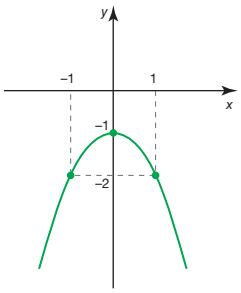
Verifique o que aprendeu no Capítulo 6

1. alternativa **b**
2. alternativa **b**
3. alternativa **e**
4. alternativa **d**
5. alternativa **c**
6. alternativa **d**

CAPÍTULO 7

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

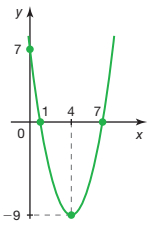
1. a.



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -1\}$

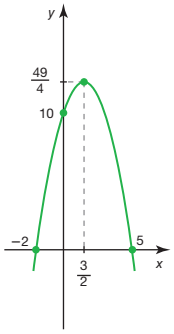
b.



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -9\}$

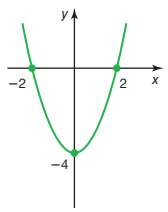
c.



$D(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{49}{4}\right\}$

e.



$D(f) = \mathbb{R}$

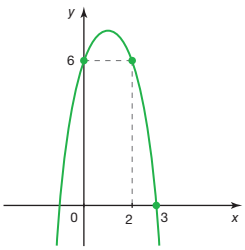
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -4\}$

2. a. $A(x) = x^2 + 9x$

b. 36 m²

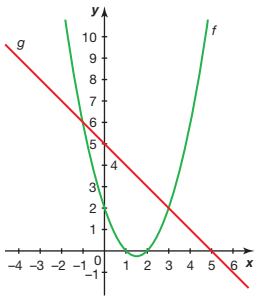
c. 0,5 m

3.



$y = -2x^2 + 4x + 6$

4. a.

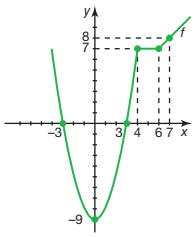


b. (−1, 6) e (3, 2)

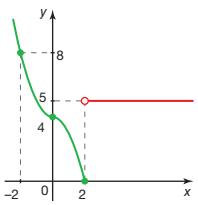
c. $1 < x < 2$ ou $x > 5$

d. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } x > 5\}$

5. a.



b.



7. a. valor mínimo: $-\frac{9}{4}$;

abscissa do ponto mínimo: $-\frac{1}{4}$

b. valor máximo: 4;
abscissa do ponto máximo: −1

c. valor mínimo: −12;
abscissa do ponto mínimo: 2

d. valor máximo: $-\frac{1}{4}$;

abscissa do ponto máximo: $\frac{1}{2}$

8. a. $k = \frac{5}{8}$

b. $-\frac{5}{2}$

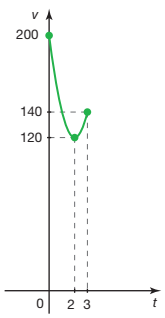
9. a. 200 km/h

b. 140 km/h

c. 2 segundos

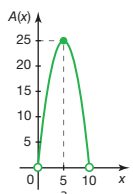
d. 120 km/h

e.



10. a. 16 cm²

b.



c. 25 cm²

11. alternativa **d**

12. alternativa **d**

13. a. Se $x = -3$ ou $x = 1$, então $y = 0$;
Se $-3 < x < 1$, então $y > 0$;
Se $x < -3$ ou $x > 1$, então $y < 0$.

b. Se $x = -3 - \sqrt{17}$ ou $x = -3 + \sqrt{17}$, então $f(x) = 0$;
Se $-3 - \sqrt{17} < x < -3 + \sqrt{17}$, então $f(x) < 0$;
Se $x < -3 - \sqrt{17}$ ou $x > -3 + \sqrt{17}$, então $f(x) > 0$.

c. Se $x = 3$, então $g(x) = 0$;
Se $x \neq 3$, então $g(x) > 0$.

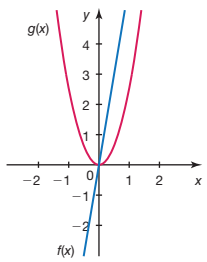
d. Se $x = 2$, então $h(x) = 0$;
Se $x \neq 2$, então $h(x) < 0$.

e. $f(x) < 0$, para todo x real.

14. $k < \frac{23}{8}$

15. a. $f(x) = 6x$; $g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$

b.



Portanto, $f(x)$ é uma função afim e $g(x)$ é uma função quadrática.

c. Para $g(x) > f(x)$: $x > \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Para $g(x) < f(x)$: $0 < x < \frac{4\sqrt{3}}{3}$

Para $g(x) = f(x)$: $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

16. a. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 2\}$

b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$

c. $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

d. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

e. $S = \varnothing$

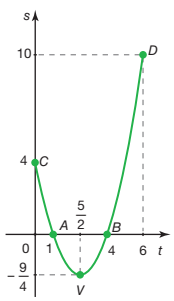
f. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

g. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

h. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

i. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } x > 3\}$

17. a.



b. 4 m

c. para $t = 1$ e $t = 4$

d. para $0 \leqslant t < 1$ e $4 < t \leqslant 6$

e. para $1 < t < 4$

18. alternativa **b**

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

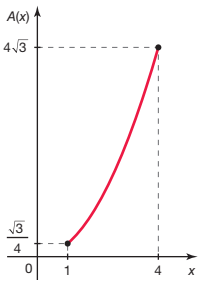
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

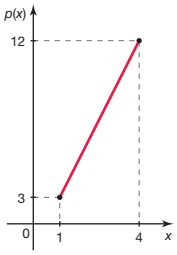
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. **a.** $C(x) = 10x + 20$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$
b. $R(x) = -2x^2 + 32x$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$
c. $L(x) = -2x^2 + 22x - 20$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$
d. R$ 40.000,00

2. **a.**



b.

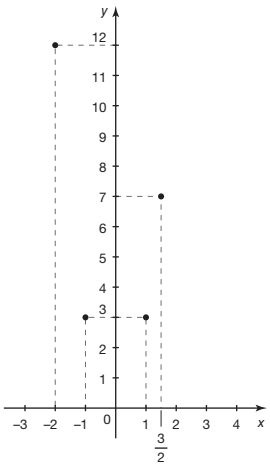


c. $x = 4\sqrt{3}$
d. No gráfico da função $p(x)$.

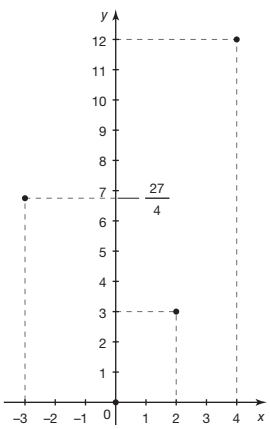
3. **a.** $y = \frac{x^2}{4} - \frac{625}{4}$ **b.** 68,75 m.

4. **b.** Quadro B
c. Quadro A

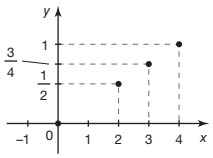
Quadro A



Quadro B

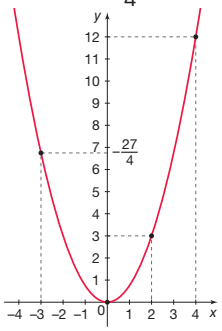


Quadro C

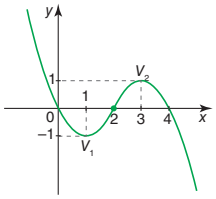


d. quadro A: não possui; quadro B: $y = \frac{3x^2}{4}$; quadro C: $y = \frac{x}{4}$

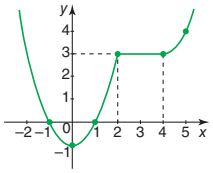
e.



5. **a.**



b.



6. **a.** $h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ se } 0 \leqslant x < 6 \\ x^2 - 12x + 39, \text{ se } 6 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases}$

Incluindo o número 6 na primeira sentença, a resposta continuaria correta.

b. 2,5 cm **c.** 7 cm

7. 8 cm^2

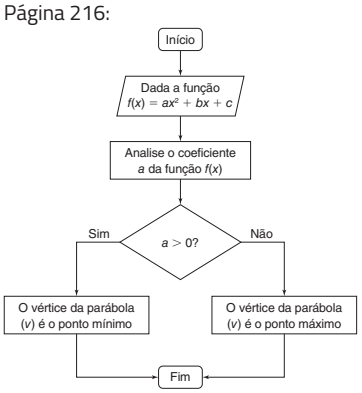
8. **a.** $y = -\frac{x^2}{96} + \frac{x}{2}$ **c.** 48 m
b. 6 m

9. **a.** 21 dias
b. Sim, do 27º dia ao 30º dia.

10. 6 horas

Conectado

Página 216:



Verifique o que aprendeu no Capítulo 7

1. alternativa **e**
2. alternativa **b**
3. alternativa **d**
4. alternativa **a**.
5. alternativa **c**

CAPÍTULO 8

Além da teoria

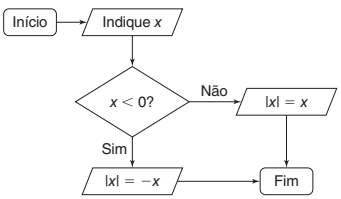
3. 828 m

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. alternativa **c**

4. **a.** $A = 7$ **b.** $B = -1$

5.



6. **a.** $|23 - x| = 4$ ou $|x - 23| = 4$
b. $x = 19$ ou $x = 27$
c. 19 e 23 anos ou 23 e 27 anos

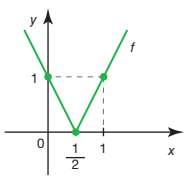
7. **a.** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **b.** $S = \varnothing$
c. $S = \{-1, 2, 3, 6\}$ **d.** $S = \left\{-\frac{1}{3}, 5\right\}$
e. $S = \{1 - \sqrt{2}, 1{,}1 + \sqrt{2}\}$
f. $S = \{-3, 3\}$ **g.** $S = \varnothing$

8. **a.** $S = \{9\}$ **b.** $S = \varnothing$ **c.** $S = \{-3, 1\}$

9. **a.** $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant \frac{6}{5}\right\}$
b. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} < x < 4\right\}$
c. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{14}{15} \leqslant x \leqslant -\frac{2}{5}\right\}$

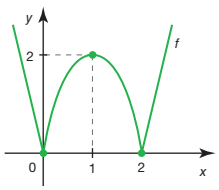
10. alternativa **b** **11.** 12 min

13. **a.**



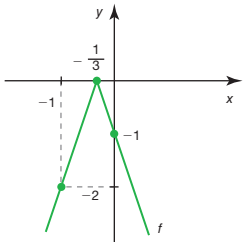
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [0, +\infty[$

b.



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [0, +\infty[$

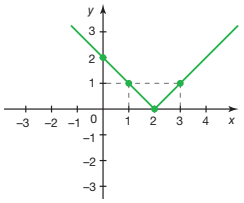
c.



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) =]-\infty, 0]$

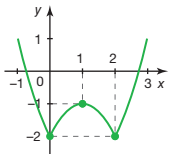
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

14. a.



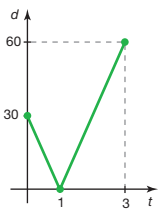
$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [0, +\infty[$

b.



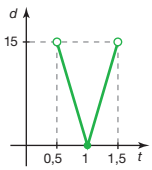
$D(g) = \mathbb{R}$; $Im(g) = [-2, +\infty[$

15. a.



b. $t = 0{,}5$ h

c.



16. $r \approx 0{,}01005$ ou $r \approx 1{,}005\%$

17. $r \approx 0{,}002979$ ou $r \approx 0{,}2979\%$

18. a. 3 c. 1
b. 4 d. 2

19. a. 267,27 c. 226,9
b. 8,9 d. 40,1

20. 3,416 m^2

21. 58 km

22. alternativa **d**

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. 30 km b. 30 km
c. $d = |x - 120|$ ou $d = |120 - x|$

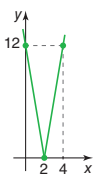
2. alternativa **a** **3.** $\frac{1}{10}$

4. a. $S = \left\{\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right\}$ c. $S = \{-4, 4\}$
b. $S = \varnothing$ d. $S = \{-4, -1, 1, 4\}$

5. a. 304 b. 262

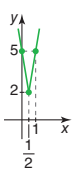
6. Faltam dados para determinar x_0

7. a.



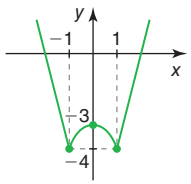
$D(f) = \mathbb{R}$;
$Im(f) = [0, +\infty[$

b.



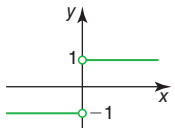
$D(f) = \mathbb{R}$;
$Im(f) = [2, +\infty[$

c.



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [-4, +\infty[$

8.



Reflexão

Página 241: Para obter o gráfico de $g(x) = |x^2 - 9| + 2$ a partir do gráfico de $f(x) = |x^2 - 9|$, basta trasladar 2 unidades o gráfico de f, paralelamente ao eixo Oy, no sentido positivo desse eixo (2 unidades para cima).

Para obter o gráfico de $h(x) = |x^2 - 9| - 2$ a partir do gráfico de $f(x) = |x^2 - 9|$, basta trasladar 2 unidades o gráfico de f, paralelamente ao eixo Oy, no sentido negativo desse eixo (2 unidades para baixo).

Matemática sem fronteiras

1. Substância A: 1,28 mL;
substância B: 0,34 mL;
substância C: 21,75 mL;
substância D: 0,03 mL.

2. 9 milhões de brasileiros

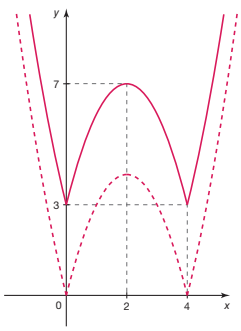
Verifique o que aprendeu no Capítulo 8

1. alternativa **d**

2. a. $S = \varnothing$ b. $S = \left\{10, -\frac{2}{5}\right\}$
c. $S = \mathbb{R}$

3. alternativa **e**

4.



$D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = [3, +\infty[$

CAPÍTULO 9

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. 25 d. 1 g. $\frac{4}{25}$
b. -25 e. 1 h. $-\frac{1}{8}$
c. -8 f. -1

2. a. x^8 c. $8x^7y^{11}z^6$
b. y^4 d. $3a^4bcd^3$

3. alternativa **e**

4. alternativa **b**

6. b. $2 \cdot 10^{-5}$ mm d. $2 \cdot 10^2$ Å
c. $2 \cdot 10^{-6}$ cm

7. a. 5 d. 0,2 g. 1
b. 0,5 e. -2 h. 0
c. 2 f. $\frac{1}{10}$ i. 12

9. a. $\sqrt[6]{5^2}$ e $\sqrt[6]{2^9}$ c. $\sqrt[20]{3}$
b. $\sqrt[12]{5^7}$ d. $\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$

10. a. 9 d. $\frac{8}{5}$ f. -2
b. 5 g. $-0{,}3$
c. 32 e. 0,36 h. -1

11. a. $2\sqrt{3}$ d. $2\sqrt[4]{2}$ g. $\frac{4\sqrt{3}}{5}$
b. $3\sqrt{2}$ e. $2\sqrt{10}$ h. $\frac{3\sqrt[3]{3}}{2}$
c. $2\sqrt[3]{3}$ f. $2\sqrt[5]{3}$ i. $\frac{5\sqrt{3}}{8}$

12. a. $8\sqrt{3}$ e. 144
b. $10\sqrt{2} - \sqrt{5}$ f. $3\sqrt{2}$
c. $18\sqrt[3]{2}$
d. $8\sqrt[5]{12}$ g. 4

13. $v = \frac{\sqrt{3}\,c}{2}$ ou $v \approx 0{,}87c$

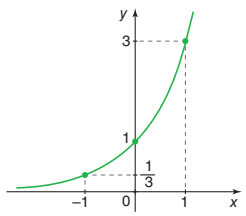
14. a. $\sqrt[5]{81}$ c. $\sqrt[3]{5^2}$ e. $\sqrt[4]{27}$
b. $\sqrt{6}$ d. $\sqrt{7}$ f. $\sqrt[10]{123}$

15. a. $2^{\frac{1}{5}}$ c. $18^{\frac{1}{2}}$ ou $324^{\frac{1}{4}}$
b. $7^{\frac{3}{9}}$ ou $7^{\frac{1}{3}}$ d. $a^{\frac{2}{3}}$

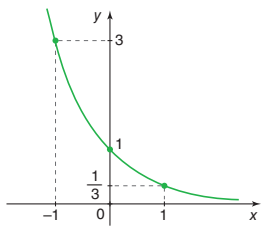
16. a. $-\frac{5}{3}$ b. $-\frac{543}{32}$

18. a. 3 d. 3
b. 13.824 e. x^2
c. 1

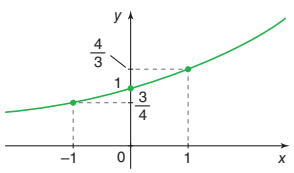
19. a. $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$



b. $D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \mathbb{R}_+^*$



c. $D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = \mathbb{R}_+^*$



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

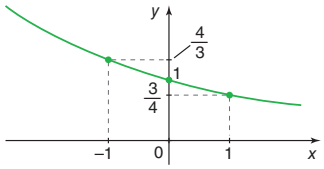
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

d. $D(t) = \mathbb{R}$ e $Im(t) = \mathbb{R}_+^*$



20. alternativa **c**

21. **a.** $P = 600(1{,}002)^t$
b. 648 milhões de pessoas
c. 894 milhões de pessoas

22. **a.** $V(t) = 240(0{,}97)^t$
b. 206,4 milhões de metros cúbicos

24. **a.** $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$ **d.** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
b. $S = \{-11\}$ **e.** $S = \{0\}$
c. $S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$ **f.** $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

25. **a.** $S = \{3\}$ **c.** $S = \{1, -1\}$
b. $S = \{2\}$

26. 3 anos

27. **a.** $M = 6(0{,}512)^t$ **b.** 4,8 kg

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

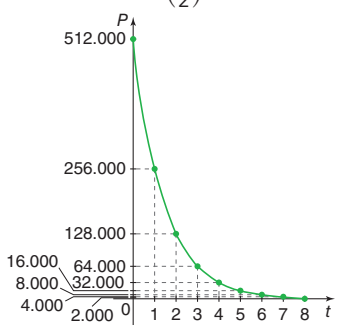
1. **a.** $5 \cdot 10^{11}$ B
b. $1{,}4 \cdot 10^6$ vezes

2. 64 mols

3. **a.** 1,7321 **b.** 1,6266 **c.** 1,5518

4. **a.** 4,7288 **c.** 77,8802
b. 1,8226

5. **a.** 32.000 bactérias
b. $P(t) = 512.000 \left(\frac{1}{2}\right)^t$



6. **a.** Empréstimo A: $y = 2.000 + 200x$, com $0 \leqslant x \leqslant 3$; empréstimo B: $y = 2.000 \cdot (1{,}1)$, com $0 \leqslant x \leqslant 3$.
b. R$ 2.662,00

7. **a.** $P = (0{,}91)^h$ **b.** ≈ 0,624 atm

8. alternativa **e**

9. 4 metros

10. **a.** 2 g/L **b.** 2 horas **c.** 0,25 g/L
d. O atleta deve esperar mais de 5 horas.

Conectado

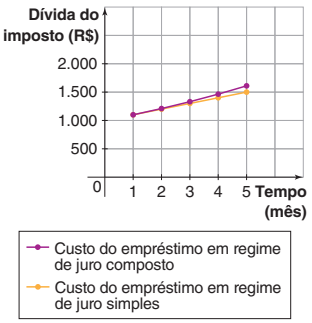
Página 268: **a.**

	A	B	C
1	Tempo (mês)	Juro (R$)	Dívida do imposto (R$)
2	0	0	1.000,00
3	1	100,00	1.100,00
4	2	100,00	1.200,00
5	3	100,00	1.300,00
6	4	100,00	1.400,00
7	5	100,00	1.500,00
8			

	A	B	C
1	Tempo (mês)	Juro (R$)	Dívida do imposto (R$)
2	0	0	1.000,00
3	1	100,00	1.100,00
4	2	110,00	1.210,00
5	3	121,00	1.331,00
6	4	133,10	1.464,10
7	5	146,41	1.610,51
8			

b. R$ 1.500,00 **c.** R$ 1.610,51

d.



Verifique o que aprendeu no Capítulo 9

1. alternativa **b** **3.** alternativa **a**

2. alternativa **d**

CAPÍTULO 10

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. **a.** 8 **d.** −4 **g.** $\frac{2}{5}$
b. −2 **e.** 4 **h.** 3
c. 3 **f.** $\frac{7}{8}$

2. **a.** 1,89 **c.** 0,42
b. −2,52 **d.** 16

3. $E = 1$

4. **a.** 6 km **b.** 12 km **c.** 0,1 atm

5. alternativa **b**

6. **a.** 10^{-2} mol/L **b.** 100 vezes

7. alternativa **e**

9. **a.** 1,73 **c.** 0,95 **e.** ≈ 0,29
b. −0,95 **d.** ≈ 3,44 **f.** 1,56

10. 0,78 **12.** $x = 2$

11. 0,699 **13.** alternativa **e**

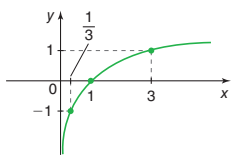
14. alternativa **b**

15. **a.** 0,5 kg **b.** 1,68 kg

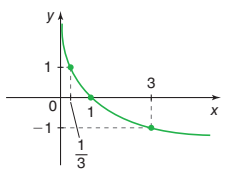
16. 30,1 h **17.** alternativa **d**

18. ≈ 5.300 anos

19. **a.**



b.

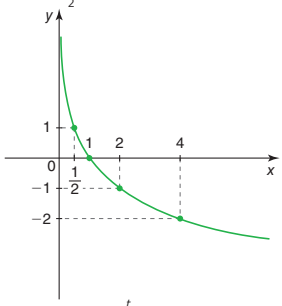


23. **a.** $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{6}{5}\right\}$
b. $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$
c. $D(t) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

24. **a.** 3 **c.** $2(1 + \sqrt{2})$
b. $\frac{1}{2}$

25. **a.** $f^{-1}(x) = 3^x$
b. $g^{-1}(x) = 10^{2x} - 1$
c. $h^{-1}(x) = \frac{2^x - 5}{10}$
d. $p^{-1}(x) = \frac{2}{5^x} - 1$

26. **a.** $a = 0{,}5$; $b = 0{,}25$; $c = 0{,}125$; $d = 0{,}0625$
b. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$
c.



27. **a.** $N(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$
b. $t = \log_2 \left(\frac{N}{100}\right)^3$

29. **a.** $S = \{3\}$ **b.** $S = \{10\}$ **c.** $S = \{4\}$

30. 20 semanas **31.** alternativa **d**

Conectado

Página 288:

a. Por exemplo, atribuindo a p o valor 5, temos $y = 5 + \log_2 x$. O gráfico dessa função é uma translação vertical de 5 unidades para cima em relação ao gráfico da função $y = \log_2 x$. Assim, a assíntota vertical de $y = 5 + \log_2 x$ é a mesma do gráfico da função $y = \log_2 x$, ou seja, é o eixo das ordenadas.

b. Por exemplo, atribuindo a p o valor 4, temos $y = \log_2 x(x + 4)$. Observamos que o gráfico dessa função é uma translação horizontal de 4 unidades para a esquerda em relação ao gráfico $y = \log_2 x$. Assim, a assíntota vertical do gráfico $y = \log_2 (x + 4)$ é a reta que passa pelo ponto $(0, -4)$ e é paralela ao eixo das ordenadas.

c. A assíntota vertical do gráfico de uma função da forma $y = p + \log_b x$, em que p e b são números reais quaisquer, com $b > 0$ e $b \neq 1$, é a mesma do gráfico da função $y = \log_b x$, ou seja, é o eixo das ordenadas. A assíntota vertical do gráfico de uma função da forma $y = \log_b (x + p)$, em que p e b são números reais quaisquer, com $b > 0$ e $b \neq 1$, é a reta que passa pelo ponto $(0, -p)$ e é paralela ao eixo das ordenadas.

Matemática sem fronteiras

2. ≈ 5.700 anos

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. **a.** $A = 10.000 \cdot 2^t$ **b.** 31,6 anos

2. $7{,}29 \cdot 10^{15}$ quilômetros

3. **a.** 0,9 **b.** 63 anos

4. alternativa **e** **5.** $p = 28$ **6.** 2 horas

7. **a.** $IDH_R \approx 0{,}846$ **b.** 2.000 dólares

Verifique o que aprendeu no Capítulo 10

1. alternativa **a**

2. **a.** 2,12 **b.** 0,95 **c.** ≈ 3,44

3. alternativa **b** **4.** alternativa **b**

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

AGUIAR, A. F. A. *et al*. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: Harbra, 1988.

Apresenta as aplicações da Matemática nas ciências médicas e biológicas.

ANTAR NETO, A. *et al.* **Conjuntos e funções**. São Paulo: Moderna, 1979.

A obra contempla as noções de lógica, conjuntos e funções.

ÁVILA, G. **Introdução às funções e às derivadas**. São Paulo: Atual, 1994.

Traz as funções elementares, além de uma introdução ao estudo de derivadas.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

A exposição sistemática permite iniciar e aprofundar os conceitos fundamentais de Geometria plana.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

O livro contempla desde vestígios matemáticos encontrados em culturas primitivas até as tendências mais recentes em matemática.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica**. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

Pesquisa acadêmica cujo intuito foi avaliar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica exclusivamente por meio de atividades sem o uso de computadores.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do Ministério da Educação que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio de todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília, DF: MEC/SEB/DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Atenção Básica. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2. ed. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2014.

Guia com o objetivo de instruir a população para uma alimentação saudável e diversa.

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção Primária à Saúde. Departamento de Promoção da Saúde. **Guia de atividade física para a população brasileira**. Brasília, DF: Ministério da Saúde, 2021.

Guia com sugestões e recomendações de atividades físicas para diversas faixas etárias, frisando a importância delas para a saúde.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação, 2019.

Elaborado pelo Ministério da Educação, guia prático com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais de Matemática**. Lisboa: Brás Monteiro, 1951.

Apresenta a importância das circunstâncias históricas e das concepções filosóficas e visões de Ciência no desenvolvimento da Matemática.

DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. São Paulo: Francisco Alves, 1986.

Discute a prática da Matemática sob uma perspectiva histórica, filosófica e psicológica.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Fundamentos da Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2013. v. 5.

São apresentadas as noções de Geometria plana, com muitos exercícios resolvidos e propostos.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

O livro traz uma abordagem sobre a história dos números, passando por diferentes sistemas de numeração e relatando diferentes temáticas da história da Matemática até o século XX.

HARSHBARGER, Ronald J.; REYNOLDS, James J. **Matemática aplicada**: administração, economia e ciências sociais e biológicas. 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

Os 8 primeiros capítulos podem ser explorados no Ensino Médio com aplicações das funções elementares.

IEZZI, Gelson. MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos da Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2013. v. 1.

São apresentadas as noções de conjunto e funções, com muitos exercícios resolvidos e propostos.

IEZZI, Gelson *et al*. **Fundamentos da Matemática elementar**. São Paulo: Atual, 2013. v. 11.

São estudadas as noções de Matemática comercial, Matemática financeira e Estatística descritiva.

JOHNSON, Donovan A. *et al*. **Matemática sem problemas**. São Paulo: José Olympio, 1972. v. 1, 2, 3, 4 e 5

Destaca, de forma lúdica, importantes aplicações da Matemática no cotidiano.

KASNER, Edward; NEWMAN, James. **Matemática e imaginação**. Rio de Janeiro: Zahar, 1968.

São apresentados problemas algébricos em forma de charadas, exercícios de topologia, paradoxos e suas resoluções, questões lógicas e de logística.

LIMA, Elon L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001. v. 1, 2 e 3.

São abordados os temas do Ensino Médio por meio de uma linguagem acessível e precisa.

MACHADO, Antônio S. **Temas e metas**. São Paulo: Atual, 1988. v. 1.

Trata dos conjuntos numéricos e das funções elementares.

OLIVEIRA, José F. M. **Pavimentações do plano euclidiano**. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2015. p. 27-43.

São estudadas algumas pavimentações do plano com polígonos.

PERUZZO, Tito M.; CANTO, Eduardo L. **Química**: na abordagem do cotidiano. São Paulo: Saraiva, 2015.

Possibilita o trânsito entre o conceito de função e o de fenômenos químicos.

POMPEO, José. N.; HAZZAN, Samuel. **Matemática financeira**. São Paulo: Saraiva, 2014.

Apresenta conceitos básicos de Matemática comercial e financeira.

PUCCINI, Abelardo L. **Matemática financeira objetiva e aplicada**. 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.

Apresenta conceitos fundamentais de Matemática financeira com exercícios resolvidos.

RAMALHO Jr., Francisco *et al*. **Os fundamentos da Física**. São Paulo: Moderna, 1993.

Possibilita o trânsito entre o conceito de função e o de fenômenos físicos.

ROSA, Carlos A. P. **História da ciência**. Brasília: Funag, 2012. v. 1, 2 e 3.

Narra a história da ciência desde o Renascimento até o mundo contemporâneo.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito**: uma história da Matemática dos primeiros números à teoria do caos. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

Uma narrativa histórica que destaca o que cada descoberta matemática provocou em sua época e nos dias atuais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUPLEMENTO PARA O PROFESSOR

Apresentação

Professor, esta coleção tem o objetivo de proporcionar aos estudantes uma sólida formação matemática, alinhada com as mais recentes diretrizes educacionais e políticas públicas.

Como material de apoio à prática pedagógica, este *Suplemento* traz, de maneira concisa, orientações e sugestões para o uso do livro do estudante, como texto de referência, com o objetivo de subsidiar seu trabalho em sala de aula. Esperamos que este material contribua para a compreensão das diretrizes pedagógicas que nortearam a elaboração dos livros desta coleção.

Para atender a esse objetivo, este *Suplemento* é composto de orientações gerais e orientações específicas que compõem cada capítulo, além das referências bibliográficas que embasaram a elaboração da coleção.

Nas orientações gerais apresentamos as diretrizes pedagógicas da coleção e trazemos discussões sobre diferentes temáticas, como saúde mental e emocional, *bullying* e *cyberbullying*, culturas juvenis, tecnologias digitais na educação e métodos de avaliação. Também expomos a estrutura da coleção e sugestões de cronogramas de trabalho.

Já nas orientações específicas trazemos as habilidades e competências da BNCC trabalhadas ao longo do volume e os objetivos de cada capítulo. Também indicamos sugestões para o desenvolvimentos dos capítulos, com propostas de ampliação e de trabalho interdisciplinar, além de referências suplementares de sites e livros que complementam as propostas do livro do estudante. As resoluções e encaminhamentos de exercícios de cálculo são apresentadas como apoio de trabalho ao professor.

Assim, este *Suplemento* foi elaborado para contribuir com reflexões e sugestões de trabalho; no entanto, as orientações não devem ser entendidas como um modelo a ser seguido, mas como um complemento à formação e à experiência do professor.

Bom trabalho!

Os Autores.

SUMÁRIO

ORIENTAÇÕES GERAIS MP003

O novo Ensino Médio MP003

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) MP003

Competências na BNCC MP003

A interdisciplinaridade e a Matemática MP004

Identidades e diversidade na educação MP006

Saúde mental e emocional MP006

Bullying e *cyberbullying* MP007

Apresentação da obra MP008

Referenciais teórico-metodológicos MP008

Objetivos e estratégias MP008

Argumentação e reflexão MP009

Representações e registros MP009

Interação, diálogo e colaboração MP009

Progressão do pensamento científico MP010

As tecnologias digitais na Educaçao MP010

O pensamento computacional MP010

O uso de tecnologias nessa coleção MP011

Juventudes, educação e trabalho MP011

Culturas juvenis MP012

Organização dos conteúdos na coleção MP012

A estrutura da obra MP013

O trabalho com o livro MP014

Avaliações e reflexões MP014

Práticas avaliativas MP016

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS MP018

Competências específicas e habilidades MP018

Sugestões para o desenvolvimento dos capítulos MP019

CAPÍTULO 1 A linguagem dos conjuntos MP019

CAPÍTULO 2 Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira MP023

CAPÍTULO 3 Geometria plana: triângulos e proporcionalidade MP026

CAPÍTULO 4 Circunferência, círculo e área de figuras planas MP028

CAPÍTULO 5 A linguagem das funções MP030

CAPÍTULO 6 Função polinomial do 1º grau ou função afim MP031

CAPÍTULO 7 Função polinomial do 2º grau ou função quadrática MP033

CAPÍTULO 8 Função modular MP035

CAPÍTULO 9 Função exponencial MP037

CAPÍTULO 10 Função logarítmica MP039

Resoluções de exercícios MP041

CAPÍTULO 1 A linguagem dos conjuntos MP041

CAPÍTULO 2 Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira MP045

CAPÍTULO 3 Geometria plana: triângulos e proporcionalidade MP051

CAPÍTULO 4 Circunferência, círculo e área de figuras planas MP057

CAPÍTULO 5 A linguagem das funções MP064

CAPÍTULO 6 Função polinomial do 1º grau ou função afim MP072

CAPÍTULO 7 Função polinomial do 2º grau ou função quadrática MP076

CAPÍTULO 8 Função modular MP083

CAPÍTULO 9 Função exponencial MP087

CAPÍTULO 10 Função logarítmica MP090

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS MP095

ORIENTAÇÕES GERAIS

O novo Ensino Médio

O século XX foi um período de extraordinários avanços científicos e tecnológicos na história da humanidade. Entre as grandes conquistas daquele século estão: a teoria da relatividade; a descoberta da estrutura do DNA; a invenção da televisão, do avião, do computador e da fibra ótica; a exploração espacial; os satélites de comunicação, tendo como consequência o telefone celular; a descoberta do *laser* e o primeiro transplante de coração, só para citar alguns exemplos.

Além dessa evolução científica e tecnológica, o século XX apresentou significativas transformações sociais e políticas, provocadas por variados fatores, como o próprio avanço tecnológico; as duas guerras mundiais; a instauração de uma nova ideologia política e socioeconômica; e as disputas estratégicas e os conflitos indiretos entre os Estados Unidos da América e a extinta União Soviética.

Mas como se comportaram os sistemas de ensino em todo o mundo, diante do fecundo e tumultuado século XX?

Os conteúdos, a didática e os objetivos do ensino também foram se remodelando ao longo daquele século, chegando ao início do século XXI com a proposta desafiadora de formar cidadãos produtivos e criativos, capazes de enfrentar as novas relações com os saberes, nas quais nem sempre as respostas se apresentam prontas.

Acompanhando a tendência mundial, o Brasil também realizou reformas periódicas no sistema de ensino. Neste momento, vivemos o processo de implantação de uma nova reforma do Ensino Médio, que pretende emparelhar-se com as exigências contemporâneas.

Em julho de 2024 foi sancionada a Lei nº 14.945/2024, que estabelece a Política Nacional de Ensino Médio. A norma, que passa a valer em 2025, altera a Lei nº 9.394/1996, de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, e revoga parcialmente a Lei nº 13.415/2017, que dispõe sobre a reforma do Ensino Médio. As principais mudanças foram:

> [...] o aumento da carga horária destinada à formação geral básica; a definição dos itinerários formativos, conectados às áreas do conhecimento; e a valorização do ensino profissional e tecnológico integrado ao ensino médio.
>
> Carga horária: a formação é de, no mínimo, 3.000 horas, sendo 2.400 horas para a formação geral básica e 600 horas para os itinerários formativos.
>
> Itinerários formativos: o estudante cursa uma das áreas de conhecimento (Linguagens e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas) ou a formação técnica e profissional. Cada escola deve oferecer pelo menos dois itinerários.
>
> Ensino profissional: reserva 2.100 horas para a formação básica, com 300 horas podendo ser destinadas a conteúdos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) relacionados à formação técnica. A nova lei prevê que até 1.200 horas sejam destinadas para o ensino técnico (Itinerários Formativos Técnicos).
>
> BRASIL. Ministério da Educação. Política Nacional de Ensino Médio. **Gov.br**. Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/areas-de-atuacao/eb/politica-nacional-ensino-medio. Acesso em: 31 ago. 2024.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

O Brasil, por suas dimensões continentais e diversidades regionais, sempre teve diferentes propostas curriculares e pedagógicas para a Educação Básica. Para estabelecer um núcleo comum, foi publicada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), definida a seguir, cujos princípios devem regulamentar tanto o Ensino Fundamental como o Ensino Médio.

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de **aprendizagens essenciais** que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Este documento normativo aplica-se exclusivamente à educação escolar, tal como a define o § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei n. 9.394/1996), e está orientado pelos princípios éticos, olíticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).
>
> BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 7.

Esse documento se propõe a ser uma referência nacional comum e obrigatória para a elaboração de currículos e de propostas pedagógicas das redes de ensino e instituições escolares públicas e privadas do país.

É importante destacar, porém, que os currículos propostos constituem o conteúdo mínimo a ser desenvolvido durante o período escolar, podendo ser complementado. Com isso, preservam-se a autonomia das escolas e dos professores e as particularidades regionais.

Competências na BNCC

Visando assegurar as aprendizagens essenciais a que todo estudante da Educação Básica tem direito, a BNCC propõe e

desenvolvimento de competências que vão além dos conteúdos curriculares a serem ensinados, pois é preciso assumir a necessidade de os estudantes se tornarem capazes de mobilizar conteúdos, habilidades, atitudes e valores. Nesse sentido, propõe 10 competências gerais para a Educação Básica e 5 competências específicas para a área de Matemática, as quais listamos a seguir.

No Ensino Médio, as competências gerais devem ser contempladas e promovidas pelas quatro áreas do conhecimento: Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Competências específicas

Além de competências gerais, a BNCC estabelece competências específicas que particularizam as competências gerais para cada área do conhecimento. As competências específicas para o Ensino Médio estão articuladas às competências específicas de área para o Ensino Fundamental, com as adequações necessárias ao atendimento das especificidades de formação dos estudantes nessa etapa. Para assegurar o desenvolvimento das competências específicas, cada uma delas está relacionada a um conjunto de habilidades, que representa as aprendizagens essenciais a serem garantidas a todos os estudantes do Ensino Médio.

A interdisciplinaridade e a Matemática

Nesse vasto panorama do processo de ensino-aprendizagem, a formação dos estudantes em Matemática não se restringe à construção do "edifício da Matemática", mas está imbricada nas outras áreas de conhecimento. Então, esse ensino apenas será completo se houver um trabalho interdisciplinar na escola. Cabe aqui uma reflexão sobre o trabalho interdisciplinar, de acordo com o professor Nilbo Ribeiro Nogueira:

Uma atitude interdisciplinar

É importante refletir sobre a postura do professor, pois é ela que norteará os trabalhos de caráter interdisciplinar. Acreditamos que não basta apenas ter vontade de praticar a interdisciplinaridade; deve haver uma *vontade política* que vai além do discurso e assume uma atitude interdisciplinar.

"[...] uma atitude diante de alternativas para conhecer mais e melhor, atitude de espera ante os atos consumados, atitude de reciprocidade que impele à troca, que impele ao diálogo – ao diálogo com pares idênticos, com pares anônimos ou consigo mesmo – atitude de humildade diante da limitação do próprio saber, atitude de perplexidade ante a possibilidade de desvendar novos saberes, atitude de desafio – desafio perante o novo, desafio em redimensionar o velho –, atitude de envolvimento e comprometimento com as pessoas neles envolvidas, atitude, pois, de compromisso em construir sempre da melhor forma possível, atitude de responsabilidade, mas, sobretudo, de alegria, de revelação, de encontro, enfim, de vida" (Fazenda, 1998, p. 82).

Tal atitude ainda exigirá romper com velhos paradigmas, acreditar no novo, conceber a hipótese de que o aprendiz é possuidor de um espectro de competências ávidas a serem desenvolvidas, e que apenas ministrando 100% de um determinado conteúdo não garantirá os estímulos, as ações, as vivências, a interação social e todos os demais fatores essenciais à construção do conhecimento.

Por outro lado, a postura e a atitude interdisciplinar podem garantir uma atuação mediadora do professor que, tal qual um facilitador, busca o foco de interesse, facilita o acesso aos materiais de pesquisa, indaga mais do que responde, promove discussões etc., sempre preocupado mais com o processo do que com o produto, garantindo o sucesso do processo de aprendizagem.

Esta não pode e nem deve ser uma postura de um único professor. A grande dificuldade reside em disseminá-la por toda a equipe, evitando desta forma a desuniformidade das ações, que ora podem surgir de forma disciplinar e [ora] compartimentada em alguns professores, comprometendo o desenrolar do processo interdisciplinar. A equipe deve possuir perfeito canal de comunicação. A regra decisória passa a ser o consenso, já que desta forma pode-se cobrar o comprometimento; há de se estabelecer divisões de tarefas e equidade nas informações tanto de ordem procedimental como de resultados.

Desta forma, só é possível pensar em interdisciplinaridade quando se possui uma equipe comprometida, bem diferente dos *grupos de sujeitos isolados*, que preocupam-se no máximo com o produto mensurável, demonstrado nas avaliações de caráter quantitativo.

NOGUEIRA, N. R. **Pedagogia dos projetos**: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências. 7. ed. São Paulo: Érica, 2010.

Conforme exposto pelo autor, o trabalho interdisciplinar só é efetivo se for desenvolvido em conjunto, por uma equipe comprometida de professores e com o apoio da escola. Além disso, os professores, mediadores do trabalho interdisciplinar, devem se preocupar mais com o processo do que com o produto. Para auxiliar nesse processo, a obra sugere propostas interdisciplinares, mas é importante ressaltar que compete a cada escola e equipe de profissionais definir o projeto que será desenvolvido de acordo com sua realidade. Nesse sentido, cabe uma reflexão e discussão coletiva para que se realize um trabalho interdisciplinar consistente e coerente com a proposta da escola.

É importante também ressaltar que a Matemática, por sua universalidade de quantificar e de expressar, entendida, portanto, como linguagem, incorpora uma característica única.

Nesse segmento de ensino, momento em que a abordagem das ciências tem um caráter mais elaborado e abstrato, a Matemática fornece instrumentos que favorecem a compreensão de vários fenômenos. Contudo, há Matemática impregnada em quase todas as atividades da vida atual (na informática, na música, no comércio, na meteorologia, na medicina, nas comunicações etc.), permitindo às pessoas codificar, ordenar, criar e analisar índices ou taxas, avaliar e interpretar dosagens etc.

Também devemos considerar que a Matemática entendida como ciência desenvolve os processos de construção e validação de conceitos, elaboração e refutação de argumentações, assim como as habilidades de generalizar, relacionar e concluir, contribuindo para o estabelecimento de relações e para a interpretação de fenômenos e informações. As competências formadas por essa disciplina, portanto, não se limitam a descrever uma situação, mas abrangem a elaboração de modelos, propondo soluções.

Isso posto, espera-se que o desenvolvimento da Matemática incorpore habilidades globais para o desenvolvimento dos estudantes, mas também compartilhe com as outras disciplinas a responsabilidade de desenvolver habilidades de raciocínio e expressão de pensamento. Feito de forma coordenada, esse trabalho permitirá que os estudantes desenvolvam as competências esperadas.

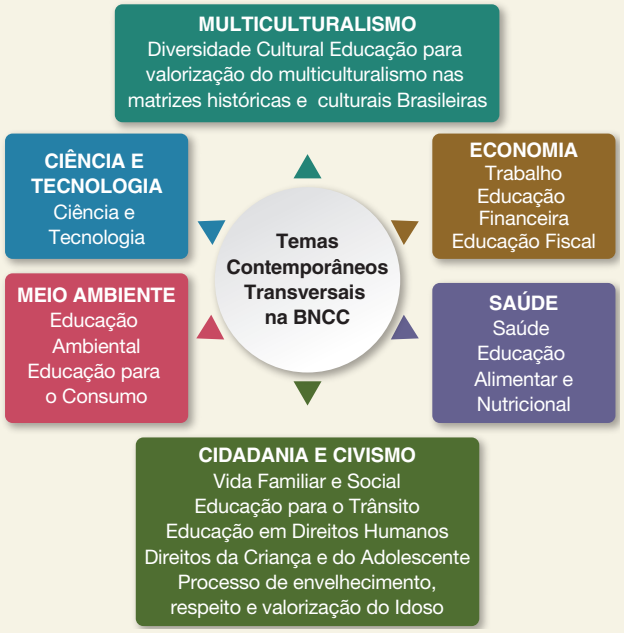
O trabalho interdisciplinar pode ser apoiado no desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs). Os TCTs são aqueles conteúdos que não pertencem a apenas um componente curricular, uma vez que podem ser trabalhados por todos eles. Dizem respeito a temas relacionados ao mundo contemporâneo e à atualidade, o que favorece a integração dos componentes curriculares em um processo pedagógico com vistas à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos.

Os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) buscam uma contextualização do que é ensinado, trazendo temas que sejam de interesse dos estudantes e de relevância para seu desenvolvimento como cidadão. O grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade. Assim, espera-se que os TCTs permitam ao aluno entender melhor: como utilizar seu dinheiro, como cuidar de sua saúde, como usar as novas tecnologias digitais, como cuidar do planeta em que vive, como entender e respeitar aqueles que são diferentes e quais são seus direitos e deveres, assuntos que conferem aos TCTs o atributo da **contemporaneidade**.

Já o **transversal** pode ser definido como aquilo que atravessa. Portanto, TCTs, no contexto educacional, são aqueles assuntos que não pertencem a uma área do conhecimento em particular, mas que atravessam todas elas, pois delas fazem parte e a trazem para a realidade do estudante. Na escola, são os temas que atendem às demandas da sociedade contemporânea, ou seja, aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. p. 7.

Publicado pelo Ministério da Educação em 2019, o documento Temas contemporâneos transversais na BNCC: proposta de práticas de implementação selecionou quinze temas e os distribuiu em seis macroáreas, conforme indicado a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Além dos Temas Contemporâneos Transversais, destacamos o trabalho apoiado aos Objetivos de Desenvolvimento que fazem parte de uma agenda mundial adotada durante a Cúpula das Nações Unidas sobre o Desenvolvimento Sustentável em setembro de 2015 composta por 17 objetivos e 169 metas a serem atingidos até 2030. Nesta agenda estão previstas ações mundiais nas áreas de erradicação da pobreza, segurança alimentar, agricultura, saúde, educação, igualdade de gênero, redução das desigualdades, energia, água e saneamento, padrões sustentáveis de produção e de consumo, mudança do clima, cidades sustentáveis, proteção e uso sustentável dos oceanos e dos ecossistemas terrestres, crescimento econômico inclusivo, infraestrutura, industrialização, entre outros.

Identidades e diversidade na educação

A diversidade de perfis dos estudantes pode configurar um desafio às rotinas tradicionais e padronizadas de ensino e aprendizagem, levando estudantes e professores a buscar alternativas que satisfaçam os objetivos escolares e contribuam com a formação global desses estudantes.

Cada indivíduo apresenta interesses e história de vida distintos e o processo de ensino e aprendizagem acompanha essa diversidade. Muitos estudantes podem não demonstrar dificuldade em apreender conteúdos apresentados visualmente por meio de textos e imagens, enquanto outros alcançam resultados melhores quando têm a oportunidade de conversar com colegas e professores ou de colocar em prática aspectos de determinado tema.

Atividades que reconheçam as diferenças cognitivas entre os estudantes, e incluam todos em um mesmo propósito podem gerar maior confiança entre os estudantes e confortar aqueles que porventura se sentem desfavorecidos pelas metodologias convencionais de ensino e aprendizagem.

Vale ressaltar que não existem consensos científicos a respeito da efetividade de métodos de ensino e aprendizagem, o que leva à compreensão de que cada educador deve avaliar seu contexto e considerar a viabilidade dessas ferramentas em sala de aula.

Nesse sentido, fazem-se úteis diferentes metodologias de ensino e aprendizagem. É importante destacar o ensino centrado no estudante, de modo a torná-lo autônomo e ativo, lançando mão de situações-problemas que demandem o uso de diferentes habilidades cognitivas. A partir do momento em que os estudantes são convidados a solucionar problemas, habilidades subjacentes serão desenvolvidas juntamente com a apreensão dos objetos de aprendizagem, aprimorando o raciocínio, o trabalho coletivo, a escuta, a argumentação e a comunicação. Assim, um leque de conhecimentos conceituais, atitudinais e procedimentais são trabalhados de forma integrada, contemplando diferentes formas de aprender presentes em sala de aula e corroborando a formação global do estudante que, em seu futuro próximo, irá se deparar com desafios complexos que requerem desenvoltura social e habilidade de ouvir e argumentar de maneira clara e objetiva.

Nesse contexto, o professor assume o papel de mediador de discussões e pesquisas, direcionando o processo de ensino e aprendizagem, abandonando o papel de detentor e transmissor do conteúdo. É importante destacar que não há um melhor método para ensinar todos os estudantes, pois podemos encontrar diferentes formas de aprender na sala de aula.

De acordo com Cruz (2016), existem 10 práticas que podem trazer benefícios ao processo de ensino e aprendizagem com base nos estudos sobre como o cérebro aprende. São elas:

1. Introduzir o material a ser aprendido fazendo ligações com o que já é sabido.

2. Criar situações semelhantes à vida real.

3. Criar oportunidades de rememoração e de novas associações.

4. Utilizar trabalhos em grupo seguidos de exposição pelos alunos.

5. Aprender fazendo.

6. Utilizar técnicas mnemônicas, ou seja, que auxiliam a memória, como a música, rimas.

7. Dividir as atividades em intervalos.

8. Introduzir o novo, o intenso e o pouco usual.

9. Utilizar tempo de relaxamento entre as atividades.

10. Levar em conta a necessidade de consolidação da memória.

CRUZ, L. F. C. Bases neuroanatômicas e neurofisiológicas do processo ensino e aprendizagem. *In*: **III Curso de Atualização de Professores da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio A Neurociência e a Educação**: Como nosso cérebro aprende. Ouro Preto, 2016.

Saúde mental e emocional

Nos últimos anos, a saúde mental e emocional dos estudantes e sua interação com a escola tem recebido cada vez mais atenção. Estudiosos argumentam que a pré-adolescência oferece uma janela de oportunidade única para a prevenção e intervenção precoce, uma vez que é durante esse período que muitos resultados negativos de saúde física e mental começam a se manifestar pela primeira vez.

É imprescindível observar sinais que os jovens em sofrimento emocional costumam dar, como isolamento e distanciamento dos amigos e dos grupos sociais, brigas constantes e agressividade, publicações com conteúdo negativo nas redes sociais ou participação em grupos virtuais que incentivam automutilação ou suicídio, entre outros. Nesses casos, para auxiliar o estudante, acolha-o e procure estabelecer uma conversa amigável, questionando se está passando por alguma dificuldade, dizendo perceber que ele mostra condutas que têm preocupado você, como isolamento ou tristeza, muito sono nas aulas, entre outras. Em seguida, procure os gestores escolares para pensarem juntos em uma estratégia que possa envolver a equipe docente, como, por exemplo, alertar os demais professores para que também fiquem atentos ao jovem em questão. Chamar a família para uma conversa também pode ser produtivo. Além disso, com a equipe gestora, pode ser feito o encaminhamento para o serviço especializado do Sistema Único de Saúde (SUS), que oferece atendimento por meio dos Centros de Atenção Psicossocial (CAPS).

Os desafios escolares referentes às competências socioemocionais transcendem os limites disciplinares e se apresentam nas mais diversas situações durante a vida estudantil. Assim, a construção de um ambiente favorável ao bem estar emocional é responsabilidade de estudantes, professores, funcionários e demais atores da comunidade escolar. Atividades que abordam com clareza e objetividade as dimensões psíquicas vividas por estudantes corroboram não apenas o amadurecimento de jovens e crianças em relação à sua educação emocional, mas desenvolvem relações harmônicas entre todos e um melhor desempenho escolar.

A capacidade de solucionar problemas além de ajudar nos estudos, é uma importante competência socioemocional que pode e deve ser desenvolvida desde cedo a fim de que os estudantes consigam ter clareza dos desafios para, então, propor as soluções apropriadas. Para auxiliar o desenvolvimento dessa habilidade, propomos a seguinte atividade:

Peça aos estudantes que formem grupos ou duplas e relatem uns aos outros algumas dificuldades enfrentadas por eles, em diferentes situações do cotidiano, e que eles se sintam à vontade para compartilhar. Em seguida, deverão selecionar uma delas e seguir os 6 passos:

1. Qual é o problema?
   (Eles devem descrever detalhadamente o problema em um papel.)
2. Liste todas as soluções possíveis.
   (Após uma reflexão, devem listar todas as ideias que surgirem, mesmo aquelas mais improváveis. Este é um bom momento para usar a criatividade.)
3. Analise isoladamente cada solução e escreva seus prós e contras.
   (Peça que componham uma tabela com três colunas. Na primeira está a ideia de solução, na segunda seus pontos favoráveis e na terceira os contrários.)
4. Escolha a solução mais prática e rápida e coloque em prática.
   (O grupo deve eleger a alternativa mais viável e promissora para que o estudante que compartilhou o problema possa adotar.)
5. Avalie a eficácia da solução e, se for necessário, recorra às ideias seguintes presentes na lista.
   (Oriente o estudante a sempre retornar à tabela e dar uma nova chance à solução do problema.)[1]

O objetivo é que a atividade seja de fácil execução e ajude os estudantes a perceberem que verbalizar e sistematizar os pensamentos e as emoções podem ser extremamente úteis ao lidar com problemas de natureza emocional. Peça aos estudantes que façam uma autoavaliação sobre a atividade e seus próprios desempenhos.

[1] BLACK DOG INSTITUTE. Structured Problem Solving. Disponível em: https://www.blackdoginstitute.org.au/wp-content/uploads/2020/04/16-structured-problem-solving.pdf. Acesso em: 22 set. 2024.

Bullying e *cyberbullyng*

O *bullying* tem sido um dos grandes problemas encarados no ambiente escolar e a principal forma de violência praticada nesse espaço.

> O *bullying* caracteriza antes um padrão de comportamento do que incidentes isolados, e com frequência se agrava caso não seja controlado. Pode ser definido como o comportamento intencional e agressivo recorrente contra uma vítima, em uma situação em que há um desequilibro real ou percebido de poder e as vítimas se sentem vulneráveis e impotentes para se defenderem. Comportamentos de *bullying* podem ser físicos (golpes, chutes e a destruição de bens), verbais (provocação, insulto e ameaça), ou relacionais (difamação e exclusão de um grupo).
>
> ORGANIZAÇÃO das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Violência escolar e *bullying***: relatório sobre a situação mundial. Brasília, DF: UNESCO, 2019. p. 15.

Segundo a Unesco (2019), estima-se que, todos os anos, 246 milhões de crianças e adolescentes sofrem algum tipo de violência escolar e *bullying*. As estimativas do número de crianças e jovens afetados pelo *bullying* escolar variam de acordo com os países e o tipo de estudo, em uma escala que varia de menos de 10% até mais de 65%.

As novas tecnologias digitais e as tecnologias de informação e comunicação (TIC) geram tanto oportunidades quanto desafios para a educação. Por um lado, existe o potencial para apoiar e melhorar os processos educacionais de estudantes, inclusive aqueles com necessidades educacionais especiais. Por outro lado, muitos países enfrentam um desafio real em relação às desigualdades no acesso às tecnologias digitais e à internet na educação. Além disso, com o grande alcance da internet, um outro tipo de violência, derivada do *bullying*, tem ganhado grande repercussão: o *cyberbullying*. Nesses casos, crianças e jovens são hostilizados, atacados, depreciados e até ameaçados virtualmente.

Devido a essas atitudes é comum que os estudantes percam o interesse em frequentar a escola, o desempenho e a expectativa de aprendizagem tendem a ser baixos, e eles podem desenvolver ansiedade e outros transtornos psicológicos, assim como transtornos alimentares e até evasão escolar.

> Uma das ações que promove a paz nas escolas envolve os alunos conversarem com os responsáveis da instituição de ensino para fazer encontros de imersão sobre fazer o bem, entender sobre o *bullying* e suas consequências, e ainda, onde podem se informar sobre saúde mental compartilhando seus posicionamentos sobre o tema e experiências que passaram. Também é importante uma rede de apoio das instituições para auxiliar as vítimas de violência, *bullying,* como psicólogos nas escolas, prontos para atender todos os alunos. Em suma, algumas dicas podem nortear algumas de nossas ações, como:
>
> - Inserir o enfrentamento do *bullying* e a valorização da diversidade durante o ano escolar, para que as reflexões possam acontecer não apenas em períodos, aulas ou atividades específicas;
> - Campanhas e/ou práticas solidárias, como, por exemplo, campanhas do agasalho ou arrecadação de alimentos, de forma a engajar a comunidade escolar a solidarizar-se com o próximo;
> - Promoção de atividades colaborativas, com o intuito de desenvolver competências e valores que auxiliem os estudantes a respeitar os diversos saberes e momentos das turmas, criando um senso de pertencimento à comunidade;
> - Diálogos com a direção escolar de forma a criar um espaço como uma sala de imersão para fazer o bem, que fomente o compartilhamento de experiências, fortalecendo experiências exitosas e positivas para resolução de problemas;
> - Incentivar a criação de redes de apoio para pessoas vítimas de violência;
> - Implementação da psicologia escolar como forma de fortalecer a rede de apoio e a comunidade escolar para a consolidação de uma cultura de paz.
>
> PITANGA, G. *et al*. *Bullying* e violência escolar: suas consequências e como combatê-las. *In*: **Blog #tmjUNICEF**. Brasília, DF: 18 jul. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/bullying-e-violencia-escolar. Acesso em: 22 set. 2024.

Apresentação da obra

Os objetivos gerais do Ensino Médio podem ser resumidos em formar cidadãos: produtivos e criativos; com raciocínio analítico; que saibam antecipar-se a inovações; que busquem novos conhecimentos em um processo de formação contínua; com conhecimentos básicos de higiene e saúde; conscientes de seus direitos e deveres; e capazes de se inserir no mundo do trabalho e no convívio social.

Considerando esses objetivos, além dos objetivos específicos relativos à Matemática, elaboramos a obra em concordância com os referenciais teórico-metodológicos descritos no item a seguir, cujo entendimento depende dos conceitos de competência e habilidade. Esses conceitos frequentemente aparecem juntos por serem indissociáveis e são muitas vezes tomados como sinônimos. Contudo, na verdade, eles têm significados diferentes, embora complementares.

Na BNCC, competência é definida como "mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho". É interessante notar que essa definição pressupõe o conhecimento do conceito de habilidade. Mas o que é habilidade?

Habilidade pode ser definida como a capacidade de mobilizar conhecimentos para resolver determinado tipo de problema da vida pessoal, social e produtiva. O desenvolvimento de uma habilidade envolve:

- ação (compreender o problema, identificando variáveis; relacionar elementos relevantes; comparar com situações prévias);
- planejamento (visualizar possíveis métodos de resolução; adotar estratégias e recursos que serão usados);
- execução (conforme o planejamento, pôr em prática a ideia da resolução);
- checagem (analisar criticamente a solução encontrada).

Referenciais teórico-metodológicos

Os referenciais teórico-metodológicos da obra seguem as orientações da BNCC, que mantêm e ampliam a linha das políticas educacionais anteriores, propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN). O foco continua sendo o desenvolvimento de competências, como se constata pelo texto a seguir.

> O conceito de competência, adotado pela BNCC, marca a discussão pedagógica e social das últimas décadas e pode ser inferido no texto da LDB, especialmente quando se estabelecem as finalidades gerais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio (Artigos 32 e 35). Além disso, desde as décadas finais do século XX e ao longo deste início do século XXI, o foco no desenvolvimento de competências tem orientado a maioria dos Estados e Municípios brasileiros e diferentes países na construção de seus currículos. É esse também o enfoque adotado nas avaliações internacionais da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), que coordena o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa, na sigla em inglês), e da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco, na sigla em inglês), que instituiu o Laboratório Latino-americano de Avaliação da Qualidade da Educação para a América Latina (LLECE, na sigla em espanhol).
>
> Ao adotar esse enfoque, a BNCC indica que as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os estudantes devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 13.

Para a consulta a esses referenciais, neste *Suplemento* são reproduzidas as competências gerais da Educação Básica e as competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.

Competências específicas de outras áreas do conhecimento também são parcialmente contempladas ao longo dos livros desta coleção, no sentido de estabelecer relações entre essas áreas e a Matemática no Ensino Médio.

Cada habilidade é identificada por um código alfanumérico, iniciado por uma sequência de duas letras e dois números (EM13) que identificam a etapa do Ensino Médio e seus respectivos anos (1º, 2º e 3º ano). Na sequência, temos o código da área do conhecimento ou componente curricular, da competência específica e da habilidade relacionada àquela competência, conforme esquema a seguir:

EM13MAT103

MAT: Matemática e suas Tecnologias
LGG: Linguagens e suas Tecnologias
LP: Língua Portuguesa
CNAT: Ciências da Natureza e suas Tecnologias
CHS: Ciências Humanas e Sociais Aplicadas

O primeiro número indica a competência específica da área ou do componente curricular e é seguido do número da habilidade propriamente dita. É importante destacar que tal número não representa hierarquia nem sequência em que as habilidades devem ser trabalhadas.

Objetivos e estratégias

Procuramos contribuir com os objetivos gerais do Ensino Médio transmitindo três tipos de orientações ao longo da obra: "como se faz", "para que se faz" e "porque se faz". Na expectativa de que essas orientações sejam entendidas e seguidas, fixamos os objetivos gerais descritos a seguir.

- Apresentar os rudimentos do pensamento científico.
- Propiciar a compreensão da evolução do pensamento científico por meio da ampliação de conceitos e/ou da construção de objetos abstratos.
- Entender a Matemática como um sistema de proposições verdadeiras e ordenadas, em que as primeiras justificam as seguintes.

- Estabelecer ligações entre o estágio de aprendizado do Ensino Médio e os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental.
- Estabelecer ligações entre o conhecimento matemático/etnomatemático e as experiências da vida pessoal, social e produtiva.
- Ampliar as possibilidades de representações, por meio da linguagem matemática, exercitando: a construção de esquemas, tabelas e gráficos; as argumentações lógicas; o uso de expressões algébricas etc.
- Transitar pelas várias formas de representação de um mesmo objeto matemático.
- Fornecer embasamento científico para a tomada de decisões, por meio de análises de dados.
- Implementar o trabalho em equipe.

A pertinência desses objetivos pode ser justificada pelas seguintes concepções:

Argumentação e reflexão

Organizamos, em todos os volumes, atividades para que os estudantes desenvolvam a capacidade de análise crítica, criativa e propositiva em relação ao conteúdo abordado, estimulando o aprender a aprender e aprender sempre, a curiosidade investigativa e crítica por meio da proposição de hipóteses e argumentação baseada em fatos científicos e sociais. Quando realizados coletivamente, proporcionarão aos estudantes a possibilidade de diálogo, confronto de ideais, argumentação e o desenvolvimento da empatia, do aprender com o outro e do respeito à diversidade de ideias, pensamentos, valores e comportamentos.

Representações e registros

O filósofo e psicólogo francês Raymond Duval é responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos registros de representação semiótica e outros importantes estudos em psicologia cognitiva.

> Segundo Duval (2013b), a principal dificuldade na aprendizagem da Matemática decorre do fato que os objetos matemáticos não possuem existência física e, sendo assim, o acesso a esses objetos só é possível com a utilização de um sistema semiótico. Desta forma, na Matemática, muito mais do que em qualquer outra área do conhecimento, a diversidade dos sistemas semióticos é fundamental para a aprendizagem e para a construção de novos conceitos
>
> Um sistema semiótico é, de acordo com Duval (2011), um conjunto de signos, organizados segundo regras próprias de formação e convenções, que apresentam relações internas que permitem identificar os objetos representados. Em outras palavras, é um sistema que desempenha a função de comunicação uma vez que é capaz de produzir e transmitir informações.
>
> Para designar os sistemas semióticos específicos da Matemática, Duval (2011) escolheu o termo registro. Para ele, um registro de representação é um sistema semiótico que cumpre, além da função de comunicação, as funções cognitivas de objetivação (entendimento para si) e tratamento. Partindo desta ideia, o autor faz referência a quatro tipos de registros de representação: a língua natural, os sistemas de escrita (numérica, algébrica e simbólica), os gráficos cartesianos e as figuras geométricas.
>
> DENARDI, V. B. Teoria dos registros e representação semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. *In*: XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2017, Pelotas, RS. **Anais do XXI EBRAPEM**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 2017.

Em linhas gerais, as pesquisas de Duval constatam que o trânsito por pelo menos duas representações de um mesmo objeto matemático aumenta a possibilidade de entendimento do objeto. Seguindo essa orientação, exploramos, sempre que possível, mais de uma representação de um mesmo objeto de estudo.

Interação, diálogo e colaboração

Uma das principais competências exigidas pelo mundo moderno é saber trabalhar em equipe. Essa competência resulta de algumas habilidades, de algum conhecimento e de certas posturas e atitudes, como: modéstia, respeito, doação e dedicação. Trabalhar em equipe não é fácil, pois um objetivo deve ser alcançado a partir de opiniões que nem sempre convergem; por isso, é preciso exercitar essa prática.

> Há, no entanto, um alerta quanto à realização efetiva de um trabalho em grupo na sala de aula de matemática, onde o significado da cooperação deve ser negociado pelo professor e pelos alunos no curso de suas interações sociais, sendo ambos responsáveis pela construção e execução das normas de sala de aula. Tais normas que não são regras estáticas a serem seguidas, mas, sim, regularidades no processo de interação social, incluem o seguinte: (a) os alunos cooperam para resolver problemas; (b) a atividade significativa é valorizada mais do que as respostas corretas; (c) a persistência pessoalmente desafiadora no problema é mais importante que completar um grande número de atividades; e (d) os parceiros devem encontrar consenso quando trabalham nas atividades.
>
> Quando trabalham juntos, cooperativamente, em pequenos grupos, os alunos se engajam em dois tipos de resolução de problemas. Por um lado, eles tentam solucionar seus problemas matemáticos e, por outro lado, procuram trabalhar juntos produtivamente, completando, com persistência, as atividades instrucionais propostas. A língua falada é obviamente um meio importante de comunicação nesse processo. Oportunidades para a aprendizagem matemática também surgem quando os alunos tentam alcançar um consenso. Aqui a vontade de ouvir as explicações de outros, de aprender a ouvir, é fundamental. Quando o aluno é obrigado a explicar e justificar o seu método de solução ao parceiro e, por sua vez, a escutar a explicação, tem a oportunidade tanto de dar esclarecimentos ao outro, como de revisar sua própria compreensão.
>
> SILVA, M. R. G. da. Considerações sobre o trabalho em grupo na aula de Matemática. **Mimesis**, Bauru, v. 19, n. 2, 1998. p. 135-145.

De acordo com esse preceito, propomos, em diversas situações, essa forma de trabalho, propiciando uma participação mais ativa dos estudantes.

Progressão do pensamento científico

Os assuntos são desenvolvidos de modo a possibilitar a progressão do pensamento científico. Para isso, adotamos estratégias, viabilizando:

- articulação horizontal (por meio da revisão de conteúdos essenciais do Ensino Fundamental) e vertical (por meio do aprofundamento daqueles conteúdos e da apresentação de novos conteúdos);
- conjectura e o teste de hipóteses;
- visão sistêmica da Matemática como uma sequência de verdades, em que as primeiras justificam as seguintes;
- compreensão dos três fundamentos: "como se faz", "para que se faz" e "por que se faz", visando a competência fundamental, que é **aprender a aprender**.

As tecnologias digitais na educação

A tecnologia revolucionou a forma como recebemos, enviamos e usamos informações todos os dias. Além disso, está em diferentes lugares, moldando a comunicação, o transporte, as relações interpessoais e as práticas sociais. Conforme a ciência e a tecnologia evoluem, essa constante transformação se reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e na educação. No entanto, apesar de apresentar benefícios, muitas escolas no Brasil enfrentam desafios significativos quando se trata de integrar efetivamente a tecnologia na sala de aula.

Em 2022, a Base Nacional Comum Curricular ganhou um documento complementar, Normas sobre Computação na Educação Básica – Complemento à BNCC (Resolução CNE/CE nº 1 /2022), que estabeleceu competências e habilidades computacionais a serem desenvolvidas ao longo de toda a Educação Básica. Este documento está organizado em três eixos estruturantes:

- Pensamento computacional: enfatiza a resolução de problemas por meio do pensamento lógico. Não se limita à programação, incentiva a incorporação às atividades cotidianas que estimulam o pensamento estruturado desde a Educação Infantil.
- Mundo digital: perpassa a compreensão do funcionamento da tecnologia – transmissão de dados, atuação em redes e *gadgets* são explorados.
- Cultura digital: aborda o uso da tecnologia, levantando questões cruciais como privacidade online, ética no uso de dados e a influência da inteligência artificial.

Ainda, como forma de ampliar o trabalho com as tecnologias na educação, em 2023 foi sancionada a Lei nº 14.533/23 que institui a Política Nacional de Educação Digital (PNED), que se apoia em quatro eixos: inclusão digital da sociedade, educação digital nas escolas, ações de capacitação do mercado de trabalho e incentivo à inovação, à pesquisa e ao desenvolvimento.

> Art. 3º O eixo Educação Digital Escolar tem como objetivo garantir a inserção da educação digital nos ambientes escolares, em todos os níveis e modalidades, a partir do estímulo ao letramento digital e informacional e à aprendizagem de computação, de programação, de robótica e de outras competências digitais, englobando:
>
> I – pensamento computacional, que se refere à capacidade de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento da capacidade de criar e adaptar algoritmos, com aplicação de fundamentos da computação para alavancar e aprimorar a aprendizagem e o pensamento criativo e crítico nas diversas áreas do conhecimento;
>
> II – mundo digital, que envolve a aprendizagem sobre *hardware*, como computadores, celulares e *tablets*, e sobre o ambiente digital baseado na internet, como sua arquitetura e aplicações;
>
> III – cultura digital, que envolve aprendizagem destinada à participação consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que pressupõe compreensão dos impactos da revolução digital e seus avanços na sociedade, a construção de atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais e os diferentes usos das tecnologias e dos conteúdos disponibilizados;
>
> IV – direitos digitais, que envolve a conscientização a respeito dos direitos sobre o uso e o tratamento de dados pessoais, nos termos da Lei nº 13.709, de 14 de agosto de 2018 (Lei Geral de Proteção de Dados Pessoais), a promoção da conectividade segura e a proteção dos dados da população mais vulnerável, em especial crianças e adolescentes;
>
> V – tecnologia assistiva, que engloba produtos, recursos, metodologias, estratégias, práticas e serviços que objetivam promover a funcionalidade e a aprendizagem, com foco na inclusão de pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida.
>
> BRASIL. **Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023**. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 12 jan. 2023.

O pensamento computacional

O pensamento computacional se apoia nos quatro pilares expostos a seguir.

- Decomposição: consiste em dividir um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema complexo pode ser resolvido aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- Reconhecimento de padrões: ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- Abstração: no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.
- Algoritmo: a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma

sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

O uso das tecnologias nesta coleção

Nesta coleção, consideramos que o uso das tecnologias digitais pode favorecer e ampliar o processo de resolução de problemas, reforçando o raciocínio lógico, a formulação de hipóteses e a argumentação, além de inspirar os estudantes a aprender cada vez mais e de maneira significativa.

Criando caminhos e conexões entre os alunos e os conteúdos apresentados, com vistas, sempre, ao desenvolvimento de competências e habilidades que permitam a extrapolação dos conteúdos de sala de aula para o cotidiano dos estudantes e comunidades, esta obra propõe, em todos os seus volumes, estratégias intencionais para o desenvolvimento do pensamento científico e computacional, para a ampliação das redes de diálogo e comunicação dos estudantes por meio de aplicativos, *sites*, vídeos, entre outras ferramentas que permitam maior aproximação com o mundo tecnológico.

As seções *Conectado* e *Educação Midiática* foram criadas para trabalhar temáticas relacionadas ao Pensamento computacional, Mundo digital e Cultura digital. Além dessas seções, em alguns exercícios resolvidos, apresentamos a resolução estruturada segundo os pilares do Pensamento computacional. É importante destacar que nem todos os pilares do Pensamento computacional precisam ser acionados para a resolução de todos os problemas. Além disso, há atividades desplugadas que podem ser realizadas para ensinar Pensamento computacional, sem fazer uso de um computador.

Também propomos o uso de *softwares* para a realização de atividades que envolvam confecção de gráficos, elaboração de planilhas eletrônicas, gravações de vídeos entre outras propostas. Esse conjunto de atividades fazem parte de uma proposta para o implemento dos eixos Cultura digital e Mundo digital, estimulando as habilidades de uso das tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, e promovendo formas diversas de comunicação e disseminação de informações de maneira tecnológica.

Juventudes, educação e trabalho

As rápidas mudanças no mercado de trabalho, têm produzido diversos desafios para a inserção laboral dos jovens, como destaca o texto a seguir.

> Os jovens estão inseridos em grupos de variados níveis e, por isso, sujeitos a diferentes oportunidades, restrições e influências.
>
> Esferas como a família e as políticas sociais produzem diversos impactos nas trajetórias de jovens, seja pela reprodução, seja pelo enfrentamento de vulnerabilidades. No Brasil, é possível identificar cinco categorias de jovens em transição escola-trabalho (18 a 24 anos) quanto à sua inserção educacional e laboral: jovem apenas estudando (15% das juventudes); jovem estudando e trabalhando (14% das juventudes); jovem apenas trabalhando (39% das juventudes); jovem estudando e desempregado (5% das juventudes); jovem "sem-sem" (sem oportunidade de estudar e trabalhar) (27% das juventudes). Cada categoria possui uma configuração específica em termos de marcadores sociais e demanda estratégias que deem conta de diferentes desafios para a inserção no mercado de trabalho.
>
> As evidências acima indicam temas centrais que devem pautar a agenda da inclusão produtiva de jovens no Brasil. Um primeiro ponto e a necessidade de agir com urgência para aproveitar a janela de oportunidade representada pelo "bônus demográfico". É preciso ampliar as oportunidades formativas, visando tanto à qualificação das juventudes, quanto ao desenvolvimento de habilidades.

ITAÚ EDUCAÇÃO E TRABALHO (org.). **O Futuro do mundo do trabalho para as juventudes Brasileiras**. São Paulo: Itaú educação e trabalho, 2023. p. 9.

Nesse sentido, a escola tem um papel central na melhoria das oportunidades e das condições para este grupo. Assim, além do ensino propedêutico, é preciso educar emocionalmente os jovens. Para isso, consideramos importante apresentar aos estudantes, por meio de palestras, relatos de diferentes trabalhadores de diversas áreas e de profissionais como psicólogos, com o objetivo de ajudar os jovens a lidar com as próprias emoções em situações difíceis, para que possam ser estimulados a conquistar a autoconfiança.

Como professor de Matemática, é importante destacar a participação dos conceitos e práticas matemáticas nas mais variadas profissões do mercado de trabalho. Qualquer profissão demandará, em maior ou menor profundidade e frequência, um conjunto de conhecimentos matemáticos. Na seção *Trabalho e juventudes*, presente em todos os volumes da coleção, buscou-se apresentar que a Matemática será parte indissociável da rotina de trabalho em diferentes profissões. Identificar com os estudantes a participação da Matemática nas profissões que lhes aprouverem será um ótimo exercício de aproximação entre matemática, trabalho e juventudes.

Além disso, é preciso considerar a diversidade entre os estudantes:

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar uma escola que acolha as diversidades, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser protagonistas de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu projeto de vida, tanto no que diz respeito ao estudo e ao trabalho como também no que concerne às escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos.
>
> Para formar esses jovens como sujeitos críticos, criativos, autônomos e responsáveis, cabe às escolas de Ensino Médio proporcionar experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas. O mundo deve lhes ser apresentado como campo aberto para investigação e intervenção quanto a seus aspectos políticos, sociais, produtivos, ambientais e culturais, de modo que se sintam estimulados a equacionar e resolver questões legadas pelas gerações anteriores – e que se refletem nos contextos atuais –, abrindo-se criativamente para o novo.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 463.

Culturas juvenis

A escola do jovem precisa reconhecer o contexto social e psicológico vivido pelos estudantes nesse período de constantes mudanças de valores e sentimentos. É desejável, portanto, acolher os adolescentes e aproximar conteúdos e procedimentos escolares à vida e aos interesses deles, reconhecendo suas culturas e identidades.

Em vez de ignorar ou modificar as formas de expressão trazidas pelos jovens à sala de aula, os educadores podem aproveitar essa oportunidade para conhecer melhor essa geração. Conhecer os conteúdos de mídias e redes sociais consumidos pelos adolescentes, seu jeito de falar, suas preferências artísticas e esportivas é entender quais são seus sonhos e como eles pensam. Identificar aquilo que é importante para o adolescente pode ser chave para atribuir maior sentido e valor aos conteúdos e às rotinas escolares.

Atividades que convidem estudantes de diferentes perfis a expor seus interesses e a expressar suas diferentes culturas e linguagens em um ambiente livre e seguro na sala de aula podem encorajar os estudantes a se conectar uns com os outros, além de trazerem uma oportunidade de diversificação do trabalho docente. Reforce a importância da diversidade entre as pessoas e da prática da tolerância com relação à sua origem, à identidade de gênero, à orientação sexual, à aparência física, à etnia, à presença de deficiências psíquico-motoras, à condição social entre outras características pessoais visando a cultura de paz em sala de aula.

Organização dos conteúdos na coleção

A obra é constituída por 3 volumes e traz uma seleção de tópicos programáticos fundamentais à Matemática, que contemplam habilidades da BNCC para Matemática e suas Tecnologias. A seguir apresentamos sugestões de cronogramas bimestrais, trimestrais e semestrais para o trabalho com esses conteúdos.

Sugestão de cronograma bimestral para o volume 1

Bimestre	Capítulos do livro
1º	1. A linguagem dos conjuntos 2. Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira
2º	3. Geometria plana: triângulos e proporcionalidade 4. Circunferência, círculo e área de figuras planas
3º	5. A linguagem das funções 6. Função polinomial do 1º grau ou função afim 7. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática
4º	8. Função modular 9. Função exponencial 10. Função logarítmica

Sugestão de cronograma trimestral para o volume 1

Trimestre	Capítulos do livro
1º	1. A linguagem dos conjuntos 2. Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira 3. Geometria plana: triângulos e proporcionalidade
2º	4. Circunferência, círculo e área de figuras planas 5. A linguagem das funções 6. Função polinomial do 1º grau ou função afim 7. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática
3º	8. Função modular 9. Função exponencial 10. Função logarítmica

Sugestão de cronograma semestral para o volume 1

Semestre	Capítulos do livro
1º	1. A linguagem dos conjuntos 2. Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira 3. Geometria plana: triângulos e proporcionalidade 4. Circunferência, círculo e área de figuras planas
2º	5. A linguagem das funções 6. Função polinomial do 1º grau ou função afim 7. Função polinomial do 2º grau ou função quadrática 8. Função modular 9. Função exponencial 10. Função logarítmica

Sugestão de cronograma bimestral para o volume 2

Bimestre	Capítulos do livro
1º	1. Sequências 2. Trigonometria no triângulo retângulo
2º	3. Circunferência trigonométrica: seno e cosseno 4. Outras razões trigonométricas e adição de arcos 5. Funções trigonométricas e resolução de triângulos
3º	6. Os princípios da Análise combinatória 7. Agrupamentos e métodos de contagem
4º	8. Geometria de posição e poliedros 9. Prismas e pirâmides 10. Corpos redondos

Sugestão de cronograma trimestral para o volume 2

Trimestre	Capítulos do livro
1º	1. Sequências 2. Trigonometria no triângulo retângulo 3. Circunferência trigonométrica: seno e cosseno
2º	4. Outras razões trigonométricas e adição de arcos 5. Funções trigonométricas e resolução de triângulos 6. Os princípios da Análise combinatória 7. Agrupamentos e métodos de contagem
3º	8. Geometria de posição e poliedros 9. Prismas e pirâmides 10. Corpos redondos

Sugestão de cronograma semestral para o volume 2

Semestre	Capítulos do livro
1º	1. Sequências 2. Trigonometria no triângulo retângulo 3. Circunferência trigonométrica: seno e cosseno 4. Outras razões trigonométricas e adição de arcos 5. Funções trigonométricas e resolução de triângulos
2º	6. Os princípios da Análise combinatória 7. Agrupamentos e métodos de contagem 8. Geometria de posição e poliedros 9. Prismas e pirâmides 10. Corpos redondos

Sugestão de cronograma bimestral para o volume 3

Bimestre	Capítulos do livro
1º	1. Probabilidade 2. Estatística
2º	3. Matrizes 4. Sistemas lineares e determinantes
3º	5. Geometria analítica: ponto e reta 6. Complementos sobre o estudo da reta 7. Equações da circunferência
4º	8. As cônicas: elipse, hipérbole e parábola 9. Conjunto dos números complexos 10. Polinômios e equações polinomiais

Sugestão de cronograma trimestral para o volume 3

Trimestre	Capítulos do livro
1º	1. Probabilidade 2. Estatística 3. Matrizes
2º	4. Sistemas lineares e determinantes 5. Geometria analítica: ponto e reta 6. Complementos sobre o estudo da reta 7. Equações da circunferência
3º	8. As cônicas: elipse, hipérbole e parábola 9. Conjunto dos números complexos 10. Polinômios e equações polinomiais

Sugestão de cronograma semestral para o volume 3

Semestre	Capítulos do livro
1º	1. Probabilidade 2. Estatística 3. Matrizes 4. Sistemas lineares e determinantes
2º	5. Geometria analítica: ponto e reta 6. Complementos sobre o estudo da reta 7. Equações da circunferência 8. As cônicas: elipse, hipérbole e parábola 9. Conjunto dos números complexos 10. Polinômios e equações polinomiais

A estrutura da obra

A coleção é composta de três volumes do estudante e respectivos manuais do professor. O *Manual do professor* de cada volume reúne o livro do estudante com orientações e respostas dos exercícios, além do *Suplemento para o professor*, que é dividido em: *Orientações gerais*, comum a cada um dos volumes da coleção, *Orientações específicas* de cada volume e *Resolução de exercícios*.

Cada volume foi organizado em 10 capítulos. A seguir apresentamos a organização de cada capítulo:

Abertura: apresentamos recursos visuais e textuais que despertam o interesse do estudante, buscando ainda resgatar seus conhecimentos prévios por meio de questões apresentadas no boxe *Além da teoria*. As atividades desse boxe podem ser discutidas em grupo, e suas conclusões, compartilhadas com a turma.

Desenvolvimento do conteúdo: ao desenvolver a teoria, a escolha de textos, de atividades e aplicações no desenvolvimento dos exercícios resolvidos, o estabelecimento gradual da terminologia matemática e de outros procedimentos visam facilitar a compreensão dos assuntos pelo estudante. Isso, porém, não significa que optamos pela exclusão de situações mais complexas, mas que sua inclusão foi criteriosa.

Exercícios resolvidos e **Análise da resolução**: intercalados aos textos explicativos, todos os capítulos trazem *Exercícios resolvidos* apresentando estratégias de resolução e aplicação dos conteúdos estudados. Além disso, em alguns momentos, apresentamos diferentes estratégias de resolução de um mesmo exercício e a resolução seguindo as etapas do Pensamento Computacional. A seção *Análise da resolução* explora erros comuns e recorrentes cometidos pelos estudantes. Entendemos que uma estratégia para minimizar esses erros é submetê-los à crítica. Para isso, eles devem apontar e corrigir um erro cometido, propositalmente, em um exercício resolvido. Dessa maneira, estimula-se o

levantamento de dúvidas e o posicionamento crítico dos estudantes, embasados na ciência, favorecendo a reflexão crítica, investigando causas que permitam a elaboração e testagem de hipóteses e a criação de soluções individuais e coletivas.

Exercícios propostos e **Exercícios complementares**: os *Exercícios propostos* estão organizados como forma de auxiliar a compreensão dos conceitos, promovendo uma aplicação imediata dos conteúdos. A seção de *Exercícios complementares* oferece questões de aprofundamento que promovem a fixação e a revisão dos conteúdos. São atividades que podem ser desenvolvidas conforme as características de cada turma e as necessidades didáticas, por exemplo: tarefa extraclasse, revisão do conteúdo trabalhado, fonte de exercícios para uma recuperação paralela ou reforço do conteúdo trabalhado. Seu objetivo, no entanto, é verificar o aprendizado, pois permitem avaliar se os estudantes compreenderam os conteúdos conceituais e assimilaram os procedimentos envolvidos.

Mentes brilhantes: nesses boxes são apresentados conhecimentos de diferentes grupos populacionais, povos ou contribuições de pesquisadores para o desenvolvimento da Matemática ou de outra Ciência. Os temas escolhidos buscam valorizar os conhecimentos historicamente produzidos, os aplicados em situações diversas e os passados entre gerações, favorecendo a compreensão da realidade, estimulando a curiosidade e objetivando estimular novas aprendizagens.

Conectado: esse boxe tem por objetivo auxiliar os estudantes a compreenderem o conceito de algoritmo, interpretar e construir fluxogramas, compreender linguagem de programação e suas estruturas e propõe alguns problemas para serem resolvidos com o auxílio de *softwares*.

Trabalho e juventudes: nesse boxe são abordadas várias profissões e sua relação com a Matemática. Ao explorar diversas profissões e os requisitos associados a cada uma, os estudantes podem identificar suas próprias vocações e interesses.

Educação midiática: esta seção abrange temas essenciais para a formação crítica dos estudantes no mundo digital, incentivando a análise criteriosa de dados e informações.

Matemática sem fronteiras: neste boxe exploramos a relação da Matemática com outras áreas de conhecimento, com o objetivo de contextualizar a teoria matemática por meio de situações reais e despertar a curiosidade dos estudantes para aplicações mais elaboradas. Também apresentamos propostas de atividades para serem realizadas em grupo, promovendo reflexões e discussões sobre o tema trabalhado.

Verifique o que aprendeu no capítulo: ao final de cada capítulo, é apresentado um conjunto de testes que podem ser utilizados para autoavaliação ou como uma avaliação formativa relativa aos conteúdos trabalhados no capítulo. As propostas indicadas no tópico *Ferramenta de estudo* têm como objetivo auxiliar os estudantes na organização seu aprendizado, promovendo retomadas e reflexões sobre o conteúdo estudado.

O trabalho com o livro

Entendemos que, em geral, os recursos presentes em salas de aula não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao trabalho do professor e à aprendizagem do estudante. Nesse caso, o livro didático desempenha um papel importante, assessorando nesse processo, como organização e encaminhamento da teoria e propostas de exercícios. Assim, o livro didático contribui para o processo de ensino-aprendizagem e atua como mais um interlocutor na comunicação entre professor e estudante.

Mas é preciso considerar que o livro didático, por mais completo que seja, deve ser utilizado intercalado com outros recursos que enriqueçam o trabalho do professor.

No Ensino Fundamental, os estudantes tiveram contato com vários campos do conhecimento matemático. No Ensino Médio, espera-se que estejam em condições de utilizar e enriquecer esses conhecimentos, desenvolvendo de modo mais amplo capacidades como abstrair, investigar, analisar e compreender os fatos matemáticos e interpretar a própria realidade.

É importante que entendam que as verdades matemáticas (não sendo definições nem postulados) podem ser demonstradas. Não defendemos que todos os teoremas devam ser demonstrados em sala de aula, mas que alguns o sejam, para que os estudantes compreendam o significado de uma demonstração e o método sistêmico da ciência matemática.

As atividades propostas nas seções *Exercícios propostos* e *Exercícios complementares*, por serem bastante diversificadas, podem ser desenvolvidas individualmente, em duplas ou em grupos maiores, de acordo com a finalidade didática e as características de cada turma. O trabalho em grupo favorece a comunicação oral, a argumentação e a troca de experiências.

Sugerimos um destaque especial às atividades de elaboração de problemas, pois consideramos que elaborar e resolver corretamente um problema sobre determinado assunto é um indicador da compreensão daquele tema, além de ser um modo eficaz de autoavaliação.

O professor pode ainda complementar e ampliar as atividades com o uso do computador. Em alguns capítulos, no boxe *Conectado*, propomos atividades com o uso de *softwares* de construção de gráficos, de Geometria Dinâmica e, de exploração e construção de poliedros, planilha eletrônica e de linguagem de programação que podem ser obtidos gratuitamente na internet. Esses recursos auxiliam o estudo de alguns tópicos da Matemática, permitindo, por exemplo, que o estudante transite facilmente entre a representação algébrica e a representação gráfica e faça relações entre elas. É importante que, antes de propor essas atividades, o professor conheça os *softwares* e faça simulações, avalie como e quando esse recurso pode ser empregado em suas aulas, para melhor orientar os estudantes.

Outro aspecto relevante trabalhado no Livro do Estudante refere-se à comunicação matemática, que pode ser apresentada como relato escrito ou oral, registro ou expressão. Pode-se também explorar o boxe *Matemática sem fronteiras*, trabalhando-a como tema de pesquisa ou como problematização do texto. Destacamos ainda o trabalho em grupo, que estimula os estudantes a conversar, a ler e a escrever sobre assuntos matemáticos.

Nas atividades de pesquisa, é fundamental que o professor instrua os estudantes a pesquisarem em fontes confiáveis, como *sites* de universidades, publicações científicas, livros etc., e que citem essas fontes no trabalho.

Certas aulas podem ser desenvolvidas com a participação de professores de outras áreas do conhecimento. Nas **Orientações específicas**, sugerimos momentos oportunos em que isso pode ser feito.

Avaliações e reflexões

A avaliação é um instrumento fundamental para obter informações sobre o andamento do processo de ensino-aprendizagem. No decorrer desse processo, é preciso que os momentos de avaliação não se restrinjam ao final de cada bimestre, trimestre ou semestre, pois o diagnóstico contínuo possibilita a

reformulação de procedimentos e estratégias, visando ao sucesso efetivo do estudante.

Ao longo do livro, muitas oportunidades de observação e avaliação surgem e podem ser aproveitadas para isso, como por exemplo, a seção *Verifique o que aprendeu no capítulo*, que é proposta ao final de todos os capítulos. A mobilização do conhecimento prévio dos estudantes, por exemplo, pode ser um bom início de avaliação. Além disso, no decorrer do trabalho com o conteúdo do capítulo, pontuar, registrar e relatar procedimentos comuns, relevantes e diferentes contribuem para melhor avaliar cada estudante. Acompanhar a resolução de atividades e as produções orais e escritas da turma possibilita a criação de perfis e a percepção sobre quais aspectos devem ser reforçados no ensino, quais conteúdos e habilidades convêm privilegiar e sobre quais assuntos os estudantes têm mais domínio.

Para obter informações sobre a apreensão de conteúdos, pode-se observar: a compreensão conceitual, a leitura e a interpretação do texto matemático e as atitudes (hesitante, alheio, preocupado com as questões sociais e ambientais, confiante, interessado etc.) na resolução das atividades. Também pode ser útil verificar se os estudantes fazem perguntas pertinentes, se participam das atividades e dos trabalhos em grupo, se são operativos com os colegas, se argumentam com justificativas coerentes para defender suas opiniões.

Além de empregar esses recursos, podem-se criar outras oportunidades de avaliação, por exemplo:

- solicitar aos estudantes que expliquem, na lousa ou oralmente, exercícios, resoluções de problemas ou ainda textos lidos em sala de aula;
- propor que façam estimativas de cálculo para a solução de uma situação-problema;
- propor que elaborem, individualmente ou em grupo, uma atividade ou situação-problema para um colega resolver individualmente ou em grupo.

Essas estratégias auxiliam a avaliar a coerência da argumentação e do pensamento matemático dos estudantes, a adequação das situações-problema criadas e do que é exigido em sua resolução.

Muitos e importantes autores tratam do tema avaliação em seus estudos pedagógicos. Jussara Hoffmann, por exemplo, discute aspectos relacionados à avaliação do ensino e da aprendizagem.

> Quando se desenvolve um processo mediador de avaliação, não há como prever todos os passos e tempos desse processo, pois as condições e ritmos diferenciados de aprendizagem irão lhe conferir uma dinâmica própria.
>
> As novas concepções de aprendizagem propõem fundamentalmente situações de busca contínua de novos conhecimentos, questionamento e crítica sobre as ideias em discussão, complementação através da leitura de diferentes portadores de texto, mobilização dos conhecimentos em variadas situações-problema, expressão diversificada do pensamento do aprendiz. Nesse sentido, a visão do educador/avaliador ultrapassa a concepção de alguém que simplesmente "observa" se o aluno acompanhou o processo e alcançou resultados esperados, na direção de um educador que propõe ações diversificadas e investiga, confronta, exige novas e melhores soluções a cada momento.
>
> HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho. Porto Alegre: Mediação, 2005. p. 77.

Assim, pode-se afirmar que a avaliação deve ser um processo, não uma série de obstáculos a serem vencidos. As provas escritas, quando atendem aos objetivos dos conteúdos, são meios adequados para examinar o domínio de procedimentos, a interpretação de texto, a compreensão conceitual e o entendimento de contextos. Mas, mesmo esse tipo de avaliação, muito comum no cotidiano escolar, pode ser utilizado como um momento de aprendizagem, pois permite a percepção de avanços e dificuldades em relação ao conteúdo avaliado.

Com esse propósito, também pode ser bastante interessante promover a aplicação de provas elaboradas pelos próprios estudantes, em duplas ou em grupos. A correção dessas provas também pode ser feita pelos estudantes, que trocariam de prova com o colega, sob a supervisão do professor. O fato de serem requisitados a "trocar de lugar" com o professor pode proporcionar momentos produtivos de reflexão sobre o que eles esperam do curso de Matemática no Ensino Médio e se enxergarem como produtores de conhecimento.

Outro ponto importante a ser discutido quando tratamos de avaliação é abordar o erro e seu papel no processo de aprendizagem. Conforme Helena de Noronha Cury:

> Ao corrigir qualquer prova, teste ou trabalho de Matemática, muitas vezes, o professor costuma apontar os erros cometidos pelos alunos passando pelos acertos como se estes fossem esperados. Mas quem garante que os acertos mostram o que o aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe? Qualquer produção, seja aquela que apenas repete uma resolução-modelo, seja a que indica a criatividade do estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal. Assim, analisar as produções é uma atividade que traz para o professor e para os alunos a possibilidade de entender, mais de perto, como se dá a apropriação do saber pelos estudantes.
>
> A análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser também enfocada como metodologia de ensino, se for empregada em sala de aula como "trampolim para a aprendizagem" [...], partindo dos erros detectados e levando os alunos a questionar suas respostas para construir o próprio conhecimento.
>
> Assim, a análise das produções dos estudantes não é um fato isolado na prática do professor; ela é – ou deveria ser – um dos componentes dos planos pedagógicos das instituições e dos planos de aula dos docentes, levando em conta os objetivos do ensino de cada disciplina.
>
> CURY, H. N. **Análise de erros***:* o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. p. 13.

Essa introdução às ideias da autora nos possibilita refletir um pouco sobre o tratamento dado ao erro. Habitualmente, ele é associado ao fracasso escolar. Contudo, seria mais apropriado abordá-lo como mais um instrumento de aprendizagem e reflexão disponível ao professor. Entre outras estratégias a serem empregadas para trabalhar com o erro em sala de aula, podem-se propor discussões com a turma sobre as causas de determinado tipo de erro ter aparecido com mais frequência. Dessa maneira, estimula-se o levantamento de dúvidas comuns

entre os estudantes e seu esclarecimento, favorecendo a aprendizagem de determinado conteúdo.

Não são incomuns os casos de estudantes que receiam cometer um erro e serem humilhados pelos colegas (*bullying*) e, em casos assim, cabe ao professor discutir com a turma que o erro é uma parte integrante do processo de aprendizagem e não permitir que estudante algum se afaste dos demais, seja por motivo cognitivo, comportamental, moral, econômico etc, contribuindo, dessa maneira, para manter a autoconfiança e a autoestima dos discentes e evitar frustrações. Em toda sala de aula é certo que alguns estudantes necessitam de maior assistência do que outros. Em Matemática, por exemplo, um erro rotineiro que os estudantes cometem é a afirmação de que $(x + y)^2 = x^2 + y^2$. Acreditamos que uma tática eficiente para a abordagem/correção desse equivoco e evitar constrangimentos, é incentivar o estudante a substituir as variáveis x e y por números, efetuar as operações e comparar os resultados. Assim, digamos, para $x = 3$ e $y = 2$, tem-se $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$, ao passo que $3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$, dessa maneira o estudante perceberá claramente que $(3 + 2)^2 \neq 3^2 + 2^2$ e o professor terá transformado o erro em um mecanismo do estudo e pode, a partir daí, fazer as generalizações necessárias. Essa tática pode ser aplicada dividindo a turma em grupos heterogêneos de forma que os estudantes que terminam a atividade antes possam transformar-se em auxiliares na edificação do aprendizado compartilhando seus conhecimentos e habilidades auxiliando aqueles com maiores dificuldades e estimulando as diferentes formas de discernimentos presente na sala.

No exercício da docência, espera-se ainda que o professor, ao analisar a frequência com que determinados erros ocorrem (em um grupo de estudantes ou até mesmo em várias turmas), reflita sobre sua prática docente e pense como poderá retomar e conduzir o desenvolvimento do conteúdo em que os estudantes apresentam dificuldades. É importante lembrar que o professor não está sozinho no processo de ensino-aprendizagem; há outros profissionais na escola que poderão auxiliar os estudantes ou as turmas a superar suas dúvidas, colaborando com visões e ideias diferentes, ou por meio de uma proposta de trabalho em conjunto.

Práticas avaliativas

A atribuição de um conceito ainda é a base para o professor mensurar o desempenho dos estudantes, mas isso não significa que as avaliações tenham de obedecer, necessariamente, o modelo tradicional. Neste item apresentaremos algumas práticas avaliativas que possam ser adequadas aos diferentes grupos de estudantes.

Team Based Learning (Aprendizagem baseada em equipes)

Esse método pode substituir as provas tradicionais por discussões em grupo, em sala de aula, estimulando a aprendizagem colaborativa e a percepção de dúvidas. Uma sequência possível para a aplicação desse método pode ser:

- Os estudantes, individualmente ou em grupos, estudam o material disponibilizado pelo professor. Esse material pode ser, por exemplo, um tópico já estudado do livro didático.
- A seguir, uma tarefa é proposta individualmente.
- Depois, a mesma tarefa é proposta aos grupos.
- Esses procedimentos visam proporcionar aos estudantes o conhecimento dos fundamentos do tema. Para que isso ocorra, o gabarito deve ser fornecido imediatamente após a realização da tarefa.
- O passo seguinte é revisar o tema para esclarecer eventuais dúvidas.
- A seguir, são propostas novas questões aos grupos, para novas discussões. Essas questões devem ser mais complexas que as anteriores e não devem ser encontradas facilmente no material disponibilizado pelo professor (nesse caso, um tópico do livro didático).
- Concluída a tarefa, o gabarito é fornecido, propiciando mais um momento de aprendizado.
- Finalmente, as eventuais dúvidas são esclarecidas pelo professor.

Avaliação formativa

Essa forma de avaliação visa verificar se os objetivos estabelecidos pelo professor estão sendo atingidos, permitindo acompanhar a evolução dos estudantes e identificar suas dificuldades. Os resultados podem orientá-lo quanto a algum ajuste necessário. Por meio da comunicação entre professor e estudantes, essa avaliação permite a redefinição de estratégias didáticas e de outras decisões que apoiem a turma em suas necessidades.

A aplicação desse formato deve ser feita em curtos períodos, para que o professor possa fazer uma correção de rumo em momentos oportunos. Como exemplos desse tipo de avaliação podemos citar: supervisionar os deveres de casa; observar a participação e o desempenho do estudante; aplicar provas, além das periódicas; propor projetos etc.

Avaliação somativa

Esse tipo de avaliação visa examinar a retenção dos conhecimentos ao final de um período, avaliando de modo geral em que grau os objetivos preestabelecidos foram atingidos pelos estudantes. Essa prática deve ser aplicada ao término de um ciclo, por meio de provas e trabalhos finais. Os conceitos atribuídos possibilitam identificar as dificuldades dos estudantes, permitindo avaliar se as estratégias de ensino utilizadas estão adequadas para a turma.

Avaliação diagnóstica

Pode ser entendida como uma ação avaliativa realizada no início de um processo de aprendizagem, que tem a função de obter informações sobre os conhecimentos, as aptidões e as competências dos estudantes, visando ao planejamento do curso a ser ministrado. Por isso, é mais recomendada no início de um ciclo. Entre as opções desse tipo de avaliação estão: entrevistas com estudantes, exercícios ou simulações, observação dos estudantes, questionários ou perguntas etc.

Avaliação comparativa

É a avaliação que compara o desempenho dos estudantes com um padrão externo ou com outros grupos de estudantes. Compreende conteúdos de um ciclo e visa, principalmente, avaliar o nível de conhecimento dos estudantes e identificar os pontos fortes e fracos do ensino.

Pode servir para identificar as diferenças entre os estudantes, ajudando no planejamento de intervenções pessoais. Como instrumento pode-se utilizar provas padronizadas ou trabalhos

individuais. Destacamos a importância para o cuidado com que esse tipo de avaliação não se torne um instrumento de competição entre os estudantes.

VI. Avaliação ipsativa

Nesta avaliação consideramos o desempenho de um estudante consigo mesmo ao longo de um período, em vez de compará-lo com outros estudantes. Assim, o foco está no progresso individual, no crescimento e no desenvolvimento do estudante. Os instrumentos de avaliação neste caso, devem estar focados no acompanhamento do estudante do ciclo, na autoavaliação e no desempenho para a entrega das tarefas. O acompanhamento mais individualizado pode permitir que o estudante analise seu próprio crescimento e pontos de melhoria.

Autoavaliação

Além do processo de avaliação promovido pelo professor, é de fundamental importância que os estudantes realizem ao menos uma autoavaliação bimestral. O objetivo é verificar a visão que cada estudante tem de si mesmo, como pensa seu processo de aprendizagem e se consegue estabelecer estratégias para avançar nos conteúdos. Deve-se ressaltar que os estudantes poderão obter ajuda do professor e dos colegas.

Na seção *Verifique o que aprendeu no capítulo*, apresentamos, em alguns capítulos, como sugestão fichas de autoavaliação que devem ser copiadas no caderno e usadas para identificar os conteúdos estudados que ainda precisam ser retomados.

Também pode ser proposta aos estudantes uma ficha de autoavaliação para acompanhamento das atitudes diante do processo de aprendizagem. É importante discutir com eles quais atitudes consideram mais adequadas para o processo de aprendizagem e se uma mudança de conduta pode trazer benefícios para a produtividade de cada um.

Ficha de autoavaliação de atitudes diante do processo de aprendizagem

Nome do estudante:	**Sempre**	**Às vezes**
Presto atenção nas aulas e estudo em casa.		
Presto atenção nas aulas, mas não vejo necessidade de estudar em casa.		
Converso bastante com meus colegas, mas procuro estudar em casa.		
Converso durante as aulas e não estudo em casa.		
Gosto de desafios e procuro resolvê-los.		
Verifico se a solução que encontrei para o exercício é a correta.		
Tento resolver um exercício, mesmo que o considere difícil e trabalhoso.		
Comparo minhas resoluções com as dos colegas e gosto de conversar sobre como eles resolvem os exercícios.		
Resolvo os exercícios e não acho necessário saber como os colegas os resolvem.		
Não tento resolver os exercícios, prefiro pedir ajuda.		
Não tento resolver os exercícios e não peço ajuda.		

Observe quantas vezes você assinalou **Sempre** e **Às vezes**.
Como você analisa as respostas mais frequentes? O que elas representam para você?
Agora, escreva no caderno se você está satisfeito com suas atitudes no processo de aprendizagem e o que pretende fazer para mudá-las, se julgar necessário.

Uma palavra sobre avaliações em larga escala

As avaliações educacionais em larga escala são realizadas no Brasil para monitorar a qualidade da educação dos sistemas de ensino e permitem a comparação dos aprendizados dos diferentes grupos de estudantes. Por isso, essas avaliações são particularmente úteis para analisar a eficácia de propostas educacionais e subsidiar decisões relativas, por exemplo, à promoção de estudantes.

A avaliação em larga escala do Ensino Básico, que inicialmente se reduzia ao Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (Saeb), como uma avaliação focada nas competências em leitura e Matemática, desdobrou-se em diversas modalidades. Uma delas é o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), que é usado como forma de seleção para o ingresso no sistema federal de Educação Superior, substituindo, em muitos casos, o tradicional vestibular. A prova de Matemática do Enem é composta de testes de múltipla escolha. Cada teste apresenta cinco alternativas, das quais apenas uma é correta. Devido à importância do Enem, sugerimos que, periodicamente, sejam aplicadas provas no formato desse exame. Atentamos, porém, que ao elaborar questões similares às do Enem, o professor consulte a *Matriz de Referência* desse exame, disponível em: http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf (acesso em: 22 set. 2024).

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

Competências específicas e habilidades

A seguir, listamos as competências específicas e as habilidades que foram trabalhadas neste volume. As competências gerais serão indicadas pontualmente ao longo das orientações.

Competência específica 1

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

Habilidades

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

(EM13MAT104) Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras).

Competência específica 2

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

Habilidades

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Competência específica 3

3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Habilidades

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT308) Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Competência específica 4

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

Habilidades

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do imposto de renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Competência específica 5

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Habilidades

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Sugestões para o desenvolvimento dos capítulos

Ao longo da apresentação do conteúdo, na reprodução do livro do estudante, algumas orientações de trabalho foram apresentadas, bem como as respostas dos exercícios e atividades.

A seguir, apresentamos orientações complementares para o desenvolvimento dos capítulos, bem como os objetivos, habilidades e competências trabalhadas. Você também encontrará sugestões de atividades e de leituras complementares.

CAPÍTULO 1 A linguagem dos conjuntos

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Discorrer sobre os conceitos primitivos de conjunto, elemento e pertinência.
- Representar conjuntos em suas diversas formas.
- Conceituar a relação de inclusão entre conjuntos.
- Realizar as operações de união, intersecção, diferença e complementaridade entre conjuntos.
- Utilizar um fluxograma para registrar um algoritmo.
- Discorrer sobre a condição de existência do complementar de um conjunto A em relação a um conjunto B.
- Resolver problemas utilizando os pilares do pensamento computacional: abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmos.
- Empregar a linguagem dos conjuntos na Geometria.
- Classificar um número quanto ao conjunto a que pertence: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}'$ e $\mathbb{R}$.
- Representar os números no eixo real e operar com intervalos reais.
- Demonstrar algumas propriedades sobre os números inteiros.
- Elaborar problemas do cotidiano, ou não, envolvendo um ou mais temas tratados no capítulo.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao longo do capítulo, apresentamos a construção de fluxograma por meio de uma situação problema e exploramos a construção de fluxogramas na resolução de exercícios, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 3** e da habilidade **EM13MA315**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

Na **abertura**, apresentamos uma situação que envolve a reciclagem e a separação adequada de resíduos. Inicie o trabalho perguntando aos estudantes se eles costumam fazer essa separação e se conhecem os diferentes tipos de lixeiras apresentadas. O **Infográfico clicável: Coleta seletiva** pode ser usado para ampliar o conhecimento dos estudantes sobre o uso de cada lixeira e a destinação adequada dos resíduos.

No boxe **Além da teoria**, sugerimos uma reflexão sobre a importância da reciclagem sustentável. Se considerar adequado, aproveite essa temática para um trabalho com o professor de Biologia propondo uma pesquisa sobre o tema e, se possível, uma ação de coleta seletiva na escola. Desse modo, contribuímos para o trabalho com o **TCT Meio Ambiente** e a **competência específica 3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

1. Teoria dos conjuntos

Não temos a pretensão de apresentar a Teoria dos Conjuntos, o que seria descabido nesse nível de ensino. O que faremos é convencionar a linguagem adotada nessa teoria. Essa linguagem é estritamente necessária para o entendimento dos tópicos abordados neste livro, pois ela permeia a maioria deles.

Introduza o assunto do capítulo a partir da ideia de infinito, que motivou a criação da teoria dos conjuntos. Conte um pouco da história de Georg Cantor que, com Richard Dedekind, definiu precisamente o conceito de conjunto infinito.

Aproveite o **exercício proposto 1** para explicar aos estudantes que Zenão foi um filósofo pré-socrático que ficou conhecido por elaborar diversos paradoxos que propunham reflexões sobre divisibilidade e multiplicidade de espaço e tempo. Um dos mais famosos paradoxos é o de Aquiles e a tartaruga, que conta a história de uma corrida entre Aquiles e uma tartaruga, em que Aquiles dá à tartaruga a vantagem de iniciar a corrida um trecho à frente de sua linha de partida. Segundo Zenão, Aquiles nunca alcançaria a tartaruga, pois, para atingir o ponto em que a tartaruga iniciou a corrida, ele precisaria passar por infinitos pontos que o separam do ponto onde está a tartaruga, que também está em movimento. Ainda de acordo com Zenão, como o espaço pode ser subdividido infinitamente, sempre existirá um número infinito de pontos entre Aquiles e a tartaruga, ou seja, um espaço não pode ser percorrido sem que se passe por todos os pontos, o que é impossível, pois estes são infinitos.

No tópico **Conceitos primitivos**, enfatize que os conceitos que iniciam determinada teoria são aceitos sem definição, pois, não existindo ainda a teoria, não há como defini-los. Por esse motivo, são chamados de conceitos primitivos. Na teoria dos conjuntos, esses conceitos são: conjunto, elemento de um conjunto e pertinência entre elemento e conjunto.

3. Conjunto e subconjunto

No tópico **Conjunto finito e conjunto infinito**, explore o conceito de conjunto infinito a partir de contagens. Pergunte: "Até quanto é possível contar?". Após as discussões, conceitue conjunto infinito e conjunto finito.

Se optar por definições formais de conjunto finito e conjunto infinito, sugerimos dois modos diferentes.

1º modo:

- Dizemos que um conjunto A é finito se $A = \emptyset$ ou se existir um número natural n tal que seja possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre A e o conjunto $\{1, 2, 3, ..., n\}$. Nesse caso, diz-se que A possui n elementos.
- Se um conjunto B não é finito, dizemos que ele é infinito. Nesse caso, dizemos que B possui infinitos elementos.

Exemplo:

A lista de chamada de sua classe associa o nome de cada estudante a um único elemento de um conjunto do tipo $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, com $n \in \infty$. Assim, o conjunto de estudantes da sala é finito.

2º modo:

- Dizemos que um conjunto A é infinito se ele tiver um subconjunto B, com $B \neq A$, tal que seja possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre A e B.
- Se um conjunto C não é infinito, dizemos que ele é finito.

Exemplo:

Vamos provar que o conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ dos números naturais é infinito. Para isso, consideremos o conjunto $P = \{0, 2, 4, 6, ...\}$ dos números naturais pares, que é subconjunto de $\mathbb{N}$ e é diferente de $\mathbb{N}$. Observando que a correspondência que associa cada elemento n de $\mathbb{N}$ ao elemento $2n$ de P é biunívoca, concluímos que $\mathbb{N}$ é infinito.

Aproveite o boxe **Reflexão** para propor aos estudantes que tentem responder à pergunta em grupo. Essa é uma oportunidade de propiciar uma participação mais ativa dos estudantes. Enfatize o princípio do respeito à diversidade e à inclusão, identificando, por meio de uma roda de conversa, por exemplo, o que os estudantes já sabem sobre o assunto, procurando trabalhar com os diferentes níveis de conhecimentos. Tão importante quanto o saber e o conhecer, são as formas de valoração desses saberes. Continue dialogando para reconhecer como a turma ou cada estudante considera a situação proposta. Promova a interação entre os estudantes, independentemente de gênero, religião, raça, condição social ou política. De alguma forma, procure averiguar como esse conteúdo mobiliza a participação de todos.

Nesse caso, abordamos um problema de contagem: o número de subconjuntos de um conjunto finito. Uma sugestão de desenvolvimento é apresentada a seguir.

Calcular o número de subconjuntos de $M = \{a, b, c\}$.

O número de subconjuntos de um conjunto finito de n elementos pode ser calculado em função de n. Para entender esse cálculo, observe, por exemplo, como são obtidos os subconjuntos do conjunto $M = \{a, b, c\}$. Na formação de um subconjunto de M, para cada um dos elementos de M, há duas possibilidades: o elemento pertencerá ao subconjunto a ser formado ou não.

Assim, um subconjunto de M estará determinado quando escolhermos, para cada elemento de M, uma possibilidade: sim (**S**), o elemento pertencerá ao subconjunto, ou não (**N**), o elemento não pertencerá ao subconjunto. Para a, temos 2 possibilidades S e N, assim como para b e c.

Para essa situação, temos os seguintes subconjuntos:

a	b	c	Subconjunto	
S	S	S	$\{a, b, c\}$	subconjunto com 3 elementos
S	S	N	$\{a, b\}$	subconjunto com 2 elementos
S	N	S	$\{a, c\}$	
N	S	S	$\{b, c\}$	
S	N	N	$\{a\}$	subconjunto com 1 elemento
N	S	N	$\{b\}$	
N	N	S	$\{c\}$	
N	N	N	$\emptyset$	subconjunto com 0 elemento

Assim, o conjunto M tem 8 subconjuntos: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ e $\{a, b, c\}$.

Podemos também calcular o número de subconjuntos de M simplesmente multiplicando o número de possibilidades de escolha sim (**S**) ou não (**N**) de seus elementos. Logo, o número de subconjuntos de M é dado pelo produto:

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

Generalizando essa conclusão, podemos enunciar:

Se um conjunto finito M possui n elementos, então M possui 2^n subconjuntos.

No **exercício proposto 6**, antes de resolver o item **c**, pergunte aos estudantes se alguém pratica alguma atividade física ou se têm alguma preferência por determinado esporte. Assim, é possível explorar as culturas juvenis, dando espaço para eles compartilharem suas experiências. No item **d**, comente que a prática de exercícios físicos ajuda a prevenir doenças relacionadas ao sedentarismo, auxiliando na manutenção de uma vida saudável e ativa. Conversar com os estudantes sobre este tema favorece o desenvolvimento da **competência geral 8**, **TCT Saúde** e **ODS 3**.

4. Operações entre conjuntos

No boxe **Conectado**, das páginas 18 e 19, apresentamos uma situação que envolve conceitos de Química. Nesse caso, apresentamos a construção de um fluxograma, que é uma representação gráfica utilizada para representar a solução de um problema, de modo que a sequência finita de passos esteja precisamente e plenamente descrita. Desse modo, o fluxograma se caracteriza como uma forma de organizar o algoritmo para a resolução de um problema, favorecendo o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4**.

Explique aos estudantes as características desse tipo de representação e proponha a construção de outros fluxogramas que organizam as etapas de diferentes situações, por exemplo: "Construam um fluxograma com os passos necessários para se fritar um ovo" ou "Construam um fluxograma que permite determinar a adição de dois números naturais quaisquer". Desse modo, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT315**.

5. Problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos

Nesse tópico, relacionamos as operações entre conjuntos finitos com as quantidades de elementos desses conjuntos.

O **exercício resolvido 5** foi solucionado considerando os pilares do pensamento computacional. O primeiro passo **Compreender o problema**, está associado aos passos **decomposição** e **reconhecimento de padrões**, pois, ao fazer uma análise do problema proposto, podemos decompor o problema apresentado em problemas menores:

1. Represente o universo U, formado por todos os funcionários da empresa.
2. Represente os subconjuntos I e E, do universo U, dos funcionários que falam inglês e dos funcionários que falam espanhol, respectivamente.
3. Indique por x o número de funcionários que falam inglês e espanhol ($I \cap E$).
4. Indique o número de funcionários que falam inglês e não falam espanhol ($I - E$).
5. Indique o número de funcionários que falam espanhol e não falam inglês ($E - I$).
6. Indique o número de funcionários da empresa que não falam inglês nem espanhol ($U - (I \cup E)$).
7. Iguale a soma de todos os valores indicados com o total de funcionários da empresa.
8. Resolva a equação assim obtida.

Discuta com os estudantes o **exercício resolvido 6**. Peça-lhes que descrevam a sucessão de etapas que conduzem à solução com base no algoritmo exposto no exercício anterior.

O **exercício proposto 22** possibilita o desenvolvimento do **TCT Saúde** e **ODS 3** ao abordar covid-19, gripe e dengue. Questione os estudantes sobre como essas doenças são transmitidas e os cuidados necessários para se prevenir contra elas.

O conteúdo do boxe **Trabalho e juventudes** aborda a atuação de profissionais de RH apresentando funções dessa profissão. Aproveite para conversar com os estudantes acerca de quais profissões desejariam seguir, se eles conhecem os requisitos necessários, se para exercê-la é importante ter alguma especialização ou curso (técnico, graduação etc.). Proponha uma pesquisa para que conheçam as etapas de processos seletivos de algumas empresas. Para complementar o assunto, explore o conteúdo do **Infográfico clicável: Inteligência artificial (IA) no recrutamento de RH**. Incentive os estudantes a compor mais informações sobre o uso da IA em processos de recrutamento, apontando potenciais, dificuldades e problemas do uso desse tipo de tecnologia. Essa abordagem favorece o desenvolvimento da **competência geral 6**, além dos **TCTs Trabalho** e **Ciência e Tecnologia**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

6. Conjuntos numéricos

Inicie o assunto com uma pergunta motivadora do tipo: "Suponha que uma pessoa esteja diante de dois recipientes contendo bolinhas e tenha que descobrir qual deles contém mais bolinhas sem contar a quantidade de bolinhas de cada recipiente. Como ela poderia agir?".

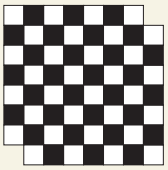
Espera-se que os estudantes percebam que uma maneira de descobrir, por exemplo, é tirar simultaneamente uma bolinha de cada recipiente, repetindo esse procedimento até que um deles fique vazio. Aquele recipiente em que sobrar algumas bolinhas é o que tinha, inicialmente, uma maior quantidade.

Comente que nesse procedimento está implícito o conceito de correspondência biunívoca: o conjunto de bolinhas retiradas de um recipiente está em correspondência biunívoca com o conjunto de bolinhas retiradas do outro; logo, o número de bolinhas retiradas de cada um é o mesmo.

Para trabalhar com o conteúdo do boxe **Mentes brilhantes**, peça aos estudantes que leiam o texto apresentado, pois ele faz uma ligação com os exercícios resolvidos. Há diversas atividades lúdicas que podem ajudar a introduzir o conceito de demonstração matemática. A seguir, apresentamos um exemplo.

Cada peça de dominó cobre exatamente duas casas adjacentes de tabuleiro de xadrez, podendo ser colocada com um lado paralelo a qualquer lado do tabuleiro. Nessas condições, 32 dominós cobrem totalmente o tabuleiro (que tem 64 casas).

Retirando duas casas diagonalmente opostas do tabuleiro, conforme a figura a seguir, pode-se afirmar que 31 dominós cobrem totalmente essa parte remanescente?



RACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Provavelmente, algum estudante vai tentar resolver esse problema desenhando 31 dominós sobre a figura e, constatando a impossibilidade, vai afirmar que 31 dominós não cobrem essa parte do tabuleiro. Nesse momento, o professor pergunta ao estudante: "Você tentou todas as disposições possíveis? Não é porque a disposição escolhida não cobriu a figura que se pode garantir que não exista uma que a cubra".

Há duas maneiras de resolver esse problema: a primeira é testar, uma a uma, todas as disposições possíveis dos 31 dominós sobre essa parte do tabuleiro até encontrar uma disposição que cubra a figura ou até esgotar todas as disposições possíveis sem encontrar uma que cubra a figura. A segunda maneira é por meio de uma demonstração (uma argumentação lógica) que, apesar de não testar todas as disposições, garanta a possibilidade ou a impossibilidade da cobertura.

Para resolver esse problema por meio de uma demonstração, podemos raciocinar do seguinte modo: cada dominó cobre exatamente uma casa branca e uma preta; portanto, 31 dominós cobririam 31 casas brancas e 31 casas pretas. Como foram retiradas do tabuleiro 2 casas pretas, a parte remanescente ficou com 30 casas pretas e 32 brancas; conclui-se, então, que 31 dominós não cobrem essa parte remanescente do tabuleiro.

Após essa discussão, enfatize que a demonstração matemática é um recurso que prova, de maneira incontestável, se determinada afirmação é verdadeira ou falsa.

Refaça os **exercícios resolvidos 7**, **8** e **9** com a participação dos estudantes. Aqui são apresentadas as primeiras demonstrações desse material.

Explique detalhadamente o significado da implicação ($\Rightarrow$) e o da bi-implicação ($\Leftrightarrow$). Espera-se que, compreendendo esses exercícios, os estudantes incorporem a ideia de demonstração.

Para trabalhar o tópico **Representação decimal finita e representação decimal infinita**, esclareça que existem números que, na representação decimal, só podem ser representados com infinitas casas decimais. E há números que podem ser representados com uma quantidade finita de casas decimais. No primeiro caso, dizemos que o número é uma dízima e, no segundo, dizemos que o número tem representação decimal finita.

Enfatize que os números inteiros têm representação decimal finita, pois, por exemplo, o inteiro 2 pode ser representado por 2,0, portanto, pode ser expresso por um número finito de casas decimais.

Diferencie as dízimas periódicas das dízimas não periódicas. Se achar conveniente, após o **exercício resolvido 10**, mostre como determinar a geratriz de uma dízima periódica composta, por exemplo, 2,544444...

Comente que no estudo das progressões geométricas é apresentada outra maneira de determinar a geratriz de uma dízima periódica.

O **exercício resolvido 11** é fundamental para entender por que uma dízima periódica pode ser um número racional.

O **exercício resolvido 12** auxilia o entendimento de que entre dois números racionais distintos quaisquer há infinitos números racionais. Explique o significado da preposição nesse contexto: sendo a e b dois números, com $a < b$, os números que estão entre a e b são todos aqueles maiores que a e menores que b.

7. O eixo real

Defina eixo de origem O, representando-o na lousa. Afirme que a cada ponto desse eixo é possível associar um único número real e que a cada número real é possível associar um único ponto desse eixo. Pergunte que tipo de associação entre os números reais e os pontos do eixo poderia obedecer a essas condições.

Oriente a discussão de modo que os estudantes concluam que a distância entre cada ponto do eixo e a origem O pode ser usada em uma correspondência que obedece a essas condições, se adotada da maneira indicada a seguir.

- Associamos o número 0 (zero) à origem O.
- A cada ponto A de r, com $A \neq 0$, tal que a semirreta $\overrightarrow{OA}$ tem o mesmo sentido de orientação do eixo, associamos um número positivo x, que indica a distância de A até O, em certa unidade u.
- A cada ponto A', simétrico de A em relação a O, associamos o oposto de x.
- Finalmente, nomeie esse sistema como eixo dos números reais.

Pergunte como determinar exatamente o ponto associado a $\sqrt{2}$ ou a $\sqrt{3}$. Para isso, pode-se trabalhar a construção geométrica desses números.

No tópico **Intervalos reais**, apresente o quadro dos intervalos reais. Para que os estudantes entendam a necessidade da "bolinha vazia" na representação de um extremo aberto de um intervalo, faça perguntas do tipo: "Qual é o menor e o maior número do intervalo [5, 8[?".

Espera-se que eles percebam que o menor número desse intervalo é 5, porém não existe o maior. Assim, conseguimos marcar no eixo real o menor número (5) desse intervalo, mas não conseguimos marcar o maior, pois ele não existe. Daí a necessidade de uma representação como a "bolinha vazia".

Pergunte aos estudantes se o intervalo [4, 7] representa um conjunto finito ou infinito de números. Espera-se que concluam que o intervalo representa um conjunto infinito, pois entre dois números reais distintos quaisquer existem infinitos números reais.

Após essa discussão, enfatize que um intervalo real limitado, inferiormente e superiormente, pode ser infinito.

Aproveite alguns dos **Exercícios complementares** como instrumento de avaliação. Uma maneira é organizar os estudantes em pequenos grupos a fim de que resolvam alguns desses exercícios de maneira colaborativa.

Verifique o que aprendeu no Capítulo 1

Esta seção também pode ser utilizada como um instrumento de autoavaliação. Após resolver as atividades propostas nelas, incentive os estudantes a compartilhar com os colegas as respostas encontradas.

Referências suplementares

MORAIS FILHO, D. C. **Um convite à Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

Nessa obra são apresentadas, detalhadamente, as técnicas de demonstração, além de outros assuntos de interesse para esse capítulo.

PINEDO, C. J. Q. História do número zero, **Revista Tecnologia e Humanismo**. v. 18, n. 26, 2004. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rth/article/view/6206. Acesso em: 18 set. 2024.

Neste artigo, apresenta-se o número zero e sua evolução com o tempo.

CAPÍTULO 2 Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Resolver equações polinomiais do 1º grau e do 2º grau.
- Equacionar problemas do 1º grau e do 2º grau.
- Resolver sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas equações e duas incógnitas pelos métodos da substituição, adição e comparação.
- Fatorar um polinômio do 2º grau com raízes reais.
- Representar uma taxa percentual na forma de fração e na forma de número decimal.
- Resolver problemas sobre porcentagem.
- Diferenciar os conceitos de juro simples e juro composto, comparando suas variações.
- Resolver problemas sobre juros simples e composto.
- Planejar o consumo e o orçamento doméstico.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao longo do capítulo, interpretamos índices e taxas em contextos sociais e econômicos, além de resolver problemas envolvendo a aplicação de diferentes tipos de taxas e índices. Aplicamos os conceitos de juros simples e compostos no planejamento, na execução e na análise de ações práticas com o uso de planilhas, com o objetivo de tomar decisões financeiras mais conscientes e responsáveis. Também interpretamos e comparamos situações que envolvem juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas e por meio de análise de planilhas. Esse trabalho contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT104**, **EM13MAT203** e **EM13MAT303** e das **competências específicas 1**, **2** e **3**.

Ao propor pesquisa e resolver exercícios envolvendo medições de capacidade e massa, contribui-se para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT201** e da **competência específica 2**.

Ao resolver problemas contextualizados envolvendo funções polinomiais de 1º e 2º graus, contribui-se para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** e da **competência específica 2**.

Apresentamos a construção de fluxograma por meio de uma situação envolvendo equação do 2º grau e a construção de um algoritmo por meio de um fluxograma. Esse trabalho contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405**, além das **competências específicas 3** e **4**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

O objetivo do infográfico da **abertura** é mostrar a metodologia adotada pelo IBGE para o cálculo do Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC). A leitura do texto pode ser feita de maneira individual ou coletiva. Pergunte aos estudantes o que sabem sobre o tema e discuta com eles sobre quais produtos são fundamentais na cesta mensal de uma família, refletindo a respeito das características da família que influenciam a composição da cesta (quantidade de pessoas, número de adultos e crianças, renda mensal etc.).

Antes de responder ao boxe **Além da teoria**, peça aos estudantes que analisem os grupos de despesas das famílias com renda até 5 salários mínimos e verifiquem a porcentagem de cada grupo em relação ao total. Depois, pergunte se concordam com os dados do gráfico ou se dariam mais importância a um grupo em detrimento de outro. Por exemplo, se acham que o grupo "Educação" deve ter porcentagem maior que o grupo "Transporte". Os estudantes podem montar um novo gráfico de setores com base na opinião deles e, em seguida, apresentar o gráfico para os demais colegas. Se for possível, convide alguns estudantes para explicarem a decisão que tomaram para montar o novo gráfico. Nesse momento, é importante considerar as dimensões social, emocional, histórica e cultural dos estudantes, uma vez que é provável que tragam experiências familiares ao justificar suas escolhas. Percebendo algum comentário desrespeitoso ou mal-intencionado, interfira, pois é preciso acolher as experiências, promovendo o respeito, a empatia e combate ao *bullying* nessas discussões em razão das vivências compartilhadas.

A abertura possibilita um trabalho interdisciplinar com Geografia e História ao propor uma pesquisa e análise sobre a evolução do índice de inflação ao longo dos anos. Se achar conveniente, peça aos estudantes que pesquisem outros indicadores da economia brasileira para aprofundar o tema.

Se julgar oportuno, o trabalho com o infográfico pode ser expandido e enriquecido com o livro: BRASIL. **Educação Financeira nas Escolas – Ensino Médio**. Ministério da Educação, Brasília, 2013. Disponível em: https://issuu.com/edufinanceiranaescola/docs/livro-aluno-bloco1?e=11624914/49399073. Acesso em: 9 out. 2024.

Se considerar adequado, antes da apresentação do infográfico, estimule uma reflexão, discutindo com os estudantes alguns aspectos fundamentais sobre o tema.

O trabalho com essa abertura favorece o desenvolvimento das **competências gerais 1** e **7** ao possibilitar aos estudantes o entendimento e a análise de como os índices de preços funcionam no país, o que os leva a construir argumentos para explicar a realidade com base em informações e a contribuir com a construção de uma sociedade justa. Além disso, favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT104** e do **TCT Educação Financeira**, uma vez que os estudantes devem utilizar conceitos matemáticos ao tratar da taxa de inflação.

2. Inequações polinomiais do 1º grau

Introduza o assunto com base na situação introdutória desse tópico. Escreva os dados na lousa e peça aos estudantes que determinem a sentença matemática que relaciona esses dados com o número x de convites que devem ser vendidos para que o evento apresente lucro. Oriente-os de modo que obtenham a sentença: $100x > 1.900 + 70x$

Apresente as propriedades das desigualdades aplicadas na resolução de uma inequação. Antes de apresentar a última propriedade, faça perguntas do tipo:

- Observamos que a sentença $5 > 2$ é verdadeira. Se multiplicarmos ambos os membros por -1, como expressar a sentença equivalente obtida? Oriente-os a concluir que a sentença equivalente será $-5 < -2$.
- Observamos que a sentença $-8 < 6$ é verdadeira. Se dividirmos ambos os membros por -2, como expressar a sentença equivalente obtida? Oriente-os a concluir que a sentença equivalente será $4 > -3$.

Após essa discussão, destaque a propriedade: Dividindo ou multiplicando por um mesmo número negativo ambos os membros de uma desigualdade do tipo $>$, $\geqslant$, $<$ ou $\leqslant$, a desigualdade inverte o sentido.

3. Sistemas de equações polinomiais do 1º grau

Com a participação dos estudantes, refaça os **exercícios resolvidos 6** e **7**, enfatizando que, a menos que se especifique o contrário, obedeceremos à ordem alfabética das incógnitas no par ordenado que é solução do sistema.

Pergunte se é possível solucionar o **exercício resolvido 7** por meio de uma única incógnita. Mostre que sim e oriente os estudantes na resolução: indicando por y a quantidade de cédulas de 20 reais, tem-se que a quantidade de cédulas de 10 reais será $73 - y$. Assim, tem-se a equação $20y + 10(73 - y) = 1.200$, da qual se conclui que $y = 47$. Logo, o cliente sacou 47 cédulas de 20 reais.

Comente que os problemas cujos valores desconhecidos se inter-relacionam podem ser resolvidos por meio de uma única incógnita; porém, o raciocínio envolvido pode ser muito complicado. A nomeação de cada valor desconhecido por meio de uma letra facilita significativamente esse raciocínio através da elaboração de um sistema de equações.

4. Equações polinomiais do 2º grau

A mudança de ponto de vista sobre determinado objeto de estudo possibilita novas observações e novas descobertas. Por isso, sempre que possível, devemos adotar essa prática de análise na tentativa de conhecer melhor o objeto.

No **exercício proposto 23**, a resolução de uma equação polinomial do 2º grau utilizando o método geométrico pode ser apresentada da seguinte maneira:

Considere a figura 1, formada por um quadrado de lado medindo x e por quatro retângulos de lados medindo x e 1.

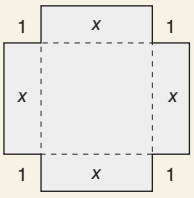


Figura 1

Observe que a área dessa figura é $x^2 + 4x$. Qual deve ser o valor de x para que essa área seja igual a 21?

Para responder a essa pergunta, temos que resolver a equação: $x^2 + 4x = 21$

A resolução dessa equação pode ser feita com o auxílio da Geometria, da maneira que apresentamos a seguir.

Completamos o quadrado de lado $x + 2$ na figura 1, obtendo a figura 2:

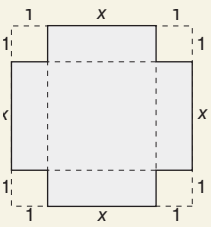


Figura 2

Para que a área da figura 1 seja 21, a área da figura 2 deve ser 25, pois acrescentamos à figura 1 quatro quadrados de área 1, isto é:

Área da figura $2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 21 + 4$

Observando que o primeiro membro dessa igualdade é um trinômio quadrado perfeito, podemos fatorá-lo, obtendo $(x + 2)^2 = 25$.

Assim, temos:

$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 5 - 2 \Rightarrow x = 3$

$x + 2 = -5 \Rightarrow x = -5 - 2 \Rightarrow x = -7$

Como x representa a medida do lado de um quadrado, seu valor não pode ser negativo. Portanto, a resposta que nos interessa é $x = 3$.

A técnica de completar o quadrado utilizada nesse exemplo é estendida para todas as equações que podem ser representadas sob a forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a > 0$. Esse tipo de equação é chamado de **equação do 2º grau**.

Embora nem sempre exista uma representação geométrica para uma equação do 2º grau, pois as duas raízes podem ser negativas, a técnica de completar o quadrado pode ser usada de maneira puramente algébrica.

Exemplo:

Para resolver a equação do 2º grau $x^2 + 4x + 3 = 0$ usando a técnica de completar o quadrado, inicialmente isolamos os termos em x. Observe: $x^2 + 4x = -3$

Em seguida, adicionamos 4 aos dois membros da igualdade para **completar um quadrado perfeito** no primeiro membro: $x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$

Observando que o primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito, podemos fatorá-lo, obtendo $(x + 2)^2 = 1$.

Assim, temos:

$x + 2 = 1 \Rightarrow x = 1 - 2 \Rightarrow x = -1$

$x + 2 = -1 \Rightarrow x = -1 - 2 \Rightarrow x = -3$

Nesse caso, x pode ser qualquer número real. Logo, $x = -1$ ou $x = -3$.

Para estreitar mais a ligação entre o registro algébrico e o geométrico, seria interessante aplicar essa técnica na demonstração da fórmula resolutiva da equação polinomial do 2º grau. Consideremos a equação na incógnita x: $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$. Para resolvê-la, vamos usar a técnica de completar o quadrado. Inicialmente, isolamos os termos em x, obtendo $ax^2 + bx = -c$.

Para facilitar a formação do quadrado perfeito no primeiro membro, dividimos por a ambos os membros: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

Adicionamos $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros, assim, formamos um quadrado perfeito no primeiro membro:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

Temos, então: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Portanto: $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

Ou, ainda: $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

E, finalmente: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

5. Matemática financeira

Ao trabalhar a Matemática financeira, apresentamos diferentes situações envolvendo o cálculo de porcentagens, juro simples e juro composto. Também apresentamos situações com diferentes temáticas como o trabalho do Microempreendedor individual, o sistema Price e o cálculo do Imposto de renda, situações que favorecem o trabalho com os **TCTs Educação Financeira** e **Educação Fiscal**, além de favorecer o trabalho com a habilidade **EM13MAT104** e com a **competência geral 1**.

O boxe **Análise da resolução** explora erros comuns e recorrentes cometidos pelos estudantes. Para isso, os estudantes devem identificar e corrigir um erro cometido propositalmente no

ILUSTRAÇÕES: NEIDE TOYOTA/ARQUIVO DA EDITORA

exercício resolvido. Dessa maneira, estimula-se o levantamento de dúvidas e o posicionamento crítico, favorecendo o desenvolvimento das **competências gerais 2**, **7** e **9**.

Aproveite o momento de conversa com a turma para verificar se algum estudante teve dificuldade para resolver o exercício e incentive os demais a ajudar o colega na solução das dificuldades apontadas.

Como complemento ao trabalho com o **exercício 28**, sugerimos que apresente aos estudantes o **Mapa clicável: Taxas de alfabetização no Brasil**. Esse recurso tem como objetivo fornecer informações sobre as taxas de analfabetismo nas diferentes regiões do país com base nos dados do Censo 2022.

Ao trabalhar o tópico **Juro simples**, discuta o conceito de taxas equivalentes por meio do seguinte exemplo: duas taxas i_1 e i_2, relativas a unidades de tempo diferentes, são equivalentes se aplicadas ao mesmo capital inicial C durante o mesmo período de tempo e produzem juros iguais.

Oriente os estudantes a concluir que o juro simples a uma taxa fixa é diretamente proporcional ao tempo de aplicação. Assim, por exemplo:

- uma taxa i ao mês equivale à taxa $12i$ ao ano;
- uma taxa i ao ano equivale à taxa $\frac{i}{12}$ ao mês.

Sugerimos que o **exercício proposto 37** seja resolvido em grupo, pois é um dos mais importantes dessa série, já que trata de um dos objetivos do nosso estudo, que é a comparação dos preços de um produto à vista e a prazo. Oriente a resolução.

O **exercício proposto 38** também merece destaque, pois compara os rendimentos em dois tipos de aplicação comuns no mercado financeiro, além de tratar pela primeira vez do conceito de imposto de renda o que favorece o trabalho coma a habilidade **EM13MAT104**.

No tópico **Juro composto**, inicialmente, calculamos o juro produzido por um capital inicial C aplicado em regime de juro composto durante t unidades de tempo (dia, mês, ano etc.), às taxas i_1, i_2, i_3, ..., i_t, referentes às unidades de tempo 1, 2, 3, ..., t, respectivamente.

Construa o quadro, da página 69, com a participação dos estudantes. Solicite que façam os cálculos para cada linha.

Conclua, então, a fórmula do montante para as taxas variáveis i_1, i_2, i_3, ..., i_t:

$$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_t)$$

Pergunte aos estudantes como ficaria a fórmula anterior se a taxa fosse constante, isto é, $i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_t = i$. Oriente-os a concluir que $M = C(1 + i)^t$.

Enfatize que:

- para aplicar as fórmulas do montante acumulado a juro composto, as variáveis i e t devem estar relacionadas à mesma unidade de tempo (dia, mês, ano etc.);
- na primeira fórmula, as taxas i que corresponderem a lucro serão positivas, e as que corresponderem a prejuízo serão negativas;
- na indução que fizemos para apresentar a fórmula $M = C(1 + i)^t$, atribuímos ao tempo t apenas valores naturais não nulos; porém essa fórmula pode ser aplicada para qualquer valor real de t, com $t \geqslant 0$;
- para o cálculo do montante M após t reduções sucessivas (desconto ou prejuízo) de um capital C, a uma taxa constante, aplicamos a fórmula $M = C(1 + i)^t$ com taxa negativa.

Encaminhe uma discussão de modo que os estudantes concluam que o juro composto não é diretamente proporcional ao tempo de aplicação. Se achar necessário, justifique por meio de um exemplo.

Observe o montante acumulado pela aplicação de um capital C à taxa de 100% ao ano:

- ao final de 1 ano, teríamos: $M_1 = C(1 + 1)^1 = 2C$, logo, o juro seria igual a C;
- ao final de 2 anos, teríamos: $M_2 = C(1 + 1)^2 = 4C$, logo, o juro seria igual a $3C$;
- ao final de 3 anos, teríamos: $M_3 = C(1 + 1)^3 = 8C$, logo, o juro seria igual a $7C$.

Assim, concluímos que o juro composto a uma taxa fixa não é diretamente proporcional ao tempo.

Pergunte: "Como calcular a taxa mensal i equivalente à taxa anual de 12% em regime de juro composto?". Para esse cálculo, admitimos que um capital C acumule, durante um ano, o mesmo montante M à taxa de 12% ao ano ou à taxa i ao mês, isto é:

$$C(1 + 0{,}12)^1 = C(1 + i)^{12}$$

Da qual deduzimos que:

$$i = \sqrt[12]{1{,}12} - 1 \Rightarrow i \approx 0{,}95\%$$

Concluímos, assim, que, em regime de juro composto, a taxa anual de 12% equivale à taxa mensal de 0,95%, aproximadamente.

No boxe **Conectado**, os estudantes terão a oportunidade de compreender e utilizar tecnologias digitais de informação, de forma crítica, significativa e reflexiva para resolver problemas. Nesse momento, eles irão explorar o uso de planilha eletrônica para cálculo e análise de juro composto. Ao trabalhar com esse recurso, incentive os estudantes a interpretar as informações que estão sendo inseridas e a analisar o resultado obtido. Caso perceba algum estudante com dificuldade, oriente-o de acordo com sua necessidade e, se necessário, retome o conteúdo estudado. O trabalho apresentado favorece o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT203** e da **competência geral 5**.

No boxe **Reflexão** apresentado logo após o **exercício resolvido 22**, comente com os estudantes que o juro composto a uma taxa fixa não é diretamente proporcional ao tempo de aplicação. Vamos justificar isso por meio de um exemplo.

Suponha que um capital inicial de R$ 100,00 seja aplicado durante 2 anos, em regime de juro composto, à taxa fixa anual de 10%.

- Ao final do primeiro ano de aplicação, o montante M_1 e o juro j_1, em real, são dados por:

$$M_1 = 100 \cdot (1 + 0{,}1)^1 = 110$$
$$j_1 = 110 - 100 = 10$$

- Ao final do segundo ano de aplicação, o montante M_2 e o juro j_2, em real, são dados por:

$$M_2 = 100 \cdot (1 + 0{,}1)^2 = 121$$
$$j_2 = 121 - 100 = 21$$

Assim, observamos que, em um ano de aplicação, o juro produzido foi de 10 reais e, em dois anos de aplicação, o juro foi de 21 reais, e, como $\frac{10}{1} \neq \frac{21}{2}$, concluímos que o juro composto a uma taxa fixa não é diretamente proporcional ao tempo de aplicação.

Ao trabalhar o boxe **Mentes brilhantes**, peça aos estudantes que leiam o texto apresentado nesse boxe. Ele trata de um

trecho de um estudo do ponto de vista da Etnomatemática e apresenta uma relação entre a Matemática e uma situação do cotidiano: feira livre.

Proponha uma discussão inicial perguntando se eles já visitaram uma feira e como observam o uso da Matemática nesse contexto. Destaque a presença da Matemática nas transações comerciais, desde o cálculo de preços até a medição de produtos por quantidades não padronizadas, como "bacia" ou "litro". Isso ajudará os estudantes a compreender que, além das fórmulas e teorias, a Matemática está presente em práticas comuns e informais. Além da leitura do artigo **Etnomatemática na feira: estimando o lucro com unidades de medidas locais**, cujo trecho apresentamos neste boxe, também sugerimos a leitura do artigo **Moeda solidária: a Matemática em uma feira de trocas**, de Loraci Maria Birck e Carmen Teresa Kaiber. Disponível em: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1189. Acesso em: 28 set. 2024. Nesse artigo, as autoras relatam um projeto realizado com estudantes, promovendo a criação de uma moeda solidária para uso em uma feira de trocas.

No **exercício complementar 8** abordamos a temática de violência de gênero. Comente com os estudantes que os casos de violência contra a mulher vêm aumentando no Brasil. Suas manifestações envolvem assédio sexual e moral, exploração sexual, estupro, feminicídio, abuso físico, patrimonial, psicológico, entre outras formas de violência. Propor aos estudantes discussões sobre essas questões torna a escola mais inclusiva, na medida em que leva essas reflexões para além dos portões da escola, para a família dos estudantes e para a comunidade em que vivem. Muitas pessoas não têm sequer noção de que sofrem algum tipo de violência ou de abuso, pois algumas situações, de tão frequentes não são questionadas pela sociedade e por isso, são consideradas normais. Cabe ao professor desenvolver uma cultura de desconstrução desses padrões nocivos de comportamento, nomeando qualquer tipo de violência de gênero como inaceitável, dentro ou fora da escola.

O **exercício complementar 10** pede aos estudantes que construam planilhas eletrônicas para calcular juros simples e compostos. Auxilie os estudantes na construção. Caso não tenha acesso, ajude-os construindo juntos uma planilha com o auxílio de uma calculadora. Essa atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT303.**

O **exercício complementar 12** favorece o desenvolvimento do **TCT Educação para o Consumo**, uma vez que os estudantes refletem sobre hábitos de consumo. Após esse exercício, proponha aos estudantes o ***Podcast*: Consumo e moda**. Esse recurso tem como objetivo promover um consumo mais consciente e sustentável de roupas. Ele é acompanhado de sua transcrição, com o objetivo de atender estudantes e professores com deficiências auditivas. Se considerar adequado, após o uso deste recurso, converse com os estudantes sobre consumo e consumismo e sobre as reflexões que devemos fazer sobre essa temática. Para saber mais, sugerimos a leitura do livro eletrônico **Economia circular e consumo sustentável**, de Isabel Lausanne Fontgalland. Disponível em: https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/701677/2/EconomiaCircularConsumoSustentavel.pdf. Acesso em: 28 set. 2024.

CAPÍTULO 3 Geometria plana: triângulos e proporcionalidade

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Reconhecer e nomear os polígonos, identificando lado, vértice, diagonal, ângulo interno e ângulo externo.
- Definir polígono convexo, não convexo e regular.
- Classificar os triângulos, identificando altura, mediana, bissetriz e mediatriz.
- Resolver problemas aplicando o teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e/ou o teorema do ângulo externo.
- Calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo e a medida de cada ângulo interno de um polígono regular.
- Resolver problemas mediante as propriedades do triângulo isósceles, do triângulo equilátero e do triângulo retângulo, por meio do teorema de Tales e das relações métricas do triângulo retângulo.
- Identificar triângulos semelhantes, aplicando suas propriedades na resolução de problemas.
- Calcular a medida da diagonal de um quadrado e da altura de um triângulo equilátero.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Ao longo do capítulo, abordamos as noções de congruência e semelhança de triângulos, propondo situações que envolvem as relações métricas para resolver e elaborar problemas, em variados contextos. Esse trabalho contribui para o desenvolvimento **competência específica 3** e habilidade **EM13MAT308**.

Também é apresentado a teoria da pavimentação do plano, favorecendo o trabalho com a **competência específica 5** e a habilidade **EM13MAT505**. E ao propor aos estudantes a elaboração de uma planta baixa, de um local da escola, favorecemos o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT201** e da **competência específica 2**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

O tema apresentado na **abertura** possibilita o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, mais especificamente com o professor do componente curricular História. Se possível, promova uma discussão com a participação do professor dessa área.

Incentive os estudantes a refletir sobre as duas versões que Tales pode ter utilizado para determinar a medida da altura da pirâmide Quéops. Uma das versões estabelece relação entre ele e a pirâmide, e a outra trata da semelhança de triângulos, utilizando uma vareta, a sombra dela e a sombra da pirâmide. Ao apresentar essas duas versões, os estudantes estudam métodos utilizados na Antiguidade, favorecendo, assim, o trabalho com a **competência geral 1** e com a **competência geral 2**.

2. Polígonos

Comente com os estudantes que é possível definir polígono como uma linha poligonal fechada; porém, por coerência com a definição de poliedro, optamos por definir polígono como

uma superfície plana em vez de uma linha. Consequentemente, consideramos um ângulo como uma superfície, e não como a reunião de duas semirretas de mesma origem.

Se julgar conveniente, pergunte aos estudantes: "Quantas diagonais tem um triângulo?"; "Quantas diagonais tem um quadrilátero?"; "Quantas diagonais tem um pentágono?".

Conduza a discussão ao cálculo do número d de diagonais de um polígono: $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

No tópico **Polígonos convexos,** se julgar conveniente, apresente outra definição de polígono convexo: "Um polígono P é convexo se, e somente se, dois pontos quaisquer de P são extremidades de um segmento de reta contido em P". Nos exemplos de polígono convexo e de polígono não convexo, peça aos estudantes que constatem a convexidade e a não convexidade por meio dessa definição. Conclua, então, que essa definição é equivalente à apresentada no livro do estudante.

3. Triângulos

Esse é um bom momento para comentar a condição de existência de um triângulo. Para isso, mostre 3 varetas de comprimentos 30 cm, 15 cm e 9 cm, perguntando se elas podem ser lados de um triângulo. Convide alguns estudantes a tentar a formação. Espera-se que concluam que é impossível formar um triângulo com essas medidas. Pergunte, então, qual é a condição para que 3 segmentos de reta possam ser lados de um triângulo. Após a discussão conclua: três segmentos de reta podem ser lados de um triângulo se, e somente se, a medida de cada um deles for menor que a soma das medidas dos outros dois. Se achar conveniente, resuma essa condição: três segmentos de reta de medidas a, b e c podem ser lados de um triângulo se, e somente se, $|b - c| < a < b + c$. Explique que a expressão $|b - c|$, que se lê módulo de b menos c, representa a diferença não negativa entre b e c.

No tópico **Ângulos em um triângulo**, antes de demonstrar o teorema da soma das medidas dos ângulos internos e o teorema do ângulo externo de um triângulo, peça aos estudantes que façam a seguinte experiência: desenhem em uma folha avulsa um triângulo qualquer, traçando, em seu interior, arcos de mesmo raio centrados nos vértices do triângulo. Depois, recortem o triângulo e seus ângulos, dispondo-os adjacentemente.

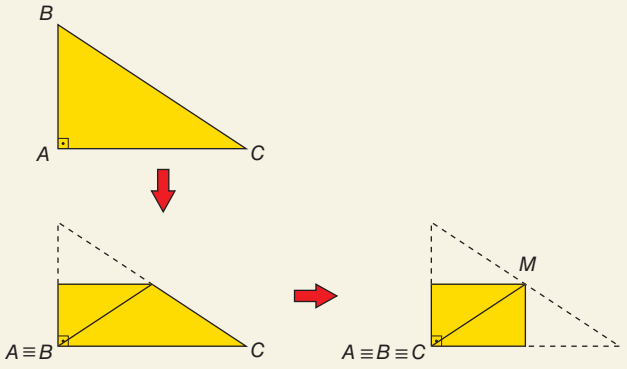
A atividade proposta no boxe **Conectado** é uma oportunidade para os estudantes explorarem um *software* de Geometria Dinâmica, estimulando o contato com as tecnologias da informação e comunicação, que pode ajudar no aprendizado de propriedades e conceitos que serão estudados em Geometria. Oriente-os a explorar as ferramentas disponíveis no menu antes de realizar as atividades propostas. Caso não tenham acesso ao *software*, a atividade poderá ser realizada com o uso de régua e compasso. Essa atividade também pode ser adaptada, caso necessário, para o uso de materiais concretos, auxiliando estudantes com deficiência visual. Para isso, sugerimos a leitura da dissertação de mestrado de Lívia Azelman de Faria Abreu, **Geometria para deficiente visual: uma proposta de ensino utilizando materiais concretos**. Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/26062014Livia-Azelman-de-Faria-Abreu.pdf. Acesso em: 28 set. 2024.

4. Propriedades dos triângulos

Antes de apresentar as propriedades do triângulo isósceles, peça aos estudantes que façam a seguinte experiência: desenhe um triângulo isósceles ABC qualquer em uma folha avulsa e recorte-o. Depois, dobre-o, em torno de um vinco, de modo que os vértices B e C da base coincidam.

Indicando por $\overline{AM}$ o vinco em torno do qual foi feita a dobra para que B coincidisse com C, responda às seguintes perguntas: "Que relação existe entre os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$? Por quê? (Os ângulos da base de um triângulo isósceles podem ser sobrepostos ponto a ponto, logo, são congruentes.)"; "Que relação existe entre os segmentos $\overline{MB}$ e $\overline{MC}$? Por quê? (Os segmentos $\overline{MB}$ e $\overline{MC}$ podem ser sobrepostos ponto a ponto; logo, são congruentes. Assim, M é ponto médio da base $\overline{BC}$ do triângulo isósceles, logo, $\overline{AM}$ é mediana relativa a essa base)"; "Que relação existe entre os ângulos $A\hat{M}B$ e $A\hat{M}C$? Por quê? (Esses ângulos podem coincidir ponto a ponto; logo, são congruentes. Assim, a mediana relativa à base do triângulo isósceles coincide com a bissetriz do ângulo do vértice desse triângulo)"; "Qual é a medida de cada um dos ângulos $A\hat{M}B$ e $A\hat{M}C$? Por quê? (Por coincidirem, ponto a ponto, os ângulos $A\hat{M}B$ e $A\hat{M}C$ são congruentes. Como a soma de suas medidas é 180°, concluímos que cada um deles mede 90°. Assim, a mediana $\overline{AM}$ coincide com a altura relativa à base $\overline{BC}$ do triângulo isósceles e está contida na mediatriz dessa base)".

As dobraduras são muito úteis para constatar propriedades das figuras planas. Por exemplo, a propriedade da mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo pode ser verificada por meio da seguinte experiência com dobraduras: peça aos estudantes que recortem um triângulo retângulo qualquer em uma folha avulsa, nomeando o vértice do ângulo reto por A e os demais por B e C. Depois, solicite-lhes que executem duas dobras: a primeira fazendo coincidir os vértices A e B; a segunda, fazendo coincidir os vértices A, B e C, nomeando por M o ponto onde foi dobrada a hipotenusa.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Encaminhe a discussão de modo que eles percebam que, após a última dobra, $\overline{BM}$ e $\overline{CM}$ coincidem com $\overline{AM}$. Assim, conclui-se que M é ponto médio da hipotenusa; logo, $\overline{AM}$ é mediana relativa à hipotenusa e mede metade da hipotenusa.

Para essas atividades propostas, adapte os materiais utilizados conforme as necessidades dos estudantes. Em alguns momentos, o uso de materiais com texturas diferentes podem ajudar nas percepções.

8. Relações métricas no triângulo retângulo

Para trabalhar com o conteúdo do boxe **Mentes brilhantes**, peça aos estudantes que leiam o texto, pois ele apresenta outra demonstração do teorema de Pitágoras. Aproveite este momento e proponha aos estudantes que assistam o **Vídeo: Pitágoras**. Este recurso apresenta informações sobre Pitágoras e suas descobertas. Além disso, apresenta uma demonstração de

teorema que leva o seu nome. Como forma de acessibilidade, este vídeo é legendado e apresenta janela de Libras.

Matemática sem fronteiras

A seção **Matemática sem fronteiras**, da página 105, aborda a teoria da pavimentação, que é o estudo matemático do recobrimento de um plano usando figuras geométricas, especialmente polígonos. O texto explica o conceito de pavimentação, introduz as condições necessárias para que um conjunto de polígonos cubra completamente um plano sem sobreposições, e menciona a contribuição de Johannes Kepler para esse campo incluindo seu teorema sobre a pavimentação com polígonos regulares. Ao pesquisar sobre tesselação na arte e no artesanato e fazer uma produção artística utilizando essa técnica, é favorecido o desenvolvimento da **competência geral 3** e da habilidade **EM13MAT505**.

A outra seção **Matemática sem fronteiras**, da página 108, explora a etnocartografia, ou cartografia social, destacando de que forma os povos tradicionais (indígenas, quilombolas e seringueiros) utilizam a representação espacial para transmitir seus conhecimentos sobre o território e a vida comunitária. Além disso, são propostas atividades práticas que incentivam os estudantes a explorar mapas produzidos por esses povos e a criar suas próprias representações de locais, promovendo a compreensão da importância cultural e prática da cartografia social e do uso da escala em diferentes contextos. O tema dessa seção favorece o desenvolvimento da **competência geral 1**, ao promover o desenvolvimento do conhecimento sobre diferentes formas de representação do espaço e a valorização dos saberes tradicionais; da **competência geral 2**, ao incentivar o uso do pensamento crítico ao interpretar mapas e compreender a importância das informações apresentadas, além de estimular a criatividade na elaboração de mapas sociais próprios; da **competência geral 4**, ao propor a criação de apresentações sobre mapas tradicionais e a troca de informações em grupo; da **competência geral 5**, ao propor uma pesquisa sobre mapas tradicionais na internet e o uso de tecnologias digitais para a representação espacial; da **competência geral 6**, ao propor atividades em grupo e a discussão sobre o uso de plantas baixas em reformas; da **competência geral 7**, ao estimular os estudantes a construir argumentos, justificar suas escolhas e refletir sobre as informações presentes nos mapas; e da **competência geral 10**, ao valorizar o conhecimento dos povos tradicionais e promover o respeito às culturas locais.

Além disso, esse tema favorece o desenvolvimento do **TCT Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** e da habilidade **EM13MAT201**.

Verifique o que aprendeu no Capítulo 3

Esta seção pode ser utilizada como um instrumento de autoavaliação. Após resolver as atividades propostas nelas, incentive os estudantes a compartilhar com os colegas as respostas. A sugestão de elaboração de um mapa conceitual tem como objetivo apresentar aos estudantes diferentes recursos de organização do pensamento e do conhecimento. Incentive-os a compartilhar suas construções e ajude-os a identificar a ausência de algum conteúdo que considerar importante.

Referências suplementares

ÁVILA, Geraldo. **Eudoxo, Dedekind, números reais e ensino de Matemática**. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm7.pdf. Acesso em: 18 set. 2024.

O artigo indicado apresenta a demonstração completa do teorema de Tales para segmentos de reta comensuráveis e segmentos incomensuráveis.

GEOGEBRA. **Congruência de triângulos**. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/hsXHDRX7#material/fBy4dZmC. Acesso em: 18 set. 2024.

Nessa indicação, são apresentadas orientações sobre o ensino da Geometria plana usando um *software* de construção de gráficos.

CAPÍTULO 4 Circunferência, círculo e área de figuras planas

Objetivos específicos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Reconhecer e nomear os elementos da circunferência e do círculo.
- Aplicar as propriedades dos triângulos nas relações entre medidas lineares e angulares referentes à circunferência e ao círculo.
- Reconhecer as posições relativas entre reta e circunferência e entre circunferências.
- Relacionar a medida de um arco de circunferência com a de um ângulo central, inscrito ou de segmento.
- Calcular o comprimento de uma circunferência em função da medida do raio, com aplicações a situações do cotidiano.
- Trabalhar com conversões de unidades de medida de área.
- Calcular a área de alguns polígonos, com destaque ao triângulo equilátero e ao hexágono regular.
- Calcular a área do círculo e de suas partes.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Nesse capítulo, exploramos o cálculo de áreas de figuras planas, empregando diferentes métodos. Deduzimos expressões de cálculo para aplicar em situações reais e que serão usadas para a resolução de diferentes problemas, favorecendo o trabalho com as habilidades **EM13MAT201** e **EM13MAT307**, além das **competências específicas 2** e **3**.

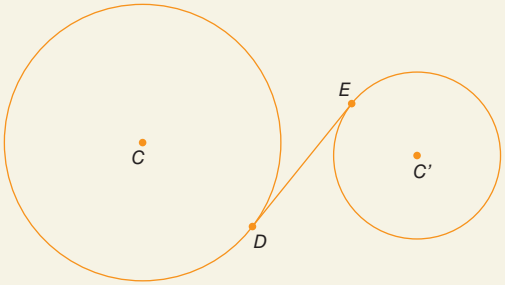
Também exploramos a relação entre unidades de medida de área, incluindo a unidade *pixel* por centímetro quadrado. Desse modo, favorecemos o trabalho com a **competência específica 1** e a habilidade **EM13MAT103**.

No boxe **Conectado**, da página 118, apresentamos uma proposta de atividade que organiza a resolução de um problema utilizando a estrutura de um algoritmo, o que favorece o trabalho com a habilidade **EM13MAT405** e com a **competência específica 4**.

Sugestão de encaminhamento dos conteúdos

2. Posições relativas envolvendo a circunferência

Se achar conveniente, proponha um exercício sobre tangente comum interior. Por exemplo: na figura, as circunferências de centro C e C' têm raios de 5 cm e 3 cm, respectivamente, e o segmento $\overline{DE}$ mede 6 cm e é tangente a ambas nos pontos D e E. Calcule a distância entre os centros C e C'. (10 cm)



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão: Construa o triângulo PCC', em que P é o ponto de encontro da reta $\overleftrightarrow{CD}$ com a reta que passa por C' e é paralela a $\overline{DE}$.

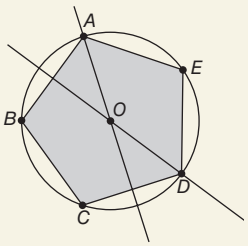
4. Perímetro da circunferência

Para orientar a atividade proposta no boxe **Reflexão,** explique que as ciências experimentais dependem, em grande parte, de medições. Porém as medições diretas, realizadas com instrumentos (régua graduada, paquímetro, transferidor, termômetro, altímetro, voltímetro, dinamômetro etc.), apresentam, inevitavelmente, imprecisões. Por exemplo, ao medir o comprimento de uma fita com uma régua graduada apenas em centímetro, haverá imprecisão na casa dos milímetros; se a régua for graduada em centímetro e milímetro, haverá imprecisão na casa dos décimos de milímetro, e assim por diante.

No boxe **Conectado**, apresentamos uma proposta de construções geométricas com o uso de um *software*, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 5**.

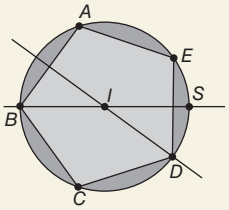
No item **a,** se necessário, retome o conceito da mediatriz como lugar geométrico. Oriente os estudantes de que o ponto O é o ponto de encontro das mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

No item **b**, o ponto O, que é o centro do polígono regular e da circunferência circunscrita (que passa pelos vértices) ao polígono, é o ponto de encontro das mediatrizes dos lados desse polígono. Oriente os estudantes que bastam duas mediatrizes para determinar o ponto O.



Dica: Para construir a circunferência circunscrita, utilize a ferramenta *Círculo dados centro e um dos seus pontos*, clicando no centro O e em um dos vértices do polígono.

Se necessário, retome o conceito de bissetriz como lugar geométrico. Oriente estudantes a perceber que o centro I da circunferência inscrita ao polígono é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos do polígono.



Dica: Determinar o ponto S, encontro de uma das bissetrizes com o lado do polígono oposto ao ângulo da bissetriz, e construir a circunferência inscrita ao polígono de centro I e que passa por S.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

6. Cálculo da área de algumas figuras planas

O **exercício proposto 27** e o boxe **Trabalho e juventudes** exploram a temática grafite. No exercício, foi apresentado um mural feito por uma artista indígena. Aproveite para explorar as características da obra retratada e a descrição apresentada pela artista. Proponha aos estudantes que pesquisem sobre outros artistas indígenas e suas obras. Já o boxe **Trabalho e juventudes** explora o grafiteiro como profissão. Aproveite para mostrar como uma arte inicialmente marginalizada tem destacado grandes artistas brasileiros reconhecidos internacionalmente. Ao explorar esse boxe, apresente o **Carrossel de imagens: A arte do grafite**, que conta um pouco da história desse movimento.

Pode-se também aproveitar esse momento para propor um trabalho interdisciplinar com Arte ao trabalhar a criação de um grafite com tema geométrico. Para isso, faça a leitura do texto do boxe e, depois, converse um pouco sobre os temas matemáticos que podem ser aplicados, como características das figuras geométricas, simetria, escala e proporção. Depois, oriente os estudantes a escolher os materiais adequados e a fazer um esboço inicial do seu desenho incorporando os conceitos matemáticos. Depois, devem transferir o desenho em um papelão ou painel, finalizando com as técnicas de pintura do grafite. Ajude-os a organizar uma exposição com os grafites confeccionados. Ao trabalhar com essas propostas, contribuímos para o desenvolvimento das **competências gerais 3**, **4** e **6,** com os **TCTs Diversidade Cultural** e **Trabalho**, com a **competência específica 6** de Linguagens e suas Tecnologias e com a habilidade **EM13LGG603**.

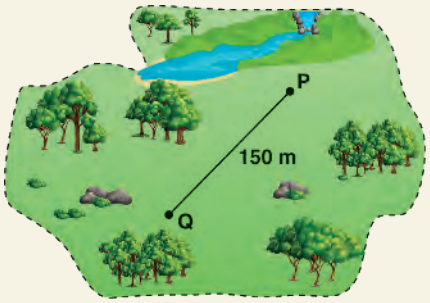
No boxe **Mentes brilhantes**, apresentamos dois documentos importantes para a área de História da Matemática Egípcia. Para saber mais, sugerimos o vídeo **A matemática no antigo Egito**, do canal *Profmat*, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=bPGUGdaBPWE. Acesso em: 20 set. 2024.

Matemática sem fronteiras

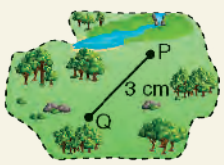
Nessa seção, exploramos processos de elaboração de um mapa, favorecendo o trabalho interdisciplinar com Geografia. Sugerimos que oriente os estudantes a ler o texto e a resolver, em grupos, a atividade.

Para enriquecer essa seção, recomendamos o exercício a seguir como aplicação da propriedade empregada no texto.

1. Trabalhando no mapeamento de uma região plana, um topógrafo fotografou-a de um avião, constatando que a imagem dessa região, na foto, tem 18 cm². A seguir, mediu a distância entre dois pontos P e Q da região e a distância entre as respectivas imagens P' e Q' desses pontos na foto, obtendo $PQ = 150$ m e $P'Q' = 3$ cm, conforme mostra o esquema a seguir. Qual é a área da região fotografada? (45.000 m²)



região



foto

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Verifique o que aprendeu no Capítulo 4

Se considerar adequado, peça aos estudantes que se reúnam em duplas para resolver as atividades propostas nessa seção, anotando as dúvidas que possam surgir durante a resolução. Depois, marque um dia para que as diferentes duplas apresentem as dúvidas e resolva uma por uma com a ajuda de todos. O trabalho coletivo é um bom momento para contribuir para o desenvolvimento da **competência geral 10**, pois permite a troca de experiências para agir coletivamente com respeito e atenção ao colega.

CAPÍTULO 5 A linguagem das funções

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Discorrer sobre os conceitos de função, domínio, contradomínio e conjunto imagem.
- Diferenciar relações que são funções das que não são.
- Representar uma função de diversos modos.
- Determinar a imagem de um elemento x do domínio de uma função por meio de uma tabela, do gráfico ou da lei de associação.
- Determinar o domínio de uma função representada apenas pela lei de associação.
- Determinar as eventuais raízes de uma função e interpretá-las graficamente.
- Classificar uma função como crescente, decrescente ou constante em determinado intervalo do domínio.
- Interpretar a taxa média de variação de uma função em situações práticas.
- Determinar a lei de associação da inversa de uma dada função.
- Interpretar tabelas e gráficos estatísticos.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Neste capítulo iniciamos o estudo de função e o estudo de gráficos estatísticos. Nas situações propostas apresentamos o estudo envolvendo diferentes grandezas e taxas de diferentes naturezas. Também propomos atividades que envolvem o uso de tecnologias digitais. Esse trabalho favorece o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT104** e **EM13MAT314**, além das **competências específicas 1** e **3**. Ao explorar a simetria em gráficos de funções contribuímos para o trabalho com a habilidade **EM13MAT105**.

Alguns conteúdos deste capítulo proporcionam noções do comportamento do gráfico de diversas funções. Particularmente, com uso de tecnologia, os estudantes explorarão o comportamento do gráfico da função $f(x) = -\frac{1}{x}$ e, por meio de análise gráfica (com base em conjunto limitado de pontos do domínio de f), poderão investigar o comportamento de duas variáveis numéricas. Além disso, é apresentada uma situação com um algoritmo para determinar o valor numérico de uma função. Essas propostas contribuem para o trabalho com as habilidades **EM13MAT405** e **EM13MAT510**, além das **competências específicas 4** e **5**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

O infográfico apresentado na **abertura** possibilita o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Podem ser explorados os conceitos de pressão atmosférica, composição do ar, molécula de gás nitrogênio, molécula de gás oxigênio e ponto de ebulição. Além disso, é possível abordar as causas e as consequências da desidratação e os cuidados com a saúde ao visitar regiões situadas em altitudes elevadas abordando aspectos do **TCT Saúde**.

2. O conceito de função

Aborde o conceito de função, inicialmente, por meio de situações que auxiliem os estudantes a assimilar a ideia de variável, por exemplo:

- O valor da conta mensal de água paga por um usuário depende de quê? (Do volume de água consumido.)
- A variação do comprimento da coluna de álcool em um termômetro depende de quê? (Da temperatura.)
- O tempo que um carro demora para percorrer determinada distância depende de quê? (Da velocidade.)

Comente que um objetivo desse capítulo é estudar essas relações de dependência e explique a respeito da linguagem que será utilizada: "uma variável y é dada em função de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponder um único valor de y".

Saliente que a condição que estabelece a correspondência entre os valores de x e y é chamada de lei de associação ou, simplesmente, lei entre x e y.

Caso tenha necessidades, o uso de materiais manipuláveis pode auxiliar o ensino de funções. Como fonte de pesquisa para adaptação de materiais para o ensino de funções, sugerimos o artigo **O ensino de funções para alunos deficientes visuais**, disponível em: https://revistas.ufpel.edu.br/index.php/prociencias/article/download/80/66/. Acesso em: 28 set. 2024.

Ao responder ao item **a** do **exercício proposto 10**, os estudantes podem escolher um dos componentes nutricionais do alimento, por exemplo, os açúcares, e determinar a quantidade por colher de sopa (unidade de medida indicada no quadro de informação nutricional). Como a quantidade de 18 g de açúcares é referente a 2 colheres de sopa, a cada colher de sopa do alimento correspondem 9 g de açúcar. Assim, uma função que pode ser estabelecida é $f(x) = 9x$, em que x é a quantidade de alimento, medida em colheres de sopa, e $f(x)$ é a quantidade de açúcar, medida em grama. Esse exercício pode ser ampliado a fim de realizar um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias abordando o **TCT Educação Alimentar e Nutricional**. Converse com os estudantes acerca dos hábitos alimentares e da importância de dar preferência a alimentos não processados e evitar os ultraprocessados. Eles podem aprofundar a pesquisa consultando o **Guia alimentar para a população brasileira**, disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/saude-brasil/publicacoes-para-promocao-a-saude/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf/view. Acesso em: 28 set. 2024.

3. Representação de uma função

Explore o exemplo introdutório com perguntas do tipo:

- Qual era a temperatura na colônia no instante 6 h dessa experiência? (4 °C)

- Em que instantes dessa experiência a temperatura na colônia era de 1 °C? (7 h e 9 h)
- Essa relação representa uma função de A em B? Por quê? (Sim, pois a cada instante do conjunto A está associada uma única temperatura no conjunto B.)

A partir do exemplo, explique a notação $f: A \to B$. Nomeie os conjuntos A, B e $\{4, 1, 0\}$ do exemplo introdutório como domínio, contradomínio e conjunto imagem da função f, respectivamente. Enfatize que o conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio.

A abordagem contextualizada das representações de uma função associa o elemento matemático a aplicações científicas no estudo de microrganismos, momento favorável ao trabalho interdisciplinar com Ciências da Natureza e suas Tecnologias associado ao **TCT Saúde**. Os estudantes podem fazer uma pesquisa a respeito da descoberta da penicilina e sua importância para os avanços na medicina no que diz respeito ao combate e ao tratamento de infecções.

9. Gráficos estatísticos

No tópico **Gráfico de colunas (ou gráfico de barras verticais)**, apresente os gráficos de colunas, simples e agrupadas, dos exemplos, discutindo com os estudantes a interpretação de cada um.

Comente que o gráfico de colunas simples é recomendado quando se pretende comparar classes individualmente, e o de colunas agrupadas, quando o objetivo é comparar grupos de classes.

Em relação ao gráfico de colunas simples, oriente a discussão com perguntas do tipo:

- Qual era o salário mínimo no Brasil em 2019? (R$ 998,00)
- Em 2022, qual foi o aumento do salário mínimo, em real, em relação a 2021? (R$ 112,00)

No boxe **Reflexão**, página 174, comente com os estudantes que o IDHM Cor utiliza alguns indicadores que auxiliam a identificar e quantificar desigualdades estruturais existentes em uma sociedade, promovendo a equidade e a justiça social, garantindo que todos os grupos tenham as mesmas oportunidades de alcançar uma vida longa, saudável e próspera.

No tópico **Gráfico de linha,** apresente esse tipo de gráfico, destacando que:

- Apenas os pontos (extremos dos segmentos de reta) oferecem informações sobre os dados descritos. As demais partes da linha são apenas auxiliares.
- Esse tipo de gráfico é recomendado para representar valores de uma variável ao longo do tempo, mas pode ser usado em qualquer outra situação em que os dados numéricos possam ser ordenados no eixo horizontal.

Discuta com os estudantes a interpretação de cada gráfico de linhas dos exemplos.

Em relação ao gráfico sobre a cotação diária do dólar, oriente a discussão com perguntas do tipo:

- Qual foi a cotação de fechamento, em real, do dólar americano em 21 de junho de 2024? (R$ 5,4416)
- No período de 19 a 23 de junho de 2024, qual foi a maior cotação de fechamento, em real, do dólar americano? (R$ 5,4647)

Descreva a técnica para a construção desse tipo de gráfico. Se possível, oriente a construção do gráfico em uma planilha eletrônica.

No tópico **Gráfico de setores (gráfico de *pizza*)**, apresente esse tipo de gráfico, destacando que:

- As medidas dos ângulos centrais dos setores são proporcionais aos respectivos valores da variável representados pelos setores.
- Esse tipo de gráfico só pode ser utilizado quando a reunião dos setores constituir o todo (100%) que se quer representar.

Discuta com os estudantes a interpretação do gráfico de setores *Percentual estimado de energias na matriz energética brasileira em 2030* apresentado no livro. Oriente a discussão, se possível relacione com o **ODS 7**, com perguntas do tipo:

- Entre as fontes de energias renováveis na matriz energética brasileira, qual apresenta o maior percentual estimado de participação em 2030? (Produtos de petróleo e derivados)
- Qual é a participação percentual estimada de lenha e carvão vegetal na matriz energética brasileira em 2030? (7%)

No **exercício proposto 65**, apresentamos a temática racismo ambiental. Se considerar adequado, converse sobre o **ODS 10** e apresente ao estudante o vídeo **O que é racismo ambiental e como combatê-lo?**, da TV Senado, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=akL5pjbA7Kc&t=1s. Acesso em: 28 set. 2024.

No **exercício complementar 23**, trabalhamos com a temática *bullying*. Proponha aos estudantes o ***Podcast*: *Bullying* e *cyberbullying*** e após o acesso, promova uma roda de conversa sobre a temática. Conversas sobre essa temática devem ser retomadas sempre que houver necessidade.

Referência suplementar

MOGILKA, M. **O uso de planilha eletrônica no estudo das funções e equações polinomiais**. 2016. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.

Nesse trabalho, o autor apresenta a utilização das tecnologias no ensino dando foco nas planilhas eletrônicas por ser uma tecnologia mais acessível em relação a outros *softwares*.

CAPÍTULO 6 Função polinomial do 1º grau ou função afim

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Construir o gráfico de uma função afim.
- Obter a lei de associação de uma função afim a partir do gráfico.
- Reconhecer uma função afim em situações do dia a dia.
- Discorrer sobre o conceito de função linear.
- Discorrer sobre a proporcionalidade em funções polinomiais do 1º grau (nas funções lineares, $y = ax$, a proporcionalidade ocorre entre as variáveis x e y e, também, entre as variações Δy e Δx; nas funções afins $y = ax + b$, com $b \neq 0$, a proporcionalidade ocorre apenas entre as variações Δy e Δx).
- Usar *software* de construção de gráficos no estudo das funções polinomiais do 1º grau.

- Construir o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença.
- Estudar a variação de sinal de uma função afim.
- Resolver inequações-produto e quociente.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Nesse capítulo, são exploradas diferentes situações que envolvem a variação de grandezas, como a variação da medida de temperatura no **exercício proposto 4**, a variação de pressão e profundidade no **exercício proposto 6**, a relação entre a jornada de trabalho ao longo do tempo no **exercício complementar 2** e a variação do imposto de renda no **exercício complementar 8**. Ao explorar a variação dessas grandezas e a relação com representações gráficas, analisando criticamente essas variações, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 1** e da habilidade **EM13MAT101**. Já a habilidade **EM13MAT105** foi trabalhada no boxe **Conectado** ao solicitar aos estudantes que construam gráficos de funções e analisem a transformação obtida ao variar os diferentes parâmetros.

Nesse capítulo, foram trabalhadas a construção de modelo, a resolução de problemas e as construções de gráficos que envolvem a função polinomial do 1º grau e funções definidas por mais de uma sentença. Além disso, muitas das situações exploram a variação de diferentes grandezas, o que contribui para o trabalho com as **competências específicas 3** e **4** e com as habilidades. **EM13MAT302**, **EM13MAT314**, **EM13MAT401** e **EM13MAT404**.

Ao propor situações que envolvem representações gráficas no plano cartesiano e com o uso de *softwares*, contribuímos para o trabalho com a **competência específica 5** e habilidades **EM13MAT501** e **EM13MAT510**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

O infográfico da **abertura** descreve as etapas de produção de papel, destacando a proporcionalidade entre algumas grandezas, como o volume de papel produzido e a energia consumida para a produção. Peça aos estudantes que discutam, em grupos, as **questões 3** e **4** propostas no boxe **Além da teoria**. Ao refletir sobre o desperdício do papel e os benefícios da reciclagem, os estudantes vão conversar sobre questões relacionadas ao **ODS 15**: em que uma das metas é "Proteger, recuperar e promover o uso sustentável dos ecossistemas terrestres". Aproveite para questionar o que essas atitudes contribuem para essa proteção. Desse modo, contribuímos para o trabalho com o **TCT Meio Ambiente** e a **competência específica 3** da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias.

1. A função polinomial do 1º grau ou função afim

Comente que os dois teoremas apresentados, para a construção de gráficos, podem ser sintetizados em um único teorema, do seguinte modo: "O gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$ é uma reta se, e somente se, f é uma função afim". Para demonstrar esse teorema, basta provar que: "Dados dois pontos distintos $P(x_P, ax_P + b)$ e $Q(x_Q, ax_Q + b)$, um ponto genérico $G(x, y)$ pertence à reta $\overleftrightarrow{PQ}$ se, e somente se, $y = ax + b$. Aplique o teorema de Tales ou a semelhança de triângulos.

No **Conectado** da página 192, foi pedido aos estudantes que representem o gráfico de uma função polinomial do 1º grau do tipo $y = ax + b$ e, depois, que construa no mesmo plano outras funções com a variação de alguns parâmetros. Essa proposta tem o objetivo de fazer com que os estudantes percebam as transformações geométricas relacionadas e que escrevam um texto generalizando as conclusões. Já no **Conectado** da página 196, solicita-se aos estudantes que identifiquem parâmetros para que as retas dos gráficos de duas funções afins sejam paralelas distintas, concorrentes ou coincidentes. Essas propostas permitem o trabalho com a habilidade **EM13MAT105** e com as **competências gerais 2, 4** e **5**.

5. Inequação-quociente

Proponha a seguinte pergunta aos estudantes, incentivando a discussão: "Para quais valores reais de x tem-se: $\frac{x-2}{-x+18} < 0$?". Espera-se que os estudantes concluam que as expressões $(x - 2)$ e $(-x + 18)$ devem ter sinais contrários para que o quociente de uma pela outra seja negativo. Após a discussão, converse sobre o **exercício resolvido 8** e o quadro de sinais. Além do quadro de sinais, sugerimos que apresente o dispositivo a seguir para a resolução de inequações-produto e inequações-quociente.

Sendo f e g duas funções polinomiais, a inequação-produto $f(x) \cdot g(x) > 0$ e a inequação-quociente $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (ou com as relações $\geqslant$ e $\leqslant$) podem ser resolvidas do seguinte modo:

(1) Marcam-se no eixo real as raízes de f e g.

(2) As raízes assinaladas em (1) separam o eixo real em dois intervalos abertos ilimitados e pelo menos um intervalo aberto limitado. Em cada um desses intervalos, atribui-se um valor k à variável x da expressão $f(x) \cdot g(x)$ $\left(\text{ou } \frac{f(x)}{g(x)}\right)$. O sinal de $f(k) \cdot g(k)$ $\left(\text{ou } \frac{f(k)}{g(k)}\right)$ se mantém em todo o intervalo considerado.

Observe a resolução da inequação $(x - 2)(-x + 18) > 0$ por meio desse dispositivo:



Testando o número zero, temos que $(0 - 2)(-0 + 18)$ é negativo; logo, o produto $(x - 2)(-x + 18)$ é negativo em todo o intervalo $]-\infty, 2[$.

Testando o número 4, temos que $(4 - 2)(-4 + 18)$ é positivo; logo, o produto $(x - 2)(-x + 18)$ é positivo em todo o intervalo $]2, 18[$.

Testando o número 20, temos que $(20 - 2)(-20 + 18)$ é negativo; logo, o produto $(x - 2)(-x + 18)$ é negativo em todo o intervalo $]18, +\infty[$.

Concluímos, assim, que o conjunto solução S da inequação $(x - 2)(-x + 18) > 0$ é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 18\}$.

Embora tenhamos restringido esse dispositivo a funções polinomiais f e g, é importante ressaltar que ele é válido para quaisquer funções contínuas f e g.

No **exercício complementar 2**, apresentamos uma proposta de pesquisa sobre a jornada laboral semanal dos homens e das mulheres, considerando o trabalho fora de casa e os afazeres domésticos. Converse com os estudantes sobre a diferença apresentada sugerindo que expliquem por que essa diferença ocorre e o que é possível fazer para que a jornada seja equiparada. Essa proposta explora o **ODS 5**, o **TCT Educação em direitos humanos** e a **competência geral 9**.

O **exercício complementar 8** apresenta o cálculo do imposto de renda do ano-calendário de 2023. A partir da tabela apresentada, os estudantes deverão expressar, por meio de uma função, o valor a pagar do imposto. Esse é um importante momento para explorar o **TCT Educação Fiscal** explicando aos estudantes nossos direitos e deveres como cidadão. Se considerar adequado, solicite que façam uma pesquisa sobre o tipo de investimento que os órgãos responsáveis devem fazer com o valor arrecadado com esse imposto.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Aproveite o tema apresentado no **exercício complementar 10** e no boxe **Trabalho e juventudes** para falar sobre os trabalhadores por aplicativos e a relação de trabalho com as empresas-plataformas. Essas propostas, junto ao objeto digital **Vídeo: Os aplicativos e os trabalhadores plataformizados**, permitem um trabalho interdisciplinar com a área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas para explorar o **TCT Trabalho**. Para isso, sugira aos estudantes que, em grupo, façam uma pesquisa com trabalhadores por aplicativo sobre as características do trabalho, as relações estabelecidas e suas expectativas. Depois, peça-lhes que apresentem o resultado da pesquisa aos colegas e professores. Desse modo, essa proposta permite o desenvolvimento da **competência geral 6**, da **competência específica 4** da área de Ciências Humanas e Sociais Aplicadas e da habilidade **EM13CHS401**.

Educação midiática

O objetivo dessa seção é provocar uma reflexão sobre a quantidade de informação veiculada pela internet, sobretudo por meio das redes sociais, com destaque para a responsabilidade em ler e analisar de forma crítica os conteúdos, principalmente antes de compartilhá-los. Nesse sentido, busca-se mostrar aos estudantes como participar de maneira consciente, ética e responsável dos debates possibilitados pela internet, desenvolvendo habilidades e competências que possam contribuir para sua formação cidadã. Desse modo, essa seção possibilita um trabalho interdisciplinar com a área de Linguagens e suas Tecnologias, favorecendo o trabalho com a **competência específica 7** da área de Linguagens e suas Tecnologias e com a habilidade **EM13LGG702**, além da **competência geral 1**.

Inicialmente, incentive os estudantes a relatar experiências relacionadas ao compartilhamento de informações por meio de notícias e questione se os títulos desses conteúdos apresentavam algum teor sensacionalista ou apelo emocional.

Questione também se eles têm o hábito de fazer uma leitura atenta de todo o conteúdo de uma notícia antes de compartilhá-la com alguém ou com um grupo de pessoas. Se possível, promova uma atividade prévia com o objetivo de fazer uma análise sobre alguma notícia que possa não ter confiabilidade: peça que analisem suas redes sociais por alguns minutos, verificando conteúdos nelas divulgados ou por eles compartilhados.

Leia com os estudantes o texto inicial e pergunte se conheciam o contexto apresentado e as diferentes categorias de *fake news* enunciadas. Se necessário, acesse com eles a página do Instituto Federal de São Paulo (disponível em: https://bri.ifsp.edu.br/index.php/informativos/1790-infografico-fake-news. Acesso em: 13 ago. 2024.) para que verifiquem exemplos relacionados a cada categoria. Eles podem também citar outros exemplos que já tenham visto para ilustrar cada categoria de conteúdo apresentada.

Em seguida, peça aos estudantes que leiam as orientações para identificar *fake news* e solicite que indiquem quais condutas já fazem parte de seu dia a dia no uso das mídias sociais ou, ainda, que selecionem aquelas que consideram mais relevantes e que pretendem adotar daqui para a frente, com o objetivo de utilizar a informação de forma mais consciente e responsável.

Antes de abordar as questões, incentive os estudantes a pesquisar mais informações sobre o assunto em *sites* confiáveis e a ler sobre profissionais que estudam e escrevem sobre essa temática. Eles podem acessar, por exemplo, o painel de checagem de *fake news* do Conselho Nacional de Justiça (https://www.cnj.jus.br/programas-e-acoes/painel-de-checagem-de-fake-news/; acesso em: 12 ago. 2024).

Trabalhe as questões com os estudantes promovendo uma roda de conversa, de modo a sistematizar as ideias debatidas. Por fim, auxilie-os a organizar a elaboração de conteúdo, que pode ser em etapas (pesquisa, escrita de roteiro e produção). Se possível, agende um dia para a apresentação dos trabalhos ainda não finalizados, de modo que os grupos possam trocar ideias entre si e sugerir ajustes antes da gravação dos vídeos e/ou áudios.

Na **atividade 4**, procure auxiliar os estudantes a organizar essa atividade em etapas. Eles podem, por exemplo, fazer uma pesquisa inicial para listar exemplos de notícias falsas veiculadas pelas redes sociais e danos morais e materiais que esses conteúdos possam ter causado. Isso pode promover uma mobilização da turma para a relevância do tema no sentido de refletir sobre a importância de analisar de forma crítica e responsável as informações veiculadas pelas mídias sociais. Incentive-os a escrever um roteiro com o texto que será gravado ou publicado. Além disso, podem também trabalhar com alguma encenação retratando uma situação causada por disseminação de conteúdo falso, destacando os danos ocorridos.

Verifique o que aprendeu no Capítulo 6

Nessa seção apresentamos uma proposta de avaliação e o resumo como ferramenta de estudo. Oriente os estudantes a fazer essas atividades com atenção e, caso tenham dificuldades, a retomar os conteúdos estudados. A sugestão de resumo vai ajudar nessa retomada. Se considerar adequado, promova uma roda de conversa para que os estudantes apresentem suas dificuldades.

Referência suplementar

PRADO, M. ***Fake news* e inteligência artificial**: o poder dos algoritmos na guerra da desinformação. São Paulo: Edições 70, 2022.

A autora explora as origens da desinformação, analisa o impacto destrutivo das notícias falsas e indica os caminhos para a superação do problema.

CAPÍTULO 7 Função polinomial do 2º grau ou função quadrática

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Construir o gráfico de uma função quadrática a partir da lei de associação e obter a lei de associação de uma função quadrática a partir do gráfico.
- Reconhecer uma função quadrática em situações do cotidiano.
- Usar *softwares* para a construção de gráficos, constatando propriedades da função quadrática.
- Construir o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença, envolvendo a função quadrática.
- Estudar a variação de sinal de uma função quadrática.

- Resolver inequações polinomiais do 2º grau e inequações-produto ou quociente relacionadas à função quadrática.
- Elaborar problemas do cotidiano, ou não, envolvendo os assuntos estudados no capítulo.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Nesse capítulo, foram trabalhadas a construção de modelo, a resolução de problemas e as construções de gráficos que envolvem a função polinomial do 2º grau. Além disso, muitas das situações exploram a variação de diferentes grandezas, além de representações algébricas e gráficas de funções polinomiais do 2º grau. Esse trabalho favorece o desenvolvimento das **competências específicas 3** e **4** e das habilidades **EM13MAT302**, **EM13MAT314** e **EM13MAT402**.

Ao utilizar as noções de transformações isométricas na construção de gráficos de funções polinomiais do 2º grau, favorecemos o desenvolvimento da **competência específica 1** e da habilidade **EM13MAT105**.

Também investigamos relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente uma função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. Além disso, investigamos pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos variados e representamos graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. Esses trabalhos contribuíram para o desenvolvimento da **competência específica 5** e das habilidades **EM13MAT502**, **EM13MAT503** e **EM13MAT506**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

O tema apresentado na **abertura** possibilita o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com Linguagens e suas Tecnologias (componente curricular Educação Física) e Ciências da Natureza e suas Tecnologias (componente curricular Física). Se possível, promova uma discussão com a participação dos professores dessas áreas. Além disso, ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento dos **TCTs Diversidade cultural** e **Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**. Também contribuímos com o desenvolvimento da **competência geral 1**, ao promover o entendimento sobre a diversidade cultural e esportiva dos povos indígenas, valorizando seus saberes tradicionais, da **competência geral 3**, ao valorizar os jogos dos povos indígenas, da **competência geral 9**, ao abordar a celebração dos costumes e o respeito mútuo entre diferentes povos, incentivando a apreciação das diversas culturas, e da **competência geral 10** ao discutir a preservação do patrimônio cultural indígena, despertando a consciência sobre a importância de preservar a identidade desses povos.

Incentive os estudantes a refletir sobre a trajetória feita pela lança a partir do lançamento até chegar no chão e questione-os sobre possíveis fatores que possam influenciar no resultado.

Se julgar conveniente, promova um momento de descontração e pergunte aos estudantes se eles conhecem algum jogo de lançamento ou arremesso, uma vez que os jogos fazem parte da cultura juvenil e podem ser aliados em alguns desenvolvimentos próprios da juventude, como melhorar a coordenação motora, auxiliar no raciocínio lógico e espacial, ajudar a lidar com frustrações, entre outros. Convém destacar que nem todos os jogos são apropriados para a idade dos estudantes e que jogar por muito tempo também pode trazer malefícios, como o sedentarismo.

Para o trabalho em sala de aula com essa abertura, sugerimos apresentar aos estudantes mais informações sobre trajetória oblíqua e discuti-las com eles; organizar a turma em grupos e solicitar que leiam o texto, analisem a imagem apresentada e conversem sobre a relação entre a medida do ângulo formado com o terreno e o alcance máximo; e pedir-lhes que resolvam as questões propostas no boxe **Além da teoria**.

2. Gráfico da função quadrática

Depois de abordar o assunto introdutório (gráfico de $y = x^2$), proponha o exercício a seguir.

Construa o quadro a seguir na lousa e, em seguida, peça aos estudantes que analisem cada valor de x e o valor correspondente de y presente no quadro com a finalidade de identificar uma relação entre esses valores.

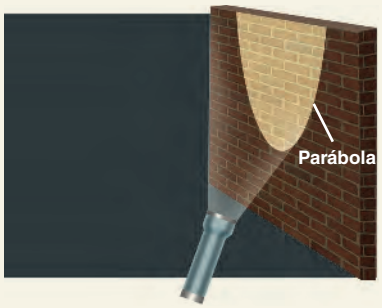
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

Pergunte aos estudantes se é possível identificar algum padrão, se os pontos pertencem ao gráfico de uma função do tipo $y = ax^2$ e qual é a lei de associação. Espera-se que eles respondam que sim e que a lei de associação é $y = -x^2$. Depois, oriente-os a representar cada par do quadro por um ponto no plano cartesiano e esboce o gráfico.

Quando os estudantes terminarem o esboço do gráfico, cite o nome da curva (parábola), explique os significados de eixo de simetria, vértice e concavidade da parábola. Se sentir que a sala está receptiva e acompanhando bem, esse pode ser o momento para dizer que essa transformação no gráfico é chamada de **reflexão em relação ao eixo O*x***.

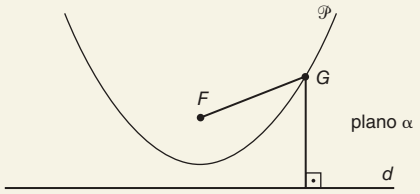
Após a discussão, afirme que a parábola é uma figura resultante da intersecção de um plano com uma superfície cônica.

Usando uma lanterna, ilumine uma parede de modo que uma geratriz do facho cônico de luz seja paralela ao plano da parede, mostrando concretamente uma parábola na intersecção da superfície cônica com o plano.



PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

Uma possível resposta para o boxe **Reflexão** da página 210 é: dados uma reta d e um ponto F de um plano α, com $F \notin d$, chama-se **parábola** $\mathscr{P}$, de diretriz d e foco F, o conjunto dos pontos desse plano equidistantes de d e de F.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$\mathscr{P} = \{G \in \alpha \mid G \text{ dista igualmente de } F \text{ e de } d\}$

Antes da demonstração apresentada no tópico **Vértice da parábola**, discuta com os estudantes a determinação do vértice V da parábola de equação $y = x^2 - 6x + 5$, conforme os seguin-

tes procedimentos: Indicando por $V(p, q)$ o vértice da parábola, devemos ter $q = p^2 - 6p + 5$, ou seja, $p^2 - 6p + 5 - q = 0$. Como o vértice V tem uma única abscissa (e uma única ordenada), essa equação, na variável p, deve ter uma única raiz real; portanto, o discriminante dessa equação deve ser nulo, isto é, $\Delta = 0$. Assim: $(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (11 - q) = 0 \Rightarrow q = 2$.

Substituindo q por 2 na equação $p^2 - 6p + 5 - q = 0$, chegamos a $p^2 - 6p + 9 = 0$, obtendo $p = 3$. Concluímos, assim, que $V(3, 2)$.

Generalize esse procedimento demonstrando que o vértice V da parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, é $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Refaça, com a participação dos estudantes, o exemplo que descreve o cálculo das coordenadas do vértice da parábola de equação $y = x^2 - 6x + 5$.

No **exercício resolvido 2**, comente com os estudantes que, sabendo as raízes e o ponto de intersecção Oy da parábola, é possível obter a função $y = f(x)$ aplicando a fatoração do trinômio do 2º grau. Acompanhe a seguir:

Pelo gráfico, observamos que os números –2 e 4 são as raízes da função. Logo, a equação da parábola é do tipo $y = a(x + 2)(x - 4)$.

Como o ponto (0, –8) pertence ao gráfico, temos: $-8 = a(0 + 2)(0 - 4) \Rightarrow a = 1$.

Assim, podemos concluir que a equação da parábola é $y = (x + 2)(x - 4)$, ou seja, $y = x^2 - 2x - 8$.

O boxe **Conectado** é uma oportunidade para os estudantes explorarem um programa de construção de gráficos que pode ajudar no aprendizado do comportamento de gráficos de funções polinomiais do 2º grau. Também é possível estimulá-los a trabalhar com os pilares do pensamento computacional para analisar e resolver problemas. Oriente-os a explorar as ferramentas disponíveis no menu antes de realizar as atividades propostas. Ao construírem os gráficos solicitados os estudantes devem perceber as transformações geométricas sofridas para fazer a justificativa do item **c**. Essa atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT105**.

Esse boxe possibilita o desenvolvimento da **competência geral 2**, ao incentivar o uso de um *software* para construir gráficos, o que requer que os estudantes utilizem conceitos matemáticos e façam análises críticas sobre as transformações geométricas, da **competência geral 4**, quando os estudantes redigem textos explicando as transformações dos gráficos, exercitando a clareza e a precisão na linguagem, e da **competência geral 5**, ao usar ferramentas digitais para construir e interpretar gráficos.

5. Inequações polinomiais de 2º grau

O **exercício resolvido 8** foi solucionado considerando os pilares do Pensamento Computacional. O primeiro passo, **Compreender o problema**, está associado aos passos decomposição e reconhecimento de padrões, pois, ao fazer uma análise do problema proposto, podemos decompô-lo em problemas menores.

Comente que a inequação-produto estudada no **exercício resolvido 10** pode ser resolvida por meio do estudo do sinal de funções do 1º grau. Para isso, basta fatorar os polinômios do 2º grau, obtendo:

$(x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (-1) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) \geqslant 0$, ou seja,

$(x + 2) \cdot (x - 5) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) \leqslant 0$

Matemática sem fronteiras

Nessa seção, sobre **Curva de possibilidade de produção**, o objetivo é ensinar aos estudantes como os recursos disponíveis podem ser distribuídos de forma eficiente entre duas opções, no caso, a construção de casas e apartamentos. Destaque que a curva apresenta as combinações possíveis de produção, mostrando que, ao aumentar a construção de um dos itens (casas ou apartamentos), a quantidade do outro diminui, refletindo a limitação de recursos.

Na **atividade 2**, é importante que os estudantes compreendam o conceito de eficiência produtiva: pontos na curva representam o uso máximo dos recursos, enquanto pontos abaixo dela indicam que sobram recursos (ineficiência), e pontos acima não são possíveis sem aumentar os recursos.

O tema dessa seção favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**, ao aplicar conceitos matemáticos e econômicos para interpretar a curva de produção e resolver problemas; e da **competência geral 7**, ao interpretar e explicar os resultados dos cálculos e suas implicações no contexto econômico da construção de casas e apartamentos.

Referência suplementar

Sugerimos a leitura de um estudo detalhado sobre o movimento simples.

MARQUES, G. C. **Dinâmica do movimento dos corpos**: Movimento simples. São Paulo: USP/Univesp. Disponível em: https://midia.atp.usp.br/plc/plc0002/impressos/plc0002_08.pdf. Acesso em: 19 set. 2024.

CAPÍTULO 8 Função modular

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Determinar a distância entre dois pontos do eixo real.
- Compreender a definição de módulo de um número real.
- Representar a distância entre dois pontos do eixo real por meio da notação de módulo.
- Resolver equações e inequações modulares.
- Construir o gráfico de funções modulares por meio de tabelas ou transformações geométricas.
- Elaborar problemas do cotidiano, ou não, envolvendo os assuntos estudados no capítulo.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Neste capítulo trabalhamos a função modular, sua representação gráfica. Por explorarmos a relação com as funções polinomiais do 1º e do 2º grau, definidas por mais de uma sentença, propondo situações problemas e análises entre as variáveis, favorecemos o trabalho com as **competências gerais 3**, **4** e **5** e com as habilidades **EM13MAT302**, **EM13MAT401**, **EM13MAT402**, **EM13MAT404**, **EM13MAT501** e **EM13MAT502**. Como exploramos as reflexões de partes do gráfico em relação aos eixos x e y, contribuímos para o trabalho com a habilidade **EM13MAT105** e a **competência específica 1**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

2. Módulo, equações e inequações modulares

Se preferir outro exemplo para introduzir o assunto, sugerimos o seguinte: considere que a uma longa avenida reta esteja associado um sistema de abscissas, isto é, uma parte do eixo real *e*, em que a unidade adotada seja o quilômetro. Para representar esta avenida, desenhe na lousa uma reta numérica e associe a ela os pontos de –9 a 9.

Afirmando que um ponto *P* dessa avenida tem abscissa *x*, pergunte:

- Qual é a distância entre o ponto *P* e a origem *O*?

Esse é um momento delicado, que merece uma interferência mais acentuada do professor. Uma possível maneira de orientar as discussões é particularizar.

a. Se a abscissa do ponto *P* for 0 (zero), qual é a distância entre esse ponto e a origem *O*? (zero)

b. Se a abscissa do ponto *P* for 8, qual é a distância entre esse ponto e a origem *O*? (8 km)

Enfatize que essa distância, em quilômetro, é calculada por: $8 - 0 = 8$.

c. Se a abscissa do ponto *P* for –8, qual é a distância entre esse ponto e a origem O? (8 km)

Ressalte que essa distância, em quilômetro, é calculada por: $0 - (-8) = 8$.

Como não sabemos se *x* é zero, positivo ou negativo, como podemos expressar a distância entre *P* e *O*?

Podemos admitir duas hipóteses calculando a distância de acordo com cada uma delas, isto é:

- hipótese 1: se a abscissa *x* for positiva ou nula, então, a distância entre *P* e *O* é *x*;
- hipótese 2: se a abscissa *x* for negativa, então, a distância entre *P* e *O* é 2*x*.

Ressalte que $-x$ é positivo quando *x* é negativo. (Esse é um obstáculo no entendimento da definição de módulo. O estudante tende a considerar $-x$ como um número negativo.)

Esse é o momento oportuno para apresentar a definição de módulo de um número real. Convencione que, para indicar a distância entre um ponto *P* de abscissa *x* e a origem *O*, utilizaremos a notação $|x|$, que se lê: módulo de *x* ou valor absoluto de *x*. Assim, definimos:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplifique, com os seguintes detalhes:

a. $|9|$ indica a distância entre o ponto de abscissa 9 e a origem *O*; logo, $|9| = 9$.

b. $|-9|$ indica a distância entre o ponto de abscissa –9 e a origem *O*; logo, $|-9| = 9$.

c. $|0|$ indica a distância entre o ponto de abscissa 0 e a origem *O*; logo, $|0| = 0$.

O **exercício proposto 3** merece destaque, pois a propriedade $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall x$, com $x \in \mathbb{R}$, será muito frequente no desenvolvimento do capítulo.

No tópico **Propriedades do módulo**, apresente as propriedades de P1 a P4 dos módulos, recorrendo à noção de distância entre dois pontos do eixo real. Por exemplo, explorando a avenida representada pela reta numérica do exemplo anterior, pergunte:

- Quais abscissas dos pontos dessa avenida distam 3 km da origem *O*?

  (Espera-se como resposta: 3 e –3. Assim, temos que: $|x| = 3 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$.)
- Quais abscissas dos pontos dessa avenida distam menos de 3 km da origem *O*?

  (Espera-se como resposta: todo número real *x* tal que $-3 < x < 3$. Assim, temos que: $|x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$.)
- Quais abscissas dos pontos dessa avenida distam mais de 3 km da origem *O*?

  (Espera-se como resposta: todo número real *x* tal que $x < -3$ ou $x > 3$. Assim, temos que: $|x| > 3 \Rightarrow x < -3$ ou $x > 3$.)
- Se dois pontos *G* e *H* dessa avenida distam igualmente da origem *O* e têm abscissas *x* e *y*, respectivamente, qual é a relação entre *x* e *y*?

  (Espera-se como resposta: $x = y$ ou $x = -y$. Assim, temos que: $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$.)

As propriedades P5 e P6 são facilmente justificadas por meio da propriedade $\sqrt{x^2} = |x|$, estudada no **exercício proposto 3**. Serão necessárias também duas propriedades dos radicais, conforme a revisão a seguir.

Sendo *a* e *b* números reais não negativos e *n* um número natural não nulo, temos:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, com $b \neq 0$

Ao justificar a propriedade P7, que é uma consequência da P5, enfatize a necessidade de *n* ser par. Por meio de um exemplo, mostre que essa propriedade é falsa quando *n* é ímpar:

$|-2|^3 = (-2)^3$ (Falso)

Ainda no tópico **Propriedades do módulo**, comente a nota, que estende a propriedade P7 para qualquer expoente inteiro par, isto é, para qualquer número inteiro *k* e qualquer número real *x* não nulo, temos: $|x|^k = x^k \Leftrightarrow k$ é par.

Para $x = 0$, temos $|0|^k = 0^k$ se, e somente se, $k > 0$.

Para apresentar as propriedades P8 a P11, retome a situação apresentada anteriormente, no item 2.

Pergunte:

- Quais abscissas dos pontos desse eixo distam 3 km ou menos da origem *O*? ($-3 \leqslant x \leqslant 3$)
- Como podemos representar essas abscissas usando a notação de módulo? ($|x| \leqslant 3$)
- Quais abscissas dos pontos desse eixo distam menos de 3 km da origem *O*? ($-3 < x < 3$)
- Como podemos representar essas abscissas usando a notação de módulo? ($|x| < 3$)
- Quais abscissas dos pontos desse eixo distam 3 km ou mais da origem *O*? ($x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$)
- Como podemos representar essas abscissas usando a notação de módulo? ($|x| \geqslant 3$)
- Quais abscissas dos pontos desse eixo distam mais de 3 km da origem *O*? ($x < -3$ ou $x > 3$)
- Como podemos representar essas abscissas usando a notação de módulo? ($|x| > 3$)

Após essa discussão, generalize as conclusões apresentando as propriedades P8 a P11.

Discuta a pergunta para reflexão, concluindo com a propriedade $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, chamada de desigualdade .

Uma forma simples de justificar a desigualdade triangular é:

Para quaisquer números reais *a* e *b*, tem-se: $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ e $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$. Adicionando membro a membro essas desigualdades, chegamos a:

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$$

Pela propriedade P8, deduzimos que:

$$|a + b| \leqslant ||a| + |b||$$

De onde concluímos que: $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Existe uma propriedade que relaciona o módulo da soma de dois números reais com a soma dos módulos desses números, descrita a seguir.

Dados dois números reais quaisquer a e b, tem-se:

$|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

A justificativa desse fato pode ser feita da seguinte maneira:

Todo número real é menor ou igual ao seu módulo. Assim, temos:

$ab \leqslant |ab| \Rightarrow ab \leqslant |a| \cdot |b|$

$\therefore 2ab \leqslant 2|a| \cdot |b| \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leqslant a^2 + b^2 + 2\,|a| \cdot |b|$

$\therefore a^2 + b^2 + 2ab \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2|a| \cdot |b| \Rightarrow (a + b)^2 \leqslant (|a| + |b|)^2$

$\therefore |a + b| \leqslant ||+a| + |b|| \Rightarrow |a + b| \leqslant |a| + |b|$

3. Função modular

Generalize as translações horizontal e vertical de um gráfico. Dados o gráfico de uma função f e um número positivo k, tem-se que:

- O gráfico da função $g(x) = f(x - k)$ é translação horizontal (paralela ao eixo Ox) de k unidades para a direita do gráfico da função f.
- O gráfico da função $h(x) = f(x + k)$ é translação horizontal (paralela ao eixo Ox) de k unidades para a esquerda do gráfico da função f.
- O gráfico da função $s(x) = f(x) - k$ é translação vertical (paralela ao eixo Oy) de k unidades para baixo do gráfico da função f.
- O gráfico da função $t(x) = f(x) + k$ é translação vertical (paralela ao eixo Oy) de k unidades para cima do gráfico da função f.

No boxe **Conectado** propomos a construção de gráficos com o uso de *software*.

No item **a**, sob as condições $a > 0$ e $b < 0$, a função terá duas raízes reais e distintas. Assim, uma parte do gráfico estará acima do eixo das abscissas, e outra parte, abaixo.

Espera-se que os estudantes concluam que, no segundo gráfico, os pontos de ordenadas não negativas do primeiro gráfico se mantêm inalterados e os pontos de ordenadas negativas do primeiro gráfico são transformados em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas.

Os pontos de ordenadas não negativas se mantêm porque o módulo de um número não negativo é o próprio número.

Os pontos de ordenadas negativas transformam-se nos respectivos simétricos em relação ao eixo das abscissas porque o módulo de um número negativo é seu oposto.

No item **b**, para que o segundo gráfico não sofra alteração em relação ao primeiro, a parábola do primeiro deve ter a concavidade para cima com apenas um ponto em comum com o eixo das abscissas ou nenhum ponto em comum com esse eixo. Assim, espera-se que os estudantes concluam que, para que isso aconteça, deve-se ter $a > 0$ e $\Delta \leqslant 0$.

Matemática sem fronteiras

Nesta seção, apresentamos um texto sobre hábitos saudáveis e longevidade e propomos atividades para que os estudantes reflitam sobre o hábito da prática de atividade física. Ao solicitar aos estudantes que pesquisem na internet mais informações sobre os principais benefícios promovidos pelas atividades físicas e quais podem ser incorporadas ao cotidiano de todos os colegas, apresentamos uma boa oportunidade para desenvolver um trabalho interdisciplinar com o componente curricular Educação Física.

Conte com a contribuição do professor responsável por esse componente para conversar com os estudantes sobre as vantagens de praticar atividades físicas.

Converse com eles também sobre o estilo de vida que cada um tem, levando-os a refletir sobre se há algo que possam melhorar.

Sugira a eles que analisem o **Guia de atividade física para a população brasileira**, do Ministério da Saúde, disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_atividade_fisica_populacao_brasileira.pdf. Acesso em: 23 set. 2024.

Esse guia apresenta atividades físicas para jovens, adultos, idosos, gestantes e mulheres no pós-parto e pessoas com deficiência; além disso, disponibiliza orientações de atividades físicas que podem ser realizadas até mesmo por quem não tem tempo.

Na **atividade 4**, trazemos um texto que traz informações sobre as desigualdades no envelhecimento. Organize a turma em uma roda de conversa para a leitura do texto e se considerar adequado, proponha a construção do relatório em conjunto com a turma. Apresente as definições de Racismo estrutural e Racismo institucional. E, se possível, apresente o vídeo **Racismo estrutural / Jornada**, do canal do Tribunal Superior do Trabalho, para que os estudantes reflitam sobre o tema. O vídeo está disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=0dYEbN4gK-o. Acesso em 24 set. 2024.

Referência suplementar

No artigo a seguir, o autor apresenta o uso da função modular no contexto da correlação entre as escalas de medidas de temperatura em graus Celsius e em graus Fahrenheit possibilitando uma relação interdisciplinar no ensino de funções modulares.

MELLO, J. L. P. Função modular e escalas termométricas: uma proposta de interdisciplinaridade. **Coleção e Matemática**, n. 90, nov.-dez. 2006.

CAPÍTULO 9 Função exponencial

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Operar com potências de expoente real.
- Escrever, sob a notação científica, um número real com representação decimal finita.
- Operar com radicais.
- Aplicar a fórmula $M = C(1 + i)^t$, que calcula o valor M de uma grandeza, de valor inicial C, que varia em função do tempo t, a uma taxa constante i.
- Representar graficamente uma função exponencial.
- Discorrer sobre a condição para que uma função exponencial seja crescente (decrescente).
- Usar *softwares* para a construção de gráficos, constatando propriedades da função exponencial.
- Resolver equações exponenciais.
- Elaborar problemas do cotidiano, ou não, envolvendo um ou mais temas tratados no capítulo.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Nesse capítulo, são exploradas diferentes situações que envolvem a variação de grandezas, em especial, os **exercícios com**

plementares 1 e **2**. Ao explorar a variação dessas grandezas e a relação com representações gráficas, analisando criticamente essas variações, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 1** e das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT103**.

Ao interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas e análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT303**. Ao resolver e elaborar problemas envolvendo funções exponenciais e explorar situações com o uso de notação científica, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 3** das habilidades **EM13MAT304** e **EM13MAT313.**

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

O tema apresentado na **abertura** possibilita o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com o componente curricular Física. Se possível, promova uma discussão com a participação do professor dessa área. Além disso, ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento do **TCT Ciência e Tecnologia**.

O objetivo dessa abertura é apresentar uma situação que envolve o decrescimento da função exponencial. Trabalhar situações como essa ajuda os estudantes a perceber a importância da modelagem Matemática no estudo e na previsão de fenômenos, o que possibilita inferências e estimativas acerca de determinado comportamento.

Comente que essa mesma técnica é utilizada também por peritos forenses que investigam homicídios. Reforce o fato de que mamíferos são seres homeotérmicos, cujo organismo dispõe de mecanismos para controle da temperatura interna. Logo após a morte, esses mecanismos deixam de funcionar e, consequentemente, o corpo tende a entrar em equilíbrio térmico com o ambiente. A velocidade com que esse processo ocorre varia de acordo com a exposição do cadáver a fatores climáticos, como vento, chuva e, sobretudo, temperatura ambiente. Desse modo, cada corpo apresentará uma curva específica de queda de temperatura.

Peça aos estudantes que, em grupos, leiam o texto e discutam a questão do boxe **Além da teoria**. Após a discussão, convide um grupo para apresentar a resolução na lousa.

Ao explorar o infográfico apresentado, sugerimos que compare a variação linear e a variação exponencial. Por exemplo:

I) Peça aos estudantes exemplos de grandezas que crescem ou decrescem linearmente em função de outra. Podem ser citados:
- valor pago pelo abastecimento de um automóvel em função do número de litros de combustível;
- crescimento do montante acumulado, em função do tempo, por uma aplicação financeira em regime de juro simples a uma taxa constante;
- a pressão em águas submarinas em função da profundidade;
- a distância percorrida por um automóvel com velocidade constante, em função do tempo;
- o custo mensal da energia elétrica em uma residência em função do consumo;
- o salário mensal de um vendedor comissionado, em função do valor monetário das vendas do mês, sobre as quais a taxa de comissionamento é fixa.

II) Peça aos estudantes exemplos de grandezas que crescem ou decrescem em função de outra a uma taxa constante. Podem ser citados:
- o montante acumulado em função do tempo por uma aplicação financeira em regime de juro composto a uma taxa constante;
- o crescimento de uma população de bactérias em função do tempo;
- *fake news* enviadas, via aplicativos de troca de mensagens, sob determinadas condições: o criador da notícia falsa envia para cinco destinatários; cada um deles envia para mais cinco destinatários, e assim por diante;
- se a produção de uma indústria dobra a cada década, seu crescimento é exponencial;
- se o preço de mercado de um veículo diminui 5% ao ano, sua desvalorização é exponencial;
- o decaimento radioativo de uma substância.

III) Compare o crescimento linear com o crescimento exponencial por meio do exemplo a seguir.

Em um mesmo instante, Sandra tomou dois empréstimos *A* e *B* de R$ 10.000,00 cada um, durante 3 meses à mesma taxa de juros de 10% ao ano. Contudo, o montante da dívida do empréstimo *A* cresceu em regime de juros simples e o de *B* cresceu em regime de juros compostos.

a. Indicando, respectivamente, por $f(x)$ e $g(x)$ os montantes acumulados das dívidas *A* e *B*, em função do tempo *x*, em ano, obtenha a lei de associação das funções *f* e *g*.

b. Ao final dos 3 meses, qual era a dívida acumulada em cada um dos empréstimos?

Resolução

a. $f(x) = 10.000 + 10.000 \cdot 0{,}1 \cdot x \Rightarrow f(x) = 10.000 + 1.000x$

$g(x) = 10.000\,(1 + 0{,}1)^x \Rightarrow g(x) = 10.000\,(1{,}1)^x$

b. Sendo *f* e *g* as funções obtidas no item **a**, temos:

$f(3) = 10.000 + 1.000 \cdot 3 = 13.000$

$g(3) = 10.000\,(1{,}1)^3 = 13.310$

Assim, ao final dos 3 meses, os montantes acumulados das dívidas *A* e *B* eram de R$ 13.000,00 e R$ 13.310,00, respectivamente.

1. Potenciação e radiciação

Peça aos estudantes que leiam o texto sobre profissões, apresentado no boxe **Trabalho e juventudes**, que utilizam o conceito de função exponencial em algumas atividades. Depois, solicite-lhes que relatem o que sabem sobre a profissão microscopista. Incentive todos a participar e a argumentar para justificar suas opiniões. Pode-se aprofundar essa conversa inicial propondo aos estudantes que citem habilidades que precisam ser desenvolvidas para alguém se tornar microscopista. Após a leitura e a discussão inicial, peça aos estudantes que pesquisem mais informações sobre essa profissão, façam um resumo da pesquisa e compartilhem-na com os demais colegas. Ao explorar esse tema, contribuímos para o desenvolvimento do **TCT Trabalho** e da **competência geral 6**, pois os estudantes podem se apropriar de procedimentos adotados no mundo do trabalho.

O **exercício proposto 6** apresenta uma breve explicação sobre a poliomielite, destacando a história desta doença no Brasil. Destaque a importância da vacinação para combater a poliomielite e outras doenças. Em seguida, estimule uma discussão em grupos sobre o risco de reintrodução do vírus no país, relacionando isso à saúde pública. Ao final da atividade, pode ser feita uma reflexão sobre a importância do conhecimento científico para a prevenção de doenças. Aproveite para solicitar aos estudantes que ouçam o ***Podcast*: Imunização** e proponha uma conversa sobre o tema. Pode-se aproveitar este momento para promover uma conversa com o professor de Biologia sobre a poliomielite, as consequências dessa doença e sobre a importância da imunização. Depois, podem solicitar aos estudantes que promovam uma campanha de conscientização por meio de redes sociais ou de cartazes. Ao explorar esse tema, favorecemos o desenvolvimento do **TCT Saúde**. Além disso, possibilitamos o desenvolvimento

da **competência geral 1**, ao adquirir um conhecimento científico e histórico sobre a poliomielite; da **competência geral 2**, ao desenvolver um pensamento crítico por meio da análise da reintrodução do vírus no país e suas implicações; da **competência geral 10**, ao refletir sobre a vacinação e a saúde pública, promovendo uma atitude responsável e cidadã.

Oriente a resolução, em grupos, do **exercício proposto 13**, que apresenta um contexto interdisciplinar e fale um pouco a respeito de Albert Einstein. Comente a seguinte frase do cientista: "A imaginação é mais importante que o conhecimento". Provoque os estudantes perguntando: "Com essa frase, Einstein afirma que não é necessário o conhecimento, basta a imaginação?".

Oriente a resolução, em grupos, do **exercício proposto 17**. Comente a limitação da calculadora no cálculo de potências que resultem em números irracionais. Por exemplo, no cálculo de $2^{\frac{1}{2}}$, que é um número irracional, o resultado apresentado no visor da calculadora terá um número finito de casas decimais. Assim, a calculadora mostra uma aproximação de $2^{\frac{1}{2}}$.

2. A função exponencial

Comente o exemplo introdutório, revisando a fórmula $M = C(1 + i)^t$, que calcula o valor M de uma grandeza, de valor inicial C, que varia em função do tempo t, a uma taxa constante i. Essa fórmula será essencial, daqui em diante, para o desenvolvimento da função exponencial e da função logarítmica.

Para exemplificar o assunto do tópico **Gráfico da função exponencial**, apresente uma situação contextualizada que envolva a função exponencial. Por exemplo: A construção de uma represa é a causa da inundação de uma região. A partir do instante em que o alagamento atingiu 1 km², observou-se que a área alagada dobrou de tamanho a cada mês, até atingir a área máxima, o que durou exatamente 4 meses.

Peça aos estudantes que construam um quadro (x, y), em que x representa o tempo, em mês, a partir do instante em que a inundação era de 1 km², e y representa a área alagada, em quilômetro quadrado, correspondente ao instante x. Sugira que sejam atribuídos os valores 0, 1, 2, 3 e 4 para x.

Solicite aos estudantes que construam o gráfico cartesiano relativo a esse quadro. Peça que liguem os pontos do gráfico, imaginando que sejam atribuídos à variável x os infinitos valores reais do intervalo $[0, 4]$. Oriente-os a elaborar uma equação que expresse y em função de x ($y = 2^x$). Fora do contexto da situação apresentada, peça aos estudantes que construam o gráfico da função definida por $y = 2^x$, admitindo que a variável x assuma todos os valores reais.

Apresente, também, uma situação envolvendo uma função exponencial decrescente e repita o que foi feito para a função crescente. Por exemplo: uma substância radioativa, que neste instante tem 1 kg, perde metade de sua massa a cada ano. Após a discussão das duas situações, apresente o gráfico das funções f e g definidas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = e\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

O boxe **Análise da resolução** propicia uma participação mais ativa dos estudantes. Depois da realização de uma atividade de avaliação diagnóstica para identificar o que os estudantes já conhecem sobre o assunto, enfatize o diálogo respeitoso, amigável e valorize o princípio do respeito à diversidade e à inclusão, procurando trabalhar com os diferentes níveis de conhecimentos, comportamentos, crenças e valores.

No boxe **Conectado**, da página 265, espera-se que os estudantes concluam que a assíntota horizontal do gráfico de uma função da forma $y = p + b^x$, em que p e b são números reais quaisquer, com $b > 0$ e $b \neq 1$, é a reta que passa pelo ponto $(0, p)$ e é paralela ao eixo das abscissas, e a assíntota horizontal do gráfico de uma função da forma $y = b^{x+p}$, em que p e b são números reais quaisquer, com $b > 0$ e $b \neq 1$, é a mesma da função $y = b^x$, ou seja, é o eixo das abscissas.

3. Equação exponencial

No boxe **Conectado**, retomamos o trabalho com juros simples e compostos estabelecendo uma relação entre a função linear e a função exponencial, promovendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT303**. Faça a leitura do texto com os estudantes e, se possível, leve a turma para um ambiente com computador para que possam construir as planilhas junto com a explicação do texto. Se considerar adequado, proponha que as atividades sejam resolvidas em grupo.

Referência suplementar

ISAACSON, Walter. **Einstein: sua vida, seu universo**. Rio de Janeiro: Companhia das Letras, 2007.

Esse livro detalha tanto a vida pessoal quanto as contribuições científicas de Einstein, como a teoria da relatividade. Além disso, o autor apresenta o contexto histórico e o impacto que as descobertas de Einstein tiveram na Ciência e na sociedade.

CAPÍTULO 10 Função logarítmica

Objetivos

Ao final do capítulo, espera-se que o estudante esteja apto a:

- Definir logaritmo e as condições de existência de um logaritmo e o porquê de cada uma.
- Aplicar as propriedades dos logaritmos na simplificação de cálculos numéricos.
- Aplicar a teoria dos logaritmos na aplicação da fórmula $M = C(1 + i)^t$ quando a incógnita for t.
- Definir função logarítmica, destacando a condição para que ela seja crescente (decrescente).
- Analisar a função logarítmica como inversa da função exponencial.
- Usar *softwares* para a construção de gráficos, constatando propriedades da função logarítmica.
- Resolver equações logarítmicas.
- Elaborar problemas do cotidiano, ou não, envolvendo um ou mais temas tratados no capítulo.

Habilidades e competências específicas da BNCC

Nesse capítulo iniciamos o estudo das funções logarítmicas e retomamos funções exponenciais estabelecendo uma relação entre essas funções, favorecendo o desenvolvimento das **competências específicas 3** e **4** das habilidades **EM13MAT304**, **EM13MAT305** e **EM13MAT403**.

Os contextos explorados permitiram a exploração de diferentes grandezas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, o que favorece o trabalho com as habilidades **EM13MAT101**, **EM13MAT103** e **EM13MAT314**, além das **competências específicas 1** e **3**.

Sugestões de encaminhamento dos conteúdos

As questões a seguir podem complementar o trabalho com o conteúdo da **abertura**.

- O nível de intensidade sonora de 40 dB é alto ou baixo? E o de 105 dB? (Embora esses níveis afetem as pessoas de maneiras diferentes, considerando a média, podemos afirmar que o nível de 40 dB pode ser considerado baixo, por estar entre o som de um sussurro e o do barulho de uma máquina de lavar; e o nível de 105 db pode ser considerado alto, por estar próximo do nível de som de um *show* de *rock*.)
- A Organização Mundial da Saúde alerta que a exposição ao nível de intensidade sonora a partir de 75 dB provoca, a longo prazo, a perda da audição. Quais dos exemplos apresentados no infográfico se enquadram nessa intensidade sonora? (Ônibus, *show* de *rock*, avião decolando.)

2. O conceito de logaritmo

No tópico **Logaritmo decimal**, se julgar pertinente, comente a respeito das informações apresentadas no texto a seguir.

Briggs fundamentou-se na seguinte propriedade:

"A média geométrica de dois números positivos distintos, *a* e *b*, está entre esses números", ou seja:

$$\{a, b\} \subset \mathbb{R} \text{ e } a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < b \qquad (1)$$

Para calcular log 2, por exemplo, Briggs partiu da desigualdade:

$$1 < 2 < 10$$

Por (1), temos $1 < \sqrt{1 \cdot 10} < 10$, ou seja, $1 < \sqrt{10} < 10$.

Mas, como $\sqrt{10} > 2$, podemos escrever:

$$1 < 2 < \sqrt{10}$$

Então, repetimos o procedimento. Por (1), temos $\sqrt{1 \cdot \sqrt{10}} < \sqrt{10}$, ou seja, $1 < \sqrt[4]{10} < \sqrt{10}$.

Mas, como $\sqrt[4]{10} < 2$, podemos escrever:

$$\sqrt[4]{10} < 2 < \sqrt{10}$$

Repetimos o procedimento. Por (1), temos $\sqrt[4]{10} < \sqrt{\sqrt[4]{10} \cdot \sqrt{10}} < \sqrt{10}$, ou seja, $\sqrt[4]{10} < \sqrt[8]{10^3} < \sqrt{10}$.

Mas, como $2 < \sqrt[8]{10^3}$, podemos escrever:

$$\sqrt[4]{10} < 2 < \sqrt[8]{10^3}$$

Vamos interromper por um momento as repetições do procedimento e obter uma aproximação para log 2. Pela última desigualdade, chegamos a:

$log\ \sqrt[4]{10} < log\ 2 < log\ \sqrt[8]{10^3} \Rightarrow \frac{1}{4} < log\ 2 < \frac{3}{8}$, ou seja: $0{,}250 < log\ 2 < 0{,}375$

Obtivemos, assim, uma aproximação para log 2. Repetindo o procedimento mais algumas vezes, chegamos a $0{,}300 < log\ 2 < 0{,}305$, o que já dá certeza sobre duas casas decimais para log 2.

Quanto mais repetições do procedimento, mais casas decimais corretas serão obtidas para log 2.

Pacientemente, Briggs construiu uma tabela dos logaritmos decimais, com quatorze casas decimais, de milhares de números naturais. É importante observar que os cálculos trabalhosos se resumem apenas aos logaritmos de números primos; para os de números compostos, são usadas as propriedades dos logaritmos. Por exemplo:

$log\ 8 = log\ 2^3 = 3\ log\ 2$ (propriedade P3 dos logaritmos)

No **exercício proposto 18** apresentamos a cientista Marie Curie. O **Carrossel de imagens: Mulheres na Ciência** tem como objetivo apresentar outras cientistas aos estudantes. Aproveite para comentar com os estudantes que ao longo da história, por diferentes motivos, as mulheres foram impedidas de participar da produção científica, assim como de diferentes ações que eram designadas somente aos homens. Ainda assim, elas lutaram contra essas exclusões e se destacaram em diferentes áreas.

3. Função logarítmica

A partir do exemplo introdutório (aplicação financeira), defina função logarítmica.

Retome as duas situações apresentadas no estudo da função exponencial.

A construção de uma represa é a causa da inundação de uma região. A partir do instante em que o alagamento atingiu 1 km², observou-se que a área alagada dobrou a cada mês, até atingir a área máxima de 16 km².

Peça aos estudantes que construam um quadro referente aos pares (x, y), em que x representa a área alagada, em quilômetro quadrado, a partir do instante em que a inundação era de 1 km², e y representa o tempo, em mês, correspondente à área x. Sugira que sejam atribuídos os valores 1, 2, 4, 8 e 16 para x.

Peça-lhes que construam o gráfico cartesiano relativo a esses dados.

Solicite-lhes que liguem os pontos do gráfico, imaginando que sejam atribuídos à variável x os infinitos valores reais do intervalo [1, 16].

Peça uma equação que expresse y em função de x.

$$(y = log_2 x)$$

Fora do contexto da situação apresentada, peça aos estudantes que construam o gráfico, admitindo que a variável x assuma todos os valores reais.

Retomando a situação a seguir, apresentada na função exponencial, apresente uma situação envolvendo uma função logarítmica decrescente e repita o que foi feito para a função crescente.

Uma substância radioativa, que nesse instante tem 1 kg, perde metade de sua massa a cada ano.

No tópico **Propriedades das funções logarítmicas**, após a discussão das duas situações, apresente o gráfico das funções: $f(x) = log_2 x$ e $g(x) = log_{\frac{1}{2}} x$.

Comente as propriedades P1, P2 e P3.

Matemática sem fronteiras

Nessa seção exploramos texto sobre a idade dos fósseis. O texto favorece também o trabalho com a área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, possibilitando a análise de fenômenos naturais e sobre a dinâmica da vida.

O caso mais conhecido de uso desse recurso refere-se à datação por carbono-14. Essa técnica, como o nome sugere, mede a concentração do isótopo 14 do carbono em tecidos orgânicos, mesmo que fossilizados. Conhecendo a concentração natural desse isótopo em tecidos vivos, é possível estimar a idade de uma amostra.

Sugerimos que o professor oriente os estudantes a ler o texto e a resolver, em grupos, os exercícios das atividades.

Como complemento a este tema, propomos o **Infográfico clicável: Arqueologia**, que apresenta diferentes etapas do trabalho dos profissionais desta área.

O **exercício complementar 6** possibilita o desenvolvimento do **TCT Meio ambiente** e **ODS 14** ao propor uma situação de vazamento de petróleo que, consequentemente, causa sérios impactos ambientais, afetando o ecossistema aquático. Algumas estratégias de prevenção que podem ser adotadas são: investimento em tecnologia, plano de contingência, treinamento e conscientização, responsabilidade social corporativa, entre outros.

Referência suplementar

Conheça um pouco mais sobre a medida do som no texto a seguir:

FERREIRA NETO, M. F. **πon Ligado na Física**, c. 2024. Disponível em: http://www.sbfisica.org.br/v1/portalpion/index.php/artigos/23-60-60-63. Acesso em: 20 set. 2024.

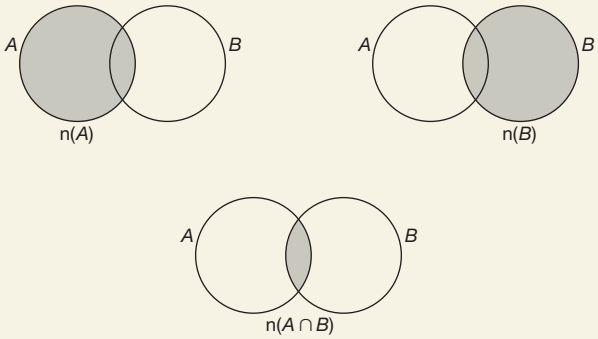
Resoluções de exercícios

Neste suplemento para o professor, as respostas, de todos os exercícios, atividades e problemas, estão indicadas na reprodução do livro do estudante. Nesta seção, apresentaremos o encaminhamento das resoluções dos exercícios e das atividades que demandam cálculos e/ou orientações para sua resolução.

CAPÍTULO 1 A linguagem dos conjuntos

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. alternativa **d**



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

11. alternativa **d**

A região hachurada é formada pelos pontos que pertencem a B e a $(A \cup C)$; logo, essa região representa $B \cap (A \cup C)$.

16. Como $\complement_A C = \{9, 8, 7\} = \{9, y, z\}$, temos que $y = 8$ e $z = 7$ ou $y = 7$ e $z = 8$.

Como $\complement_A (A \cap B) = \{9, 8, 5, 6\} = \{9, y, 5, x\}$, temos que $y = 8$ e $x = 6$ ou $y = 6$ e $x = 8$, mas, por (I), $y \neq 6$; logo, por (I) e (II), concluímos que $y = 8$, $z = 7$ e $x = 6$.

Como $B - A = \{4, 1\} = \{4, w\}$, temos que $w = 1$. Portanto, $x = 6$, $y = 8$, $z = 7$ e $w = 1$.

19. Resolvendo por etapas, temos:

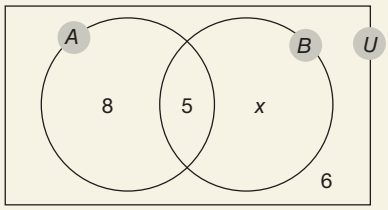
1. Compreender o problema: o problema apresenta o total de pessoas que assistiram aos filmes e pede a quantidade de pessoas que assistiram ao filme B.

2. Elaborar um plano de resolução: precisamos pensar e registrar um possível plano para a resolução do problema. Para determinar a quantidade pedida, que vamos indicar por x, construiremos um diagrama de Venn e colocaremos nele os dados nos locais corretos. Com isso, poderemos calcular o número de elementos do conjunto B, que será o valor de $x + 5$.

3. Executar o plano elaborado: para executar o plano, consideramos:

- U o conjunto das 29 pessoas que discutiam os filmes A e B;
- A o conjunto das pessoas que assistiram ao filme A;
- B o conjunto das pessoas que assistiram ao filme B.

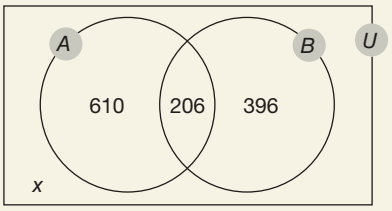
Esquematizamos:



Assim, temos: $8 + 5 + x + 6 = 29 \Rightarrow x = 10$

Logo, 15 pessoas $(10 + 5)$ assistiram ao filme B.

20.

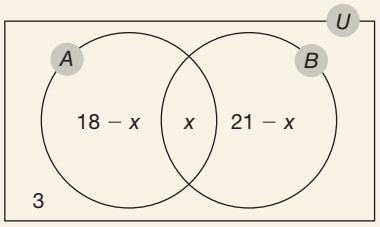


ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$x + 610 + 206 + 396 = 2.200 \Rightarrow x = 988$

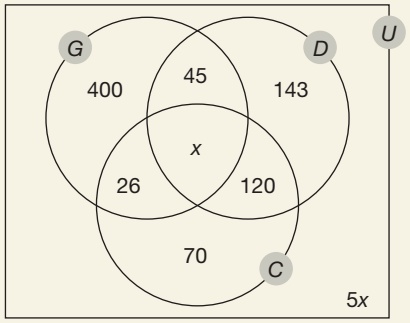
Logo, 988 pessoas entrevistadas nunca estiveram em nenhuma das duas regiões.

21. Indicando por x o número de estudantes que responderam "sim" às duas perguntas, esquematizamos:



$18 - x + x + 21 - x + 3 = 32 \Rightarrow x = 10$

22. a. Sendo x o número de entrevistados que contraíram as três doenças, temos:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

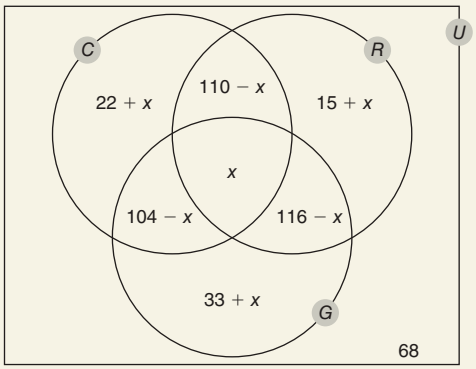
$400 + 45 + 143 + 26 + 120 + 70 + x + 5x = 1.500$

$804 + 6x = 1.500 \Rightarrow 6x = 696 \Rightarrow x = 116$

23. alternativa **a**

Sendo x o número de pessoas entrevistadas que praticavam as três modalidades de exercício físico, temos:

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



$22 + x + 15 + x + 33 + x + 110 - x + 116 - x + 104 - x + x + 68 = 500 \Rightarrow x = 32$

26. **a.** $2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$ **b.** $3{,}81 = \frac{381}{100}$ **c.** $0{,}03 = \frac{3}{100}$

d. Indicando por g a geratriz da dízima, temos:

$\begin{cases} g = 4{,}222... \\ 10g = 42{,}222... \end{cases}$

$10g - g = 38 \Rightarrow g = \frac{38}{9}$

e. Indicando por g a geratriz da dízima, temos:

$\begin{cases} 10g = 34{,}555... \\ 100g = 345{,}555... \end{cases}$

$100g - 10g = 311 \Rightarrow g = \frac{311}{90}$

29. A medida q, do lado do quadrado, é um número racional, pois o enunciado informa que a medida do perímetro é um número racional. Pelo Teorema de Pitágoras, temos que a medida da diagonal do quadrado é $q\sqrt{2}$.

a. Verdadeira, pois o perímetro de cada triângulo mede $2q + q\sqrt{2}$.

Como 2 e q são números racionais e $\sqrt{2}$ é irracional e:

- o produto de números racionais é um número racional;
- o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional;
- a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional;

Concluímos que $2q + q\sqrt{2}$ é um número irracional.

b. Falsa, pois os dois triângulos têm perímetros de mesma medida; assim, a soma das medidas dos perímetros é $2(2q + q\sqrt{2})$, e o produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

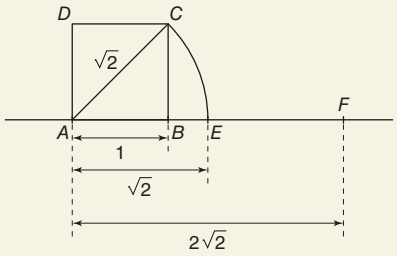
c. Falsa, pois a área de medida A dos triângulos é dada por $A = \frac{q^2}{2}$. O quadrado de um número racional é um número racional, e a divisão de um número racional por um número racional não nulo é um número racional.

30. Construímos um quadrado $ABCD$, em que $\overline{AC}$ é uma das diagonais. Pelo Teorema de Pitágoras, deduzimos que $AC = \sqrt{2}$, na unidade u.

Com a ponta seca do compasso em A e abertura AC, traçamos o arco que intercepta a semirreta $\overrightarrow{AB}$ em E, conforme a figura a seguir. Assim, temos que $AE = \sqrt{2}$, na unidade u.

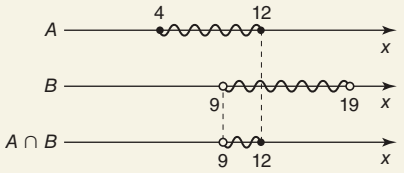
Com a ponta seca do compasso em E e abertura EA, traçamos o arco que intercepta a semirreta $\overrightarrow{AB}$ em F, conforme a figura a seguir. Assim, temos que $AF = 2\sqrt{2}$, na unidade u.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA



31. Para resolver os itens desta atividade pode-se fazer as representações no eixo real, como exemplo do item a. Obtendo os valores correspondentes a cada item.

a.



Logo: $A \cap B =]9, 12]$

b. $A \cup B = [4, 19[$

c. $B - D =]14, 19[$

d. $D - B =]-\infty, 9]$

e. $\complement_D C =]-\infty, 0] \cup]8, 14]$

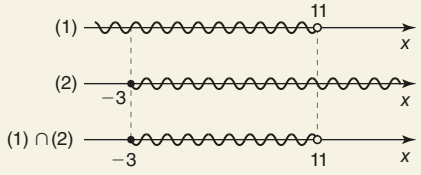
f. $A \cup B \cup C =]0, 19[$

g. $A \cap B \cap C = \varnothing$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

32. alternativa **c**

$\begin{cases} 3x - 9 < 2x + 2 \\ 5x \leqslant 6x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 11 \quad (1) \\ x \geqslant -3 \quad (2) \end{cases}$



$S = [-3, 11[$

33. Sejam $I_A = [-5, 65]$ e $I_B = [4, 70]$ os intervalos das medidas de temperatura de sobrevivência, em grau Celsius, dos tipos A e B de microrganismos, respectivamente.

Assim, as respostas aos itens **a**, **b**, **c**, **d**, **e** são dadas por $I_A \cap I_B$, $I_A \cup I_B$, $I_A - I_B$, $I_B - I_A$, $\mathbb{R} - (I_A \cup I_B)$, respectivamente:

a. Como $I_A \cap I_B = [4, 65]$, concluímos que os tipos A e B sobrevivem às medidas de temperatura do intervalo fechado de 4 °C a 65 °C.

b. Como $I_A \cup I_B = [-5, 70]$, concluímos que pelo menos um dos dois tipos A e B sobrevive às medidas de temperatura do intervalo fechado de −5 °C a 70 °C.

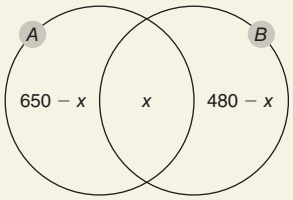
c. Como $I_A - I_B = [-5, 4[$, concluímos que A sobrevive e B não sobrevive às medidas de temperatura de pelo menos −5 °C e inferiores a 4 °C.

d. Como $I_B - I_A =]65, 70]$, concluímos que B sobrevive e A não sobrevive às medidas de temperatura superiores a 65 °C e no máximo 70 °C.

e. Como $\mathbb{R} - (I_A \cup I_B) =]-\infty, -5[\cup]70, +\infty[$, concluímos que nenhum dos dois tipos de microrganismos sobrevive às medidas de temperatura inferiores a −5 °C ou superiores a 70 °C.

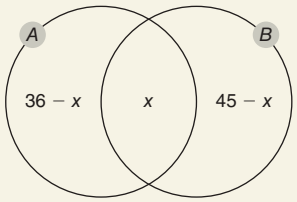
EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Considerando os dados, temos o seguinte diagrama:



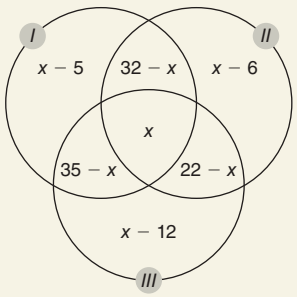
$650 - x + x + 480 - x = 876 \Rightarrow x = 254$

2. Indicando por x o número de candidatos com idade entre 30 e 34 anos, temos o seguinte diagrama:



$36 - x + x + 45 - x = 54 \Rightarrow x = 27$

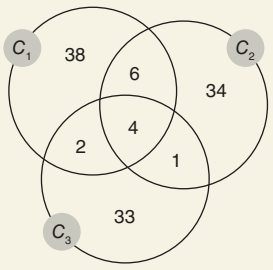
3. Indicando por I, II e III os conjuntos das pessoas que responderam "sim" às perguntas (1), (2) e (3), respectivamente, temos o seguinte diagrama:



$x - 5 + 32 - x + x + 35 - x + x - 6 + 22 - x + x - 12 = 88 \Rightarrow x = 22$

4. alternativa **c**

De acordo com os dados, temos o seguinte diagrama:



Logo, o total de originais necessários é dado por:

$38 + 6 + 4 + 2 + 34 + 1 + 33 = 118$

6. alternativa **c**

Sendo n o número de notas de R$ 5,00 e k o número de notas de R$ 10,00, temos: $5n + 10k = 100$

Dividindo por 5 ambos os membros, chegamos a:

$n + 2k = 20$ ou, ainda, a $n = 20 - 2k$

Como 20 e $2k$ são números pares, temos que $20 - 2k$ é par.

Logo, o número de notas (n) de R$ 5,00 é par.

7. a. Falsa, pois, por exemplo, para $p = 2\sqrt{2}$ e $q = \sqrt{2}$, temos $\frac{p}{q} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$.

b. Falsa, pois, para $p = 0$, $\frac{p}{q} = \frac{0}{q} = 0$.

c. Verdadeira, pois, sendo $p \in \mathbb{Q}^*$ e $q \in \mathbb{Q}'$, vamos supor que exista um número $k \in \mathbb{Q}^*$, tal que $\frac{p}{q} = k$, ou seja, $\frac{p}{k} = q$; isso é um absurdo, pois $p \in \mathbb{Q}^*$ e $k \in \mathbb{Q}^*$. Logo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}'$.

d. Verdadeira, pois, por exemplo, para $p = \sqrt{50}$ e $q = \sqrt{2}$, temos $p \times q = \sqrt{50} \times \sqrt{2} = \sqrt{100} = 10$.

e. Falsa, pois, por exemplo, para $p = \sqrt{2}$ e $q = -\sqrt{2}$, temos $p + q = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

f. Verdadeira, pois o inverso de um número irracional q é o número $\frac{1}{q}$. Vamos supor que exista um número $k \in \mathbb{Q}^*$ tal que $\frac{1}{q} = k$, ou seja, $\frac{1}{k} = q$; isso é um absurdo, pois $k \in \mathbb{Q}^*$. Logo $\frac{1}{q} \in \mathbb{Q}'$.

9. alternativa **d**

Sendo x o valor da diária de cada quarto, em real, q o número de quartos alugados e d o número de dias da estadia, temos: $\frac{3.840}{qd} = x$

$312 < \frac{3.840}{qd} < 328 \Rightarrow \frac{1}{312} > \frac{qd}{3.840} > \frac{1}{328}$

$\therefore \frac{3.840}{312} > qd > \frac{3.840}{328}$

$\frac{3.840}{312} \approx 12{,}3$ e $\frac{3.840}{328} \approx 11{,}7$

Como qd é um número inteiro, temos $qd = 12$.

Logo, o preço x, em real, da diária de cada quarto é dada por: $x = \frac{3.840}{qd} \Rightarrow x = \frac{3.840}{12} = 320$

10. a. $g = 3{,}7777777... \Rightarrow 10g = 37{,}7777777...$

$\therefore 10g - g = 37{,}777777... - 3{,}7777777... \Rightarrow 9g = 34$

$\therefore g = \frac{34}{9}$

b. $g = 7{,}3444444... \Rightarrow 10g = 73{,}4444444...$

$\therefore 10g - g = 73{,}444444... - 7{,}3444444... \Rightarrow$

$\Rightarrow 9g = 66{,}1$

$\therefore g = \frac{66{,}1}{9} = \frac{661}{90}$

c. $g = 5{,}126666... \Rightarrow 100g = 512{,}6666...$

$\therefore 100g - g = 512{,}6666... - 5{,}126666... \Rightarrow$

$\Rightarrow 99g = 507{,}54$

$\therefore g = \frac{507{,}54}{99} = \frac{50.754}{9.900}$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

d. $g = 12{,}485485\ldots \Rightarrow 1.000\,g = 12485{,}485485\ldots$

$\therefore 1.000\,g - g = 12485{,}485485\ldots - 12{,}485485\ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow 999g = 12.473$

$\therefore g = \frac{12.473}{999}$

11. a. Um valor possível é 5, pois: $5 \cdot 1{,}8 = 9$

b. Um valor possível é 2,5, pois: $2{,}5 \cdot 3 = 7{,}5$

c. Sim, porque o produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.

12. Se no quartel houvesse:

- 1 tenente, haveria $\frac{300}{7}$ soldados e $\frac{15}{2}$ sargentos;
- 2 tenentes, haveria $\frac{600}{7}$ soldados e $\frac{30}{2}$ sargentos;
- 3 tenentes, haveria $\frac{900}{7}$ soldados e $\frac{45}{2}$ sargentos;
- n tenentes, haveria $\frac{300n}{7}$ soldados e $\frac{15n}{2}$ sargentos.

Portanto, o menor valor natural possível de n é o mmc(7, 2) = 14.

Para $n = 14$, temos 14 tenentes, 600 soldados e 105 sargentos.

Portanto, o menor número possível de militares em serviço nesse dia era 719.

13. Indicando por h_P e h_M as medidas finais das alturas que Pedro e Maria podem alcançar na idade adulta, respectivamente, temos:

$h_P \in \left[\frac{180 + 172 + 12{,}5}{2} - 6{,}25;\ \frac{180 + 172 + 12{,}5}{2} + 6{,}25\right] \Rightarrow h_P \in [176{,}0;\ 188{,}5]$

$h_M \in \left[\frac{180 + 172 - 12{,}5}{2} - 6{,}25\right.$

$\left.\frac{180 + 172 - 12{,}5}{2} + 6{,}25\right] \Rightarrow h_M \in [163{,}5;\ 176{,}0]$

Como $[176{,}0;\ 188{,}5] \cap [163{,}5;\ 176{,}0] \neq \varnothing$, concluímos que Pedro e Maria podem alcançar a mesma altura na idade adulta.

14. Observando que 16 horas e 12 minutos equivalem a 16,2 h e que 16 horas e 45 minutos equivalem a 16,75 h, sabemos que o intervalo em que o canal A exibiu o filme C foi [14; 16,2], e o intervalo em que o canal B exibiu o filme D foi [15; 16,75]. Portanto:

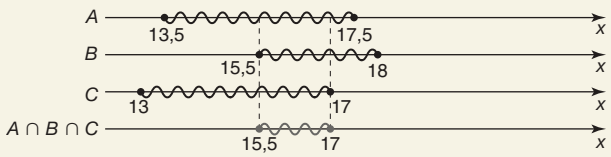
a. O intervalo dos horários em que pelo menos um dos filmes era exibido é a reunião dos intervalos [14; 16,2] e [15; 16,75]. Assim, temos: $[14; 16{,}2] \cup [15; 16{,}75] = [14; 16{,}75]$

b. O intervalo dos horários em que os dois filmes eram exibidos é a intersecção dos intervalos [14; 16,2] e [15; 16,75]. Assim, temos: $[14; 16{,}2] \cap [15; 16{,}75] = [15; 16{,}2]$

c. O intervalo dos horários em que apenas o filme C era exibido é a diferença dos intervalos [14; 16,2] e [15; 16,75], nessa ordem. Assim, temos: $[14; 16{,}2] - [15; 16{,}75] = [14; 15[$

d. O intervalo dos horários em que apenas o filme D era exibido é a diferença dos intervalos [15; 16,75] e [14; 16,2], nessa ordem. Assim, temos: $[15; 16{,}75] - [14; 16{,}2] =]16{,}2; 16{,}75]$

15. Determinando a intersecção dos três intervalos, $A = [13{,}5; 17{,}5]$, $B = [15{,}5; 18]$ e $C = [13; 17]$, temos:



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, concluímos que o fornecedor não vai conseguir visitar os três compradores no mesmo dia, pois o tempo disponível seria menor que 2 horas.

16. alternativa **c**

Considerando todas as medidas em uma mesma unidade, por exemplo, centímetro, temos:

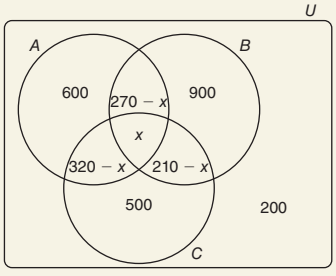
$$\begin{cases} \frac{1.500}{0{,}5} > X > \frac{1.500}{1} \\ X < \frac{9.000}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.000 > X > 1.500 \\ X < 2.250 \end{cases}$$

Logo, $1.500 < X < 2.250$.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 1

1. alternativa **d**

Sendo U o conjunto de todos os entrevistados e x o número de pessoas que assistiram aos três telejornais, temos o diagrama:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

$n(U) = 2.700 \Rightarrow 600 + 500 + 900 + 210 - x + 320 - x + 270 - x + x + 200 = 2.700$

$\therefore 3.000 - 2x = 2.700 \Rightarrow x = 150$

Concluímos, então, que os telejornais A, B e C tiveram, respectivamente, 1.040, 1.230 e 880 telespectadores entre as pessoas entrevistadas. Logo, o telejornal B teve o maior número de telespectadores.

2. alternativa **c**

O número −9 é um inteiro negativo. Logo, $b = -9$.

O número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é irracional, pois é a soma de dois irracionais. Logo, $d = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

O número 2,56 é racional não inteiro. Logo, $c = 2{,}56$.

O número $\sqrt{36}$ é igual a 6. Logo, é um número natural. Portanto, $a = \sqrt{36}$.

3. alternativa **d**

Adicionando o menor extremo de um dos intervalos citados à metade de seu comprimento, obtém-se a abscissa

do seu ponto médio, ou seja:

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a}{2} + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Assim, o ponto médio de qualquer um dos intervalos $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$ ou $]a, b]$ tem abscissa $\frac{a+b}{2}$.

5. alternativa **a**

I. Verdadeira, pois, por exemplo, para $x = 2$ e $y = \frac{1}{2}$, temos $x^y = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$.

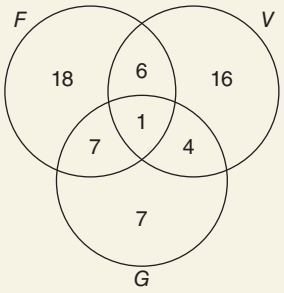
II. Falsa, pois, por exemplo, para $x = \sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2}$, temos $xy = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \notin \mathbb{Q}'$.

III. Falsa, pois, por exemplo, para $x = \frac{1}{2}$, temos $x^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. Logo $\frac{1}{2} > \left(\frac{1}{2}\right)^4$.

Das proposições apresentadas, apenas a proposição I está correta.

6. alternativa **a**

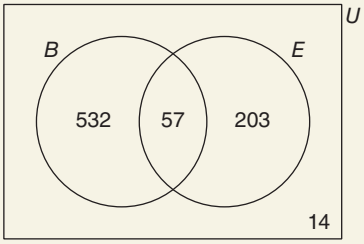
Sendo F, V e G os conjuntos dos colaboradores entrevistados que jogam futebol, treinam voleibol e praticam golfe, respectivamente, temos o seguinte diagrama:



Logo, o total de colaboradores que trabalham nessa empresa é dado por: $18 + 16 + 7 + 7 + 6 + 4 + 1 = 59$

7. alternativa **b**

Considerando os dados do problema, temos o diagrama:



Logo, o total de entrevistados é dado por: $532 + 57 + 203 + 14 = 806$

CAPÍTULO 2 Temas básicos da Álgebra e Matemática financeira

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. $10x - 8 = 3x + 6 \Rightarrow 7x = 14 \therefore x = 2$

b. $5 + 2(3y - 1) = 7y + 6 \Rightarrow 5 + 6y - 2 = 7y + 6 \therefore y = -3$

c. $4t - (2t - 5) = 3 - 4(2t + 3) \Rightarrow 10t = -14 \therefore t = -\frac{7}{5}$

2. a. Mutiplicando por 12 ambos os membros, obtemos:

$4n + 3n + 6 = 48 \Rightarrow n = 6 \therefore S = \{6\}$

b. Multiplicando por 6 ambos os membros, obtemos:

$3(2k + 1) - (k - 3) = 2 \Rightarrow k = -\frac{4}{5} \therefore S = \left\{-\frac{4}{5}\right\}$

3. alternativa **a**

Indicando por x o valor do prêmio, em real, temos:

$\frac{x}{10} - 700 = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 42.000$

4. alternativa **e**

Para não aumentar o preço do suco, e não ter prejuízo, o comerciante não deve aumentar seus gastos.

Atualmente, são gastos $\frac{2}{3} \cdot 18{,}00 + \frac{1}{3} \cdot 14{,}70 = 16{,}90$, e sendo x a redução, em real, procurada, devemos ter:

$\frac{2}{3} \cdot (18{,}00 - x) + \frac{1}{3} \cdot 15{,}30 = 16{,}90$, multiplicando ambos os membros por 3:

$2 \cdot (18{,}00 - x) + 15{,}30 = 50{,}70 \Rightarrow 36{,}00 - 2x = 35{,}40$

$\therefore x = 0{,}30$

5. alternativa **a**

Sendo x o número total de máscaras, temos:

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{6} + 2\left(\frac{x}{8} + \frac{x}{6}\right) + 105 = x \Rightarrow 3\left(\frac{x}{8} + \frac{x}{6}\right) + 105 = x$$

$$\therefore 3\left(\frac{3x + 4x}{24}\right) + 105 = x \Rightarrow \frac{7x}{8} + 105 = x$$

$\therefore 7x + 840 = 8x \Rightarrow x = 840$

6. Indicando por x a capacidade do tanque, em litro, temos:

$\frac{x}{4} + \frac{x}{4} + 10 = \frac{2x}{3}$

Multiplicando por 12 ambos os membros dessa equação, obtemos:

$3x + 3x + 120 = 8x \Rightarrow 2x = 120 \therefore x = 60$

7. a. $m_a = \frac{4{,}78 + 4{,}64 + 4{,}70 + 4{,}80 + 4{,}78}{5} = 4{,}74$

b. $m_{ap} = \frac{7{,}50 \cdot 1 + 8{,}75 \cdot 2 + 7{,}50 \cdot 2 + 6{,}00 \cdot 3}{1 + 2 + 2 + 3} = 7{,}25$

c. Sendo m o número de mulheres que trabalham nessa repartição, temos que o número de homens é $18 - m$. Assim:

$\frac{24m + 30(18 - m)}{18} = 27 \Rightarrow m = 9$

9. a. $9x - 5(3 - 2x) > 7x + 9 \Rightarrow 9x + 10x - 7x > 9 + 15$

$\therefore x > 2$

Logo: $S = \{3, 4, 5, 6, ...\}$

b. $4y - 5 < 2(y + 3) + 5y \Rightarrow 4y - 2y - 5y < 6 + 5$

$\therefore y > -\frac{11}{3}$

Logo: $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

c. $6t - (5t + 8) \leqslant 1 - 2(5 - t) \Rightarrow 6t - 5t - 8 \leqslant 1 - 10 + 2t$

$\therefore t \geqslant 1$

Logo: $S = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

10. a. Multiplicando por 40 ambos os membros, obtemos:

$16x - 40 \geqslant 4x + 15x \Rightarrow x \leqslant -\frac{40}{3}$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{40}{3}\right\}$

b. Multiplicando por 4 ambos os membros, obtemos:

$16k - 3(k + 2) < 2 + 8(1 - 3k) \Rightarrow k < \frac{16}{37}$

Logo: $S = \left\{k \in \mathbb{R} \mid k < \frac{16}{37}\right\}$

c. Multiplicando por 2 ambos os membros, obtemos:

$4a - (a - 4) \neq 2 \Rightarrow a \neq -\frac{2}{3}$

Logo: $S = \left\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq -\frac{2}{3}\right\}$

11. Sendo x o número de quilômetros rodados por dia, a opção pela agência A será mais vantajosa do que pela agência B se: $80 + 0{,}92x < 74 + 0{,}98x$

Ou seja:

$80 - 74 < 0{,}98x - 0{,}92x \Rightarrow 6 < 0{,}06x \therefore x > 100$

Assim, concluímos que será mais vantajoso alugar um carro na agência A se o total de quilômetros rodados por dia for superior a 100 km.

12. a. O sistema é equivalente a: $\begin{cases} x = 3 - 5y & (1) \\ 2x + 3y = 13 & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$2(3 - 5y) + 3y = 13 \Rightarrow y = -1$

Logo: $x = 3 - 5 \cdot (-1) \Rightarrow x = 8$

Logo: $S = \{(8, -1)\}$

b. O sistema é equivalente a: $\begin{cases} 5x + 3y = 11 & (1) \\ y = 6x - 4 & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$5x + 3(6x - 4) = 11 \Rightarrow x = 1$

Portanto: $y = 6 \cdot 1 - 4 \Rightarrow y = 2$

Logo: $S = \{(1, 2)\}$

c. Multiplicando a primeira equação por 4 e a segunda por −3, obtemos: $\begin{cases} 12x - 8y = 4 & (1) \\ -12x - 15y = 6 & (2) \end{cases}$

Adicionando, membro a membro, as equações, obtemos: $-23y = -2 \Rightarrow y = \frac{2}{23}$

Substituindo y por $\frac{2}{23}$ em (1) ou (2); por exemplo, em (1), obtemos: $12x - 8 \cdot \frac{2}{23} = 4 \Rightarrow x = \frac{9}{23}$

Logo: $S = \left\{\left(\frac{9}{23}, \frac{2}{23}\right)\right\}$

d. O sistema é equivalente a: $\begin{cases} 8x - 3y = 3 \\ -3x - 2y = 2 \end{cases}$

Multiplicando por 3 a primeira equação e por 8 a segunda, obtemos:

$\begin{cases} 24x - 9y = 9 & (1) \\ -24x - 16y = 16 & (2) \end{cases}$

Adicionando-se, membro a membro, as equações, obtemos: $-25y = 25 \Rightarrow y = -1$

Substituindo y por −1 em (1) ou (2); por exemplo, em (1), obtemos: $24x - 9 \cdot (-1) = 9 \Rightarrow x = 0$

Logo: $S = \{(0, -1)\}$

13. alternativa **a**

- a quantidade de gasolina no reservatório A = x;
- a quantidade de gasolina no reservatório B = y;
- a quantidade de gasolina nos dois reservatórios é 1.100 L.

$x + 100 = \frac{y}{2} \Rightarrow x = \frac{y}{2} - 100$

Logo: $\begin{cases} x + y = 1.100 & (1) \\ x = \frac{y}{2} - 100 & (2) \end{cases}$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$\left(\frac{y}{2} - 100\right) + y = 1.100 \Rightarrow y = 800$

14. Indicando por x e y, respectivamente, as quantidades de café tupi e de café catuaí amarelo que compõem 1 kg da mistura, temos o sistema:

$\begin{cases} x + y = 1 \\ 9{,}60x + 8{,}80y = 9{,}12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - x & (1) \\ 9{,}60x + 8{,}80y = 9{,}12 & (2) \end{cases}$

Logo: $9{,}60x + 8{,}80(1 - x) = 9{,}12 \Rightarrow x = 0{,}4$

Substituindo x por 0,4 em (1), chegamos a $y = 0{,}6$.

Concluímos, então, que cada quilograma da mistura contém 0,4 kg de café tupi e 0,6 kg de café catuaí amarelo.

16. a. $x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 = 25$ e, portanto, $x = \pm 5$

Logo: $S = \{5, -5\}$

b. $3t^2 - 48 = 0 \Rightarrow t^2 = 16$ e, portanto, $t = \pm 4$

Logo: $S = \{4, -4\}$

c. $x(x - 7) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x - 7 = 0$ e, portanto, $x = 0$ ou $x = 7$

Logo: $S = \{0, 7\}$

d. $y(5y + 2) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $5y + 2 = 0 \therefore y = 0$ ou $y = -\frac{2}{5}$

Logo: $S = \left\{-\frac{2}{5}, 0\right\}$

e. $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25 + 24 = 49$

$\therefore x = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 7}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -2$

Logo: $S = \left\{-2, \frac{1}{3}\right\}$

f. $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$

$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} \Rightarrow t = 3$

Logo: $S = \{3\}$

g. $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 \qquad y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{-7}}{4}$

Como $\sqrt{-7} \notin \mathbb{R}$, concluímos que a equação não possui raiz real. Logo: $S = \varnothing$

h. Multiplicando por 10 ambos os membros da equação, temos: $10\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{5}\right) = 10\left(\frac{30 + x}{10}\right)$

$5x^2 + 6x = 30 + x \Rightarrow 5x^2 + 5x - 30 = 0$

Dividindo por 5 ambos os membros, obtemos:
$x^2 + x - 6 = 0$
$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 2$ ou $x = -3$
Logo: $S = \{-3, 2\}$

17. alternativa **c**
Para que a equação do 2º grau admita raízes reais, devemos ter $\Delta \geqslant 0$, ou seja, $b^2 - 4ac \geqslant 0$. Assim:
$8^2 - 4(-2)k \geqslant 0 \Rightarrow 64 + 8k \geqslant 0 \therefore 8k \geqslant -64 \Rightarrow k \geqslant -8$

18. a. $S = 5$ e $P = 6 \Rightarrow x = 2$ e $x = 3$
b. $S = 9$ e $P = 20 \Rightarrow y = 4$ e $y = 5$
c. $S = -5$ e $P = 6 \Rightarrow x = -2$ e $x = -3$
d. $S = -2$ e $P = -8 \Rightarrow t = -4$ e $t = 2$

19. A parcela, em real, destinada a cada apartamento pode ser calculada por $80 + 2 \cdot \frac{x}{2}$ ou por $\frac{3.876}{x}$. Assim, temos:
$80 + 2 \cdot \frac{x}{2} = \frac{3.876}{x} \Rightarrow 80 + x = \frac{3.876}{x}$
$\therefore x^2 + 80x - 3.876 = 0 \Rightarrow x = 34$ ou $x = -114$
Como não convém o número negativo, concluímos que o condomínio é formado por 34 apartamentos.

20. a. $\begin{cases} x = 2 + y & (1) \\ x^2 + y^2 + y = 11 & (2) \end{cases}$
Substituindo (1) em (2), obtemos:
$(2 + y)^2 + y^2 + y = 11$
Ou seja, $2y^2 + 5y - 7 = 0 \Rightarrow y = 1$ ou $y = -\frac{7}{2}$
Substituindo y por 1 em (1), obtemos: $x = 3$
Substituindo y por $-\frac{7}{2}$ em (1), obtemos: $x = -\frac{3}{2}$
Logo: $S = \left\{(3, 1), \left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)\right\}$

b. $\begin{cases} y = 4 - 2x & (1) \\ x^2 + x - y = 6 & (2) \end{cases}$
Substituindo (1) em (2), obtemos:
$x^2 + x - (4 - 2x) = 6$
Ou seja, $x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -5$
Substituindo x por 2 em (1), obtemos: $y = 0$
Substituindo x por -5 em (1), obtemos: $y = 14$
Logo: $S = \{(-5, 14), (2, 0)\}$

c. $\begin{cases} y = 3x - 2 & (1) \\ x^2 - 2y - x = -2 & (2) \end{cases}$
Substituindo (1) em (2), obtemos:
$x^2 - 2(3x - 2) - x = -2$
Ou seja, $x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 6$
Substituindo x por 1 em (1), obtemos: $y = 1$
Substituindo x por 6 em (1), obtemos: $y = 16$
Logo: $S = \{(1, 1), (6, 16)\}$

21. a. As raízes do trinômio são 3 e 1; portanto:
$p^2 - 4p + 3 = (p - 3)(p - 1)$

b. As raízes do trinômio são $\frac{1}{2}$ e -2; portanto:
$2y^2 + 3y - 2 = 2\left(y - \frac{1}{2}\right)(y + 2)$

22. alternativa **e**
$E = \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 5x + 6} \Rightarrow E = \frac{\cancel{(x-3)}(x-4)}{(x-2)\cancel{(x-3)}} \therefore E = \frac{x-4}{x-2}$

26. $27\% \cdot 60 = 16{,}2$

27. $12\% \cdot 380.000 = 0{,}12 \cdot 380.000 = 45.600$
$5\% \cdot 45.600 = 0{,}05 \cdot 45.600 = 2.280$

28. a. Indicando por p o número de pessoas com 15 anos ou mais de idade, residentes no Brasil em 2023, temos que 5,4% de p equivale a 9.300.000, isto é:
$0{,}054 \cdot p = 9.300.000 \Rightarrow p \approx 172.222.222$
b. Não. Com os dados fornecidos pelo texto não podemos afirmar que, em 2023, o número h_A de homens analfabetos era maior que o número m_A de mulheres analfabetas. O número h de homens com 15 anos ou mais e o número m de mulheres com 15 anos ou mais são tais que h_A e m_A satisfazem as igualdades:
$\frac{h_A}{h} = 0{,}057$ e $\frac{m_A}{m} = 0{,}052$
$h + m = 172.222.222$ e $h_A + m_A = 9.300.000$
Assim $h = 68.888.892$, $m = 103.333.330$, $h_A = 3.926.667$ e $m_A = 5.373.333$, ou seja, o número de homens analfabetos era menor que o de mulheres analfabetas.
c. Sendo y o percentual procurado, temos:
$y = \frac{0{,}071}{0{,}032} \Rightarrow y \approx 222\%$

29. alternativa **b**
Sendo 1 tonelada = 1.000 kg, a razão entre a massa do dióxido de urânio puro e a massa de minério extraído é: $\frac{1{,}5}{1.000}$
Representando na forma de taxa percentual, temos:
$\frac{1{,}5}{1.000} = \frac{0{,}15}{100} = 0{,}15\%$

30. Sendo c o preço de custo, temos:
$89{,}60 = c + 0{,}4c \Rightarrow 89{,}60 = 1{,}4c \therefore c = \frac{89{,}60}{1{,}4} = 64$

31. O prejuízo por unidade é dado por: $11 - 9{,}9 = 1{,}1$.
Logo, o percentual de prejuízo é dado por:
$\frac{1{,}1}{11} = 0{,}1 = 10\%$

32. Os descontos sucessivos de 20% e de 15% sobre um preço x resultam no preço: $x \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 0{,}68x$
Logo, o percentual de desconto acumulado nessas duas semanas é dado por: $\frac{x - 0{,}68x}{x} = 0{,}32 = 32\%$

33. a. O percentual de variação do dólar em relação ao real, da primeira data para a posterior, é calculado por:
$\frac{5{,}00 - 5{,}40}{5{,}40} = -\frac{0{,}40}{5{,}40} \approx -0{,}074 \approx -7{,}4\%$
Logo, o percentual de desvalorização é 7,4%.
b. Um real valia $\frac{1}{5{,}4}$ de dólar e passou a valer $\frac{1}{5}$ de dólar.
O percentual de variação é dado por:
$\frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5{,}40}}{\frac{1}{5{,}40}} = 0{,}08 = 8\%$

34. **a.** $J = 340 \cdot 0{,}03 \cdot 20 = 204$

b. $M = 340 + 204 = 544$

35. **a.** Indicando por i a taxa de juro mensal, temos:

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 540 = 4.000 \cdot i \cdot 9$

$540 = 4.000 \cdot i \cdot 9 = 36.000 \cdot i \therefore i = 0{,}015 = 1{,}5\%$

b. Indicando por t o tempo, em mês:

$2.490 = 8.300 \cdot 0{,}02 \cdot t$

$\therefore 2.490 = 166t \Rightarrow t = 15$

c. Indicamos por V o valor do boleto; então, temos:

$V = 320 + 320 \cdot 0{,}008 \cdot 6 \Rightarrow V = 320 + 15{,}36 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 335{,}36$

36. Sendo C o capital inicial, em real, na primeira aplicação, temos que o juro J_1 após os primeiros 8 meses é dado por: $J_1 = C \cdot 0{,}02 \cdot 8$, ou seja, $J_1 = 0{,}16C$; logo, o montante M_1 após os primeiros 8 meses é calculado por $M_1 = 1{,}16C$.

O montante M_1 foi reaplicado nos 10 meses seguintes, produzindo um juro J_2 dado por $J_2 = 1{,}16x \cdot 0{,}025 \cdot 10$, ou seja, $J_2 = 0{,}29C$. Logo, o montante M_2, após os últimos 10 meses, é calculado por $M_2 = 1{,}16C + 0{,}29C$, isto é, $M_2 = 1{,}45C$. Assim:

$1{,}45C = 7.250 \Rightarrow C = 5.000$

37. Para calcular o preço que Joana pagou pelo liquidificador, podemos fazer: $0{,}9 \cdot 120 = 108$.

Desse modo, temos: $J = \text{R\$ } 120{,}00 - \text{R\$ } 108{,}00 = \text{R\$ } 12{,}00$

Como o juro incidiria apenas sobre o valor de R$ 48,00 (já que teria uma entrada de R$ 60,00, restando R$ 108 − R$ 60,00 = R$ 48,00 para ser considerado no cálculo de juros do mês seguinte), podemos calcular a taxa de juro:

$12 = 48 \cdot i \cdot 1 \Rightarrow i = \frac{12}{48} \Rightarrow i = 25\%$

38. alternativa **d**

Poupança:

juro: $0{,}56\% \cdot \text{R\$ } 500{,}00 = 0{,}0056 \cdot \text{R\$ } 500{,}00 = \text{R\$ } 2{,}80$

montante: $\text{R\$ } 500{,}00 + \text{R\$ } 2{,}80 = \text{R\$ } 502{,}80$

CDB:

juro: $0{,}876\% \cdot \text{R\$ } 500{,}00 = 0{,}00876 \cdot \text{R\$ } 500{,}00 = \text{R\$ } 4{,}38$

imposto a ser pago: $4\% \cdot \text{R\$ } 4{,}38 = \text{R\$ } 0{,}17$

montante: $\text{R\$ } 500{,}00 + \text{R\$ } 4{,}38 - \text{R\$ } 0{,}17 = \text{R\$ } 504{,}21$

Logo, a aplicação mais vantajosa é o CDB, pois totalizará um montante de R$ 504,21.

40. $C = \text{R\$ } 5.000{,}00$

$t = 6$ meses $\quad i = 2\% = 0{,}02$ (taxa mensal)

a. $M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 5.000(1 + 0{,}02)^6 = 5.000(1{,}02)^6$

$\therefore M = 5.000 \cdot 1{,}13 = 5.650$

b. $J = M - C \Rightarrow J = 5.650 - 5.000 = 650$

41. $t = ?$ (anos) $\quad i = 5\%$ ao ano $\quad$ Capital $= C \quad M = 2C$

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 2C = C(1 + 0{,}05)^t$

$\therefore 2 = (1{,}05)^t \Rightarrow t \approx 14{,}2$

Logo, o tempo necessário é, aproximadamente, 14,2 anos, ou seja, aproximadamente, 14 anos e 6 meses.

42. $C = ?$ $\quad t = 7$ anos

$i = 9\%$ ao ano $\quad M = \text{R\$ } 36.400{,}00$

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 36.400 = C(1 + 0{,}09)^7 \therefore C \approx 20.000$

43. $M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 1.400 \cdot (1 + 0{,}012)^8$

$\therefore M = 1.400 \cdot 1{,}1 \Rightarrow M = 1.540$

Como $M = J + C$, deduzimos que $J = 1.540 - 1.400$, ou seja, $J = 140$.

Concluímos, então, que, ao término dos 8 meses, o montante da dívida será de R$ 1.540,00, e o juro que terei de pagar será de R$ 140,00.

44. Insira os dados na planilha, como mostrado a seguir.

	A	B
1	Tempo (*mês*)	Montante (R$)
2	0	1000
3		

Na célula B3, insera a fórmula $= B2 \cdot (1 + 0{,}0168) + 500$ e clique no *enter*. O valor calculado nessa célula é o montante produzido no final do mês que representa o valor do mês anterior acrescido do juro correspondente do mês mais o depósito de R$ 500,00.

	A	B
1	Tempo (*mês*)	Montante (R$)
2	0	1000
3	1	1516,80

Para saber durante quantos meses Camila precisa investir para ter a quantia do valor da viagem, selecione as células A3 e B3, clique no quadrinho que aparece na parte inferior à direita e arraste para baixo até aparecer o valor igual ou superior a 5.400. Logo, Camila levará pelo menos 9 meses para obter a quantia de R$ 5.400,00.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

45. **a.** $M = 10.000(1 + 0{,}06)(1 + 0{,}08)(1 + 0{,}1) \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 10.000 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}1 \therefore M = 12.592{,}8$

b. Como $M = J + C$, temos:

$J = 12.592{,}80 - 10.000{,}00 = 2.592{,}80$

46. **a.** Para calcular o montante do investimento A, temos:

$M_A = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M_A = 4.000 \cdot (1 + 0{,}009)^{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_A = 4.000 \cdot (1{,}009)^{12} \Rightarrow M_A = 4.000 \cdot 1{,}11 = 4.440$

Para calcular o montante do investimento B, temos:

$M_B = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M_B = 3.500 \cdot (1 + 0{,}01)^{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_B = 3.500 \cdot (1{,}01)^{12} \Rightarrow M_B = 3.500 \cdot 1{,}13 = 3.955$

O montante total é a soma dos montantes M_A e M_B:

$4.440 + 3.955 = 8.395$

b. Calculando o rendimento de cada investimento, temos:

Investimento A: $4.440 - 4.000 = 440$

Investimento B: $3.955 - 3.500 = 455$

Portanto, o investimento B produziu o maior rendimento.

47. $C = p \quad i_1 = -12\% \quad i_2 = -5\% \quad i_3 = -3\%$

a. $M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \Rightarrow$

$\Rightarrow M = p(1 - 0{,}12)(1 - 0{,}05)(1 - 0{,}03)$

$\therefore M = 0{,}81092 \cdot p$

b. O percentual d de desconto é dado por:

$$d = \frac{p - 0{,}81092 \cdot p}{p} = 18{,}908\%$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Sendo x o comprimento do trem, em metro, temos que o comprimento do túnel é $3x + 260$; logo:

$3x + 260 + x = 780 \Rightarrow x = 130$

2. Sendo x o total de sacas de feijão, temos que:

o total de sacas de milho colhidas foi de $x + 2.400$;

o total de sacas de café colhidas foi de $4(x + 2.400)$.

Assim, temos:

$x + x + 2.400 + 4(x + 2.400) = 14.400 \Rightarrow x = 400$

Concluímos, então, que o total de sacas de café colhidas é dado por: $4(400 + 2.400) = 11.200$

3. Indicando por x o número de ingressos vendidos do tipo A, temos que o número de ingressos vendidos do tipo B foi $260 - x$. Assim, devemos ter:

$40x + 20(260 - x) > 9.000 \Rightarrow x > 190$

Logo, o menor número possível de ingressos do tipo A que podem ter sido vendidos é 191.

4. Indicando por a e b, respectivamente, as quantidades de solução aquosa dos reservatórios A e B que vão compor a solução desejada, temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b = 2.000 \\ 0,08a + 0,16b = 0,1 \cdot 2.000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2.000 - b & (1) \\ 0,08a + 0,16b = 200 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2), chegamos a:

$0,08(2.000 - b) + 0,16b = 200 \Rightarrow b = 500$

Substituindo b por 500 em (1), determinamos $a = 1.500$

Concluímos, assim, que a mistura deve ter 1.500 L do conteúdo do reservatório A e 500 L do conteúdo do reservatório B.

5. Seja x a quantia, em real, que cada um tinha ao iniciar suas compras no supermercado, e seja y a quantia gasta por Paula em suas compras. Assim, esquematizamos:

- no inicio das compras a quantia x de Paula é igual à quantia x de Marcelo;
- no final das compras, Paula gastou y e Marcelo gastou $y + 60$;
- a quantia remanescente de Paula foi $x - y$ e a de Marcelo foi $x - (y + 60)$.

Como a quantia remanescente de Paula era o dobro da de Marcelo, temos: $x - y = 2(x - y - 60) \Rightarrow y = x - 120$

Como chegamos a uma equação com duas incógnitas, concluímos que o problema é indeterminado, pois essa equação tem mais de uma solução, por exemplo, (150, 30), (200, 80) e (180, 160) são algumas soluções da equação. Portanto, faltam dados para determinar a quantia que cada um tinha ao iniciar as compras.

6. Sejam x e $x + 3$ os números de cabeças de gado dos lotes, e y e $y + 10$ os perímetros torácicos, em centímetro, dos animais do lote menor e do maior, respectivamente. Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{2,8 \cdot y}{30} \cdot x \cdot 300 = 67.200 \\ \frac{2,8 \cdot (y + 10)}{30} \cdot (x + 3) \cdot 300 = 88.200 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy = 2.400 \\ (y + 10)(x + 3) = 3.150 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y = \frac{2.400}{x} & (1) \\ yx + 3y + 10x + 30 = 3.150 & (2) \end{cases}$$

Substituindo (1) em (2):

$\frac{2.400}{x} \cdot x + 3 \cdot \frac{2.400}{x} + 10x + 30 = 3.150 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7.200}{x} + 10x - 720 = 0 \therefore 10x^2 - 720x + 7.200 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 72x + 720 = 0 \therefore x = 12$ ou $x = 60$

Como $x = 60$ não convém, pois foram vendidos menos de 100 animais, concluímos que um dos lotes tinha 12 animais e o outro, 15.

7. A balança comercial, em bilhão de dólares, é dada por:

$x = 135,40 - 91,20 = 44,20$

$y = 152,28 - 94,82 = 57,46$

Logo, o crescimento da balança comercial de 2022 para 2023 foi de: $57,46 - 44,20 = 13,26$

- A taxa percentual de crescimento da balança comercial de 2022 para 2023 é:

$\frac{13,26}{44,20} = 0,3 = \frac{0,3 \cdot 100}{100} = \frac{30}{100} = 30\%$

8. a. O texto informa que cerca de 18,6 milhões de mulheres vivenciaram algum tipo de violência ou agressão, o que corresponde a 28,9%. Indicando por x o número total de mulheres na época da pesquisa, temos:

$$\frac{18.600.000}{28,9} = \frac{x}{100} \Rightarrow x \approx 64.359.861$$

9. Para calcular a porcentagem de indígenas que vivem na Amazônia Legal, temos que dividir o número de indígenas que vivem na região pelo número total de indígenas que vivem no Brasil.

$$\frac{867.900}{1.693.535} \approx 0,512 = 51,2\%$$

10. Para calcular o juro e o montante dos itens **a** e **b**, é necessário inserir na célula B2 o valor do capital, na célula B3 o valor da taxa e na célula B4 o valor do período.

a. $C = \text{R\$ } 940,00 \quad i = 1,2\% \quad t = 5$ anos

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 940 \cdot 0,012 \cdot 5 \Rightarrow J = 56,40$

$M = C + J \Rightarrow M = 940 + 56,40 \Rightarrow M = 996,40$

b. $C = \text{R\$ } 1.750,00 \quad i = 0,78\% \quad t = 24$ meses

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 1.750 \cdot 0,0078 \cdot 24 \Rightarrow J = 327,60$

$M = C + J \Rightarrow M = 1.750 + 327,60 \Rightarrow M = 2.077,60$

c. $C = \text{R\$ } 940,00 \quad i = 1,2\% \quad t = 5$ anos

$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 940 \cdot (1 + 0,012)^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow M \approx 987,16$

$J \Rightarrow M - C \Rightarrow J \approx 987,16 - 930 \Rightarrow J \approx 57,16$

$C = \text{R\$ } 1.750,00 \quad i = 0,78\% \quad t = 24$ meses

$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 1.750 \cdot (1 + 0,0078)^{24} \Rightarrow$

$\Rightarrow M \approx 2.108,74$

$J = M - C \Rightarrow J \approx 2.108,74 - 1.750 \Rightarrow J \approx 358,74$

11. a. O percentual de variação do preço do peso argentino, em real, da primeira data para a posterior, é calculado por:

$$\frac{0{,}0138 - 0{,}0141}{0{,}0141} \approx -0{,}02128$$

b. Em 10 de novembro de 2023, 1 real (brasileiro) comprava $\frac{1}{0{,}0141}$ peso argentino; e em 20 de novembro de 2023, 1 real (brasileiro) comprava $\frac{1}{0{,}0138}$ peso argentino. Logo, a variação percentual do preço do real em peso argentino é dada por:

$$\frac{\frac{1}{0{,}0138} - \frac{1}{0{,}0141}}{70{,}92} = \frac{70{,}922 - 72{,}464}{70{,}922} =$$

$$= \frac{1{,}542}{70{,}922} = 0{,}02174 = 2{,}174\%$$

12. a. Durante esse período, Alex pagou apenas o valor mínimo de cada mês. Sejam F_0 o valor da fatura do mês atual e F_1 e F_2 os valores das faturas dos 2 meses seguintes, respectivamente. Dessa maneira, Alex pagou nesse período: $0{,}05 \cdot 1.500 + 0{,}05 \cdot F_0 + 0{,}05 \cdot F_1 + 0{,}05 \cdot F_2$

Sendo:

$F_0 = (1 + 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}05) \cdot 1.500 = 1.567{,}5$

$F_1 = (1 + 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}05) \cdot 1.567{,}5 = 1.638{,}04$

$F_2 = (1 + 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}05) \cdot 1.638{,}04 = 1.711{,}75$

13. A multa é o juro simples J produzido pelo capital R$ 250,00 aplicado durante o tempo de atraso, ou seja, 9 dias, à taxa de 0,18% ao dia. Assim, temos:

$J = 250 \cdot 0{,}0018 \cdot 9 = 4{,}05$

14. a. Indicando por x a medida de área da superfície da Terra, em milhões de quilômetros quadrados, temos:

$$\frac{8{,}52}{1{,}67} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 510{,}2$$

b. Indicando por y a medida de área do continente americano, em milhões de quilômetros quadrados, temos:

$$\frac{8{,}52}{21{,}23} = \frac{y}{100} \Rightarrow y = 40{,}13$$

c. Indicando por w a medida de área da América do Sul, em milhões de quilômetros quadrados, temos:

$$\frac{8{,}52}{48{,}1} = \frac{w}{100} \Rightarrow w = 17{,}71$$

d. O quociente da medida de área da Europa, exceto os países transcontinentais europeus, e da medida de área do Brasil é o percentual pedido:

$$\frac{6{,}31}{8{,}52} = \frac{z}{100} \Rightarrow z = 74{,}06\%$$

15. O preço do carro deve ser calculado como a soma do valor atual de cada prestação mais o valor da entrada (R$ 40.000,00). O valor atual da prestação é calculado por $\frac{1850}{(1 + 0{,}023)^n}$, em que n é o número de prestação.

Seja A a soma dos valores de cada prestação, temos:

$$A = \frac{1.850}{1{,}023} + \frac{1.850}{(1{,}023)^2} + \ldots + \frac{1.850}{(1{,}023)^{24}} = 33.830{,}19$$

Adicionando o valor da entrada para a compra do carro com a soma das parcelas (A), temos:

$40.000{,}00 + 33.830{,}19 = 73.830{,}19$

16. alternativa **d**

$C =$ R$ 12.000,00 $\quad$ $i = 3\% = 0{,}03$ (taxa mensal)

$t = 24$ meses $\quad$ $M = ?$

Logo, $M = 12.000 \cdot (1 + 0{,}03)^{24} = 12.000 \cdot (1{,}03)^{24}$

17. Se Raquel possuía x reais, Iraci possuía $215.000 - x$ e, lembrando que 1 ano e 3 meses representa $\frac{15}{12}$ do ano, temos:

Indicando por M_{Raquel} o montante de Raquel, temos:

$M_{Raquel} = x\left(1 + 0{,}12 \cdot \frac{15}{12}\right) \therefore M_{Raquel} = 1{,}15x$

Indicando por M_{Iraci} o montante de Iraci, temos:

$M_{Iraci} = (215.000 - x)(1 + 0{,}15)^2$

$\therefore M_{Iraci} = 1{,}3225(215.000 - x)$

Como os montantes resgatados foram iguais, temos:

$1{,}15x = 1{,}3225(215.000 - x) \Rightarrow x = 1{,}15(215.000 - x)$

$\therefore x = 247.250 - 1{,}15x \Rightarrow 2{,}15x = 247.250$

$\therefore x = 115.000$

Concluímos, então, que Raquel possuía R$ 115.000,00, e Iraci possuía R$ 100.000,00.

18. Sendo x a quantia, em real, que Ricardo teria pago antes do vencimento do empréstimo, temos:

$$x(1{,}05)^2 = 13.230 \Rightarrow x = \frac{13.230}{(1{,}05)^2} = \frac{13.230}{1{,}1025} = 12.000$$

19. alternativa **c**

Aplicando a fórmula do montante para juro composto e taxa variável:

$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_t)$, temos:

$M = p(1 + 0{,}05)(1 + 0{,}03)(1 - 0{,}04) = p \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}96$

20. Aplicando a fórmula do montante para juro composto e taxa variável, temos:

$M = C(1 + i_1)(1 + i_2)(1 + i_3) \cdot \ldots \cdot (1 + i_t)$

$M = 78.000(1 - 0{,}2)(1 - 0{,}1)(1 - 0{,}05) = 53.352$

Logo, após os três anos, o valor do automóvel era R$ 53.352,00.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

1. $A_1 = A_2 = A_3 = 500$

Logo:

$$A = \frac{500}{1{,}08} + \frac{500}{(1{,}08)^2} + \frac{500}{(1{,}08)^3} =$$

$$= 462{,}96 + 428{,}67 + 396{,}92 \approx 1.288{,}55$$

2. Sendo x o valor, em real, de cada prestação, temos:

$$1.000 = \frac{x}{1{,}05} + \frac{x}{(1{,}05)^2} + \frac{x}{(1{,}05)^3} + \frac{x}{(1{,}05)^4}$$

$$1.000 \approx \frac{x}{1{,}05} + \frac{x}{1{,}10} + \frac{x}{1{,}16} + \frac{x}{1{,}22}$$

$1.000 \approx 3{,}54x \Rightarrow x \approx 282{,}50$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 2

1. alternativa **e**

$x(x + 2) - 4x = 2x + 5 \Rightarrow x^2 + 2x - 4x = 2x + 5$

$\therefore x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$ ou $x = -1$

Assim, o conjunto-solução S da equação é: $S = \{5, -1\}$

2. alternativa **c**

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 2x \quad (1) \\ 3x - 2y = -3 \quad (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), temos:

$3x - 2(5 - 2x) = -3 \Rightarrow x = 1$

Substituindo $x = 1$ em qualquer uma das equações (1) ou (2), chegamos a: $y = 3$

3. alternativa **d**

$4(5 + 2x) - x > 5 - 3(x + 1) \Rightarrow 20 + 8x - x > 5 - 3x - 3$

$\therefore 10x > -18 \Rightarrow x > -\frac{9}{5}$

Assim, o conjunto-solução S da equação é:

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{9}{5} \right\}$

4. alternativa **a**

Indicando por m a massa total da escultura, em quilograma, temos:

$\frac{m}{100\%} = \frac{37,7}{58\%} \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{37,7}{0,58} \therefore m = 65$

5. alternativa **b**

$C = \text{R\$ } 600,00 \qquad J = \text{R\$ } 54,00 \qquad t = ?$

$i = 1,8\% = 0,018$ (taxa mensal)

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 54 = 600 \cdot 0,018 \cdot t \Rightarrow 54 = 10,8 \cdot t$

$\therefore t = 5$

6. alternativa **d**

$C = \text{R\$ } 300.000,00 \qquad t = 3$ anos

$i = 20\% = 0,2$ (taxa anual) $\qquad M = ?$

Relacionando os dados pela fórmula: $M = C(1 + i)^t$, temos:

$M = 300.000 \cdot (1 + 0,2)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow M = 300.000 \cdot 1,728 = 518.400,00$

CAPÍTULO 3 Geometria plana: triângulos e proporcionalidade

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. No triângulo ABC, temos:

$x + 2x + 3x + 30° = 180° \Rightarrow 6x = 150° \therefore x = 25°$

$25° + 30° + m(A\hat{D}C) = 180° \Rightarrow m(A\hat{D}C) = 125°$

b. Cada ângulo interno do triângulo equilátero mede 60°; logo, $m(B\hat{A}C) = 60°$. Como o ângulo $A\hat{B}D$ é reto, concluímos que a medida x do ângulo $C\hat{D}B$ é dada por:

$x + 90° + 60° = 180° \Rightarrow x = 30°$

2. Indicaremos por α a medida, em grau, de cada um dos ângulos $B\hat{A}D$ e $D\hat{A}C$.

Como $A\hat{C}E$ é externo dos triângulos ABC e ADC, temos:

$\begin{cases} x + 50° = 2\alpha + x \\ x + 50° = \alpha + 2x \end{cases} \Rightarrow x = 25°$ e $\alpha = 25°$

Concluímos, então, que a medida do ângulo $A\hat{C}E$ é: $25° + 50° = 75°$

4. No quadrilátero $EFDA$, temos:

$x + 70° + 90° + 90° = 360° \Rightarrow x = 110°$

O ângulo $E\hat{F}D$ é congruente ao seu ângulo adjacente interno ao quadrilátero tracejado; logo:

$70° + 70° + y = 180° \Rightarrow y = 40°$

5. Os ângulos internos do triângulo ABC são suplementares dos respectivos ângulos externos. Logo: $m(C\hat{A}B) = 80°$ e $m(C\hat{B}A) = 50°$. Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°, deduzimos que $m(A\hat{C}B) = 50°$.

a. Falsa, pois a medida do ângulo $C\hat{A}B$ é diferente da medida dos outros ângulos do triângulo.

b. Falsa, pois os três ângulos internos do triângulo ABC são agudos, concluímos que ele não é obtusângulo.

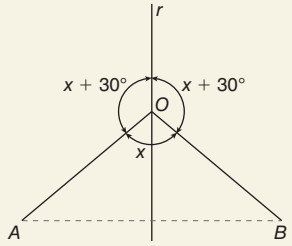
c. Verdadeira, pois, como os ângulos $C\hat{B}A$ e $A\hat{C}B$ têm medidas iguais.

d. Verdadeira, pois, como $C\hat{B}A \cong A\hat{C}B$, os lados opostos a esses ângulos são congruentes, isto é, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

e. Falsa, pois, como $C\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ têm medidas diferentes, deduzimos que os lados opostos a esses ângulos têm medidas diferentes, isto é, $\overline{BC}$ não é congruente a $\overline{AC}$.

f. Falsa, pois $m(C\hat{A}B) = 80°$ e $m(C\hat{B}A) = 50°$, conforme os cálculos apresentados nessa resolução.

6. alternativa **a**



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

$x + x + 30° + x + 30° = 360° \Rightarrow x = 100°$

No triângulo isósceles OAB, temos:

$\begin{cases} m(O\hat{B}A) = m(O\hat{A}B) \\ 100° + m(O\hat{A}B) + m(O\hat{B}A) = 180° \end{cases}$

Logo: $m(O\hat{B}A) = 40°$

7. O triângulo ABC é isósceles, pois:

$m(B\hat{C}A) = m(C\hat{B}A) = 45°$

Logo: $AB = AC = 1.260$ m

8. alternativa **c**

$ABCD$ é um quadrado; então, $m(B\hat{A}D) = 90°$ e ABE é um triângulo equilátero; então, $m(B\hat{A}E) = 60°$. Logo, $m(E\hat{A}D) = 30°$.

Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ são congruentes; então, o triângulo AED é isósceles de base $\overline{ED}$. Logo, $m(A\hat{E}D) = m(A\hat{D}E)$.

Temos, no triângulo ADE, que:

$m(A\hat{E}D) + m(A\hat{D}E) + 30° = 180° \Rightarrow$

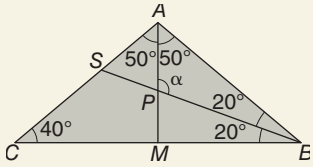
$\Rightarrow m(A\hat{E}D) + m(A\hat{E}D) + 30° = 180° \therefore m(A\hat{E}D) = 75°$

Sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, tem-se que $\overline{EM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{E}B$; logo, $m(A\hat{E}M) = 30°$.

$m(M\hat{E}D) = m(A\hat{E}D) + m(A\hat{E}M) \Rightarrow m(M\hat{E}D) = 75° + 30°$

$\therefore m(M\hat{E}D) = 105°$

9. A medida 100° só pode ser do ângulo do vértice do triângulo isósceles. Assim, cada um dos ângulos da base mede 40°. Lembrando que a mediana relativa à base de um triângulo isósceles coincide com a bissetriz, esquematizamos o enunciado indicando por P o ponto comum a $\overline{AM}$ e $\overline{BS}$, e por α a medida do ângulo $A\hat{P}B$.



Do triângulo APB, temos: $20° + 50° + \alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 110°$

Concluímos, então, que a medida de um ângulo agudo formado pela mediana $\overline{AM}$ e a bissetriz $\overline{BS}$ é dado por: $180° - 110° = 70°$

10. a. Verdadeira, pois, a mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo qualquer mede metade da hipotenusa; logo, $AM = BM = CM$.

b. Verdadeira, pois, pela justificativa do item **a**, temos que o triângulo AMC é isósceles de base $\overline{AC}$. Como em todo triângulo isósceles a mediana, relativa à base, coincide com a altura, concluímos que $\overline{MN}$ é altura do triângulo AMC, relativa ao lado $\overline{AC}$.

c. Falsa, pois, pela justificativa do item **b**, temos que o triângulo MNC é retângulo em N. Como a hipotenusa de qualquer triângulo retângulo é maior do que cada cateto, temos que $CM > CN$.

d. Verdadeira, pois, pela justificativa do item **a**, temos que o triângulo AMC é isósceles de base $\overline{AC}$. Como em todo triângulo isósceles a mediana, relativa à base, coincide com a bissetriz relativa a essa base, concluímos que os ângulos $A\hat{M}N$ e $C\hat{M}N$ têm medidas iguais.

e. Falsa, pois, pela justificativa do item **a**, temos que o triângulo AMB é isósceles de base $\overline{AC}$. Como em todo triângulo isósceles as medidas dos ângulos da base são iguais, concluímos que os ângulos $B\hat{A}M$ e $A\hat{B}M$ têm medidas iguais.

11. a. $\frac{9}{12} = \frac{x}{8} \Rightarrow 12x = 72 \therefore x = 6$

b. $\frac{x}{27} = \frac{8}{18} \Rightarrow x = 12$

$x + y = 27 \Rightarrow 12 + y = 27 \therefore y = 15$

c. $\frac{12}{15} = \frac{x+3}{2x} \Rightarrow 24x = 15x + 45 \therefore x = 5$

Assim, concluímos que: $AC = 5 + 3 + 2 \cdot 5 = 18$

d. Podemos imaginar uma reta t, paralela a r e s, passando pela intersecção das transversais. Assim, pelo teorema de Tales, temos:

$\frac{x+3}{12} = \frac{x}{8} \Rightarrow 12x = 8x + 24 \therefore x = 6$

12. $\frac{212 - 32}{x - 32} = \frac{100 - 0}{75 - 0} \Rightarrow x = 167$

14. $\hat{A}$ é ângulo comum aos triângulos ABC e AED e $A\hat{B}C \cong A\hat{E}D$ (correspondentes) que caracterizam o caso A.A.; logo: $\triangle ABC \sim \triangle AED$. Assim, temos:

$\frac{AE}{18} = \frac{AD}{12} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \cdot AE = 36$ e $3 \cdot AD = 24$

$\therefore AE = 12$ e $AD = 8$

15. $A\hat{B}C \cong C\hat{D}E$ (alternos) e $B\hat{A}C \cong C\hat{E}D$ (alternos; que caracterizam o caso A.A.; logo: $\triangle ABC \sim \triangle EDC$. Assim, temos:

$\frac{x}{21} = \frac{16}{y} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 42$ e $2y = 48$

$\therefore x = 14$ e $y = 24$

16. a. Da semelhança entre os triângulos ABC e EDC, temos:

$\frac{18}{x} = \frac{24}{16} \Rightarrow x = 12$

b. Da semelhança entre os triângulos MPN e QPM, temos:

$\frac{8,4 + y}{4} = \frac{4}{y} \Rightarrow y^2 + 8,4y - 16 = 0$

$\therefore y = 1,6$ ou $y = -10$ (não convém)

Logo: $y = 1,6$

17. No triângulo AED, a medida da altura relativa ao lado $\overline{ED}$, em centímetro, é $9 - x$.

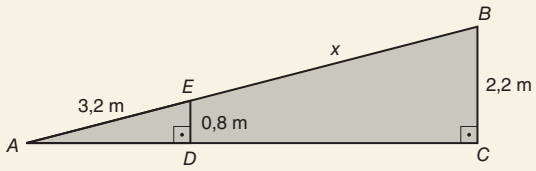
Como $\overline{ED} \,//\, \overline{BC}$, temos que $A\hat{E}D \cong A\hat{B}C$ e $A\hat{D}E \cong A\hat{C}B$; logo, pelo caso A.A. deduzimos que os triângulos AED e ABC são semelhantes. Assim, temos:

$\frac{12}{8} = \frac{9}{9 - x} \Rightarrow 72 = 108 - 12x \therefore 12x = 36 \Rightarrow x = 3$

Concluímos, então, que a medida do lado $\overline{EF}$ é 3 cm.

18. alternativa **d**

Indicando por x a distância, em metro, que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto, esquematizamos:



Da semelhança entre os triângulos ABC e AED, temos:

$\frac{2,2}{0,8} = \frac{3,2 + x}{3,2} \Rightarrow x = 5,6$

19. Indicando por x a distância real, em centímetro, temos:

$\frac{1}{5.500} = \frac{3,5}{x} \Rightarrow x = 18.700$

Assim, a distância real é de 18.700 cm ou 187 m.

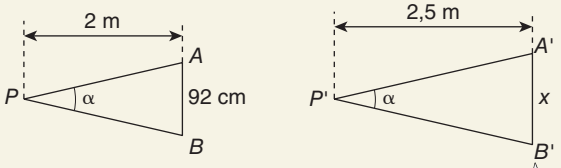
20. alternativa **c**

Indicando por x e y o comprimento e a largura da maquete, ambas em centímetro, temos:

$\frac{1}{250} = \frac{x}{2.800} = \frac{y}{1.200} \Rightarrow x = 11,2$ e $y = 4,8$

Logo, o comprimento e a largura que o estudante utilizará na construção da maquete serão 11,2 cm e 4,8 cm.

21. A situação ideal é aquela em que as medidas dos ângulos de visão nas duas situações sejam iguais. Sob essa suposição, indicando por x o comprimento, em centímetro, da nova televisão, esquematizamos:



ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Da semelhança entre os triângulos *PAB* e *P'A'B'*, temos:

$$\frac{2}{2,5} = \frac{92}{x} \Rightarrow x = 115$$

Assim, para que a medida do ângulo de visão seja a mesma nas duas situações, o comprimento da nova televisão deve ser 115 cm.

No quadro, observamos que o comprimento mais próximo de 115 cm corresponde à televisão de 46". Logo, a televisão cujo ângulo de visão mais se aproxima daquele do antigo apartamento deve ter 46".

23. • $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow a = 5$ • $3^2 = 5m \Rightarrow m = 1,8$

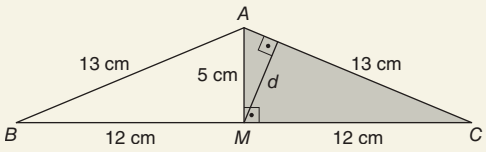
• $5h = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = 2,4$ • $1,8 + n = 5 \Rightarrow n = 3,2$

24. a. A altura $\overline{AM}$ relativa à base $\overline{BC}$ coincide com a mediana relativa a essa base, ou seja, *M* é ponto médio do lado $\overline{BC}$. Assim, indicando por *h* a medida dessa altura, em centímetro, e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AMC*, temos:

$h^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 25 \Rightarrow h = 5$

Concluímos, então, que a altura $\overline{AM}$ mede 5 cm.

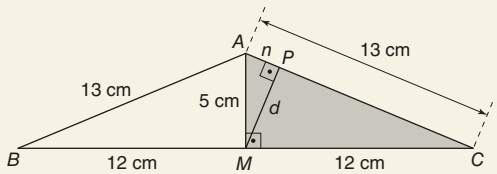
b. A distância entre *M* e o lado $\overline{BC}$ é a medida da altura relativa à hipotenusa do triângulo retângulo *MAC*. Indicando por *d* essa distância, em centímetro, esquematizamos:



Por uma das relações métricas no triângulo retângulo, aplicada ao triângulo *MAC*, temos:

$13d = 5 \cdot 12 \Rightarrow d = \frac{60}{13}$

c. Indicando por *n* a medida, em centímetro, da projeção ortogonal da altura $\overline{AM}$ sobre o lado $\overline{AC}$, esquematizamos:



Por uma das relações métricas no triângulo retângulo, aplicada ao triângulo *MAC*, temos:

$13n = 5^2 \Rightarrow n = \frac{25}{13}$

25. Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos *HAC* e *HAB*, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x^2 + (y+7)^2 = 20^2 \\ x^2 + y^2 = 15^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 400 - (y+7)^2 & (1) \\ x^2 = 225 - y^2 & (2) \end{cases}$$

De (1) e (2), deduzimos que:

$400 - (y+7)^2 = 225 - y^2 \Rightarrow 400 - 225 = (y+7)^2 - y^2$

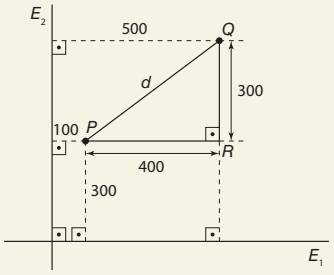
$175 = y^2 + 14y + 49 - y^2 \Rightarrow 14y = 126 \therefore y = 9$

Substituindo *y* por 9 em (2), temos:

$x^2 = 225 - 81 \Rightarrow x^2 = 144 \therefore x = 12$

Concluímos, então, que $x = 12$ cm e $y = 9$ cm.

26. Traçando por *P* o segmento $\overline{PQ}$ e a reta paralela E_1, e indicando por *d* a distância entre os hotéis, esquematizamos:

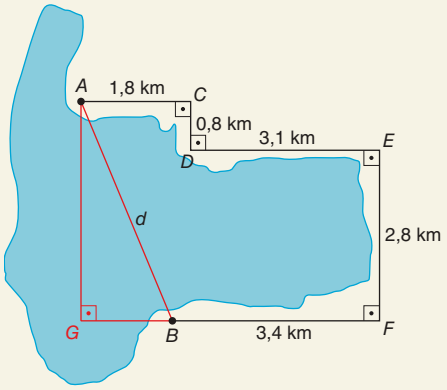


Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo *PQR*, temos: $d^2 = 300^2 + 400^2 \Rightarrow d = 500$

Concluímos, então, que a distância entre os hotéis é de 500 m.

27. alternativa **a**

Traçando por *A* o segmento $\overline{AB}$ e o segmento $\overline{AG}$, perpendicular à reta $\overleftrightarrow{BF}$ em *G*, e indicando por *d* o comprimento da ponte, em quilômetro, esquematizamos:



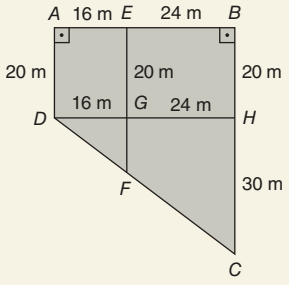
A medida *AG*, em km, é dada por: $0,8 + 2,8 = 3,6$

A medida *BG*, em km, é dada por: $(1,8 + 3,1) - 3,4 = 1,5$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo *AGB*, temos: $(AG)^2 + (BG)^2 = (AB)^2 \Rightarrow (3,6)^2 + (1,5)^2 = d^2$

$\therefore d^2 = 15,21 \Rightarrow d = 3,9$

28. Traçando por *D* a reta *r*, paralela a $\overline{AB}$, com $r \cap \overline{EF} = \{G\}$ e $r \cap \overline{BC} = \{H\}$, temos:



- Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo *DHC*, temos: $(DC)^2 = 30^2 + 40^2 \Rightarrow DC = 50$

  Logo, $DC = 50$.
- Aplicando o Teorema de Tales, temos:

  $\frac{40}{16} = \frac{50}{DF} \Rightarrow DF = 20$

  Logo, *DF* é igual a 20 m.
- Como $DC = 50$ m e $DF = 20$ m, temos $CF = 30$ m.
- Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo *DGF*, temos: $20^2 = 16^2 + (GF)^2 \Rightarrow GF = 12$

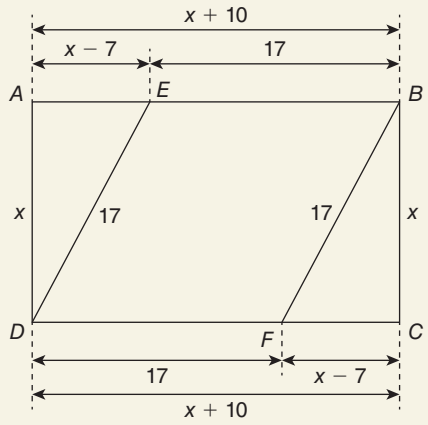
  Logo, $GF = 12$m.

  Concluímos, então, que o perímetro do lote *AEFD* é 88 m e o do lote *EBCF* é 136 m.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

29. Indicando por x a largura do retângulo, em centímetro, esquematizamos:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:
$x^2 + (x-7)^2 = 17^2 \Rightarrow 2x^2 - 14x - 240 = 0$
$\therefore x^2 - 7x - 120 = 0 \Rightarrow x = 15$ ou $x = -8$ (não convém)

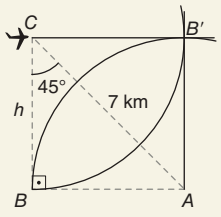
Logo, $x = 15$ cm.
Concluímos, então, que o perímetro p do retângulo, em centímetro, é dado por: $p = 4 \cdot 15 + 20 \Rightarrow p = 80$

31. a. A medida ℓ do lado do quadrado é a medida da altura do triângulo equilátero, isto é:

$\ell = \frac{8\sqrt{3}}{2}$ cm $= 4\sqrt{3}$ cm

b. A medida d da diagonal do quadrado é o produto da medida ℓ de seu lado por $\sqrt{2}$, isto é:
$d = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ cm $= 4\sqrt{6}$ cm

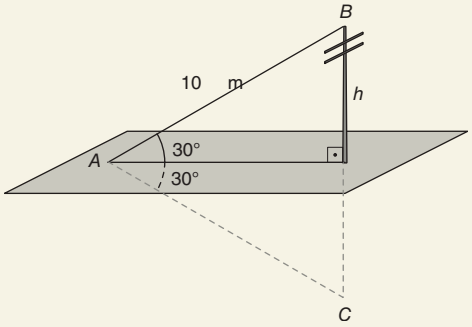
32. Esquematizando, temos que $ABCB'$ é um quadrado.
Indicando por h a medida da altura em que se encontra o avião, temos:



$h\sqrt{2} = 7 \Rightarrow h = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} = 3{,}5\sqrt{2}$

Concluímos, então, que o avião está a $3{,}5\sqrt{2}$ km de altura, ou aproximadamente 4,9 km.

33. Esquematizando, temos:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

O triângulo ABC é equilátero e seu lado mede 10 m. Dessa maneira, h é a metade de BC. Logo, $h = 5$ m.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

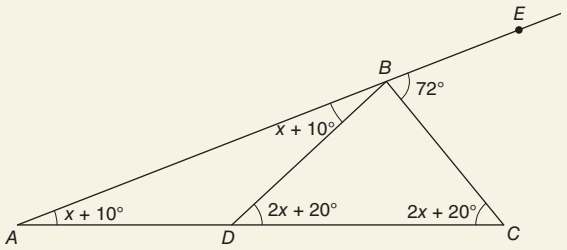
1. O ângulo $C\hat{D}A$ é externo do triângulo BCD; logo:

$x + 60° = 80° + \frac{x}{2}$
$2x + 120° = 160° + x \Rightarrow 2x - x = 160° - 120°$
$\therefore x = 40°$
O ângulo $D\hat{E}C$ é externo do triângulo ADE; logo:
$y = \frac{x}{2} + 40°$
Como $x = 40°$, concluímos: $y = \frac{40°}{2} + 40° \Rightarrow y = 60°$

2. O triângulo ABD é isósceles de base $\overline{AB}$. Assim, temos que $D\hat{A}B \cong D\hat{B}A$ e, portanto, $m(D\hat{A}B) = m(D\hat{B}A) = x + 10°$.

O ângulo $B\hat{D}C$ é externo do triângulo ABD; logo, $m(B\hat{D}C) = 2x + 20°$.

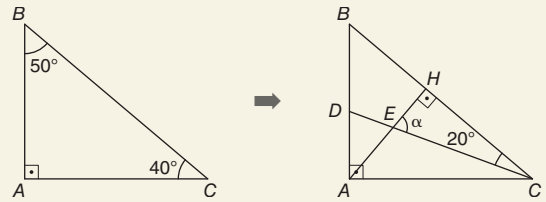
O triângulo CBD é isósceles de base $\overline{DC}$. Assim, temos que $B\hat{D}C \cong B\hat{C}D$ e, portanto, $m(B\hat{D}C) = m(B\hat{C}D) = 2x + 20°$.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

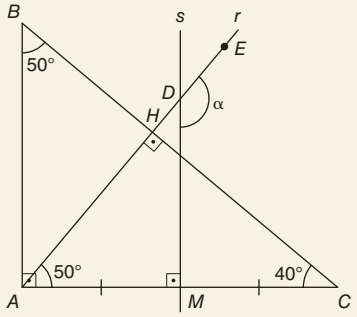
O ângulo $C\hat{B}E$ é externo do triângulo ABC; logo:
$72° = x + 10° + 2x + 20° \Rightarrow x = 14°$

3. a. O ângulo $B\hat{C}A$ mede 40°, pois é complemento do ângulo $A\hat{B}C$. Sendo $\overline{AH}$ a altura relativa à hipotenusa e $\overrightarrow{CD}$ a bissetriz do ângulo $B\hat{C}A$, com $\overrightarrow{CD} \cap \overline{AH} = \{E\}$, a medida α do ângulo $H\hat{E}C$ é obtida por: $\alpha + 90° + 20° = 180° \Rightarrow \alpha = 70°$



Logo, a medida de um ângulo agudo formado pela altura $\overline{AH}$ e pela bissetriz $\overrightarrow{CD}$ é 70°.

b. O ângulo $H\hat{A}C$ mede 50°, pois é complemento do ângulo $B\hat{C}A$. Sendo α a medida de um ângulo obtuso formado pela reta r que contém a altura $\overline{AH}$ e pela mediatriz s do lado $\overline{AC}$, temos:



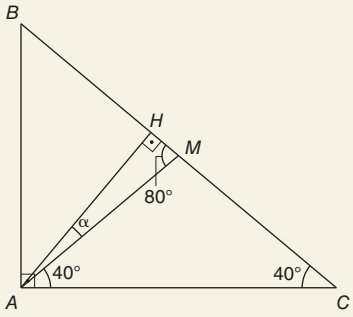
Ou seja, $\alpha = 90° + 50° = 140°$, pois α é a medida do ângulo $E\hat{D}M$, externo do triângulo ADM.

Logo, a medida de um ângulo obtuso formado por r e s é 140°.

c. A mediana $\overline{AM}$ divide o triângulo ABC em dois triângulos isósceles. Assim, os ângulos $M\hat{A}C$ e $M\hat{C}A$ têm a mesma medida 40°. O ângulo $H\hat{M}A$ mede (40° + 40°), ou seja, 80°, pois é ângulo externo do triângulo $A\hat{M}C$.

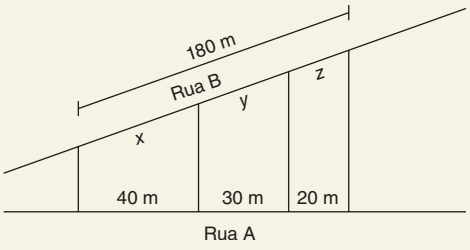
A medida α do ângulo $M\hat{A}H$ é calculada por:

$\alpha + 90° + 80° = 180° \therefore \alpha = 10°$



Logo, a medida do ângulo agudo formado pela altura $\overline{AH}$ e pela mediana $\overline{AM}$ é 10°.

4. Indicando por x, y e z as frentes para a rua B dos lotes cujas frentes para a rua A têm 40 m, 30 m e 20 m, respectivamente, esquematizamos:



Assim, pelo Teorema de Tales, temos:

$\frac{180}{x} = \frac{90}{40} \Rightarrow x = 80$ $\quad$ $\frac{180}{z} = \frac{90}{20} \Rightarrow z = 40$

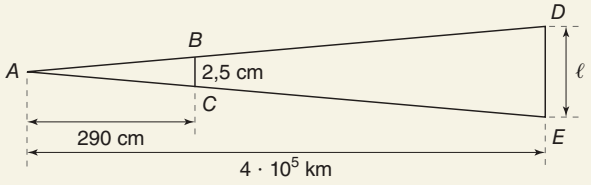
$\frac{180}{y} = \frac{90}{30} \Rightarrow y = 60$

Portanto, as frentes para a rua B dos lotes são 80 m, 60 m e 40 m, respectivamente.

5. Pelo caso A.A., observamos a semelhança entre os triângulos ABE e CBD.

Logo: $\frac{18}{AE} = \frac{20}{56} \Rightarrow AE = 50{,}4$

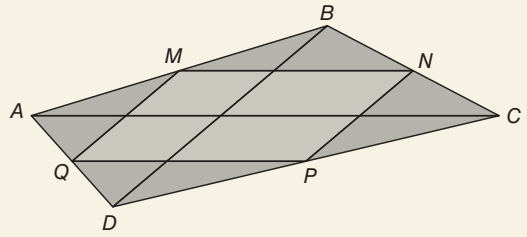
6. Indicando por A o olho do observador e por BC e DE os diâmetros da moeda e da Lua, respectivamente, temos:



$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \frac{290}{4 \cdot 10^5} = \frac{2{,}5}{\ell} \Rightarrow \ell \approx 3{,}45 \cdot 10^3$

Logo, o diâmetro da Lua encontrado foi de aproximadamente 3.450 km.

7. alternativa **d**



Como M e N são pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, deduzimos que os triângulos BMN e BAC são semelhantes (caso LAL), cuja razão de semelhança é $\frac{1}{2}$.

Logo: $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MN}{20\text{ cm}} = \frac{1}{2} \therefore MN = 10\text{ cm}$

De maneira análoga, em relação aos triângulos DQP e DAC, deduzimos que $QP = 10$ cm.

Como M e Q são pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente, deduzimos que os triângulos AMQ e ABD são semelhantes (caso LAL), cuja razão de semelhança é $\frac{1}{2}$.

Logo: $\frac{MQ}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{MQ}{18\text{ cm}} = \frac{1}{2} \therefore MQ = 9\text{ cm}$

De maneira análoga, em relação aos triângulos CNP e CBD, deduzimos que $NP = 9$ cm.

Concluímos, então, que o perímetro do quadrilátero $MNPQ$ é dado por:

10 cm + 10 cm + 9 cm + 9 cm = 38 cm

8. alternativa **c**

Os triângulos BFE e BAC são semelhantes (caso A.A.); logo, $\frac{EF}{4} = \frac{BF}{BA}$ (1).

Os triângulos AFE e ABD são semelhantes (caso A.A.); logo, $\frac{EF}{6} = \frac{FA}{BA}$ (2).

Adicionando, membro a membro, as igualdades (1) e (2), obtemos:

$\frac{EF}{4} + \frac{EF}{6} = \frac{BF}{BA} + \frac{FA}{BA} \Rightarrow \frac{3 \cdot EF + 2 \cdot EF}{12} = \frac{BF + FA}{BA}$

Como $BF + FA = BA$, temos: $\frac{5 \cdot EF}{12} = 1 \Rightarrow EF = \frac{12}{5}$

$\therefore EF = 2{,}4$

9. alternativa **c**

Como 1 m = 1.000 mm, a medida x, em milímetro, do segmento que representa a distância entre a Terra e a Lua é dada por: $\frac{150.000.000}{1.000} = \frac{384.000}{x} \Rightarrow x = 2{,}56$

Assim, o segmento que representa a distância entre a Terra e a Lua mede 2,56 mm.

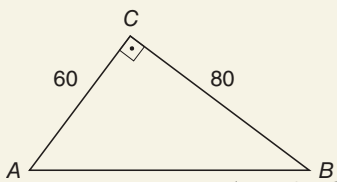
10. alternativa **b**

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB^2 = 60^2 + 80^2$

$\therefore AB = 100$

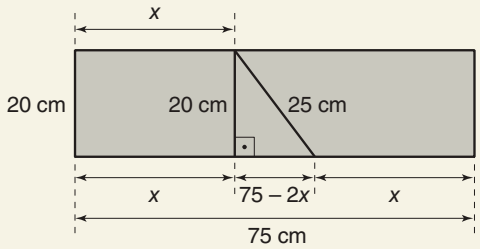
Logo, o comprimento do túnel será 100 m.



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

11. Esquematizando, temos:

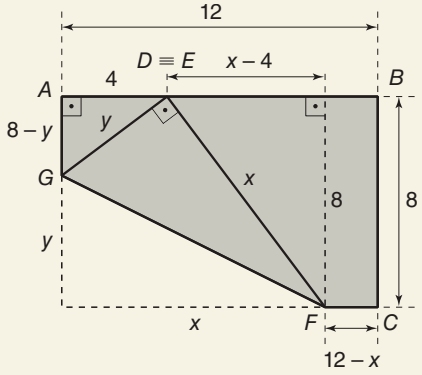


Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo, temos: $(75 - 2x)^2 + 20^2 = 25^2 \Rightarrow (75 - 2x)^2 + 20^2 = 225$

Logo, $75 - 2x = 15$ ou $75 - 2x = -15$ e, portanto, $x = 45$ (não convém) ou $x = 30$.

Concluímos que a base menor de cada trapézio mede 30 cm.

12. Indicando por x o comprimento FE, temos que o comprimento do segmento de reta com extremos em F e no vértice tracejado também é x; indicando por y o comprimento GD, temos que o comprimento do segmento de reta com extremos em G e no vértice tracejado também é y. Assim, esquematizamos:



Aplicamos o Teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + 8^2 = x^2 & (1) \\ 4^2 + (8-y)^2 = y^2 & (2) \\ x^2 + y^2 = (GF)^2 & (3) \end{cases}$$

De (1), temos $x = 10$ e, de (2), temos $y = 5$.

Substituindo em (3) os valores encontrados para x e y, obtemos: $10^2 + 5^2 = (GF)^2 \Rightarrow GF = 5\sqrt{5}$

Logo, o comprimento GF é $5\sqrt{5}$ cm.

13. Considerando x a medida do lado do triângulo equilátero e a medida do lado do quadrado, podemos escrever, em função de x:

- seja h a medida da altura do triângulo equilátero; então, temos:

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2} \approx \frac{x \cdot 1{,}73205}{2} \approx x \cdot 0{,}86603$$

- seja d a medida da diagonal do quadrado; então, temos:

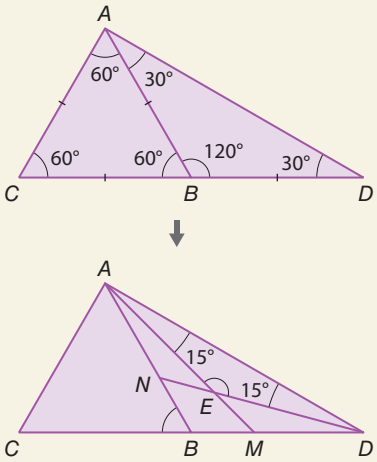
$d = x\sqrt{2} \approx x \cdot 1{,}41421$

Então, temos a razão: $\frac{h}{d} \approx \frac{x \cdot 0{,}86603}{x \cdot 1{,}41421} \approx 0{,}61238$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 3

1. alternativa **b**

Cada ângulo interno do triângulo ABC mede 60°, e o ângulo externo relativo ao vértice B desse triângulo mede 120°. Como $AB = BD$, os ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{D}A$ têm a mesma medida (30°). Sejam $\overline{AM}$ e $\overline{DN}$ as bissetrizes internas do triângulo ABD relativas aos ângulos $B\hat{A}D$ e $B\hat{D}A$, conforme mostram as figuras a seguir.



Sendo α a medida do ângulo $A\hat{E}D$, temos:

$\alpha + 15° + 15° = 180° \Rightarrow \alpha = 150°$

Logo, o ângulo agudo formado pelas bissetrizes $\overline{AM}$ e $\overline{DN}$ mede 30° (180° – 150°).

2. alternativa **c**

O ponto médio M da hipotenusa divide o triângulo ABC em dois triângulos isósceles. Assim, temos:

$30° + m(M\hat{A}B) = 90° \Rightarrow m(M\hat{A}B) = 60°$ (1)

$AM = BM = CM$

Logo, o triângulo ABM é isósceles de base $\overline{AB}$ e, portanto, $m(M\hat{B}A) = m(M\hat{A}B)$.

Então, por (1), temos: $m(M\hat{B}A) = 60°$ (2)

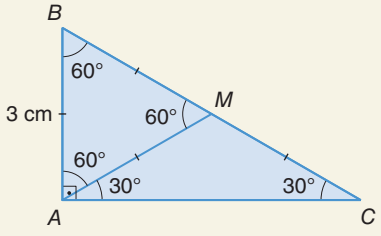
Do triângulo ABM, temos:

$m(M\hat{A}B) + m(M\hat{B}A) + m(A\hat{M}B) = 180°$

E, por (1) e (2), temos:

$m(A\hat{M}B) = 60°$ (3)

Por (1), (2) e (3) concluímos que o triângulo ABM é equilátero. Como $AB = 3$ cm, o perímetro do triângulo equilátero ABM é 9 cm.

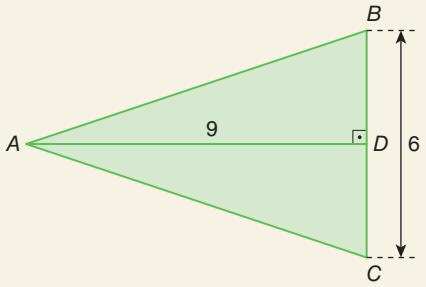


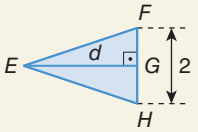
3. alternativa **b**

Sendo d a distância procurada, em metro, esquematizamos:

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA





ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

$\Delta ABC \sim \Delta EFH$

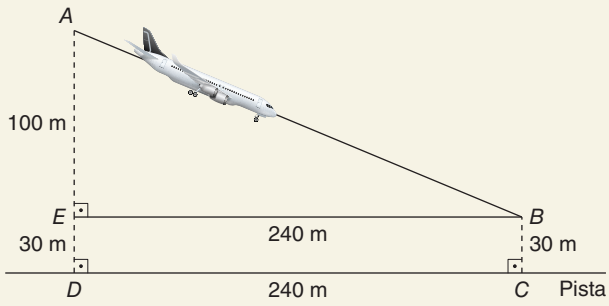
A razão de semelhança é a razão entre dois comprimentos correspondentes quaisquer. Então, temos:

$\frac{BC}{FH} = \frac{AD}{EG} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{9}{d} \therefore 6d = 18 \Rightarrow d = 3$

Logo, a distância entre o projetor e a tela deve ser 3 m.

4. alternativa **e**

Traçando por B uma reta paralela a $\overline{DC}$, esquematizamos:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABE, temos: $(AB)^2 = 100^2 + 240^2 \Rightarrow (AB)^2 = 67.600$

$\therefore AB = 260$

Concluímos, assim, que o avião percorreu 260 m de A até B.

CAPÍTULO 4 Circunferência, círculo e área de figuras planas

ALÉM DA TEORIA

1. Sejam r e $k \cdot r$, com, $k \in \mathbb{R}_+^*$, as medidas dos raios de irrigação de dois pivôs centrais, e A_1 e A_2 as respectivas áreas irrigadas.

Assim, temos: $A_1 = 3{,}14 \cdot r^2$ e $A_2 = 3{,}14 \cdot (k \cdot r)^2$

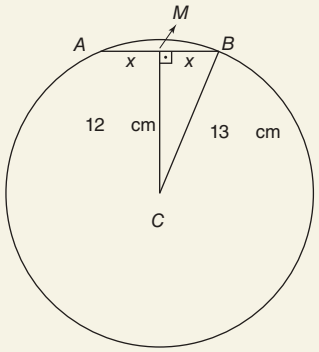
Assim: $A_2 = 3{,}14 \cdot (k \cdot r)^2 = 3{,}14 \cdot k^2 \cdot r^2 \Rightarrow A_2 = k^2 (3{,}14 \cdot r^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_2 = k^2 \cdot A_1$

Portanto, $A^2 = k^2 \cdot A_1$, ou seja, a área irrigada não é diretamente proporcional ao raio de irrigação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sendo x a medida do segmento $\overline{MB}$, temos:



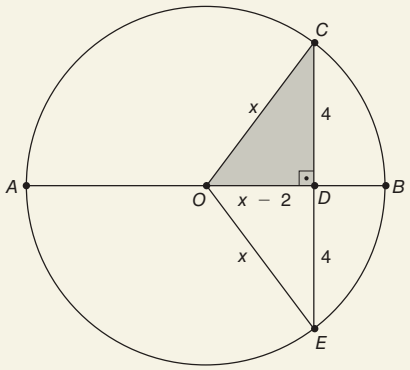
$x^2 + 12^2 = 13^2$

$\therefore x = 5$

Logo: $AB = 10$ cm

2. a. Pela propriedade **P2**, D é ponto médio de $\overline{CE}$ e, portanto, $CD = DE = 4$ cm.

Sendo x a medida, em centímetro, do raio da circunferência, temos que $OC = OB = OE = x$, e $OD = x - 2$.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando o teorema de Pitágoras temos:

$x^2 = (x-2)^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = x^2 - 4x + 4 + 16$

$\therefore 4x = 20 \Rightarrow x = 5$

b. Pelo item **a**, a medida x do raio é 5 cm. Como $OD = x - 2$, temos que $OD = 5 - 2 = 3$ e $AD = 5 + 3 = 8$.

$(AC)^2 = 8^2 + 4^2 \Rightarrow (AC)^2 = 80 \Rightarrow$

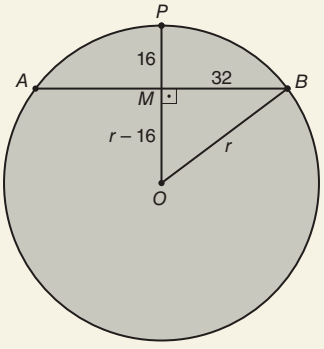
$\Rightarrow AC = \sqrt{80} \Rightarrow AC = \sqrt{16 \cdot 5} \therefore AC = 4\sqrt{5}$

c. A distância do ponto D ao segmento $\overline{OC}$ é a altura $\overline{DF}$ do triângulo ODC. Por uma das relações métricas no triângulo retângulo, temos: $(OC) \cdot (DF) = (OD) \cdot (DC)$

$5 \cdot (DF) = 3 \cdot 4 \Rightarrow DF = \frac{12}{5} \therefore DF = 2{,}4$

Logo, a distância do ponto D ao segmento $\overline{OC}$ é 2,4 cm.

3. Indicando por r a medida, em metro, do raio da circunferência de centro O, esquematizamos:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OMB, temos: $r^2 = (r-16)^2 + 32^2 \Rightarrow r^2 = r^2 - 32r + 256 + 1.024 \Rightarrow$

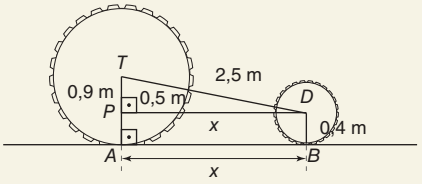
$\Rightarrow 32r = 1.280 \therefore r = 40$

4. a. Como D é o ponto médio da corda $\overline{AB}$ e $AB = 12$ cm, então $\overline{AD} = \overline{DB} = 6$ cm. Considerando r a medida do raio da circunferência, então o segmento $AC = r$. Como $\overline{CD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, pelo teorema de Pitágoras temos: $r^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow r = 10 \therefore r = 10$ cm

b. A altura h do corpo é a soma da medida do raio com $\overline{CD}$, logo: $h = 10 + 8 = 18$

Como a altura do corpo é oito vezes a altura h_c da cabeça, temos: $h = 8 \cdot h_c \Rightarrow h_c = 2{,}25$

5. Esquematizando, temos:



Considere o ponto P no segmento $\overline{AT}$, tal que $\overline{AB} \parallel \overline{PD}$.

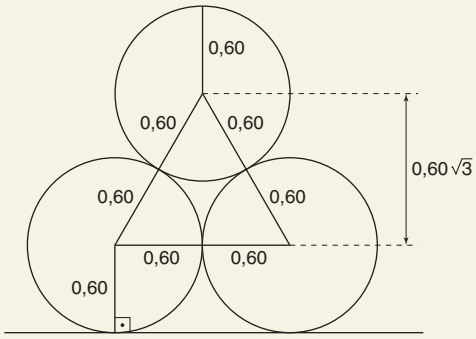
Temos que $TA - PA = 0{,}9\text{ m} - 0{,}4\text{ m} = 0{,}5$ m.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$x^2 + (0{,}5)^2 = (2{,}5)^2 \Rightarrow x = \sqrt{6} \approx 2{,}4$ m

6. alternativa **d**

Os centros de duas circunferências tangentes são colineares com o ponto de tangência. Assim, os centros das circunferências do desenho são vértices de um triângulo equilátero com 1,20 m de lado e, portanto, com $0{,}60\sqrt{3}$ m de altura.



Logo, a altura h da pilha de canos, em metro, é dada por:

$h = 0{,}60 + 0{,}60 + 0{,}60\sqrt{3} \Rightarrow h = 2{,}22$

Portanto, a altura mínima H, em metro, do vão sob o viaduto para que o caminhão pudesse passar em segurança é dada por: $H = 2{,}22 + 1{,}30 + 0{,}50 = 4{,}02$

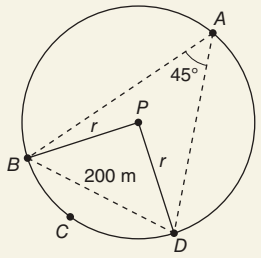
8. a. A medida do ângulo x é a metade da medida do ângulo central correspondente, então: $x = \frac{100°}{2} \Rightarrow x = 50°$

b. Sendo $m(\widehat{AB}) = 2 \cdot m(A\hat{V}B) = 92°$ e que a medida do ângulo x é a metade de 92°, então: $x = \frac{92°}{2} \Rightarrow x = 46°$

c. O arco menor $\widehat{VA}$ mede 80°. Logo: $x = \frac{80°}{2} \Rightarrow x = 40°$

9. alternativa **e**

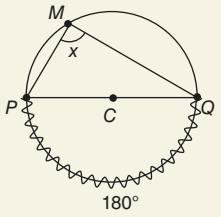
Como P, A, B, C e D pertencem a um mesmo plano, e P equidista de A, B, C e D, temos uma circunferência de centro P que passa por A, B, C e D. Sendo r a medida, em metro, do raio dessa circunferência, temos:



Como a medida do ângulo inscrito $B\hat{A}D$ é metade da medida do ângulo central $B\hat{P}D$, deduzimos que $B\hat{P}D$ é um ângulo reto. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo PBD, temos: $r^2 + r^2 = 200^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2r^2 = 40.000 \Rightarrow r^2 = 20.000 \therefore r = 100\sqrt{2}$

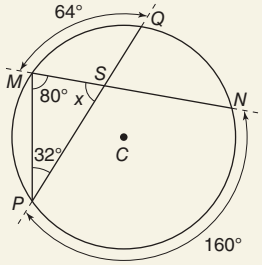
10. a.



$x = \frac{180°}{2}$

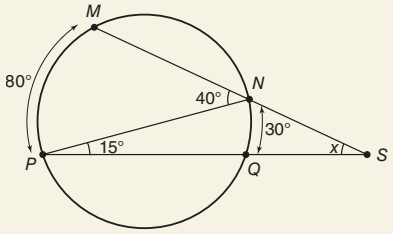
$x = 90°$

11. Traçando o segmento $\overline{PM}$, obtemos os ângulos inscritos $P\hat{M}N$ e $M\hat{P}Q$ medindo 80° e 32°, respectivamente.



Assim, temos: $x + 80° + 32° = 180° \Rightarrow x = 68°$

12.

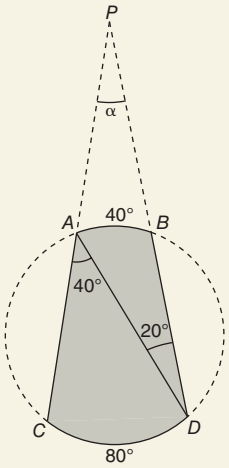


- $N\hat{P}Q$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 30°; logo: $m(N\hat{P}Q) = \frac{30°}{2} = 15°$
- $P\hat{N}M$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 80°; logo: $m(P\hat{N}M) = \frac{80°}{2} = 40°$
- $P\hat{N}M$ é um ângulo externo do triângulo SNP; logo: $40° = x + 15° \Rightarrow x = 25°$

13. Sejam os pontos A, B, C, D e P, conforme o esquema a seguir, em que P é o ponto de encontro dos prolongamentos das duas direções dos cortes e α o ângulo formado por elas. Temos:

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA
FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

- $C\hat{A}D$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 80°; logo: $m(C\hat{A}D) = \frac{80°}{2} = 40°$
- $A\hat{D}B$ é um ângulo inscrito que determina um arco de 40°; logo: $m(A\hat{D}B) = \frac{40°}{2} = 20°$
- $C\hat{A}D$ é um ângulo externo do triângulo PAD; logo: $40° = \alpha + 20° \Rightarrow \alpha = 20°$



Portanto, a medida do ângulo formado é 20°.

14. $c = 2\pi r \Rightarrow c = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi \therefore c \approx 4 \cdot 3{,}14 \Rightarrow c \approx 12{,}56$

15. Sabemos que o raio de uma circunferência qualquer é perpendicular à reta tangente no ponto de tangência. Temos ainda que os centros de duas circunferências tangentes entre si são colineares com o ponto de tangência.

Como cada um dos arcos $\overset{\frown}{AT}$ e $\overset{\frown}{BT}$ é a quarta parte de uma circunferência de raio R, temos:

$\frac{2\pi R}{4} + \frac{2\pi R}{4} + 2R = 2\pi + 4 \Rightarrow \pi R + 2R = 2\pi + 4$

$\therefore R(\pi + 2) = 2(\pi + 2) \Rightarrow R = 2$

Logo, $R = 2$ m.

16. a. $c = 2\pi \cdot 6.378 \text{ km} \Rightarrow c = 12.756\pi \text{ km}$

$\therefore c \approx 12.756 \text{ km} \cdot 3{,}14 \Rightarrow c \approx 40.053{,}84 \text{ km}$

b. Sendo x o comprimento, em quilômetro, do arco percorrido, temos: $x \approx \frac{40.053{,}84}{360} \cdot 10 \Rightarrow x \approx 1.112{,}61$

17. $A_R = (20 \cdot 10) \text{ cm}^2 = 200 \text{ cm}^2$

$A_P = (600 \cdot 200) \text{ cm}^2 = 120.000 \text{ cm}^2$

$A_Z = (25 \cdot 25) \text{ cm}^2 = 625 \text{ cm}^2$

Assim, o número n de azulejos quadrados necessários para revestir a parede é obtido por:

$n = \frac{A_P}{A_Z} = \frac{120.000}{625} \Rightarrow n = 192$

Logo, são necessários 192 azulejos quadrados.

18. $(25 + x) \cdot (10 + x) = 450 \Rightarrow x^2 + 35x - 200 = 0$

Resolvendo a equação de 2º grau, obtemos $x = 5$ ou $x = -40$ (não convém). Logo, a medida do lado do quadrado reservado à churrasqueira é 5 m.

19. alternativa **a**

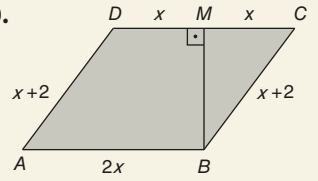
A área da varanda corresponde à soma das áreas das duas regiões retangulares. Assim:

$$16 \cdot 5 + 13{,}4 \cdot 4 = 133{,}6$$

A medida da área da varanda, na planta baixa, é 133,6 $\text{cm}^2 = 0{,}01336 \text{ m}^2$ e, como a escala usada foi 1 : 50, se x é a medida real da área da varanda, em metro quadrado, temos:

$\left(\frac{1}{50}\right)^2 = \left(\frac{0{,}01336}{x}\right) \Rightarrow x = 2500 \cdot 0{,}01336 = 33{,}4$

20.

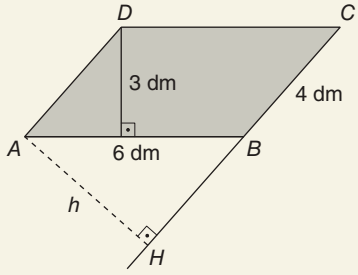


$2x + 2x + x + 2 + x + 2 = 22 \Rightarrow x = 3$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo CBM, temos: $(MB)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow MB = 4$

Logo, a área do paralelogramo é 6 · 4, ou seja, 24 cm^2.

21.



Prolongando o lado $\overline{BC}$ do paralelogramo, obtemos a altura $\overline{AH}$, relativa ao lado $\overline{BC}$; indicamos por 6 a medida dessa altura. Considerando que o cálculo da área do paralelogramo é o produto da medida da base pela sua altura relativa, temos: $6 \cdot 3 = 4 \cdot h \Rightarrow h = 4{,}5$

Logo, a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 4,5 dm.

22. a. $A = \frac{4 \cdot 6}{2} \text{ m}^2 = 12 \text{ m}^2$

b. Por Pitágoras, obtemos que a altura relativa à base do triângulo isósceles mede 6 cm; logo:

$A = \frac{16 \cdot 6}{2} \text{ cm}^2 = 48 \text{ cm}^2$

c. Por Pitágoras, obtemos $CD = 3$ dm. Traçando $\overline{BH}$ paralelo a $\overline{CD}$, onde H é ponto de $\overline{CA}$, temos $CH = 4$ dm. Por Pitágoras, obtemos, ainda, $HA = 3\sqrt{3}$ dm; logo: $CA = 4 + 3\sqrt{3}$

Portanto: $A = \frac{(4 + 3\sqrt{3}) \cdot 3}{2} \text{ dm}^2 = \left(6 + \frac{9\sqrt{3}}{2}\right) \text{ dm}^2$

d. A medida da altura do triângulo equilátero é $3\sqrt{3}$ cm; logo: $A = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$

23. Unindo o centro da circunferência aos vértices do quadrilátero, obtemos quatro triângulos cujas alturas relativas aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ têm medida r.

Observando que a soma das áreas desses triângulos é a área do quadrilátero, temos:

$\frac{3 \cdot r}{2} + \frac{3 \cdot r}{2} + \frac{4 \cdot r}{2} + \frac{4 \cdot r}{2} \Rightarrow 7r = 12 \therefore r = \frac{12}{7}$

Concluímos que o raio da circunferência mede $\frac{12}{7}$ cm.

24. A área A_t do terreno, em metro quadrado, é dada por:

$A_t = (16 \cdot 14) - \left(\frac{9 \cdot 4}{2}\right) - \left(\frac{3 \cdot 10}{2}\right) - \left(\frac{14 \cdot 7}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_t = 224 - 18 - 15 - 49 \therefore A_t = 142 \text{ m}^2$

25. Indicando por x, y e z as medidas, em metro, dos segmentos $\overline{AF}$, $\overline{FH}$ e $\overline{HB}$, respectivamente, temos:

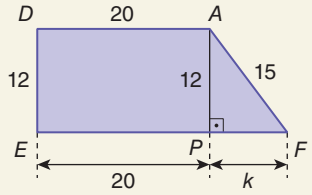
ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

a. Pelo teorema de Tales, temos:

- $\frac{48}{12} = \frac{60}{x} \Rightarrow x = 15$
- $\frac{48}{16} = \frac{60}{y} \Rightarrow y = 20$
- $x + y + z = 60 \Rightarrow 15 + 20 + z = 60 \Rightarrow z = 25$

Assim, $AF = 15$ m, $FH = 20$ m e $HB = 25$ m

b. Indicando por k a medida, em metro, da projeção ortogonal do segmento $\overline{AF}$ sobre o segmento $\overline{EF}$.



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$k^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow k = 9$

Concluímos, assim, que a área S do trapézio $ADEF$ é dada por: $S = \frac{(29 + 20) \cdot 12}{2}\ m^2 \Rightarrow S = 294\ m^2$

26. A área A de cada face trapezoidal é dada por:

$A = \frac{(20 + 18) \cdot 22}{2}\ cm^2 \Rightarrow A = 418\ cm^2$

As áreas T e F da tampa e do fundo são, respectivamente:

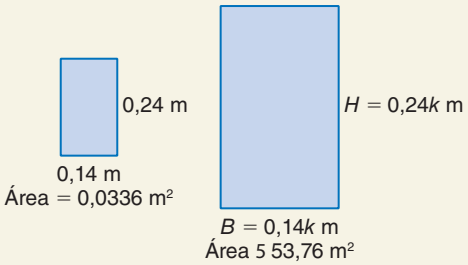
$T = 324\ cm^2$ e $F = 400\ cm^2$

Logo, a área da caixa é dada por:

$4A + T + F = (4 \cdot 418 + 324 + 400)\ cm^2 = 2.396\ cm^2$

27. Indicando, respectivamente, por h, B e H as medidas, em metro, da altura do desenho digital, da base horizontal e da altura do painel em exposição, obtemos, inicialmente, a medida h: $0{,}14h = 0{,}0336 \Rightarrow h = 0{,}24$

Observando que os retângulos são semelhantes, vamos indicar por k a razão de semelhança do maior para o menor. Assim, esquematizamos:



Por meio da área do retângulo maior, obtemos k:

$0{,}14k \cdot 0{,}24k = 53{,}76 \Rightarrow k^2 = 1.600 \therefore k = 40$

Concluímos, então, que a medida H, em metro, é dada por:

$$H = 0{,}24 \cdot 40 \Rightarrow H = 9{,}6$$

Ou seja, a altura do painel em exposição é de 9,6 metros.

Outro modo para resolver é pensar que, como os retângulos são semelhantes, temos que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança, assim:

$$\left(\frac{B}{0{,}14}\right)^2 = \frac{53{,}76}{0{,}0336} \Rightarrow \left(\frac{B}{0{,}14}\right)^2 = 1.600$$

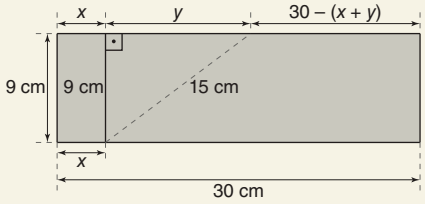
$$\therefore \frac{B}{0{,}14} = 40 \Rightarrow B = 5{,}6$$

Como a área do painel é $53{,}76\ m^2$ e sua base mede 5,6 m, já podemos determinar a medida H, em metro:

$$5{,}6 \cdot H = 53{,}76 \Rightarrow H = 9{,}6$$

Concluímos, então, que o painel tem 9,6 metros de altura.

28. Traçando por um extremo do corte uma perpendicular aos lados maiores do retângulo, temos:



Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$y^2 + 9^2 = 15^2 \Rightarrow y = 12$

Como a área do trapézio maior é o dobro da área do menor, concluímos que:

$$\frac{(18 - x + 30 - x) \cdot 9}{2} = 2 \cdot \frac{(x + 12 + x) \cdot 9}{2} \Rightarrow x = 4$$

Logo, as bases do trapézio de maior área medem 26 cm e 14 cm.

29. Consideramos $ABCD$ um losango cujas medidas das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, em centímetro, são $2x$ e $4x$, respectivamente, e sendo P o ponto comum às diagonais.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABP, tem-se: $(2x)^2 + x^2 = (3\sqrt{5})^2 \Rightarrow 5x^2 = 45 \Rightarrow x = 3$

Assim, $AC = 6$ cm e $BD = 12$ cm. Logo, a área S do losango é dada por: $S = \frac{6 \cdot 12}{2}\ cm^2 = 36\ cm^2$

30. alternativa **b**

Como as figuras do *tangram* têm todas a mesma área, a área da "casinha", na Figura 3, é igual à área do quadrado, da Figura 1, que as contém. Então, basta calcular a área da Figura 1. Note que o lado AB corresponde à metade da diagonal d do quadrado, na Figura 1; isto é, $d = 4$ cm. Assim, o lado ℓ do quadrado, em centímetro, é dado por:

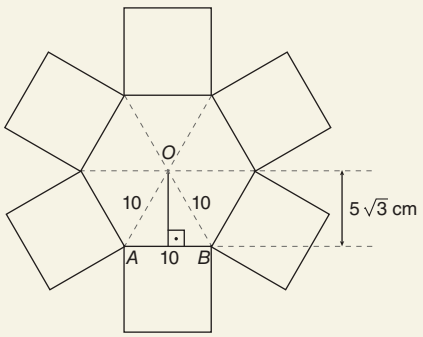
$$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow 4 = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 2\sqrt{2}$$

Portanto, a área da Figura 3 mede, em centímetro quadrado:

$$(2\sqrt{2})^2 = 4 \cdot 2 = 8$$

Isto é, $8\ cm^2$.

31.



A área A_H do hexágono é igual ao sêxtuplo da área do triângulo OAB, ou seja:

$A_H = 6 \cdot \frac{10 \cdot 5\sqrt{3}}{2}\ cm^2 = 150\sqrt{3}\ cm^2$

A área A_Q de cada quadrado é dada por:

$A_Q = 10^2\ cm^2 = 100\ cm^2$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a área A da figura é dada por:
$A = (150\sqrt{3} + 600)\ \text{cm}^2 = 150(\sqrt{3} + 4)\ \text{cm}^2$

33. a. A medida r do raio do círculo inscrito em um quadrado é igual à metade da medida do lado desse quadrado; logo, $r = 3$ cm. Assim, a área A do círculo é dada por:
$A = \pi \cdot 3^2\ \text{cm}^2 = 9\pi\ \text{cm}^2$

b. A medida da diagonal do quadrado é $6\sqrt{2}$ cm; logo, a medida do raio do círculo é $3\sqrt{2}$ cm. A área A do círculo é, portanto: $A = \pi\,(3\sqrt{2})^2\ \text{cm}^2 \Rightarrow A = 18\pi\ \text{cm}^2$

34. alternativa **a**
As áreas A_m e A_M das *pizzas* menor e maior, respectivamente, são dadas por: $A_m = \pi \cdot 8^2\ \text{cm}^2 = 64\pi\ \text{cm}^2$ e $A_M = \pi \cdot 12^2\ \text{cm}^2 = 144\pi\ \text{cm}^2$. Assim, o preço P_M da *pizza* maior pode ser calculado pela regra de três:

64π ——— 20
144π ——— P_M

Concluímos que o preço da *pizza* maior é R$ 45,00.

35. alternativa **a**
A área de cobertura de cada uma das antenas que serão substituídas é a área A de um círculo de raio 2 km, que é dada por: $A = \pi \cdot 2^2\ \text{km}^2 = 4\pi\ \text{km}^2$. Logo, a área de cobertura das duas antenas que serão substituídas é $8\pi\ \text{km}^2$.
A área de cobertura da nova antena é a área S do círculo de raio 4 km, que é dada por: $S = \pi \cdot 4^2\ \text{km}^2 = 16\pi\ \text{km}^2$
Portanto, concluímos que a atual área de cobertura será ampliada em $(16\pi - 8\pi)\ \text{km}^2$, ou seja, $8\pi\ \text{km}^2$.

36. Sendo r e R as medidas dos raios das circunferências inscrita e circunscrita ao quadrado, respectivamente, temos:
$r = 2$ cm e $R = 2\sqrt{2}$ cm
Logo, a área A da coroa circular é dada por:
$A = \pi\left[(2\sqrt{2})^2 - 2^2\right]\ \text{cm}^2 = 4\pi\ \text{cm}^2$

37. Sendo R a medida, em metro, do raio da mesa, temos:
$\pi\,[(0{,}8)^2 - R^2] = 0{,}39\pi$
$\Rightarrow \therefore R = 0{,}5$
Logo, o raio da mesa mede 0,5 m.

38. a. Área A_I do setor I:
$A_I = \dfrac{100 \cdot 36\pi}{360}\ \text{cm}^2 = 10\pi\ \text{cm}^2$

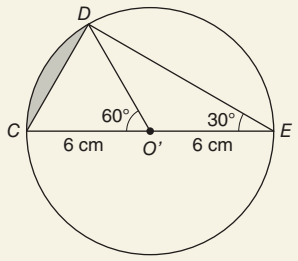
b. Ângulo central do setor III:
$\alpha = \dfrac{360 \cdot 8\pi}{36\pi} = 80°$

c. Ângulo central do setor II:
$\beta = \dfrac{360 \cdot \frac{13\pi}{3}}{12\pi} = 130°$

d. Ângulo central, γ, do setor IV:
$100° + 80° + 130° + \gamma = 360° \Rightarrow \gamma = 50°$
Indicando por A_{IV} a área do setor IV, temos:
$A_{IV} = \dfrac{50 \cdot 36\pi}{360}\ \text{cm}^2 = 5\pi\ \text{cm}^2$

39. a. Como a área S_{set} do setor circular OAB é $\frac{1}{4}$ da área do círculo de raio 4 cm, temos: $S_{set} = \dfrac{\pi \cdot 4^2}{4}\ \text{cm}^2 = 4\pi\ \text{cm}^2$
Calculando a área S_T do triângulo AOB, temos:
$S_T = \dfrac{4 \cdot 4}{2}\ \text{cm}^2 = 8\ \text{cm}^2$
Assim, a área S do segmento circular sombreado é dada por:
$S = S_{set} - S_T \Rightarrow S = (4\pi - 8)\ \text{cm}^2 = 4(\pi - 2)\ \text{cm}^2$

b. A medida do ângulo inscrito $D\hat{E}C$ é metade da medida do ângulo central $D\widehat{O'}C$; logo, a medida desse ângulo central é 60°. Além disso, $O'C = O'D$, portanto, o triângulo $O'CD$ é equilátero.



A área do segmento circular alaranjado é a diferença entre a área do menor setor circular $O'CD$ e a área do triângulo $O'CD$, nessa ordem.
Como a área S_{set} do setor circular $O'CD$ é $\frac{1}{6}$ da área do círculo de raio 6 cm, temos: $S_{set} = \dfrac{\pi \cdot 6^2}{6}\ \text{cm}^2 = 6\pi\ \text{cm}^2$
Calculando a área S_T do triângulo $O'CD$, temos:
A medida h da altura do triângulo equilátero $O'CD$ é dada por: $h = \dfrac{6\sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}$
Logo, $S_T = \dfrac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2 = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.
Concluímos, então, que a área S do segmento circular alaranjado é dada por:
$S = S_{set} - S_T \Rightarrow S = (6\pi - 9\sqrt{3})\ \text{cm}^2 = 3(2\pi - 3\sqrt{3})\ \text{cm}^2$

40. alternativa **c**
Considere ℓ o lado do quadrado $ABCD$, r o raio do círculo menor e R o raio do círculo maior.
Temos que $r = \dfrac{\ell}{2}$ e $2R = \ell\sqrt{2}$, logo $R = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$.
Então, as áreas $S1$ e $S2$ dos círculos menor e maior, respectivamente, podem ser calculadas:

$$S1 = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\pi\ell^2}{4}$$

$$S2 = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{\ell\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi\ell^2}{2}$$

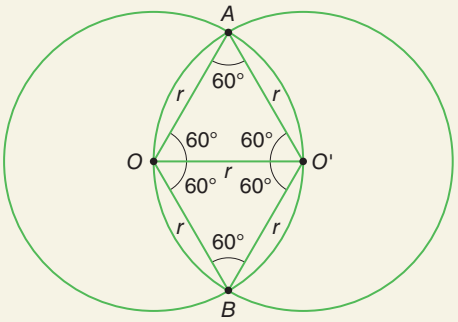
Portanto, a razão da área do círculo maior para o círculo menor é igual a:

$$\frac{S2}{S1} = \frac{\frac{\pi\ell^2}{2}}{\frac{\pi\ell^2}{4}} = \frac{\pi\ell^2}{2} \cdot \frac{4}{\pi\ell^2} = 2$$

41. a. Os segmentos de reta $\overline{OO'}$, $\overline{OA}$, $\overline{O'A}$, $\overline{OB}$ e $\overline{O'B}$ têm a mesma medida r, pois são raios dessas circunferências. Logo, os triângulos OAO' e OBO' são equiláteros de lado r.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Concluímos, assim, que a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é 120°.

b. Calculando a área S_{set} do setor circular OAO', temos:

$$\begin{array}{ccc} 360 & \text{——} & \pi \cdot r^2 \\ 60 & \text{——} & S_{set} \end{array}$$

Logo, $S_{set} = \frac{\pi r^2}{6}$

Calculando a área $S_{\Delta AOO'}$ do triângulo equilátero AOO', que é a mesma do triângulo equilátero BOO', temos:

$$S_{\Delta AOO'} = \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

Calculando a área S_{seg} do segmento circular determinado pelo ângulo $A\hat{O}O'$, que é a mesma dos segmentos circulares determinados pelos ângulos centrais $A\hat{O}'O$, $B\hat{O}O'$ e $B\hat{O}'O$, temos:

$$S_{seg} = S_{set} - S_{\Delta AOO'} \Rightarrow S_{seg} = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore S_{seg} = \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12}$$

Concluímos, assim, que a área da área S comum aos dois círculos é dada por:

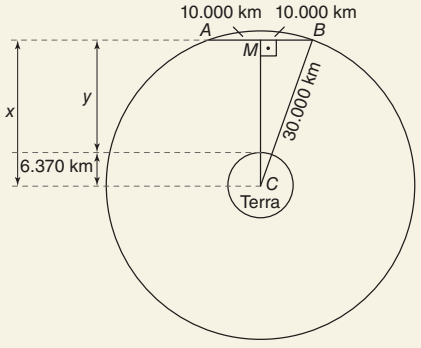
$$S = 4S_{seg} + 2S_{\Delta AOO'} \Rightarrow S = 4 \cdot \frac{r^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{12} + 2 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore S = \frac{r^2(8\pi - 6\sqrt{3})}{12}$$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Sendo x a distância da corda ao centro da Terra e y a distância da corda à superfície terrestre, temos:

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



a. $x^2 + 10.000^2 = 30.000^2 \Rightarrow x^2 + 10^8 = 9 \cdot 10^8$

$\therefore x^2 = 8 \cdot 10^8 \qquad \therefore x = 2 \cdot 10^4 \cdot \sqrt{2} = 20.000\sqrt{2}$

Logo, a menor distância entre o asteroide e o centro da Terra é $20.000\sqrt{2}$ km.

b. $y = (20.000\sqrt{2} - 6.370)$ km ≈ 21.630 km

2. alternativa **e**

Temos que $OA = OB = 13$ cm, $OD = 5$ cm e $\overline{OD}$ é perpendicular a $\overline{AB}$. Assim, pelo teorema de Pitágoras calculamos a medida AD, em centímetro:

$(AO)^2 = (AD)^2 + (OD)^2 \Rightarrow 13^2 = (AD)^2 + 5^2 \quad \therefore AD = 12$

O triângulo AOB é isósceles de base $\overline{AB}$, logo D é ponto médio da base, assim, $AD = DB = 12$ cm, com o que concluímos: $AB = AD + DB \Rightarrow AB = 24$ cm

3. alternativa **d**

Sejam A, B, C, e D os extremos dos arcos.

Temos que $\overline{O'A}$ e $\overline{O'B}$ são raios da circunferência de centro O'; logo $O'A = O'B = 6$ m. Além disso, o ângulo formado por $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ mede 60°, portanto, o triângulo ABO' é equilátero, com o que deduzimos que $AB = 6$ m. Dessa maneira, o arco de circunferência de centro O tem raio medindo 3 m.

Cada um dos arcos $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{BC}$ medem $\frac{1}{6}$ do comprimento da circunferência de raio 6 m. Assim, temos:

$$2 \cdot \frac{1}{6}(2\pi \cdot 6) = 4\pi$$

O arco $\overset{\frown}{AB}$ mede metade do comprimento da circunferência de raio 3 m. Portanto: $\frac{1}{2}(2\pi \cdot 3) = 3\pi$

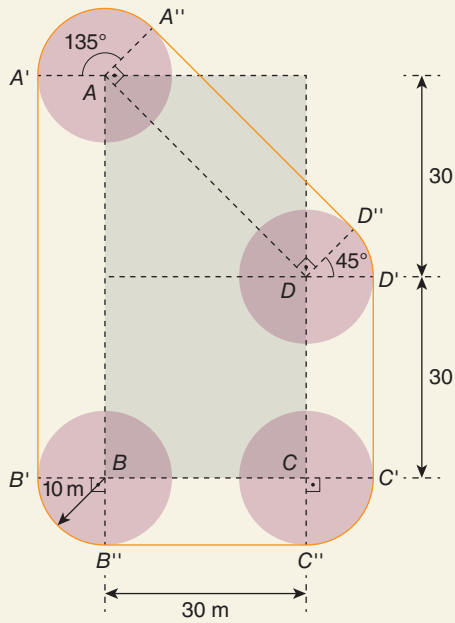
O segmento de reta $\overline{DC}$ mede 12 m. Calculando o perímetro do jardim, em metro, temos:

$$4\pi + 3\pi + 12 = 7\pi + 12$$

Portanto, o perímetro do jardim terá $7\pi + 12$ m.

4. alternativa **b**

Considere os pontos e marcações na seguinte figura:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Então, a fita de isolamento é composta pelos segmentos a seguir e suas medidas:

$A'B' = AB = 30$ m + 30 m = 60 m

$B''C'' = BC = 30$m

$C'D' = CD = 30$ m

$D''A'' = DA = 30\sqrt{2}$ m

Observe que a união dos arcos de circunferências $\overset{\frown}{A'A''}$, $\overset{\frown}{D''D''}$, $\overset{\frown}{B'B''}$ e $\overset{\frown}{C''C'}$ corresponde a uma circunferência de raio 10 m. Assim, o comprimento que completa a fita de isolamento é dado por $2\pi \cdot 10\text{ m} = 20\pi\text{ m}$.

Portanto, o comprimento da fita, em metro, é:

$$60 + 30 + 30 + 30\sqrt{2} + 20\pi =$$
$$= 20\pi + 120 + 30\sqrt{2} = 20\pi + 30(4 + \sqrt{2})$$

5. a. Como $1\text{ h} = 3{,}6 \cdot 10^3$ s e a velocidade do próton é $2{,}3 \cdot 10^5$ km/h, temos que a distância d, em quilômetro, percorrida pelo próton nesse tempo é dada por:

$d = 2{,}3 \cdot 10^5 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 \Rightarrow d = 8{,}28 \cdot 10^8$

Logo, em 1 h, o próton percorre a distância de $8{,}28 \cdot 10^8$ km.

b. Como a aproximação com cinco casas decimais para o número π é 3,14159 e o raio R do anel é 4,3 km, temos que o comprimento c do anel, em quilômetro, é dado por:

$c = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14159 \cdot 4{,}3 \Rightarrow c = 27{,}017674$

Logo, o número n de voltas dadas pela partícula nesse anel é dado por:

$$n = \frac{8{,}28 \cdot 10^8}{2{,}7017674 \cdot 10} \Rightarrow n = 3{,}064660563 \cdot 10^7$$

Ou seja: $n = 30.646.605{,}63$

Assim, em 1 h, o próton deu 30.646.605 voltas completas no anel.

6. Os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}D$ são suplementares; logo: $m(B\hat{A}D) = 45°$

Considerando a altura $\overline{BE}$, de medida h, temos que o triângulo retângulo BEA é isósceles, pois tem dois ângulos de mesma medida; logo: $BE = AE = h$

Temos, então: $h^2 + h^2 = 8^2 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$

Concluímos, assim, que a área A_p do paralelogramo é dada por: $A_p = (12 \cdot 4\sqrt{2})\text{ cm}^2 = 48\sqrt{2}\text{ cm}^2$

7. a. O fluxograma orienta a seguinte sequência:

- Início.
- Dados de entrada: $x = 5$, $y = 6$ e $z = 9$
- Processamento: $p = \frac{5 + 6 + 9}{2} = 10$
- Processamento: $k = 10(10 - 5)(10 - 6)(10 - 9) = 200$
- Decisão: sim, pois $k > 0$.
- Processamento: $A = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
- Dado de saída: $A = 10\sqrt{2}$
- Fim.

b. O fluxograma orienta a seguinte sequência:

- Início.
- Dados de entrada: $x = 2$, $y = 4$ e $z = 8$.
- Processamento: $p = \frac{2 + 4 + 8}{2} = 7$
- Processamento: $k = 7(7 - 2)(7 - 4)(7 - 8) = -105$
- Decisão: não, pois $k < 0$.
- Dado de saída: não existe o triângulo.
- Fim.

c. Se existe um triângulo cujos lados medem x, y e z, em uma mesma unidade de comprimento, então sua área A é dada por:

$$A = \sqrt{p(p - x)(p - y)(p - z)}, \text{ em que: } p = \frac{x + y + z}{2}$$

8. a. A área A do tampo, em centímetro quadrado, é a diferença entre a área da tábua retangular original e a soma das áreas dos triângulos retirados, isto é:

$$A = 120 \cdot 60 - 4 \cdot \frac{10 \cdot 10}{2} \Rightarrow A = 7.000\text{ cm}^2$$

b. Indicando por x a medida, em centímetro, da hipotenusa de cada triângulo retirado, temos, pelo teorema de Pitágoras: $x^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow x = 10\sqrt{2}$

Logo, o perímetro p da mesa é dado por:

$p = 2 \cdot 100 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 10\sqrt{2} \Rightarrow p = 40(7 + \sqrt{2})\text{ cm}$

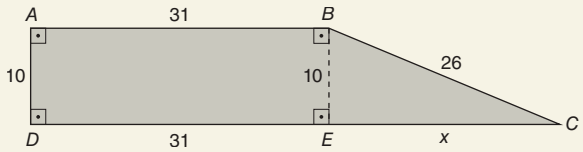
9. Sendo ℓ a medida do lado do quadrado, temos:

$\ell\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 3$

Assim, a medida a do lado do hexágono é $a = 2$ m e, portanto, a área A desse hexágono é dada por:

$$A = \frac{3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{3}}{2}\text{ m}^2 = 6\sqrt{3}\text{ m}^2$$

10. Sendo E a projeção ortogonal do ponto B sobre a base $\overline{DC}$ e x a medida, em metro, do segmento $\overline{EC}$, temos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo BCE, temos: $x^2 + 10^2 = 26^2 \Rightarrow x = 24$

Assim, temos que a medida da base $\overline{DC}$ é 55 m. Logo, a área S do trapézio é dada por:

$$S = \frac{(55 + 31) \cdot 10}{2}\text{ m}^2 = 430\text{ m}^2$$

11. A área A de cada arruela é dada por:

$A = \pi[(1{,}5)^2 - (0{,}5)^2]\text{ cm}^2 = 2\pi\text{ cm}^2$

O número máximo de arruelas que podem ser retiradas da placa é 200; logo, a área que será utilizada é: $200 \cdot 2\pi\text{ cm}^2$, ou seja, $400\pi\text{ cm}^2$.

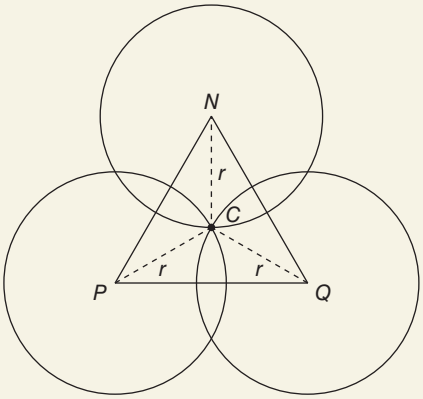
12. a. A área S do segmento circular laranja é a diferença entre a área do setor circular DAC e a área do triângulo DAC, isto é: $S = \left(\frac{\pi \cdot 1^2}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2}\right)\text{ m}^2 \Rightarrow S = \frac{\pi - 2}{4}\text{ m}^2$

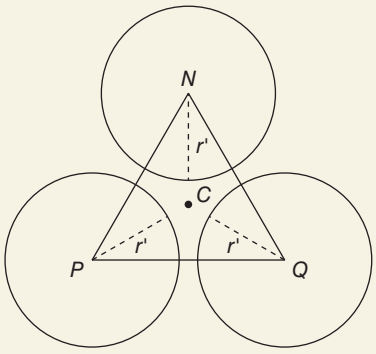
b. A área A da região laranja é o dobro da área do segmento circular representado na figura.

Logo:

$$A = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{4 \cdot 4}{2}\right)\text{ dm}^2 \Rightarrow A = 8 \cdot (\pi - 2)\text{ dm}^2$$

13. Seja NPQ o triângulo equilátero em questão e seja C o centro desse triângulo. A distância r entre qualquer um dos vértices, N, P e Q, e o centro C é o raio mínimo que deve ter o alcance de cada antena, pois qualquer raio r' de alcance menor que r deixará pontos do triângulo fora do alcance de cada antena, pelo menos o ponto C não será alcançado. Observe as figuras a seguir que atestam essa afirmação.



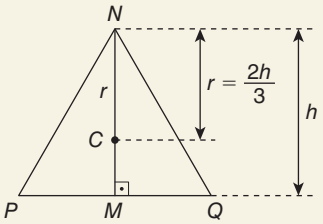


$r' < r$

Seja M o ponto do lado $\overline{PQ}$ tal que $\overline{NM}$ passa por C. Como, no triângulo equilátero o centro C coincide com o ortocentro e o baricentro (também coincide com o incentro e o circuncentro), temos que:

- $\overline{NM}$ é mediana, portanto, C divide $\overline{NM}$, a partir do vértice N, na razão $\frac{2}{1}$;
- $\overline{NM}$ é altura, portanto, $\overline{NM}$ é perpendicular ao lado $\overline{PQ}$.

Assim, admitindo a altura h do triângulo e a medida r, em quilômetro, esquematizamos:



Sendo ℓ a medida, em km, do lado do triângulo, e $225\sqrt{3}\,\text{km}^2$ sua área, temos:

$$\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3} \Rightarrow \ell^2 = 900$$

Como ℓ não pode ser negativo, concluímos que: $\ell = 30$

Logo, a medida h é dada por:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

Finalmente, calculamos a medida r:

$$r = \frac{2h}{3} \Rightarrow r = \frac{2 \cdot 15\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3}$$

Concluímos, então, que o raio mínimo de alcance de cada antena deve ser de $10\sqrt{3}$ km.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 4

1. alternativa **b**

A distância d percorrida, em metro, para cada volta das rodas é o perímetro de cada uma, isto é:

$d = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}5 \Rightarrow d = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 \therefore d = 3{,}14$

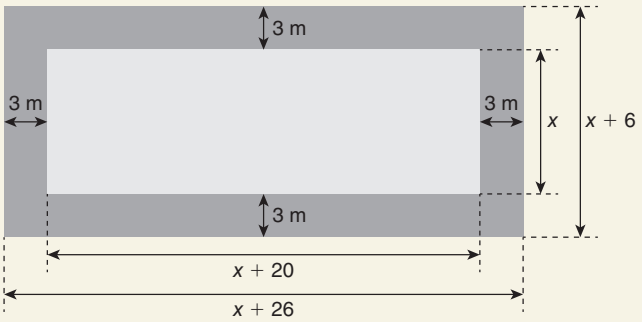
Logo, o número n de voltas para que cada roda percorra 12,56 m é dado por:

$$n = \frac{12{,}56\ \text{km}}{3{,}14\ \text{m}} \Rightarrow n = \frac{12.560\ \text{m}}{3{,}14\ \text{m}} \therefore n = 4.000$$

Concluímos, assim, que cada roda do trem dá 4.000 voltas.

2. alternativa **e**

Indicando por x a largura do jardim, em metro, temos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Como a área do jardim e da calçada, juntos, é 576 m^2, temos: $(x + 26)(x + 6) = 576 \Rightarrow x^2 + 32x - 420 = 0$

$\therefore x = 10$ ou $x = -42$

Apenas $x = 10$ convém como solução, pois x representa uma medida de comprimento e, portanto, não pode ser negativo. Concluímos, então, que o jardim tem 30 m de comprimento por 10 m de largura.

3. alternativa **d**

Indicamos por x a medida dos segmentos $\overline{DF}$ e $\overline{BE}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ECB, temos:

$x^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow x^2 = 100 \therefore x = 10$

Assim, a área A do losango é dada por: $A = (10 \cdot 6)\ \text{dm}^2$, ou seja, $A = 60\ \text{dm}^2$.

4. alternativa **c**

Indicamos por O o centro da coroa circular e por R a medida do raio interno.

Assim, temos:

$\pi \cdot (3R)^2 - \pi \cdot R^2 = 16\pi \Rightarrow 8\pi R^2 = 16 \therefore R = \sqrt{2}$

Concluímos, assim, que a medida do raio externo é $3\sqrt{2}$ cm.

CAPÍTULO 5 A linguagem das funções

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. a. Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa zero. Assim, para que A pertença ao eixo das ordenadas, devemos ter $8p - 2 = 0$, ou seja, $p = \frac{1}{4}$.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

b. Todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada zero. Assim, para que B pertença ao eixo das abscissas, devemos ter $2q^2 - 18 = 0$, ou seja, $q = 3$ ou $q = -3$.

c. Todo ponto do quarto quadrante tem abscissa positiva e ordenada negativa. Assim, para que $C \in$ 4º QDT, devemos ter $6r - 24 < 0$, ou seja, $r < 4$.

d. Todo ponto do terceiro quadrante tem abscissa e ordenada negativas. Assim, para que D pertença ao terceiro quadrante, devemos ter:

$\begin{cases} 2s - 3 < 0 \\ 1 - 2s < 0 \end{cases}$ Assim, concluímos que $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{2}$.

e. Para que dois pontos sejam simétricos em relação ao eixo das abscissas, suas abscissas devem ser iguais e suas ordenadas devem ser opostas. Assim, para que E e F sejam simétricos em relação ao eixo das abscissas, devemos ter:

$\begin{cases} 2t^2 = 18 \\ t^2 - 7t = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t^2 = 18 & (1) \\ t^2 - 7t + 12 = 0 & (2) \end{cases}$

De (1), obtemos $t = 3$ ou $t = -3$.

De (2), obtemos $t = 3$ ou $t = 4$.

Como a solução do sistema é formada pelas raízes comuns a (1) e (2), concluímos que $t = 3$.

3. $\begin{cases} 2m + n = 6 \\ 3m - n = 14 \end{cases}$ Assim, concluímos que $m = 4$ e $n = -2$.

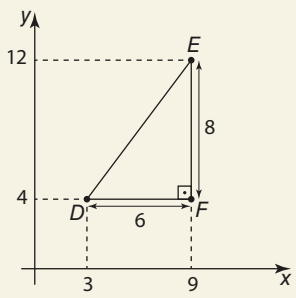
4. a. Representando no plano cartesiano os pontos D e E e o triângulo retângulo auxiliar DEF, temos, pelo teorema de Pitágoras:

$(DE)^2 = 6^2 + 8^2$

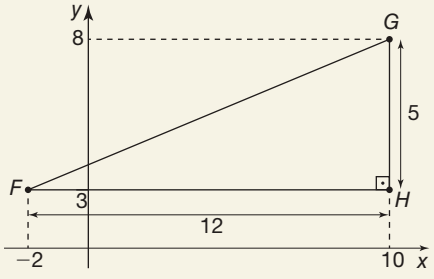
$(DE)^2 = 100$

$\therefore DE = 10$

Logo, a distância é 10.



b. Representando no plano cartesiano os pontos F e G e o triângulo retângulo auxiliar FGH, temos:



Assim, pelo teorema de Pitágoras, temos:

$(FG)^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow (FG)^2 = 169 \therefore FG = 13$

Logo, a distância entre os pontos F e G é 13.

5. Aplicando as fórmulas $J = C \cdot i \cdot t$ e $M = C + J$, temos:

$y = 10.000 + 10.000 \cdot 0{,}02 \cdot x$

Assim: $y = 10.000 + 200x$

6. A área do retângulo é dada pelo produto entre o comprimento e a largura; logo, $y = 30x$.

7. a. Calculamos 10.000 L da venda mensal, mais 3 vezes 200 L pelos 3 centavos de desconto. Concluímos, assim, que serão vendidos 10.600 L de etanol por dia.

b. Generalizando a ideia utilizada no item anterior, concluímos que a equação pedida é:

$y = 10.000 + x \cdot 200 \Rightarrow y = 10.000 + 200x$

c. $z = (10.000 + 200x)(4{,}50 - 0{,}01x)$

$z = -2x^2 + 800x + 45.000$

8. a. O tempo t, em minuto, em que o mergulhador esteve submerso é dado por $t = \frac{900 - 300}{15} = 40$.

Logo, 40 minutos.

b. O consumo de ar pelo mergulhador foi de 15 L/min; logo, $C = 15t$.

c. Em t minutos foram consumidos $15t$ litros de ar; logo, $Q = 900 - 15t$.

d. Para $C = Q$, temos: $15t = 900 - 15t \Rightarrow t = 30$

Logo, em 30 minutos após a submersão.

9. a. De $\overline{AB} = 4$ e $\overline{DB} = x$, temos $\overline{AD} = 4 - x$.

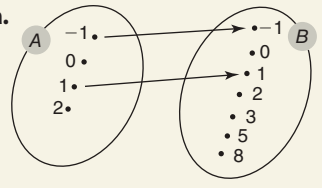
Assim, pelo teorema de Pitágoras no triângulo ACD, temos:

$y^2 = 3^2 + (4 - x)^2 \Rightarrow y = \sqrt{9 + (4 - x)^2}$

b. Sabemos que a altura do triângulo ACD mede 3 unidades de comprimento e a base desse triângulo mede $(4 - x)$ unidades de comprimento. Logo, a área S do triângulo ACD é dada pela seguinte lei de associação:

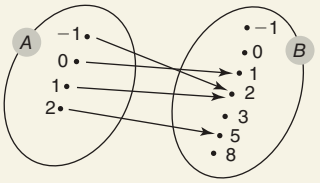
$S = \frac{3(4 - x)}{2}$

12. a.



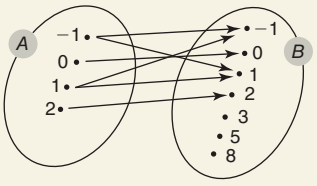
Não é função de A em B.

b.



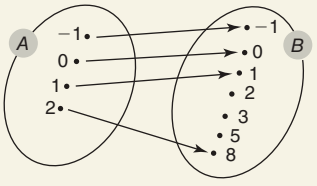
É função de A em B.

c.



Não é função de A em B.

d.



É função de A em B.

14. a. Ferro de passar roupa: $\frac{1.400}{1.000} \cdot 3 = 4{,}2$

Máquina de secar roupas: $\frac{3.500}{1.000} \cdot 2 = 7$

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Cafeteira: $\frac{600}{1.000} \cdot 0{,}5 = 0{,}3$

Lâmpada: $\frac{100}{1.000} \cdot 3 = 0{,}3$

b. Aplicando a fórmula, temos:

$C = (3{,}2 \cdot 6 \cdot 30)\ \text{kWh} = 576\ \text{kWh}$

Logo, o valor a pagar, em real, é dado por:

$0{,}50 \cdot 576 = 288$

Portanto, o valor a pagar é R$ 288,00.

c. Aplicando a fórmula, temos:

$C = (x \cdot 4 \cdot 30) = 120x$

Logo, o valor v, em real, é dado por $v = 0{,}50 \cdot 120x$.

Portanto, o valor é $v = 60x$.

16. a. $f(0) = 8 - 0 \Rightarrow f(0) = 8$

b. $f(2) = 8 - 2 \Rightarrow f(2) = 6$

c. $f(-4) = 8 - (-4) \Rightarrow f(-4) = 12$

d. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 8 - \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{2}$

e. $g(1) = \frac{1^2 - 2}{1} \Rightarrow g(1) = -1$

f. $g(-2) = \frac{(-2)^2 - 2}{-2} \Rightarrow g(-2) = -1$

g. $g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2}{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{3}$

h. $f(-3) + g(-1) = 8 - (-3) + \frac{(-1)^2 - 2}{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-3) + g(-1) = 12$

17. $f(2) = f(1) \Rightarrow \frac{a \cdot 2 - 1}{(2)^2 + 3} = \frac{a \cdot 1 - 1}{(1)^2 + 3}$

$\therefore \frac{2a - 1}{7} = \frac{a - 1}{4} \Rightarrow 8a - 4 = 7a - 7$

$\therefore a = -3$

18. a. Pelo enunciado, temos:

$\begin{cases} f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 16 \\ f(-1) = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) = 7 \end{cases}$

Assim, obtemos o seguinte sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas:

$\begin{cases} 4a + 2b = 16 \\ a - b = 7 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos: $a = 5$ e $b = -2$

b. Pelo enunciado, temos:

$g(3) = \frac{c \cdot 3 + 4}{c + d \cdot 3} = 3$

$\therefore \frac{3c + 4}{c + 3d} = 3 \Rightarrow 3c + 4 = 3c + 9d$

$\therefore \text{d} = \frac{4}{9}$

Observe que o valor da constante c é indeterminado, pois qualquer valor de c satisfaz a igualdade $3c + 4 = 3c + 9d$.

Concluímos, então, que faltam dados para a solução do problema.

19. a. Para $x = 100$, temos:

$P = 50 + \frac{200}{100} = 52$ Logo, 52 dólares.

b. Para $x = 200$, temos:

$P = 50 + \frac{200}{200} = 51$ Logo, 51 dólares.

c. Para $P = 54$, e, assumindo que $x \neq 0$, temos:

$54 = 50 + \frac{200}{x} \Rightarrow x = 50$ Logo, adquiriu 50 sacas.

20. alternativa **a**

$V_1(t) = V_2(t) \Rightarrow 250t^3 - 100t + 3.000 = 150t^3 + 69t + 3.000$

$\therefore 100t^3 - 169t = 0 \Rightarrow t(100t^2 - 169) = 0$

$\therefore t = 0$ ou $100t^2 - 169 = 0$

$100t^2 - 169 = 0 \Rightarrow t^2 = 1{,}69$

$\therefore t = -1{,}3$ (não convém) ou $t = 1{,}3$

Logo, no instante $t = 1{,}3$ h.

23. Observando o gráfico, em cada item, concluímos que:

$D(f) =]-1, 6]$; $Im(f) = \{-2\} \cup [0, 7]$

$D(g) =]1, 7]$; $Im(g) = [-2, 4] \cup [5, 11[$

24. alternativa **c**

Os preços de compra dos veículos X e Y são R$ 30.000,00 e R$ 55.000,00, respectivamente, e os preços de venda são R$ 25.000,00 e R$ 35.000,00, respectivamente, como se constata pelo gráfico. Logo, a perda, em reais, dessa pessoa é dada por:

$(30.000 + 55.000) - (25.000 + 35.000) = 25.000$

25. a. Considerando $A(15, 20)$, $B(30, v)$ e $C(50, 48)$. Pelo teorema de Tales, temos:

$\begin{cases} \frac{AC}{AB} = \frac{50 - 15}{30 - 15} \Rightarrow \frac{35}{15} = \frac{28}{v - 20} \\ \frac{AC}{AB} = \frac{48 - 20}{v - 20} \end{cases} \therefore v = 32$

Logo, 32 L.

b. Sendo v_0 o volume de combustível no tanque quando o motorista parou no posto, temos, pelo teorema de Tales:

$\frac{50 - 15}{15 - 0} = \frac{48 - 20}{20 - v_0} \Rightarrow \frac{35}{15} = \frac{28}{20 - v_0}$

$\therefore v = 8$

Logo, havia 8 L.

c. De 15 segundos a 50 segundos, ou seja, em 35 segundos, foram despejados 28 L de combustível no tanque, o que equivale a 0,8 L/s. Assim, em 15 segundos foram despejados 12 L no tanque. O gráfico informa que 15 segundos depois de acionado o gatilho havia 20 L de combustível no tanque; logo:

- 30 segundos depois de acionado o gatilho, o volume de combustível no tanque era (20 L + 12 L), ou seja, 32 L;
- quando o motorista parou no posto, o volume de combustível no tanque era (20 L − 12 L), ou seja, 8 L.

26. b. Como a equipe é formada por 6 jogadores, e o gráfico é formado por 6 pontos distintos, concluímos que não há dois jogadores dessa equipe com a mesma idade e a mesma altura, isto é, dois jogadores quaisquer

dessa equipe ou têm idades diferentes ou têm alturas diferentes. Diante dessa constatação, observamos que apenas a abscissa 19 corresponde a exatamente dois pontos distintos. Logo, há exatamente dois jogadores dessa equipe com a mesma idade.

c. Diante da constatação destacada na resolução do item **b**, observamos que apenas a ordenada 1,90 corresponde a mais de um ponto do gráfico (exatamente três pontos distintos). Logo, há exatamente 3 jogadores dessa equipe com a mesma altura.

27. a. As raízes de $f(x) = 0$ são as abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo Ox. Logo, os valores de x que anulam a função f são: $S = \left\{-2, 0, 1, 2 \text{ e } \frac{5}{2}\right\}$

b. Os pontos do gráfico são da forma $(x, f(x))$. Assim, os pontos do gráfico que têm $f(x) > 0$ são aqueles acima do eixo Ox. Nesses pontos, os valores de x são todos os números reais, tais que:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } 1 < x < 2 \text{ ou } \frac{5}{2} < x \leqslant 3\right\}$

c. Os pontos do gráfico são da forma $(x, f(x))$. Assim, os pontos do gráfico que têm $f(x) \geqslant 0$ são aqueles que pertencem ao eixo Ox ou estão acima desse eixo. Nesses pontos, os valores de x são todos os números reais tais que:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 0 \text{ ou } 1 \leqslant x \leqslant 2 \text{ ou } \frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$

d. Os pontos do gráfico são da forma $(x, f(x))$. Assim, os pontos do gráfico que têm $f(x) < 0$ são aqueles abaixo do eixo Ox. Nesses pontos, os valores de x são todos os números reais, tais que:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < \frac{5}{2}\right\}$

e. Os pontos do gráfico são da forma $(x, f(x))$. Assim, os pontos do gráfico que têm $f(x) \leqslant 0$ são aqueles que pertencem ao eixo Ox ou estão abaixo desse eixo. Nesses pontos, os valores de x são todos os números reais, tais que:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

28. a. Temos $f(x) = 0$ no ponto em que o gráfico de f intersecta o eixo Ox, ou seja, $S = \left\{\frac{12}{5}\right\}$.

b. Temos $g(x) = 0$ nos pontos em que o gráfico de g intersecta o eixo Ox, ou seja, $S = \{0, 6\}$.

c. Os valores de x para os quais $f(x) > 0$ são as abscissas dos pontos do gráfico de f que estão acima do eixo Ox, ou seja, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < \frac{12}{5}\right\}$.

d. Os valores de x para os quais $f(x) < 0$ são as abscissas dos pontos do gráfico de f que estão abaixo do eixo Ox, ou seja, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{12}{5} < x \leqslant 6\right\}$.

e. Os valores de x para os quais $g(x) > 0$ são as abscissas dos pontos do gráfico de g que estão acima do eixo Ox, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 6\}$.

f. Os valores de x para os quais $g(x) < 0$ são as abscissas dos pontos do gráfico de g que estão abaixo do eixo Ox, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 0\}$.

g. Os valores de x para os quais $f(x) \cdot g(x) < 0$ são as abscissas dos pontos do gráfico de g em que $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$, ou seja, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 0 \text{ ou } \frac{12}{5} < x < 6\right\}$.

h. Os valores de x para os quais $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ são as abscissas dos pontos do gráfico de g em que $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ e $g(x) < 0$, ou seja, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{12}{5}\right\}$.

30. a. Condição de existência: $x \geqslant 0$. Logo: $D(f) = \mathbb{R}_+$

b. Existe $f(x)$ para qualquer x real. Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

c. Existe $f(x)$ para qualquer x real. Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

d. Condição de existência: $x \neq 3$ e $x \neq -3$.
Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\}$

e. Condição de existência: $x \geqslant 2$.
Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

f. Existe $f(x)$ para qualquer x real. Logo: $D(f) = \mathbb{R}$

g. Condição de existência: $x \neq 6$ e $x \neq -6$ e $x \geqslant 2$.
Essa condição pode ser expressa, simplesmente, por $x \geqslant 2$ e $x \neq 6$.
Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2 \text{ e } x \neq 6\}$

h. Condição de existência: $x \neq 0$. Logo: $D(f) = \mathbb{R}^*$

31. a. O domínio de f é o conjunto de todos os números reais x, de modo que $\frac{4}{3x^2 + 2x + 1}$ também seja um número real.

Observamos que:

$$\frac{4}{3x^2 + 2x + 1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + 1 \neq 0$$

Para encontrar os números que anulam o denominador, resolvemos a equação $3x^2 + 2x + 1 = 0$:

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8$$

Como o discriminante é negativo, deduzimos que essa equação não tem raízes reais; logo, a inequação $3x^2 + 2x + 1 \neq 0$ é satisfeita para qualquer valor real de x, de onde concluímos que $D(f) = \mathbb{R}$.

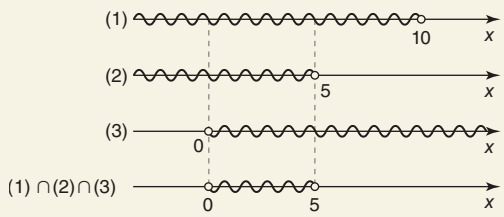
b. O domínio de g é o conjunto de todos os números reais x, de modo que $\frac{4}{3x^2 + 2x + k}$ também seja um número real. Para que o domínio de g seja $\mathbb{R}$, o denominador $3x^2 + 2x + k$ deve ser diferente de zero para qualquer x real, o que ocorre se, e somente se, o discriminante desse polinômio do 2º grau for negativo:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot k < 0$$
$$\therefore k > \frac{1}{3}$$

32. a. Deduzindo as medidas pela figura, o comprimento da base da caixa mede $20 - 2x$ cm e a largura $10 - 2x$ cm, observamos também que a altura mede x cm. Assim: $V(x) = (20 - 2x) \cdot (10 - 2x) \cdot x$

b. $\begin{cases} 20 - 2x > 0 \\ 10 - 2x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 10 & (1) \\ x < 5 & (2) \\ x > 0 & (3) \end{cases}$

FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA



Logo: $D(V) =]0, 5[$

33. a. $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$

Logo, as raízes de f são 1 e 3.

b. $5x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$

Logo, a única raiz da função é $-\frac{3}{5}$.

c. $\sqrt{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$\therefore x = 3$ ou $x = -3$

Logo, as raízes de f são 3 e -3.

d. $x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$

$\therefore x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -2$

Logo, as raízes de f são 0, 2 e -2.

e. $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

Logo, a função não tem raiz real, pois nenhum número real ao quadrado é igual a um número negativo.

f. $x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0$

$\therefore x = 0$ ou $x^2 - 6x + 8 = 0$

Logo, as raízes de f são 0, 2 e 4.

g. A função não tem raiz, pois não existe x real tal que $f(x) = 0$.

h. $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0 \Rightarrow x^2(x - 9) - 9(x - 9) = 0$

$\therefore (x - 9)(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x - 9 = 0$ ou $x^2 - 9 = 0$

$\therefore x = 9$ ou $x = 3$ ou $x = -3$

Logo, as raízes de f são 9, 3 e -3.

35. a. A equação do 2º grau $2x^2 - 3x + k = 0$ deve ter duas raízes reais distintas. Isso ocorre se, e somente se, o discriminante da equação for positivo. Assim, temos:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k > 0$$
$$\therefore k < \frac{9}{8}$$

b. A equação do 2º grau $2x^2 - 3x + k = 0$ deve ter duas raízes reais iguais. Isso ocorre se, e somente se, o discriminante da equação for nulo. Assim, temos:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 0$$
$$\therefore k = \frac{9}{8}$$

c. A equação do 2º grau $2x^2 - 3x + k = 0$ não deve admitir raiz real. Isso ocorre se, e somente se, o discriminante da equação for negativo. Assim, temos:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k < 0$$
$$\therefore k > \frac{9}{8}$$

36. a. O mês de março corresponde a $t = 3$. Calculando $f(3)$, temos: $f(3) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = -2$

Concluímos, -2 bilhões de dólares.

b. Resolvendo a equação $f(t) = 0$, temos:

$$t^2 - 7t + 10 = 0$$
$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$$
$$\therefore t = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t = 5$$

No contexto do enunciado, devemos ter $1 \leqslant t \leqslant 12$; logo, os dois valores obtidos para t convêm como resposta. Assim, as raízes da equação são 2 e 5.

c. As raízes 2 e 5 representam os meses de fevereiro e maio, quando a balança comercial esteve em equilíbrio comercial.

d. Dizer que o déficit foi de 3 bilhões de dólares equivale a dizer que $f(t) = -3$, ou seja,

$t^2 - 7t + 10 = -3$.

Então, temos:

$$t^2 - 7t + 10 = -3 \Rightarrow t^2 - 7t + 13 = 0$$
$$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -3$$

Como $\Delta < 0$, concluímos que a equação não possui raiz real; logo, em nenhum dos meses do período citado houve déficit de 3 bilhões de dólares.

37. No instante em que B alcançou A, a distância entre os carros é nula, isto é, $d(t) = 0$. Então, temos:

$$\frac{t^3 - 36t}{t - 20} = 0 \Rightarrow t^3 - 36t = 0$$

$t(t^2 - 36) = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 6$ ou $t = -6$ (não convém)

Como $t = 0$ é o instante da largada, concluímos que B alcançou A 6 segundos depois da largada.

40. a. Verdadeira, pois para quaisquer valores t_1 e t_2 pertencentes a um dos intervalos [3, 4] ou [10, 12], temos que $t_2 > t_1 \Rightarrow v(t_2) < v(t_1)$.

b. Verdadeira, pois para qualquer t do intervalo [0, 3], temos $v(t) = 4$; e para qualquer t' do intervalo [7, 10], temos $v(t') = 6$.

c. Falsa, pois o valor v da ação cresceu apenas no intervalo [4, 7]; logo, v cresceu durante 3 horas do período considerado no gráfico.

d. Verdadeira, pois o gráfico mostra que o maior valor atingido pela ação foi de 20 reais.

e. Falsa, pois o gráfico mostra que o menor valor atingido pela ação foi de 10 reais.

43. Temos:

$$p(t) = \frac{(t + 1)}{t} \Rightarrow p(t) = \frac{t}{t} + \frac{1}{t}$$
$$\therefore p(t) = 1 + \frac{1}{t}$$

Sendo t_1, e t_2 dois instantes quaisquer do período que durou a experiência, com $t_2 > t_1$, temos:

$$t_2 > t_1 \Rightarrow \frac{1}{t_2} < \frac{1}{t_1}$$

Adicionando 1 a ambos os membros dessa desigualdade, obtemos:

$$1 + \frac{1}{t_2} < 1 + \frac{1}{t_1} \Rightarrow \underbrace{\frac{(t_2 + 1)}{t_2}}_{p(t_2)} < \underbrace{\frac{(t_1 + 1)}{t_1}}_{p(t_1)}$$

Assim, concluímos que:

$t_2 > t_1 \Rightarrow p(t_2) < p(t_1)$, para quaisquer t_1, e t_2 do período que durou a experiência. Logo, a função p é decrescente em todo o seu domínio.

44. A taxa é dada por: $\frac{50-32}{10{,}5-10}$ km/h = 36 km/h

45. A taxa é dada por: $\frac{2\,°C-8\,°C}{23\,h-19\,h} = -1{,}5\,°C/h$

46. A taxa pedida é dada por: $\frac{-2-7}{47-11} = \frac{-9}{36} = -0{,}25$

Ou seja, é de −0,25 °C.

49. A condição de existência da função f é $x - 3 \neq 0$, ou seja, $x \neq 3$. Assim, o domínio de f é o conjunto: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$

Como a imagem da função f^{-1} é igual ao domínio da função f, concluímos que: $Im(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

54. a. $x = 2y - 1 \Rightarrow 2y = x + 1$

$\therefore y = \frac{x+1}{2}$

b. $x = 4y + 2 \Rightarrow 4y = x - 2$

$\therefore y = \frac{x-2}{4}$

c. $x = \frac{8}{3y+2} \Rightarrow 3xy + 2x = 8$

$\therefore 3xy = 8 - 2x \Rightarrow y = \frac{8-2x}{3x}$

d. $x = \frac{y+1}{2y-4} \Rightarrow 2xy - 4x = y + 1$

$\therefore 2xy - y = 4x + 1 \Rightarrow y(2x-1) = 4x + 1$

$\therefore y = \frac{4x+1}{2x-1}$

e. $x = \frac{1}{1+\sqrt{y}} \Rightarrow x + x\sqrt{y} = 1$

$\therefore x\sqrt{y} = 1 - x \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1-x}{x}$

$\therefore y = \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$

f. $x = \frac{1+\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{y}} \Rightarrow x\sqrt[3]{y} = 1 + \sqrt[3]{y}$

$\therefore x\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y} = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{y}(x-1) = 1$

$\therefore \sqrt[3]{y} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y = \left(\frac{1}{x-1}\right)^3$

55. alternativa **a**

Fazendo a mudança de variável: $x + 3 = t$, obtemos: $x = t - 3$. Assim:

$f(x+3) = 2x - 1 \Rightarrow f(t) = 2 \cdot (t-3) - 1 \therefore f(t) = 2t - 7$

Como a variável da função pode ser representada por qualquer letra, podemos escrever: $f(x) = 2x - 7$, que é equivalente a $y = 2x - 7$.

Trocamos x por y e y por x, obtendo: $x = 2y - 7$

Isolamos y, obtendo: $y = \frac{x+7}{2}$

Logo, a inversa da função f é: $f^{-1}(x) = \frac{x+7}{2}$

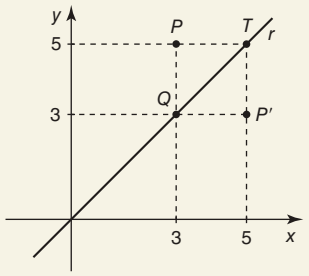
56. a. O preço p é a soma da bandeirada com o produto da distância d pelo valor cobrado por quilômetro rodado. Assim: $p = 5 + 2d$

b. $p = 5 + 2d \Rightarrow 2d = p - 5 \therefore d = \frac{p-5}{2}$

Logo, a inversa da função $p = 5 + 2d$ é $d = \frac{p-5}{2}$.

c. A relação $d = \frac{p-5}{2}$ expressa a distância d percorrida pelo táxi, em quilômetro, em função do preço p, em real.

57. a. Para determinar o simétrico de $P(3, 5)$ em relação à reta r, bissetriz dos quadrantes ímpares, traçamos por P as retas paralelas ao eixo Ox e ao eixo Oy, que interceptam r em $T(5, 5)$ e $Q(3, 3)$, respectivamente. Em seguida, traçamos por T a paralela ao eixo Oy e por Q a paralela ao eixo Ox, que se interceptam em $P'(5, 3)$. Observando que $PTP'Q$ é um quadrado e que, portanto, suas diagonais se interceptam perpendicularmente no ponto médio de cada uma, temos que P e P' estão na mesma perpendicular à r e equidistam de r. Logo, P e P' são simétricos em relação à r. Logo, o simétrico do ponto $P(3, 5)$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares é o ponto $P'(5, 3)$.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

b. O ponto $M(7, 7)$ pertence à reta bissetriz dos quadrantes ímpares; logo, o simétrico de M em relação a essa reta é o próprio ponto M.

c. Repetindo os procedimentos dos itens **a** e **b** para um ponto genérico $Q(a, b)$, concluímos que o simétrico de $Q(a, b)$ em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares é $Q'(b, a)$.

59. a. Como os pontos (200, 0) e (5.200, 50) pertencem ao gráfico de f^{-1}, os pontos (0, 200) e (50, 5.200) pertencem ao gráfico de f.

Assim:

$$\begin{cases} f(50) = 5.200 \\ f(0) = 200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{50b}{100-50} = 5.200 \\ a + \frac{b \cdot 0}{100-0} = 200 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a + b = 5.200 \\ a = 200 \end{cases} \Rightarrow a = 200 \text{ e } b = 5.000$$

b. Pelo item **a**, temos $f(x) = 200 + \frac{5.000x}{100-x}$. Assim:

$f(36) = 200 + \frac{5.000 \cdot 36}{100-36} \Rightarrow f(36) = 3.012{,}50$

Logo, o preço cobrado é R$ 3.012,50.

c. Pelo item **a**, temos $f(x) = 200 + \frac{5.000x}{100-x}$. Assim:

$15.200 = 200 + \frac{5.000x}{100-x} \Rightarrow 15.000 = \frac{5.000x}{100-x}$

$\therefore 3 = \frac{x}{100-x} \Rightarrow x = 300 - 3x$

$\therefore 4x = 300 \Rightarrow x = 75$

Logo, o volume de terra retirada será 75 m^3.

61. b. Sendo d o número de trabalhadores desempregados ao final do segundo trimestre, temos:

$9{,}3\% = 0{,}093 = \frac{d}{107.000.000} \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 0{,}093 \cdot 107.000.00 \Rightarrow d = 9.951.000$

Logo, 9.951.000.

62. a. O saldo comercial em cada mês é a diferença entre o valor monetário das exportações e o das importações, nessa ordem. Assim, o saldo, em milhão de dólares americanos, no mês de abril de 2024 é dado por:

30.328,8 − 21.894,6 = 8.434,20, ou seja, o saldo foi de US$ 8.434,20 milhões.

b. Fevereiro: 23.381,3 − 18.217,2 = 5.164,1
Março: 27.651,2 − 20.490,1 = 7.161,1
Abril: 30.328,8 − 21.894,6 = 8.434,2
Maio: 30.205,7 − 21.888,8 = 8.316,9
Junho: 28.769,8 − 22.397,1 = 6.372,7
Julho: 30.890,3 − 23.281,7 = 7.608,6
Concluímos, então, que, entre os meses considerados, o menor saldo da balança comercial mensal ocorreu em junho de 2024 e foi de US$ 5.164,10 milhões.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. Considerando $Q(6, 0)$ e o triângulo CPQ, sabemos que ele é retângulo em Q e que $CQ = 3$ e $PQ = 4$.
Sendo x a medida CP (que é o raio da circunferência), temos: $x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 25$
$\therefore x = 5$ ou $x = -5$ (não convém)
Logo, o raio da circunferência mede 5.

2. alternativa **d**
Aplicando a regra de três simples e direta:

$$\begin{matrix} 60 & \text{———} & x \\ 100 & \text{———} & y \end{matrix}$$

Concluímos que $y = \frac{5x}{3}$.

3. alternativa **c**
Para $N = 44$, temos: $44 = 1{,}25c + 7 \Rightarrow c = 29{,}6$
Logo, o comprimento é 29,6 cm.

4. a. Para $t = 4$, temos:
$N(4) = \frac{200 \cdot 4^2}{5 + 3 \cdot 4} \Rightarrow N(4) \approx 188$
Logo, aproximadamente, 188 *spams*.

b. Para $N(t) = 250$, temos:
$250 = \frac{200 \cdot t^2}{5 + 3t} \Rightarrow 200t^2 - 750t - 1.250 = 0$
Dividindo por 50 ambos os membros dessa última equação, temos:
$4t^2 - 15t - 25 = 0 \Rightarrow t = 5$ ou $t = -\frac{5}{4}$ (não convém)
Assim, 5 minutos de atividade.

5. alternativa **d**
Devemos ter $F_T(q) - C_T(q) \geqslant 0$, ou seja,
$5q - (2q + 12) \geqslant 0 \Rightarrow q \geqslant 4$
Logo, no mínimo, 4 unidades do produto.

6. a. $V(3) = -2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 120 \therefore V(3) = 78$
Logo, após três horas, restaram 78.000 L.

b. $V(0) = -2 \cdot 0^3 - 8 \cdot 0 + 120 \therefore V(0) = 120$
Logo, a capacidade do reservatório é 120.000 L.

c. $V(t) = 0 \Rightarrow -2t^2 - 8t + 120 = 0$
$\therefore t^2 + 4t - 60 = 0 \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{2}$
$\therefore t = 6$ ou $t = -10$ (não convém)
Logo, seriam necessárias 6 horas.

7. a. (0, 32) é um ponto do gráfico; logo, no instante zero havia 32 bactérias.

b. 275 − 190 = 85
Logo, da quinta para a sexta hora, a população aumentou em 85 bactérias.

c. Observando o gráfico, verificamos que o número inicial de bactérias era de 32 e na terceira hora era de 92. Então, a diferença no número de bactérias do início até a terceira hora da experiência era de 60 bactérias.

$$\begin{matrix} 32 & \text{———} & 100\% \\ 60 & \text{———} & x\% \end{matrix} \qquad x = 187{,}5\%$$

8. alternativa **b**
Para uma conta de R$ 19,00, o consumo x do morador ficou entre 15 m³ e 20 m³. Como o trecho do gráfico nessa faixa é um segmento de reta, podemos aplicar o teorema de Tales:
$\frac{25 - 15}{19 - 15} = \frac{20 - 15}{x - 15} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{5}{x - 15} \therefore x = 17$
Assim, o consumo foi de 17 m³.

9. a. $\frac{x_Q - 0}{24 - x_Q} = \frac{20 - 10}{40 - 20} \Rightarrow \frac{x_Q}{24 - x_Q} = \frac{1}{2} \therefore x_Q = 8$
Logo, para que o tanque atingisse 20 L, a torneira ficou aberta durante 8 segundos.

b. $\frac{x - 0}{y - 10} = \frac{24 - 0}{40 - 10} \Rightarrow \frac{x}{y - 10} = \frac{24}{30}$
$\therefore 30x = 24y - 240 \Rightarrow 5x - 4y + 40 = 0$

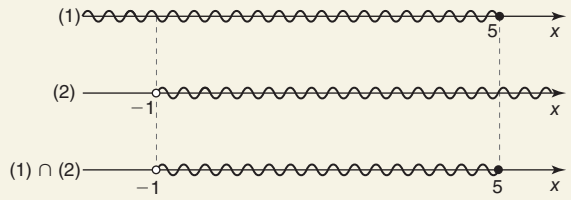
10. a. Para que a cotação no momento do dia vigente seja maior que a do dia anterior, devemos ter $V > 0$. No gráfico, V é positivo nos pontos acima do eixo das abscissas. Assim, os valores t para os quais isso ocorreu foram tais que: $0 < t < 12$ ou $16 < t < 20$ ou $22 < t \leqslant 24$.

b. Raciocinando como na resolução do item **a**, concluímos que os valores de t para os quais a cotação da moeda estrangeira esteve abaixo da cotação de fechamento do dia anterior são tais que: $12 < t < 16$ ou $20 < t < 22$.

c. Para que a cotação da moeda estrangeira seja a mesma do dia do fechamento, temos que $V = 0$, isto é, para $t = 0$ ou $t = 12$ ou $t = 16$ ou $t = 20$ ou $t = 22$.

11. alternativa **d**

$$\sqrt{5 - x} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ e } \begin{cases} 5 - x \geqslant 0 \ (1) \\ x + 1 > 0 \ (2) \end{cases}$$



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 5\} =]-1, 5]$

12. a. Se x é a largura, em centímetro, de um retângulo, então o comprimento, em centímetro, é $x + 10$. Logo, o perímetro p de cada retângulo é dado por: $p = x + x + x + 10 + x + 10 \Rightarrow p = 4x + 20$.

b. Como $340 \leqslant p \leqslant 440$, temos que o domínio da função p é formado por todos os números reais x tal que: $340 \leqslant 4x + 20 \leqslant 440 \Rightarrow 80 \leqslant x \leqslant 105$. Concluímos, então, que: $D(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid 80 \leqslant x \leqslant 105\}$.

c. O conjunto imagem é o conjunto dos possíveis valores de p, logo: $Im(p) = \{p \in \mathbb{R} \mid 340 \leqslant p \leqslant 440\}$.

13. No contexto do problema, devemos ter:

$$\begin{cases} n(x) \geqslant 0 \\ x \in \mathbb{N} \\ 8.400 - x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80 - \sqrt{8.400 - x} \geqslant 0 & (1) \\ x \in \mathbb{N} & (2) \\ 8.400 - x \geqslant 0 & (3) \end{cases}$$

De (1), temos:

$80 \geqslant \sqrt{8.400 - x} \Rightarrow 6.400 \geqslant 8.400 - x \therefore x \geqslant 2.000$

De (3), temos: $8.400 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 8.400$

Das condições (1), (2) e (3) concluímos que:

$D(n) = \{x \in \mathbb{N} \mid 2.000 \leqslant x \leqslant 8.400\}$

16. *Nota*: Os nutricionistas usam o termo "caloria" para designar a quantidade de energia necessária para elevar a temperatura de 1 quilograma (equivalente a 1 litro) de água de 14,5 °C para 15,5 °C. O correto, nesse caso, seria utilizar kcal (quilocaloria).

b. Para $c = 2.500$, temos:

$m = 9{,}07(2.500 - 2.400) \Rightarrow m = 907$

c. Para $m = 1.814$, temos:

$1.814 = 9{,}07(c - 2.400) \Rightarrow c = 2.600$

d. Para que a perda de massa seja maior que 1.000 g semanais, devemos ter:

$m(c) > 1.000 \Rightarrow 9{,}07(c - 2{,}400) > 1.000$

$\therefore c > \frac{22.768}{9{,}07} \approx 2.511$

18. a. $n = 5 \Rightarrow q = 200 \cdot 5 = 1.000$

$q = 1.000 \Rightarrow p = 3 + \frac{500}{1.000} = 3{,}5$

Logo, o custo de produção de cada chocolate será R$ 3,50.

b. $\begin{cases} q = 200n & (1) \\ p = 3 + \frac{500}{q} & (2) \end{cases}$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$p = 3 + \frac{5}{2n} \Rightarrow p = \frac{6n + 5}{2n}$

A função é decrescente, pois, quanto maior o número de horas, menor será o custo de produção.

c. $p = 3 + \frac{5}{2n} \Rightarrow n = \frac{5}{2p - 6}$

A função é decrescente, pois, quanto menor o custo de produção, maior será o número de horas.

19. A variação da velocidade do automóvel foi de 54 km/h (de 36 km/h para 90 km/h). Convertendo isso para m/s, temos a variação de 15m/s.

O tempo foi de 120 s (2 minutos). A taxa média a de variação da velocidade em m/s^2 é:

$a = \frac{15}{120} = 0{,}125$

20. a. Verdadeira, pois para $0 \leqslant t \leqslant 5$ temos:

$k = \frac{124 - 120}{5 - 0} = 0{,}8$

b. Falsa, pois para $15 \leqslant t \leqslant 22$ temos:

$k = \frac{132 - 121}{22 - 15} \approx 1{,}57$

c. Verdadeira, pois para $5 \leqslant t \leqslant 15$ temos:

$k = \frac{121 - 124}{15 - 5} = -0{,}3$

d. Falsa, pois, como a taxa de variação nesse intervalo de tempo é igual a −0,3 (conforme calculado no item **c**), isso significa que o volume de água decresceu 0,3 bilhão de litros por dia.

e. Verdadeira, conforme a justificativa dos itens **a**, **b** e **c**.

21. a. A 10 °C o comprimento da coluna de mercúrio aumentou $10 \cdot 2$ mm = 20 mm em relação à temperatura 0 °C. Então, a 0 °C, o comprimento da coluna de mercúrio é de 122 mm − 20 mm = 102 mm.

Logo, $f(x) = 102 + 2x$, $-20 \leqslant x \leqslant 50$.

b. $x = 102 + 2y \Rightarrow 2y = x - 102 \therefore y = \frac{x - 102}{2}$

Logo, a função inversa é $f^{-1}(x) = \frac{x - 102}{2}$.

22. a. De acordo com o gráfico, 74.226.944 execuções musicais são do gênero "sertanejo" correspondendo a 50,4% de toda amostra. Como as músicas do gênero "forró" correspondem a 9,6%, temos:

74.226.944	_____	50,4%
x	_____	9,6%

$x \approx 14.138.466$

b. O total de execuções musicais representadas corresponde a 100%. Assim:

74.226.944	_____	50,4%
x	_____	100%

$x \approx 147.275.683$

23. b. De acordo com o gráfico, o percentual de estudantes de 12 a 14 anos da amostra que sofreram *bullying* foi 68,6% (23,0% + 20,3% + 25,3%). No total, 5.168 estudantes participaram dessa pesquisa. Assim:

5.168	_____	100%
x	_____	68,6%

$x \approx 3.545$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 5

1. alternativa **c**

Sabemos que o perímetro do terreno mede 200 m. Sendo x a medida, em metro, de um lado do terreno, as outras dimensões, em metro, serão x, $(100 - x)$ e $(100 - x)$. Assim, a área y desse terreno é dada por: $y = (100 - x) \cdot x$, ou seja, $y = -x^2 + 100x$.

2. alternativa **d**

Temos que: $n(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2^2 \cdot 1 + 7^2 = 48$

Logo, depois de 1 dia havia 48.000 bactérias vivas.

3. alternativa **b**

Temos que: $n(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2^2 \cdot 2 + 72 = 24$

Logo, depois de 2 dias havia 24.000 bactérias vivas.

4. alternativa **b**

Temos que: $n(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 22 \cdot 0 + 72 = 72$ e $n(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 22 \cdot 3 + 72 = 6$. Logo, a taxa de variação, no período considerado, é calculada por: $\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{6 - 72}{3 - 0} = -22$. Ou seja, a taxa média de variação foi de − 22.000 bactérias diárias, o que significa que a cada dia houve um decréscimo de 22.000 bactérias.

5. alternativa **b**

(1) Verdadeira, pois, $f(3) = \frac{3}{3^2 + 1} = \frac{3}{10}$. Logo, o ponto $\left(3, \frac{3}{10}\right)$ pertence ao gráfico de f.

(2) Verdadeira, pois, $f(0) = \frac{0}{0^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$. Logo, o ponto (0,0) pertence ao gráfico de f.

(3) Falsa, pois, $f(1)=\frac{1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$. Logo, o ponto (1,2) não pertence ao gráfico de f.

(4) Falsa, pois, o domínio de f é obtido a partir da condição de existência de $f(x)$. Temos que existe $f(x)$ se, e somente se, $x^2+1\neq 0$, ou seja, $x^2\neq -1$. Como para todo número real tem-se que $x^2\geqslant 0$, deduzimos que todo número real satisfaz a desigualdade $x^2\neq -1$. Logo o domínio de f é o conjunto $\mathbb{R}$.

(5) Verdadeira, pois, $f(a)=2\Rightarrow\frac{a}{a^2+1}=2$

$\therefore 2\left(a^2+1\right)=a\Rightarrow 2a^2-a+2=0$

Calculando o discriminante dessa equação, temos: $\Delta=-15$. Como Δ é negativo, concluímos que a equação não possui raiz real, ou seja, não existe a pertencente ao domínio de f, tal que $f(a)=2$.

(6) Falsa, pois, $f(k)=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{k}{k^2+1}=\frac{2}{5}$

$\therefore 2(k^2+1)=5k\Rightarrow 2k^2-5k+2=0$

Calculando o discriminante dessa equação, temos: $\Delta=9\therefore x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}\Rightarrow x=2$ ou $x=\frac{1}{2}$

Logo, existem dois números reais k tais que $f(k)=\frac{2}{5}$, ou seja, existem dois números pertencentes ao domínio de f, tal que $f(k)=\frac{2}{5}$.

CAPÍTULO 6 Função polinomial do 1º grau ou função afim

ALÉM DA TEORIA

1. $100.000-2.000=98.000$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

2. a. Os pontos (1, 3) e (0, 1) pertencem ao gráfico da função; logo, temos:

$\begin{cases}3=a\cdot 1+b\\1=a\cdot 0+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3=a+b\\1=b\end{cases}$

Portanto: $a=2$ e $b=1$

b. Fazendo $2x+1=0$, temos $x=-\frac{1}{2}$, que é a raiz da função $y=2x+1$.

3. a. O salário do vendedor, em real, no mês em questão é dado por: $4.000+0,05\cdot 58.000=6.900$

b. O salário y, em real, em um mês em que as vendas totalizaram x reais é dado por: $y=4.000+0,05x$

c. A equação obtida no item **b** representa uma função afim, logo, seu gráfico é formado por pontos de uma reta que passa pelos pontos (0, 4.000) e (58.000, 6.900).

d. Em um mês em que as vendas totalizaram o valor x_1 de R$ 30.000,00, o salário y_1, em real, é dado por: $y_1=4.000+0,05\cdot 30.000=5.500$. Em um mês em que as vendas totalizaram o valor x_2 de R$ 50.000,00, o salário y_2, em real, é dado por: $y_2=4.000+0,05\cdot 50.000=6.500$

Assim, temos que a taxa média de variação, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando x varia de R$ 30.000,00 a R$ 50.000,00 é dada por:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{6.500-5.500}{50.000-30.000}=0,05$

Isso significa que o vendedor recebe R$ 0,05 de comissão para cada real de produto vendido.

4. a. A lei que associa x e y é do tipo $y=ax+b$ com $\{a,b\}\subset\mathbb{R}$ e $a\neq 0$. Como (0, 32) e (100, 212) pertencem ao gráfico da função, temos:

$\begin{cases}32=a\cdot 0+b\\212=a\cdot 100+b\end{cases}\Rightarrow a=\frac{9}{5}$ e $b=32$

Logo: $y=\frac{9x}{5}+32$

b. Para $y=-4$, temos: $-4=\frac{9x}{5}+32\Rightarrow x=-20$

5. a. A lei de associação entre x e y é da forma $y=ax+b$, com $\{a,b\}\subset\mathbb{R}$ e $a\neq 0$.

$\begin{cases}27=a\cdot 0+b\\21=a\cdot 100+b\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{3}{50}$ e $b=27$

Logo: $y=-\frac{3x}{50}+27\Rightarrow y=-0,06x+27$

b. Fazendo $x=40$, obtemos:

$y=-0,06\cdot 40+27\Rightarrow y=24,6$

6. a. Vamos substituir os valores do gráfico na equação da reta $p=ax+b$. Quando $x=0$ e $p=1$, temos:

$1=a\cdot 0+b\therefore b=1$

Quando $x=10$ e $p=2$, temos: $2=a\cdot 10+b$

Substituindo b por 1, obtemos:

$2=10a+1\therefore a=\frac{1}{10}$

Assim, substituindo os valores encontrados para a e b, temos: $p=\frac{1}{10}x+1$

b. Analisando graficamente, quando $x=0$, temos $p=1$; logo, a pressão sofrida pelo mergulhador na superfície do mar é 1 atm.

c. $p=\frac{1}{10}\cdot 18+1\Rightarrow p=\frac{18}{10}+1\therefore p=2,8$

8. a. $C=2\pi r$ ou $C=6,28r$

Se $r=0,5$ m, então $C=3,14$ m.

Então, $\frac{1}{x}=\frac{3,14}{y}\Rightarrow y=3,14x$.

c. Sim, pois: se $x=0$, então $y=0$. E se $x\neq 0$, existe uma proporcionalidade direta entre y e x, ou seja, $\frac{y}{x}=3,14$.

9. Como a taxa de variação da função afim é o coeficiente de x, temos: $y=5x+b$. Como o ponto $(2,-3)$ pertence ao gráfico da função, temos também:

$-3=5\cdot 2+b\Rightarrow b=-13$

Logo, a lei de associação da função é $y=5x-13$.

10. a. Durante o período de resfriamento da barra, a temperatura diminuiu 4 °C por minuto. Portanto, em x minutos desse período a temperatura diminuiu $4x$ °C. Assim, a temperatura y da barra, em função do tempo x, em minuto, a partir do início do resfriamento, pode ser expressa por: $y=400-4x$

11. a. Como o gráfico da função que expressa y em função de x é parte de uma reta, a taxa média de variação é constante. Indicando por a essa taxa, temos:

$$a = \frac{26 - 28}{600 - 300} = -\frac{1}{150}$$

Assim, a lei que expressa y em função de x é da forma $y = -\frac{1}{150}x + b$. Como o gráfico passa pelo ponto (300, 28), temos que: $28 = -\frac{1}{150} \cdot 300 + b \Rightarrow b = 30$

Logo: $y = -\frac{1}{150}x + 30$

b. Como x é a altitude a partir do ponto P, então temos $x = 0$ no ponto P. Atribuindo o valor 0 à variável x da função $y = -\frac{1}{150}x + 30$, obtemos:

$$y = -\frac{1}{150} \cdot 0 + 30 = 30$$

c. Atribuindo o valor 12.000 à variável x da função $y = -\frac{1}{150}x + 30$, obtemos:

$$y = -\frac{1}{150} \cdot 12.000 + 30 = -50$$

12. a. Crescente, pois $a > 0$ ($a = 9$).

b. Decrescente, pois $a < 0$ ($a = -2$).

c. $y = -\frac{1 + x}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4} - \frac{x}{4}$

Logo, a função é decrescente, pois $a < 0 \left(a = -\frac{1}{4}\right)$.

d. Crescente, pois $a > 0 \left(a = \frac{1}{5}\right)$.

13. alternativa **a**

recipiente A: $y = 30 + 2x$, $a > 0$, função crescente

recipiente B: $y = 5 - 3x$, $a < 0$, função decrescente

Portanto, a temperatura da água em A aumenta com o passar do tempo, e a temperatura da água em B diminui.

16. a. Para $0 \leqslant t \leqslant 5$, o volume de óleo consumido pela máquina varia linearmente 10 L a cada hora; assim, ao fim de 5 horas, terão sido consumidos 50 L de óleo.

Para $5 \leqslant t \leqslant 9$, o volume de óleo consumido pela máquina varia linearmente 8 L a cada hora; assim, ao fim de 9 horas, terão sido consumidos 50 L + 8 · 4 L, ou seja, 82 L de óleo.

Para $9 \leqslant t \leqslant 12$, o volume de óleo consumido pela máquina varia linearmente 5 L a cada hora; assim, ao fim de 12 horas, terão sido consumidos 82 L + 5 · 3 L, ou seja, 97 L de óleo.

b. Para $0 \leqslant t \leqslant 5$, temos: $V(t) = 10t$

Para $5 < t \leqslant 9$, vamos obter a equação $V(t) = at + b$, cujo gráfico passa pelos pontos (5, 50) e (9, 82). Temos:

$$\begin{cases} 50 = 5a + b \\ 82 = 9a + b \end{cases} \Rightarrow a = 8 \text{ e } b = 10$$

Logo: $V(t) = 8t + 10$, para $5 < t \leqslant 9$

Para $9 < t \leqslant 12$, vamos obter a equação $V(t) = ct + d$, cujo gráfico passa pelos pontos (9, 82) e (12, 97). Temos:

$$\begin{cases} 82 = 9c + d \\ 97 = 12c + d \end{cases} \Rightarrow c = 5 \text{ e } d = 37$$

Logo: $V(t) = 5t + 37$, para $9 < t \leqslant 12$

Portanto:

$$V(t) = \begin{cases} 10t, \text{ se } 0 \leqslant t \leqslant 5 \\ 8t + 10, \text{ se } 5 < t \leqslant 9 \\ 5t + 37, \text{ se } 9 < t \leqslant 12 \end{cases}$$

17. alternativa **c**

O segmento $\overline{AB}$ é gráfico de uma função afim $f(x) = ax + b$ cuja taxa de variação a é dada por:

$$a = \frac{6.000 - 5.000}{0 - 1} \Rightarrow a = -1.000$$

Isso significa que o esvaziamento da cisterna, quando apenas a primeira bomba esteve em funcionamento, ocorreu à razão de 1.000 litros por hora.

O segmento $\overline{BC}$ é gráfico de uma função afim $g(x) = cx + d$ cuja taxa de variação c é dada por:

$$c = \frac{5.000 - 0}{1 - 3} \Rightarrow c = -2.500$$

Isso significa que o esvaziamento da cisterna, quando as duas bombas estiveram em funcionamento, ocorreu à razão de 2.500 litros por hora. Concluímos, então, que a vazão da segunda bomba foi de 1.500 litros por hora.

18. a. Os pontos (1, −1) e (2, 2) pertencem ao gráfico.

Logo, temos:

$$\begin{cases} -1 = a \cdot 1 + b \\ 2 = a \cdot 2 + b \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = -4$$

Assim, temos a lei: $y = 3x - 4$

A raiz da função é $\frac{4}{3}$. Então, temos:

$f(x) = 0$ se $x = \frac{4}{3}$; $f(x) > 0$ se $x > \frac{4}{3}$; $f(x) < 0$ se $x < \frac{4}{3}$.

b. Como o gráfico da função passa pelos pontos (0, 2) e (2, 1), a taxa de variação a é dada por:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1 - 2}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$$

Como a reta intercepta o eixo y em $y = 2$, temos: $b = 2$

Logo, a equação da reta é: $y = -\frac{x}{2} + 2$

Raiz de f: $-\frac{x}{2} + 2 = 0 \Rightarrow x = 4$

Então, temos:

$f(x) = 0$ se $x = 4$;

$f(x) > 0$ se $x < 4$;

$f(x) < 0$ se $x > 4$.

19. a. A lei de associação é representada por uma função afim: $y = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$. Como os pontos (0, 200) e (12, −100) pertencem ao gráfico, temos:

$$\begin{cases} 200 = a \cdot 0 + b \\ -100 = a \cdot 12 + b \end{cases} \Rightarrow a = -25 \text{ e } b = 200$$

Logo, a lei de associação pedida é $y = -25x + 200$.

b. Ao nível do mar a altitude é 0 (zero); logo:

$$y = 0 \Rightarrow -25x + 200 = 0 \therefore x = 8$$

Concluímos, assim, que a broca atingirá o nível do mar 8 horas depois de iniciada a perfuração.

c. O objetivo é que a broca atinja um ponto a −300 m de altitude. Logo, devemos ter:

$$y = -300 \Rightarrow -25x + 200 = -300 \therefore x = 20$$

Concluímos, assim, que a broca atingirá o objetivo 20 horas depois de iniciada a perfuração.

d. Pelo item **b**, temos que o gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto (8, 0); logo, a função é positiva para $0 \leqslant x < 8$.

Concluímos, então, que a broca estará em pontos de altitude positiva durante 8 horas.

e. Pelo item **c**, a abscissa do ponto de menor altitude atingida pela broca é 20; logo, a função é negativa para $8 < x \leqslant 20$.

Concluímos, então, que a broca estará em pontos de altitude negativa durante 12 horas.

20. Como os gráficos são retas, deduzimos que f e g são funções afins. Portanto $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $c \neq 0$.

O gráfico da função f passa pelos pontos $(-5, 1)$ e $(2, 8)$. Então, temos:

$$\begin{cases} -5a + b = 1 \\ 2a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 6$$

Portanto: $f(x) = x + 6$

O gráfico da função g passa pelos pontos (1, 3) e (0, 4). Então, temos:

$$\begin{cases} c + d = 3 \\ c \cdot 0 + d = 4 \end{cases} \Rightarrow c = -1 \text{ e } d = 4$$

Portanto, $g(x) = -x + 4$.

Concluímos, então, que:

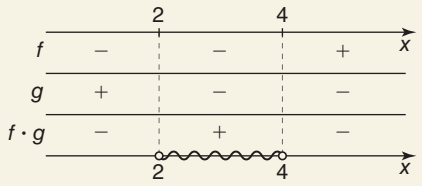
$h(x) = x + 6 - (-x + 4) \Rightarrow h(x) = 2x + 2$

a. A função h é crescente, pois sua taxa de variação (coeficiente de x) é positiva e igual a 2.

b. Temos: $2x + 2 > 0 \Rightarrow x > -1$; logo, a função h assume valores positivos para qualquer número real x, com $x > -1$.

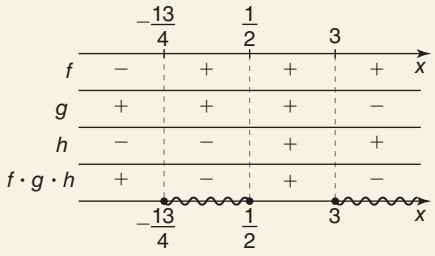
c. Temos: $2x + 2 < 0 \Rightarrow x < -1$; logo, a função h assume valores negativos para qualquer número real x, com $x < -1$.

22. a. Sendo $f(x) = 2x - 8$ e $g(x) = 2 - x$, temos:



Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

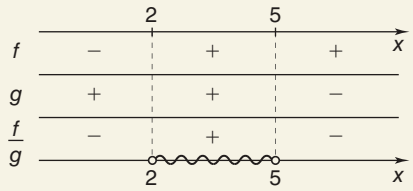
b. Sendo $f(x) = 4x + 13$, $g(x) = 3 - x$ e $h(x) = 2x - 1$, temos:



Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{13}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 3\right\}$

c. Condição de existência: $5 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

Sendo $f(x) = 3x - 6$ e $g(x) = 5 - x$, temos:



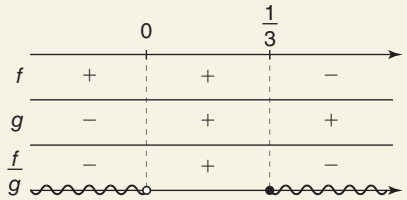
Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

d. $\frac{1 - 2x}{x} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1 - 2x}{x} - 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{1 - 3x}{x} \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções envolvidas:

$f(x) = 1 - 3x$

$g(x) = x$, para $x \neq 0$, temos o quadro de sinais:

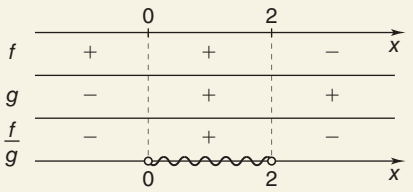


Assim, concluímos que o conjunto solução S é dado por: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$

23. Devemos ter $\frac{2 - k}{k} > 0$

Condição de existência: $k \neq 0$

Sendo $f(k) = 2 - k$ e $g(k) = k$, temos:



Logo, a taxa de variação dessa função é positiva quando k satisfaz: $S = \{k \in \mathbb{R} \mid 0 < k < 2\}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. alternativa **b**

O gráfico representa a função afim $f(x) = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$, tal que $f(10) = 100$ e $f(12) = 80$. Logo:

$$\begin{cases} 10a + b = 100 \\ 12a + b = 80 \end{cases} \therefore a = -10 \text{ e } b = 200$$

Deduzimos, então que $f(x) = -10x + 200$.

Para $f(x) = 10$, temos:

$$-10x + 200 = 10 \Rightarrow x = 19$$

Concluímos, assim, que o nível da bateria atingiu 10% às 19 h.

2. a. Em 2004, a diferença entre as jornadas de trabalho das mulheres e dos homens, nessa ordem, era de 4 h 6 min, ou seja, 246 min. Assim, para $x = 0$, que corresponde ao ano de 2004, temos que $y = 246$. Logo, o ponto (0, 246) pertence ao gráfico da função pedida.

Em 2014, a diferença entre as jornadas de trabalho das mulheres e dos homens, nessa ordem, era de 5 h, ou seja, 300 min. Assim, para $x = 10$, que corresponde ao ano de 2014, temos que $y = 300$. Logo, o ponto

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

(10, 300) pertence ao gráfico da função pedida.

b. A equação que expressa y em função de x é da forma $y = ax + b$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Como os pontos (0, 246) e (10, 300) pertencem ao gráfico dessa função, temos:

$$\begin{cases} 246 = a \cdot 0 + b \\ 300 = a \cdot 10 + b \end{cases} \Rightarrow a = 5{,}4 \text{ e } b = 246$$

Concluímos, então, que a equação pedida é:

$y = 5{,}4x + 246$

c. O valor de x que corresponde ao ano 2009 é 5. Assim, para $x = 5$ na equação do item **b**, temos:

$$y = 5{,}4 \cdot 5 + 246 \Rightarrow y = 273$$

Concluímos, então, que a jornada semanal de trabalho das mulheres em 2009 tinha 273 minutos a mais que a dos homens.

3. a. A lei da associação que expressa a temperatura y, em grau Celsius, em função do tempo x, em minuto, com o aparelho em funcionamento, é da forma $y = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 25 = a \cdot 5 + b \\ 20 = a \cdot 10 + b \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = 30$$

Portanto, temos: $y = -x + 30$

b. Para $x = 8$, temos: $y = -8 + 30 = 22$

Logo, a temperatura da sala 8 minutos depois de ligado o aparelho é 22 °C.

4. a. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4 \cdot 9 + 5 - (4 \cdot 3 + 5)}{9 - 3} = 4$

b. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4 \cdot 10 + 5 - (4 \cdot 7 + 5)}{10 - 7} = 4$

5. a. $d = 90t$

b. $\dfrac{\Delta d}{\Delta t} = \dfrac{90 \cdot 4 - 90 \cdot 1}{4 - 1} = 90$

Logo, a taxa média de variação foi 90 km/h.

6. alternativa **a**

O percentual de comissão é a taxa de variação de função representada pelo gráfico. Indicando por a essa taxa, temos:

$$a = \frac{1.800 - 1.200}{50.000 - 20.000} = 0{,}02 \Rightarrow a = 2\%$$

7. alternativa **d**

Considere n o número de ajudantes. A receita diária em função de n é:

$R(n) = 5 \cdot (300 + 100(n -)) \Rightarrow R(n) = 500n + 1.000$

O custo diário em função de n é:

$$C(n) = 900 + 250n + 4\% \cdot R(n)$$

Para obter um lucro mínimo de R$ 800,00, temos:

$$R(n) - C(n) \geqslant 800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500n + 1.000 - 900 - 250n - 4\% \cdot (500n + 1.000) \geqslant 800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 230n \geqslant 740 \Rightarrow n \geqslant \frac{740}{230} \approx 3{,}22$$

Como n é natural, $n \geqslant 4$. Isto é, deve-se contratar o mínimo de 4 ajudantes.

8. Destacando $f(x)$ para cada intervalo da primeira coluna, obtemos:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leqslant 24.511{,}92 \\ 0{,}075x - 1.838{,}39, & \text{se } 24.511{,}93 \leqslant x \leqslant 33.919{,}80 \\ 0{,}15x - 4.382{,}38, & \text{se } 33.919{,}81 \leqslant x \leqslant 45.012{,}60 \\ 0{,}225x - 7.758{,}32, & \text{se } 45.012{,}61 \leqslant x \leqslant 55.976{,}16 \\ 0{,}275x - 10.557{,}13, & \text{se } x > 55.976{,}16 \end{cases}$$

9. a. Galáxia A: $V(1) = H_0 \cdot 1 = 71$

Galáxia B: $V(10) = H_0 \cdot 10 = 710$

Galáxia C: $V(100) = H_0 \cdot 100 = 7.100$

As velocidades de afastamento da Via Láctea das galáxias A, B e C são 71 km/s, 710 km/s e 7.100 km/s, respectivamente.

b. $11.928 \text{ km/h} = \dfrac{11.928}{3.600} \text{ km/s} \approx 3{,}31 \text{ km/s}$

Sendo R a distância, em megaparsec, dessa galáxia, temos:

$$3{,}31 = H_0 \cdot R \Rightarrow R = \frac{3{,}31}{71} \Rightarrow R \approx 0{,}047$$

A galáxia em questão está, aproximadamente, a 0,047 Mpc de distância da Via Láctea.

c. Como 1 Mpc equivale a 3.260.000 anos-luz, e 1 ano-luz equivale a $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km, temos:

1 Mpc = 3.260.00 anos-luz $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 Mpc $= 3.260.000 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 Mpc $= 30.839.600 \cdot 10^{12}$ km $\Rightarrow$

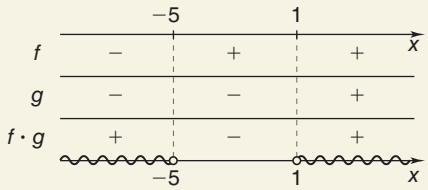
$\Rightarrow$ 1 Mpc $= 3{,}08396 \cdot 10^{19}$ km

11. a. $(2x - 1) \cdot (x + 5) > x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2x - 1) \cdot (x + 5) - (x + 5) > 0$

$\therefore (x + 5) \cdot (2x - 2) > 0$

Sendo $f(x) = x + 5$ e $g(x) = 2x - 2$, temos:



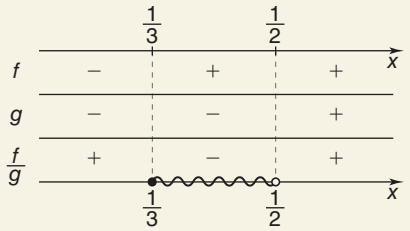
Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 1\}$

b. Condição de existência: $x \neq \dfrac{1}{2}$

$$\frac{x}{2x - 1} \leqslant -1 \Rightarrow \frac{x}{2x - 1} + 1 \leqslant 0$$

$$\therefore \frac{3x - 1}{2x - 1} \leqslant 0$$

Sendo $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = 2x - 1$, temos:



Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant x < \frac{1}{2}\right\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 6

1. alternativa **b**

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Como o gráfico da função que expressa y em função de x é parte de uma reta, a taxa média de variação é constante. Indicando por a essa taxa, temos:

$$a = \frac{10 - (-2)}{11 - 5} = 2$$

Assim, a lei que expressa y em função de x é da forma $y = 2x + b$. Como o gráfico passa pelo ponto (11, 10), temos que:

$$10 = 2 \cdot 11 + b \Rightarrow b = -12$$

Concluímos, então, que a equação que expressa a medida da temperatura y em função do horário x é:

$$y = 2x - 12$$

Para $y = 0$, temos:

$$0 = 2x - 12 \Rightarrow x = 6$$

Concluímos, então, que a medida da temperatura nessa região atingiu 0 °C às 6 h.

2. alternativa **b**

$$2x - 12 < 0 \Rightarrow x < 6$$

Concluímos, então, que a medida da temperatura esteve negativa no período de 5h $\leqslant x <$ 6h.

3. alternativa **e**

$$2x - 12 > 0 \Rightarrow x > 6$$

Concluímos, então, que a medida da temperatura esteve positiva no período de 6h $< x \leqslant$ 11h.

4. alternativa **d**

Calculando a taxa de variação de A para B, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7 - 3}{3 - 1} = 2$$

Calculando a taxa de variação de A para C, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k - 3}{5 - 1} = \frac{k - 3}{4}$$

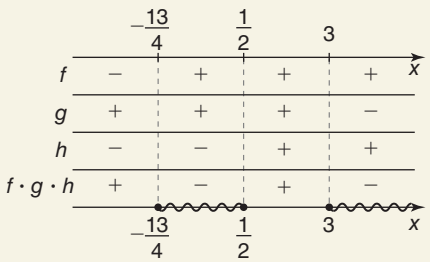
Se os pontos A, B e C forem colineares, então as taxas de variação de A para B, e de A para C são iguais. Portanto, temos:

$$\frac{k - 3}{4} = 2 \Rightarrow k = 11$$

Concluímos, então, que $k = 11$ para que os três pontos sejam colineares.

5. alternativa **c**

Sendo $f(x) = 4x + 13$, $g(x) = 3 - x$ e $h(x) = 2x - 1$, temos:

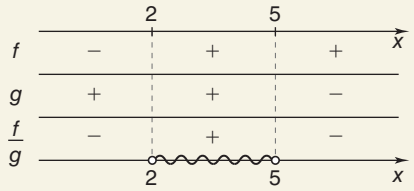


Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{13}{4} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x \geqslant 3\}$

6. alternativa **d**

Condição de existência: $5 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$

Sendo $f(x) = 3x - 6$ e $g(x) = 5 - x$, temos:



Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

CAPÍTULO 7 Função polinomial do 2º grau ou função quadrática

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. $y = -x^2 - 1$

- Fazendo $y = 0$, temos: $-x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = -4$
  Logo, a parábola não intercepta o eixo Ox.
- Fazendo $x = 0$, temos: $y = -1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, -1)$.
- O vértice V é dado por $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$; então:

$$V\left(-\frac{0}{-2}, -\frac{-4}{-4}\right) \Rightarrow V(0, -1)$$

b. $y = x^2 - 8x + 7$

- Fazendo $y = 0$, temos: $x^2 - 8x + 7 = 0 \Rightarrow x = 7$ ou $x = 1$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(1, 0)$ e $B(7, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos: $y = 7$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, 7)$.
- O vértice V é dado por $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$; então:

$$V\left(\frac{8}{2}, -\frac{36}{4}\right) \Rightarrow V(4, -9)$$

c. $y = -x^2 + 3x + 10$

- Fazendo $y = 0$, temos:
  $-x^2 + 3x + 10 = 0 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 5$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(-2, 0)$ e $B(5, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos: $y = 10$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, 10)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

$$V\left(\frac{-3}{-2}, \frac{-49}{-4}\right) \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$$

d. $y = x^2 - 4$

- Fazendo $y = 0$, temos: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos $A(-2, 0)$ e $B(2, 0)$.
- Fazendo $x = 0$, temos: $y = -4$
  Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, -4)$.
- Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

$$V\left(0, -\frac{16}{4}\right) \Rightarrow V(0, -4)$$

2. a. $A(x) = (4 + x)(5 + x) - 5 \cdot 4 \Rightarrow A(x) = x^2 + 9x$

b. $A(3) = 3^2 + 9 \cdot 3 = 36$; logo, a medida da área da calçada para $x = 3$ m é 36 m^2.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

c. $A(x) = 4{,}75 \Rightarrow x^2 + 9x = 4{,}75$

$\therefore x^2 + 9x - 4{,}75 = 0 \Rightarrow x = 0{,}5$ ou $x = -9{,}5$

Apenas $x = 0{,}5$ serve como solução. Assim, $x = 0{,}5$ m.

3. A equação da parábola é:

$y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Como os pontos (3, 0), (2, 6) e (0, 6) pertencem à parábola, temos o sistema:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \\ 6 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ c = 6 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos que $a = -2$, $b = 4$ e $c = 6$.

Assim, a equação da parábola que contém a trajetória do ponto M é: $y = -2x^2 + 4x + 6$

4. b. Para obter os pontos comuns aos gráficos devemos ter $f(x) = g(x)$. Assim:

$x^2 - 3x + 2 = -x + 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\therefore x = -1$ ou $x = 3$

Para $x = -1$, temos $y = 6$. Para $x = 3$, temos $y = 2$.

Portanto, os pontos comuns aos gráficos são $(-1, 6)$ e $(3, 2)$.

c. Pelo gráfico, observamos que:

$f(x)$ é positivo e $g(x)$ é negativo para $x > 5$;

$f(x)$ é negativo e $g(x)$ é positivo para $1 < x < 2$.

Concluímos, então, que as funções f e g têm sinais contrários para $1 < x < 2$ ou $x > 5$.

d. Para que o produto $f(x) \cdot g(x)$ seja negativo, isto é, $f(x) \cdot g(x) < 0$, os valores $f(x)$ e $g(x)$ devem ter sinais contrários. Isto ocorre para $1 < x < 2$ ou $x > 5$, conforme a resolução do item **c**.

Concluímos, então, que o conjunto solução S da inequação é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } x > 5\}$.

7. a. $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-2) = 36$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4 \cdot 4} = -\frac{9}{4}$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{4}$

b. $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 16$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4 \cdot (-1)} = 4$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-2)}{2 \cdot (-1)} = -1$

c. $\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0 = 144$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{144}{4 \cdot 3} = -12$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{(-12)}{2 \cdot 3} = 2$

d. $\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-1)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{1}{4}$

$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}$

8. a. $f(x) = (x + 3)(x + 2) + 2k \Rightarrow f(x) = x^2 + 5x + 6 + 2k$

Pelo enunciado, verificamos que o valor mínimo de f é $y_V = 1$, que é a ordenada y do vértice V da parábola que é o gráfico de f. Então, temos:

$-\frac{\Delta}{4a} = 1 \Rightarrow -\frac{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6 + 2k)}{4 \cdot 1} = 1$

$\therefore -\frac{1 - 8k}{4} = 1 \Rightarrow k = \frac{5}{8}$

b. A abscissa do ponto mínimo da função é a abscissa do vértice V da parábola que é o gráfico de f. Então, temos:

$x_V = -\frac{5}{2 \cdot 1} = -\frac{5}{2}$

9. a. Para $t = 0$, temos:

$v(0) = 20 \cdot 0^2 - 80 \cdot 0 + 200 = 200$

b. Para $t = 3$, temos:

$v(3) = 20 \cdot 3^2 - 80 \cdot 3 + 200 = 140$

c. A medida do tempo para que a medida da velocidade seja mínima é a abscissa do vértice V do gráfico que representa v. Então:

$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-80}{2 \cdot 20} = 2$

d. A medida de velocidade mínima é a ordenada do vértice V do gráfico que representa v. Então:

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-80)^2 - 4 \cdot 20 \cdot 200}{4 \cdot 20} = 120$

10. a. Sendo x e y as dimensões, em centímetro, de um desses retângulos, temos: $2x + 2y = 20$

Para $x = 8$ cm, temos: $2 \cdot 8 + 2y = 20 \Rightarrow y = 2$

Sendo A a medida da área do retângulo, concluímos que: $A = x \cdot y = 8 \cdot 2 \Rightarrow A = 16$

Logo, a medida da área do retângulo com 8 cm de medida da base é 16 cm^2.

b. Utilizando a equação do item **a**, podemos concluir que, se x é a medida da base, a altura mede $10 - x$. Então:

$$A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x$$

A função $A(x)$ intercepta o eixo Ox nos pontos (0, 0) e (10, 0). Calculando o vértice V, temos:

$V\left(\frac{-10}{-2}, \frac{-100}{-4}\right) \Rightarrow V(5, 25)$

c. A medida da área máxima que pode ter um desses retângulos é 25 cm^2.

11. alternativa **d**

A temperatura $T(h)$ é máxima quando $T(h) = -\frac{\Delta}{4a}$. Assim:

$T(h) = -\frac{(22^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-85))}{4 \cdot (-1)} = 36$

Assim, concluímos que a temperatura no interior da estufa é classificada como **alta**, segundo o quadro.

12. alternativa **d**

A receita semanal y arrecadada com a venda de x camisetas é dada por:

$y = (40 + 0{,}5x)(200 - 2x)$, ou seja,

$y = -x^2 + 20x + 8.000$

O valor de x_V para o qual a função y assume o valor máximo é dado por: $x_V = \frac{-20}{2 \cdot (-1)} = 10$.

Concluímos, então, que o preço, em real, de cada camiseta é calculado por: $40{,}00 + 10 \cdot 0{,}50 = 45{,}00$

13. a. $y = -x^2 - 2x + 3$

Raízes de y: $-x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 1$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -3 e 1.

Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Logo:

- se $x = -3$ ou $x = 1$, então $y = 0$;
- se $-3 < x < 1$, então $y > 0$;
- se $x < -3$ ou $x > 1$, então $y < 0$.

b. $f(x) = x^2 + 6x - 8$

Raízes de f:

$x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = -3 - \sqrt{17}$ ou $x = -3 + \sqrt{17}$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas $-3 - \sqrt{17}$ e $-3 + \sqrt{17}$.

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Logo:

- se $x = -3 - \sqrt{17}$ ou $x = -3 + \sqrt{17}$, então $f(x) = 0$;
- se $-3 - \sqrt{17} < x < -3 + \sqrt{17}$, então $f(x) < 0$;
- se $x < -3 - \sqrt{17}$ ou $x > -3 + \sqrt{17}$, então $f(x) > 0$.

c. $g(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 3$

Raízes de g:

$\frac{x^2}{3} - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Logo, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa 3.

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Logo:

- se $x = 3$, então $g(x) = 0$;
- se $x \neq 3$, então $g(x) > 0$.

d. $h(x) = -\frac{x^2}{4} + x - 1$

Raízes de h:

$-\frac{x^2}{4} + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$

Logo, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa 2.

Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Logo:

- se $x = 2$, então $h(x) = 0$;
- se $x \neq 2$, então $h(x) < 0$.

e. $f(x) = -3x^2 + 2x - 2$

Raízes da função: $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = -20$

Logo, a parábola não tem ponto em comum com o eixo Ox.

Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Logo, $f(x) < 0$ para todo x real.

14. Como o coeficiente de x^2 é negativo ($a < 0$), a parábola do gráfico de f tem concavidade voltada para baixo. Assim, a função f assumirá apenas valores negativos se a parábola estiver inteiramente abaixo do eixo das abscissas. Para que isso ocorra, basta impor que $\Delta < 0$. Logo:

$$\Delta < 0 \Rightarrow 1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (k - 3) < 0 \therefore k < \frac{23}{8}$$

Concluímos, então, que a função f é negativa para qualquer x real se, e somente se, o parâmetro k assumir qualquer valor real com $k < \frac{23}{8}$.

15. a. Para determinar o perímetro adicionamos o valor de todos os lados, logo: $f(x) = 6x$

Um hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros, que nesse caso possuem lado com medida x. Como a área do triângulo equilátero é dada por $A = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$, considerando $\ell = x$, temos:

$g(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$

16. a. $x^2 + 3x - 10 > 0$

$f(x) = x^2 + 3x - 10$

Raízes de f: $x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = -5$ ou $x = 2$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -5 e 2.

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 2\}$

b. $-2x^2 + 7x - 3 \geqslant 0$

$f(x) = -2x^2 + 7x - 3$

Raízes de f: $-2x^2 + 7x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ ou $x = 3$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas $\frac{1}{2}$ e 3.

Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo.

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 3\right\}$

c. $4x^2 - 12x + 9 \leqslant 0$

$f(x) = 4x^2 - 12x + 9$

Raízes de f: $4x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

Logo, a parábola tangencia o eixo Ox no ponto de abscissa $\frac{3}{2}$.

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Como $f(x)$ nunca é negativo, o conjunto solução é:

$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

d. $\frac{3x^2}{5} - \frac{3x}{2} \leqslant \frac{2x}{5} - 1 \Rightarrow 6x^2 - 15x \leqslant 4x - 10$

$\therefore 6x^2 - 19x + 10 \leqslant 0$

$f(x) = 6x^2 - 19x + 10$

Raízes de f: $6x^2 - 19x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ ou $x = \frac{2}{3}$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas $\frac{5}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Então: $f(x) \leqslant 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\right\}$

e. $\frac{x^2}{3} + x > \frac{x^2}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{5}{6} \Rightarrow 2x^2 + 6x > 3x^2 + 4x + 5$

$\therefore -x^2 + 2x - 5 > 0$

$f(x) = -x^2 + 2x - 5$

Raízes de f: $-x^2 + 2x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$

Logo, a equação não tem raiz real e, portanto, a parábola não intercepta o eixo Ox.

Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo. Então, $f(x)$ é sempre negativa.

Logo: $S = \varnothing$

f. $(x^2 - 9)(x^2 - 7x + 10) < 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 9$ e $g(x) = x^2 - 7x + 10$, temos:

Raízes de f: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 3$

Logo, o gráfico de f é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -3 e 3.

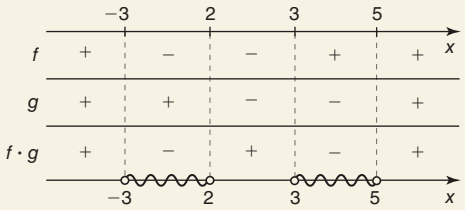
Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Raízes de g: $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 5$

Logo, o gráfico de g é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e 5.

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Representando a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$ em um quadro de sinais, temos:



Como nos interessa que o produto seja estritamente negativo, temos, como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

g. $(x^2 - 1)(x^2 + x + 1) \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 + x + 1$, temos:

Raízes de f: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

Logo, o gráfico de f é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -1 e 1.

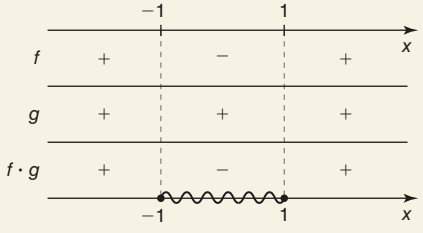
Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Raízes de g: $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$

Logo, o gráfico de g é uma parábola que não intercepta o eixo Ox, pois não possui raízes reais.

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Representando a variação de sinal de f, g e $f \cdot g$ em um quadro de sinais, temos:



Como nos interessa que o produto seja negativo ou nulo, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

h. $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 8} \leqslant 0$

Condição de existência: $x^2 - 6x + 8 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ e $x \neq 2$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x^2 - 6x + 8$, temos:

Raízes de f: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 1$

Logo, o gráfico de f é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -1 e 1.

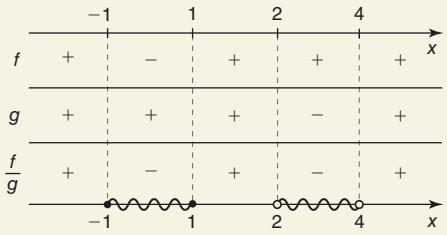
Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Raízes de g: $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

Logo, o gráfico de g é uma parábola que intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas 2 e 4.

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Representando a variação de sinal de f, g e $\dfrac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:



Como queremos que esse quociente seja negativo ou nulo, e lembrando que a condição para que ele exista é $x \neq 4$ e $x \neq 2$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$

i. $\dfrac{(x - 3)(x^2 - 9)}{x^2 - 2x - 3} > 0$

Condição de existência: $x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$ e $x \neq 3$

Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2 - 9$ e $h(x) = x^2 - 2x - 3$, temos:

Raízes de f: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Logo, a reta intercepta o eixo Ox no ponto de abscissa 3.

f é uma função crescente, pois o coeficiente de x é positivo.

Raízes de g: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ ou $x = 3$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -3 e 3.

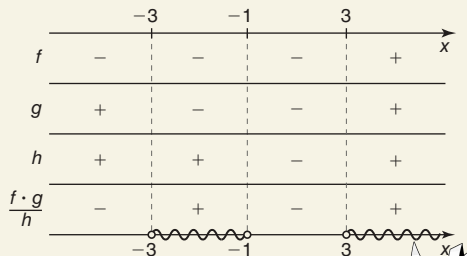
Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Raízes de h: $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ ou $x = 3$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos de abscissas -1 e 3.

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de x^2 é positivo.

Representando a variação de sinal de f, g, h e $\dfrac{f \cdot g}{h}$ em um quadro de sinais, temos:



ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Como queremos que $\frac{(x-3)(x^2-9)}{x^2-2x-3}$ seja estritamente positivo, e lembrando que a condição para que esse quociente exista é $x \neq -1$ e $x \neq 3$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -1 \text{ ou } x > 3\}$

17. a. $s(t) = t^2 - 5t + 4$

Fazendo $s = 0$, temos que a parábola intercepta o eixo Ot nos pontos $A(1, 0)$ e $B(4, 0)$.

Fazendo $t = 0$, temos que a parábola intercepta o eixo Oy no ponto $C(0, 4)$.

Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

$V\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

Fazendo $t = 6$, que é o extremo do intervalo dado, temos: $s = 10$

Logo, a função tem o ponto $D(6, 10)$ como extremo fechado à direita. Note que o extremo fechado à esquerda é o ponto C.

b. $s(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 4 = 4$

c. Conforme vimos no item **a**, temos:

$s(t) = 0 \Rightarrow t = 1$ ou $t = 4$

Logo, o móvel esteve em pontos de espaço nulo nos instantes 1 s e 4 s.

d. Observando o gráfico do item **a**, temos:

$s(t) > 0 \Rightarrow 0 \leqslant t < 1$ e $4 < t \leqslant 6$

Logo, o móvel esteve localizado em pontos de espaço positivo nos instantes t, em segundo, com $0 \leqslant t < 1$ ou $4 < t \leqslant 6$.

e. Observando o gráfico do item **a**, temos:

$s(t) < 0 \Rightarrow 1 < t < 4$

Logo, o móvel esteve localizado em pontos de espaço negativo nos instantes t, em segundo, com $1 < t < 4$.

18. alternativa **b**

A função afim é decrescente se, e somente se, sua taxa de variação for negativa. Assim, devemos ter: $\frac{k^2-4}{k-3} < 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(k) = k^2 - 4$ e $g(k) = k - 3$, com $k \neq 3$, concluímos que $k < -2$ ou $2 < k < 3$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. O segmento de reta é gráfico de uma função da forma $y = ax + b$, com a e b reais e $a \neq 0$.

Como os pontos (0, 20) e (1, 30) pertencem ao segmento, temos:

$\begin{cases} 20 = a \cdot 0 + b \\ 30 = a \cdot 1 + b \end{cases} \Rightarrow a = 10$ e $b = 20$

Logo, a lei de associação representada pelo gráfico C é: $C(x) = 10x + 20$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$.

b. O arco de parábola é gráfico de uma função da forma: $y = mx^2 + nx + p$, com m, n e p reais e $m \neq 0$.

Como os pontos (0, 0), (1, 30) e (8, 128) pertencem ao arco, temos:

$\begin{cases} 0 = m \cdot 0^2 + n \cdot 0 + p \\ 30 = m \cdot 1^2 + n \cdot 1 + p \\ 128 = m \cdot 8^2 + n \cdot 8 + p \end{cases} \Rightarrow m = -2, n = 32$ e $p = 0$

Logo, a lei de associação representada pelo gráfico R é: $R(x) = -2x^2 + 32x$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$.

A equação da parábola que contém o gráfico R é da forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, em que x_1 e x_2 são as raízes, e a é uma constante real não nula. Observando que uma das raízes é 0 (zero), deduzimos que a outra raiz é 16, devido à posição do eixo de simetria da parábola. Assim:

$y = a(x - 0)(x - 16)$

Como o ponto (1, 30) pertence à parábola, temos:

$30 = a(1 - 0)(1 - 16) \Rightarrow a = -2$

Logo, a equação da parábola é:

$y = -2(x - 0)(x - 16)$, ou seja, $y = -2x^2 + 32x$.

Concluímos, então, que a lei de associação representada pelo gráfico R é:

$R(x) = -2x^2 + 32x$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$.

c. Temos que:

$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow L(x) = -2x^2 + 32x - (10x + 20)$

$\therefore L(x) = -2x^2 + 22x - 20$

Logo, a lei de associação da função L é:

$L(x) = -2x^2 + 22x - 20$, para $0 \leqslant x \leqslant 8$.

d. No item **c**, obtivemos $L(x) = -2x^2 + 22x - 20$; logo:

$L(6) = -2 \cdot 6^2 + 22 \cdot 6 - 20 \Rightarrow L(6) = 40$

Concluímos, então, que em uma semana na qual são fabricados e vendidos 6 kL de xampu, o lucro obtido é de R$ 40.000,00.

2. a. A função $A(x)$ é dada por $A(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Logo, seu gráfico, para $1 \leqslant x \leqslant 4$, é um arco de parábola.

b. A função $p(x)$ é dada por $p(x) = 3x$. Logo, seu gráfico, para $1 \leqslant x \leqslant 4$, é um segmento de reta.

c. Para que $A(x)$ seja numericamente igual a $p(x)$, devemos ter $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3x$.

Como $x \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por x, obtendo: $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 3x \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

3. a. Pela equação de Torricelli, temos:

$$25^2 = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot y \Rightarrow y = \frac{x^2}{4} - \frac{625}{4}$$

Assim, a medida da distância y em função da medida da velocidade x é dada por: $y = \frac{x^2}{4} - \frac{625}{4}$

b. Para $x = 30$ na equação obtida no item **a**, temos:

$$y = \frac{30^2}{4} - \frac{625}{4} \Rightarrow y = 68,75$$

4. b. Observe que:

- para qualquer constante k, não nula, o par ordenado (0, 0) pertence à parábola de equação $y = kx^2$.
- para qualquer x, com $x \neq 0$, temos que $\frac{y}{x^2} = k$, ou seja, a razão entre y e x^2, nessa ordem, é a constante k. Essa razão constante só é verificada no quadro B:

$$\frac{\frac{27}{4}}{(-3)^2} = \frac{3}{(-2)^2} = \frac{12}{4^2} = k = \frac{3}{4}$$

Assim, concluímos que o único quadro em que todos os pontos (x, y) pertencem a uma mesma parábola de equação $y = kx^2$, com $k \neq 0$, é o quadro B.

d. No quadro A, não é possível escrever uma equação que relacione os valores de x e y. Pode acontecer que alguns estudantes questionem os pontos representados no plano cartesiano dizendo que é possível esboçar uma parábola, mesmo tendo analisado os quadros no item **b**.

Graficamente, tem-se a impressão de que todos os pontos do quadro A pertencem à mesma parábola de equação $y = 3x^2$. Porém, essa é uma impressão falsa, pois o ponto $\left(\frac{3}{2}, 7\right)$ não satisfaz a equação $y = 3x^2$.

Pelo item **c**, temos que $k = \frac{3}{4}$, logo no quadro B a equação da parábola é $y = \frac{3x^2}{4}$.

No quadro C, a equação da reta é $y = \frac{x}{4}$.

5. a. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ se } x \leqslant 2 & (1) \\ -x^2 + 6x - 8, \text{ se } x > 2 & (2) \end{cases}$

Para esboçar o gráfico dessa função, vamos estudá-lo por partes:

(1) $h(x) = x^2 - 2x$, para $x \leqslant 2$

Fazendo $x^2 - 2x = 0$, temos: $x = 0$ ou $x = 2$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos (0, 0) e (2, 0).

Fazendo $x = 0$, temos: $y = 0$

Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, 0).

Calculando as coordenadas do vértice V_1, temos:

$V_1\left(\frac{2}{2}, -\frac{4}{4}\right) = (1, -1)$

(2) $h(x) = -x^2 + 6x - 8$, para $x > 2$

Fazendo $-x^2 + 6x - 8 = 0$, temos: $x = 2$ ou $x = 4$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox no ponto (4, 0). O ponto (2, 0) não serve, pois $h(x) = -x^2 + 6x - 8$, se $x > 2$.

Nesse caso, não precisamos encontrar a intersecção com o eixo Oy, pois só nos serve os casos em que $x > 2$.

Calculando as coordenadas do vértice V_2, temos:

$V_2\left(\frac{-6}{-2}, \frac{-4}{-4}\right) = (3, 1)$

b. $t(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x \leqslant 2 & (1) \\ 3, \text{ se } 2 < x \leqslant 4 & (2) \\ x^2 - 8x + 19, \text{ se } x > 4 & (3) \end{cases}$

Para esboçar o gráfico de $t(x)$, vamos estudá-la por partes.

(1) $t(x) = x^2 - 1$, para $x \leqslant 2$

Fazendo $x^2 - 1 = 0$, temos: $x = 1$ ou $x = -1$

Logo, a parábola intercepta o eixo Ox nos pontos (1, 0) e (−1, 0).

Fazendo $x = 0$, temos: $y = -1$

Logo, a parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, −1).

Calculando as coordenadas do vértice V, temos:

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (0, -1)$

Fazendo $x = 2$, temos: $y = 3$

Logo, a função $t(x)$ é do tipo $x^2 - 1$ até o ponto (2, 3), com $x \leqslant 2$.

(2) $t(x) = 3$ é uma função constante se $2 < x \leqslant 4$.

(3) $t(x) = x^2 - 8x + 19$, para $x > 4$

Fazendo $x^2 - 8x + 19 = 0$, encontramos $\Delta < 0$; então, a parábola não intercepta o eixo Ox, pois t não possui raízes reais.

Sendo $V(x_V, y_V)$ o vértice da parábola de equação $y = x^2 - 8x + 19$, temos:

$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = 4$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = 3$

Note que o ponto $V(4, 3)$ é um extremo aberto dessa parte do gráfico, pois $x > 4$.

6. a. Inicialmente, vamos obter a equação do segmento de reta $\overline{OV}$ e de arco de parábola VP:

A equação do segmento de reta é da forma $y = px + q$. Como os pontos (0, 0) e (6, 3) pertencem ao segmento, temos:

$\begin{cases} 0 = p \cdot 0 + q \\ 3 = p \cdot 6 + q \end{cases} \Rightarrow q = 0 \text{ e } p = \frac{1}{2}$

Logo, a equação do segmento de reta é $y = \frac{x}{2}$, com $0 \leqslant x \leqslant 6$.

A equação do arco de parábola é da forma $y = ax^2 + bx + c$. Como P e V pertencem à parábola, sendo V o vértice, temos:

$\begin{cases} 19 = a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c \\ 3 = 36a + 6b + c \\ -\frac{b}{2a} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100a + 10b + c = 19 & (1) \\ 36a + 6b + c = 3 & (2) \\ b = -12a & (3) \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos: $a = 1$, $b = -12$ e $c = 39$

Logo, a equação do arco de parábola é

$y = x^2 - 12x + 39$, com $x \geqslant 6$.

Concluindo, a lei que expressa h em função de x é:

$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ se } 0 \leqslant x < 6 \\ x - 12x + 39, \text{ se } 6 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases}$

Incluindo o número 6 na primeira sentença, a resposta continua correta, isto é, $0 \leqslant x \leqslant 6$.

b. $h(5) = \frac{5}{2} = 2{,}5$

Logo, a medida da altura h depois de 5 minutos de aberta a torneira era de 2,5 cm.

c. $h(8) = 8^2 - 12 \cdot 8 + 39 = 7$

Logo, a medida da altura h depois de 8 minutos aberta a torneira era de 7 cm.

7. $\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$\therefore \frac{4}{y} = \frac{8}{8 - x} \Rightarrow y = \frac{8 - x}{2}$

Indicando por $S(x)$ a medida da área do retângulo $ADEF$, temos:

$S(x) = xy \Rightarrow S(x) = x\left(\frac{8 - x}{2}\right) \therefore S(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x$

O máximo valor possível de $S(x)$ é: $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{(-2)} = 8$

A medida da área máxima que o retângulo pode ter é $8\ cm^2$.

8. a. A parábola que contém a trajetória da bola é o gráfico de uma função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Como os pontos (0, 0), (12; 4,5) e (36; 4,5) pertencem a esse gráfico, temos:

$$\begin{cases} 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 4{,}5 = a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c \\ 4{,}5 = a \cdot 36^2 + b \cdot 6 + c \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{96},\ b = \frac{1}{2} \text{ e } c = 0$$

Assim, a equação procurada é: $y = -\frac{x^2}{96} + \frac{x}{2}$

b. A medida da altura máxima, em metro, atingida pela bola é a ordenada y_V do vértice da parábola:

$$y_V = -\frac{\frac{1}{4}}{4 \cdot \left(\frac{1}{96}\right)} \Rightarrow y_V = 6$$

c. Calculando as raízes da função $y_V = -\frac{x^2}{96} + \frac{x}{2}$, obtemos $x = 0$ e $x = 48$; logo, a medida da distância d pedida, em metro, é dada por: $d = 48 - 0 \Rightarrow d = 48$

9. a. A balança comercial de um país está em déficit se a diferença entre as exportações e as importações é negativa. Assim: $E(t) - I(t) < 0 \Rightarrow \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - 3t < 0$

Para descobrir por quantos dias a balança esteve em déficit, devemos resolver a inequação encontrada.

$\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - 3t < 0 \Rightarrow t^2 - 22t < 0$

Para resolver a inequação, devemos estudar a variação de sinais da função $f(t) = t^2 - 22t$

Raízes de f: $t^2 - 22t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 22$

Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de t^2 é positivo. Logo, $S = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 < t < 22\}$

Assim, do 1º dia ao 21º dia a balança esteve em déficit um período de 21 dias.

b. A balança comercial em superávit acima de 13 milhões significa que a diferença entre as exportações e as importações foi superior a 13 milhões. Ou seja:

$E(t) - I(t) > 13 \Rightarrow \frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - 3t > 13$

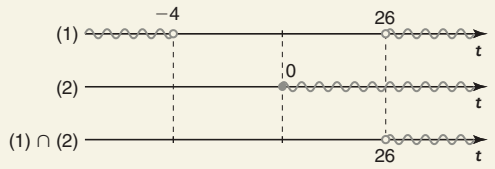
Para descobrir por quantos dias isso ocorreu devemos resolver a inequação encontrada.

$\frac{t^2}{8} + \frac{t}{4} - 3t > 13 \Rightarrow t^2 - 22t - 104 > 0$

Para resolver a inequação, devemos estudar a variação de sinais da função $g(t) = t^2 - 22t - 104$.

Logo, $S = \{t \in \mathbb{R} \mid t < -4 \text{ ou } t > 26\}$ (1)

No entanto, devemos considerar que $t \geqslant 0$, uma vez que se trata do tempo em dias. Fazendo a interseção da solução (1) encontrada com $t \geqslant 0$ (2), temos:



Logo, a balança comercial desse país esteve em superávit do 27º dia ao 30º dia.

10. Para saber durante quantas horas, após o início da injeção, a concentração do medicamento na circulação sanguínea será de pelo menos 0,125 mg/L, basta resolver a inequação $C(t) \geqslant 0{,}125$:

$C(t) \geqslant 0{,}125 \Rightarrow \frac{t}{t+7} \geqslant 0{,}125 \Rightarrow \therefore \frac{t}{t^2+7} - \frac{125}{1.000} \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{t}{t^2+7} - \frac{1}{8} \geqslant 0 \Rightarrow \frac{-t^2+8t-7}{8(t^2+7)} \geqslant 0$

Vamos resolver essa inequação no universo $\mathbb{R}$ e só no final considerar $t \geqslant 0$, pois t representa o número de horas.

Condição de existência:

$8(t^2 + 7) \neq 0 \Rightarrow t^2 + 7 \neq 0 \Rightarrow t^2 \neq -7$

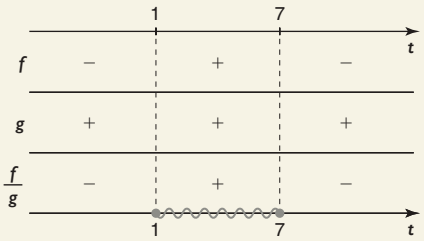
Logo, t pode assumir qualquer valor.

Estudando a variação de sinais das funções $f(t) = -t^2 + 8t - 7$ e $g(t) = 8(t^2 + 7)$, temos:

- Raízes de f: $-t^2 + 8t - 7 \Rightarrow t = 1$ ou $t = 7$

  Logo, a parábola intercepta o eixo Ot nos pontos de abscissas 1 e 7.
- Concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de t^2 é negativo.
- Raízes de g: $8(t^2 + 7) = 0 \Rightarrow t^2 + 7 = 0 \Rightarrow t^2 = -7$
- Concavidade voltada para cima, pois o coeficiente de t^2 é positivo.

  Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:



Portanto, de acordo com o quadro de sinais, a concentração do medicamento será de pelo menos 0,125 mg/L da primeira à sétima hora, ou seja, por um período de 6 horas.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

1. Substituindo por 48 a variável x da função

$y = -\frac{7x^2}{480} - \frac{11x}{24} + 80$, temos:

$y = -\frac{7 \cdot 48^2}{480} - \frac{11 \cdot 48}{24} + 80 \Rightarrow y = 24{,}4$

Logo, o número máximo de apartamentos que podem ser construídos é 24.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 7

1. alternativa **e**

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observando o gráfico de f, temos:

$(2, -4) \in f \Rightarrow a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = -4$

$(0, -4) \in f \Rightarrow c = -4$

$(6, 8) \in f \Rightarrow a \cdot 36 + b \cdot 6 + c = 8$

Assim, para determinar a, b e c devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = -4 & (1) \\ c = -4 & (2) \\ 36a + 6b + c = 8 & (3) \end{cases}$$

Substituindo c por -4 em (1) e (3):

$$\begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ 36a + 6b - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -36a - 18b = 0 \\ 36a + 6b = 12 \end{cases}$$

$\therefore b = -1$ e $a = \frac{1}{2}$

Logo, $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ e $c = -4$.

2. alternativa **b**

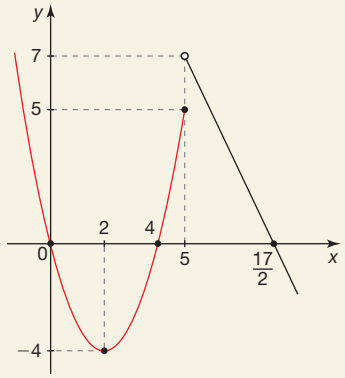
Na questão 1, calculamos os valores a, b e c, então, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1x - 4$. O vértice da parábola é o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, assim: $-\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4)}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{9}{2}$$

Concluímos, assim, que $V = \left(1, -\frac{9}{2}\right)$.

3. alternativa **d**

Esboçando o gráfico da função para facilitar o estudo, temos:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

4. alternativa **a**

Primeiro, determinamos a condição de existência:
$3x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

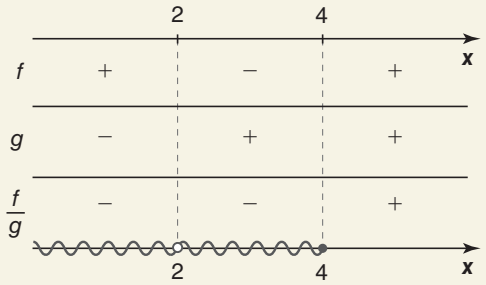
Estudando a variação de sinal das funções $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e $g(x) = 3x - 6$, temos:

- Raízes de f:

$x^2 - 6x + 8 \Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$

$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{1 \cdot 1} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 4$ ou $x = 2$

Representando a variação de sinal de f, g e $\frac{f}{g}$ em um quadro de sinais, temos:



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Os sinais da última linha foram obtidos por meio da regra de sinais para o quociente $\frac{f}{g}$. Como queremos que esse quociente seja negativo ou nulo, ou seja, $\frac{x^2 - 6x + 8}{3x - 6} \leqslant 0$, e lembrando que a condição para que esse quociente exista é $x \neq 2$, temos como conjunto solução:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 4 \text{ e } x \neq 2\}$

5. alternativa **c**

$$y = (10 - 0{,}04x)(800 + 5x)$$

ou seja,

$$y = -0{,}2x^2 + 18x + 8.000$$

O valor x_M de x para que y seja máximo é dado por:

$$x_M = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_M = \frac{-18}{2 \cdot (-0{,}2)} = 45$$

Assim, a receita será máxima se forem dados 45 descontos de R$ 0,04 por metro quadrado. Logo, o preço p, em real, por metro quadrado é calculado por:

$$p = 10 - 45 \cdot 0{,}04 = 8{,}2$$

Ou seja, o preço estabelecido por metro quadrado foi de R$ 8,20.

CAPÍTULO 8 Função modular

ALÉM DA TEORIA

3. $800 - (-28) = 828$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. Verdadeira, pois $7 > 0$, e o módulo de um número positivo é o próprio número.

b. Verdadeira, pois o módulo de zero é o próprio zero.

c. Verdadeira, pois $-3 < 0$, e o módulo de um número negativo é o oposto desse número.

d. Falsa, pois, como $\sqrt{3} < 2$, temos $\sqrt{3} - 2 < 0$, e o módulo de um número negativo é o oposto desse número; então, temos: $|\sqrt{3} - 2| = 2 - \sqrt{3}$

e. Verdadeira, pois, como $\sqrt{3} < 2$, temos $\sqrt{3} - 2 < 0$, e o módulo de um número negativo é o oposto desse número.

f. Verdadeira, pois $-3 - \sqrt{7} < 0$; portanto, $|-3 - \sqrt{7}| = 3 + \sqrt{7}$; $3 + \sqrt{7} > 0$; portanto, $|3 + \sqrt{7}| = 3 + \sqrt{7}$

g. Verdadeira, pois, como $\sqrt{2} < \sqrt{3}$, temos $\sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$, e o módulo de um número negativo é o oposto desse número. Então, temos:

$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| + \sqrt{2} = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{2} =$

$= -\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{3}$

h. Falsa, pois, como $\sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{5}$, temos $\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{5} > 0$ e $\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{9} < 0$. Então, temos:

$\left|\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{5}\right| = \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{5}$ e $\left|\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{9}\right| = -\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{9}\right)$

Portanto, $\left|\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{5}\right| - \left|\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{9}\right| =$

$= \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{5} - \left[-\left(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{9}\right)\right] =$

$= \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{9} = 0$

4. a. Como $4 \leqslant x \leqslant 8$, temos que:

$x - 9 < 0 \Rightarrow |x - 9| = 9 - x$

$x - 2 > 0 \Rightarrow |x - 2| = x - 2$

Logo, $A = |x - 9| + |x - 2| \Rightarrow A = 9 - x + x - 2$

$\therefore A = 7$

b. Como $4 \leqslant x \leqslant 8$, temos que:

$x - 10 < 0 \Rightarrow |x - 10| = 10 - x$

Logo, $B = \frac{|x - 10|}{x - 10} = \frac{10 - x}{x - 10} \Rightarrow B = -1$

6. a. $|23 - x| = 4$ ou $|x - 23| = 4$

b. $|23 - x| = 4 \Leftrightarrow 23 - x = 4$ ou $23 - x = -4$

$\therefore x = 19$ ou $x = 27$

7. a. Pela propriedade P2, temos:

$|2x - 1| = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \therefore x = \frac{1}{2}$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b. Pela propriedade P1, temos $|3x - 1| \geqslant 0$; logo, a equação $|3x - 1| = -4$ não tem raízes; portanto, seu conjunto S é vazio.

$S = \varnothing$

c. Pela propriedade P3, temos:

$|k^2 - 5k| = 6 \Leftrightarrow k^2 - 5k = 6$ ou $k^2 - 5k = -6$

Para $k^2 - 5k = 6$, temos: $k = 6$ ou $k = -1$

Para $k^2 - 5k = -6$, temos: $k = 3$ ou $k = 2$

Logo, $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

d. Pela propriedade P4, temos:

$|9x - 5| = |6x + 10| \Leftrightarrow 9x - 5 = 6x + 10$ ou

$9x - 5 = -6x - 10 \therefore x = 5$ ou $x = -\frac{1}{3}$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{3}, 5\right\}$.

e. Pela propriedade P5, temos: $|t \cdot (t - 2)| = |t| \cdot |t - 2|$

$|t| \cdot |t - 2| = 1 \Leftrightarrow |t \cdot (t - 2)| = 1 \therefore |t^2 - 2t| = 1$

Pela propriedade P3, temos:

$|t^2 - 2t| = 1 \Leftrightarrow t^2 - 2t = 1$ ou $t^2 - 2t = -1$

$\therefore t = 1 + \sqrt{2}$ ou $t = 1 - \sqrt{2}$ ou $t = 1$

Logo, $S = \left\{1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}\right\}$.

f. Pela propriedade P7, temos: $|x|^2 = x^2$

Logo, $x^2 + 2|x| = 15 \Rightarrow |x|^2 + 2|x| = 15$

Fazendo a mudança de variável $|x| = y$, obtemos:

$y^2 + 2y - 15 = 0 \Rightarrow y = 3$ ou $y = -5$

Retornando à variável original, concluímos que:

$y = 3 \Rightarrow |x| = 3 \therefore x = 3$ ou $x = -3$

$y = -5 \Rightarrow |x| = -5 \therefore \nexists x$

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \{-3, 3\}$.

g. Pela propriedade P7, temos: $|x - 1|^2 = (x - 1)^2$

Logo, $(x - 1)^2 + 4|x - 1| + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |x - 1|^2 + 4|x - 1| + 3 = 0$

Fazendo a mudança de variável $|x - 1| = y$, obtemos:

$y^2 + 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = -1$ ou $y = -3$

Retornando à variável original, concluímos que:

$y = -1 \Rightarrow |x - 1| = -1 \therefore \nexists x$

$y = -3 \Rightarrow |x - 1| = -3 \therefore \nexists x$

Assim, o conjunto solução da equação é $S = \varnothing$.

8. a. Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação: $3x - 6 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$

Pela propriedade P3, temos:

$|2x + 3| = 3x - 6 \Leftrightarrow 2x + 3 = 3x - 6$ ou

$2x + 3 = -3x + 6 \therefore x = 9$ ou $x = \frac{3}{5}$

Como $x = 9$ satisfaz a condição de existência, e $x = \frac{3}{5}$ não a satisfaz, concluímos que o conjunto solução da equação é $S = \{9\}$.

b. Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação: $3x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{3}$

Pela propriedade P3, temos:

$|7x + 2| = 3x - 1 \Rightarrow 7x + 2 = 3x - 1$ ou

$7x + 2 = -3x + 1 \therefore x = -\frac{3}{4}$ ou $x = -\frac{1}{10}$

Como $x = -\frac{3}{4}$ e $x = -\frac{1}{10}$ não obedecem à condição de existência, temos $S = \varnothing$.

c. Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação: $9 - 5x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{9}{5}$

Pela propriedade P3, temos:

$|x^2 - 5x| = 9 - 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 9 - 5x$ ou $x^2 - 5x = -9 + 5x$

$\therefore x = 3$ ou $x = -3$ ou $x = 1$ ou $x = 9$

Porém, $x = 3$ e $x = 9$ não obedecem à condição de existência; então, $S = \{-3, 1\}$.

9. a. Pela propriedade P10, temos:

$|5x + 7| \geqslant 13 \Leftrightarrow 5x + 7 \leqslant -13$ ou $5x + 7 \geqslant 13$

$\therefore x \leqslant -4$ ou $x \geqslant \frac{6}{5}$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant \frac{6}{5}\right\}$

b. Pela propriedade P9, temos:

$|3x - 4| < 8 \Leftrightarrow -8 < 3x - 4 < 8$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$3x - 4 < 8$ e $3x - 4 > -8 \therefore x < 4$ e $x > -\frac{4}{3}$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{4}{3} < x < 4\right\}$

c. Pela propriedade P8, temos:

$\left|\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{5} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} \leqslant \frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{5}$

Essa dupla desigualdade é equivalente a:

$\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{5}$ e $\frac{3x}{4} + \frac{1}{2} \geqslant -\frac{1}{5}$

$\therefore x \leqslant -\frac{2}{5}$ e $x \geqslant -\frac{14}{15}$

Logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{14}{15} \leqslant x \leqslant -\frac{2}{5}\right\}$

10. alternativa **b**

$\begin{cases} 2x - 14 \leqslant 0 \\ -3x - 9 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x \leqslant 14 \\ -3x \leqslant 9 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x \leqslant 7 \\ x \geqslant -3 \end{cases} \Rightarrow -3 \leqslant x \leqslant 7$

$\therefore -3 - 2 \leqslant x - 2 \leqslant 7 - 2 \Rightarrow -5 \leqslant x - 2 \leqslant 5$

$\therefore |x - 2| \leqslant 5$

11. Considerando o tempo t em minuto e adotando $t = 0$ o instante em que o automóvel A passou por P, temos que os espaços S_A e S_B percorridos pelos automóveis A e B, respectivamente, são dados por:

$S_A = 1.400t$ e $S_B = 1.500(t - 2)$

Observando que a distância entre os automóveis é dada por $|S_B - S_A|$, devemos ter:

$|S_A - S_B| < 600 \Rightarrow |1.500(t - 2) - 1.400t| < 600$

$\therefore |100t - 3.000| < 600 \Rightarrow -600 < 100t - 3.000 < 600$

$\therefore 2.400 < 100t < 3.600 \Rightarrow 24 < t < 36$

Como $36 - 24 = 12$, concluímos que a distância entre os automóveis foi menor que 600 m durante 12 min.

14. a. $f(x) = \sqrt{(x-2)^2} \Rightarrow f(x) = |x - 2|$

$\therefore f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x \geqslant 2 \\ -x + 2, \text{ se } x < 2 \end{cases}$

b. Para traçar o gráfico de $g(x) = |x^2 - 2x| - 3$, construímos, inicialmente, o gráfico de $f(x) = x^2 - 2x$.

A partir desse gráfico, obtemos o gráfico de $h(x) = |x^2 - 2x|$, conservando os pontos de ordenadas não negativas e transformando os de ordenadas negativas em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas.

A partir desse gráfico, construímos o gráfico de $g(x) = |x^2 - 2x| - 2$, deslocando verticalmente todos os pontos de h duas unidades "para baixo".

15. a. A distância d é dada por:

$d = |S_A - S_B|$, isto é, $d = |16t - 20 - (10 - 14t)| \Rightarrow$

$\Rightarrow d = |30t - 30|$

Assim, devemos considerar o gráfico para $0 \leqslant t \leqslant 3$.

b. $d = |30t - 30| \Rightarrow 15 = |30t - 30|$

Pela propriedade P3, temos:

$|30t - 30| = 15 \Leftrightarrow 30t - 30 = 15$ ou $30t - 30 = -15$

$\therefore t = 1{,}5$ ou $t = 0{,}5$

Logo, o primeiro instante ocorreu para $t = 0{,}5$ h.

c. Basta, no gráfico do item **a**, considerar os pontos com ordenada menor que 15.

16. O erro relativo r é dado por: $r = \dfrac{|1{,}4 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}}$

Logo: $r \approx 0{,}01005$

17. A medida correta da diagonal de um quadrado com 10 mm de lado é $10\sqrt{2}$ mm, que, com a precisão até décimos de milímetro, é 14,1 mm. Assim, o visor do paquímetro mostra o valor 14,1. Portanto, o erro relativo r cometido na medida é dado por:

$r = \dfrac{|14{,}1 - 10\sqrt{2}|}{10\sqrt{2}}$

Logo: $r \approx 0{,}002979$

20. A área do terreno é o resultado da divisão de 76,6892 kg por 22,45 kg. O termo com menor quantidade de algarismos significativos nessa divisão é 22,45, portanto, quatro algarismos significativos. Como o resultado já tem quatro algarismos significativos, concluímos que a área do terreno é 3,416 m^2.

21. A distância percorrida, em quilômetro, é o resultado da divisão de 8,7642 L por 0,15 L. O termo dessa divisão com a menor quantidade de algarismos significativos é 0,15, portanto dois algarismos significativos, arredondamos o resultado para dois algarismos significativos, obtendo 58. Assim, a distância percorrida é 58 km.

22. Ao calcular o produto de 5,7 por 1,25, obtém-se 7,125. Considerando a quantidade de casas decimais do menor dos fatores, o valor procurado é 7,1.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. Aos 90 km de viagem, o ônibus não chegou ao ponto P; logo, a distância entre o ônibus e P é (120 – 90) km, ou seja, 30 km.

b. Aos 150 km de viagem, o ônibus já passou pelo ponto P; logo, a distância entre o ônibus e P é (150 – 120) km, ou seja, 30 km.

c. Temos que analisar as duas possibilidades: o ônibus não ultrapassou o ponto P, isto é, $x \leqslant 120$; ou o ônibus já ultrapassou o ponto P, isto é, $x > 120$.

Assim, podemos concluir que, durante o percurso da viagem, a distância d pode ser expressa por:

$d = \begin{cases} 120 - x, \text{ se } x \leqslant 120 \\ x - 120, \text{ se } x > 120 \end{cases}$

Essas duas sentenças que expressam a distância d podem ser expressas por uma única sentença, ou seja: $d = |x - 120|$ ou, de maneira equivalente, $d = |120 - x|$

2. alternativa **a**

Para $5 \leqslant x \leqslant 9$, tem-se que $2x - 21 < 0$; assim, $|2x - 21| = -2x + 21$

Logo,

$E = ||2x - 21| - 2| \Rightarrow E = |-2x + 21 - 2|$

$\therefore E = |-2x + 19|$

Para $5 \leqslant x \leqslant 9$, tem-se que $-2x + 19 > 0$: assim: $E = -2x + 19$

3. O menor valor possível da expressão $E = \dfrac{1}{|1 - x|}$ é obtido quando o denominador for o maior possível. Isso ocorre quando $x = 11$. Assim, o menor valor possível de E é dado por: $E = \dfrac{1}{|1 - 11|} = \dfrac{1}{10}$

4. a. Pela propriedade P3, temos:

$|5x - 7| = 1 \Leftrightarrow 5x - 7 = 1$ ou $5x - 7 = -1$

$\therefore x = \dfrac{8}{5}$ ou $x = \dfrac{6}{5}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{8}{5}, \dfrac{6}{5}\right\}$.

b. Pela propriedade P1, impomos a condição de existência da equação:

$2x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$

Pela propriedade P3, temos:

$|x^2 + x| = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 + x = 2x - 4$ ou

$x^2 + x = -2x + 4$

- Para $x^2 + x = 2x - 4$, temos: $x^2 - x + 4 = 0$
  Como $\Delta < 0$, não existem raízes reais para $x^2 - x + 4 = 0$.
- Para $x^2 + x = -2x + 4$, temos:
  $x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -4$
  Porém, $x = 1$ e $x = -4$ não servem, pois não obedecem à condição de existência.

Logo, $S = \varnothing$.

c. Pela propriedade P7, temos: $|n|^2 = n^2$

Logo: $n^2 - 2 \cdot |n| - 8 = 0 \Rightarrow |n|^2 - 2 \cdot |n| - 8 = 0$

Fazendo a mudança de variável $|n| = t$, obtemos:

$t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4$ ou $t = -2$

Retornando à variável original, concluímos que:

$t = 4 \Rightarrow |n| = 4 \therefore n = 4$ ou $n = -4$

$t = -2 \Rightarrow |n| = -2 \therefore \nexists\, n$

Logo, $S = \{-4, 4\}$.

d. Pela propriedade P5, temos:

$|5k| = |5| \cdot |k| = 5|k|$

Pela propriedade P7, temos: $|k|^2 = k^2$

Logo: $k^2 - |5k| + 4 = 0 \Rightarrow |k|^2 - 5 \cdot |k| + 4 = 0$

Fazendo a mudança de variável $|k| = t$, obtemos:

$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow t = 4$ ou $t = 1$

Retornando à variável original, concluímos que:

- $t = 4 \Rightarrow |k| = 4 \therefore k = 4$ ou $k = -4$
- $t = 1 \Rightarrow |k| = 1 \therefore k = 1$ ou $k = -1$

Logo, $S = \{-4, -1, 1, 4\}$.

5. a. $|m - 6| < 2 \Rightarrow -2 < m - 6 < 2$

$\therefore 4 < m < 8$

O número de candidatos que obtiveram nota m, com $4 < m < 8$, é dado por: $94 + 112 + 98 = 304$

b. $|n - 7| > 1 \Rightarrow n - 7 < -1$ ou $n - 7 > 1$

$\therefore n < 6$ ou $n > 8$

O número de candidatos que obtiveram nota n, com $n < 6$ ou $n > 8$, é dado por:

$40 + 82 + 94 + 30 + 16 = 262$

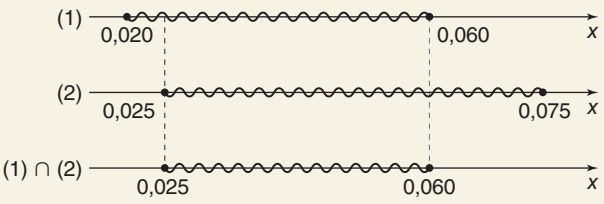
6. Temos:

$$\begin{cases} |x - 0{,}040| \leqslant 0{,}020 \\ |x - 0{,}050| \leqslant 0{,}025 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}020 \leqslant x - 0{,}040 \leqslant 0{,}020 \\ -0{,}025 \leqslant x - 0{,}050 \leqslant 0{,}025 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 0{,}020 \leqslant x \leqslant 0{,}060 & (1) \\ 0{,}025 \leqslant x \leqslant 0{,}075 & (2) \end{cases}$$

A intersecção de (1) e (2) é dada por:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Note, portanto, que x_0 pode ser qualquer um dos infinitos valores do intervalo [0,025; 0,060]. Concluímos, então, que faltam dados para determinar x_0.

7. a. $f(x) = 3|2x - 4| \Rightarrow f(x) = |6x - 12|$

b. $f(x) = 3\,|2x - 1| + 2 \Rightarrow f(x) = |6x - 3| + 2$

c. $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 1| - 4 \Rightarrow f(x) = |x^2 - 1| - 4$

8. Para $x > 0$, temos $y = 1$; para $x < 0$, temos $y = -1$; e, para $x = 0$, não está definida a função.

REFLEXÃO

Página 235: Dados dois números reais quaisquer a e b, tem-se que: $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

$ab \leqslant |ab| \Rightarrow ab \leqslant |a| \cdot |b| \Rightarrow 2ab \leqslant 2|a| \cdot |b| \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab \leqslant a^2 + b^2 + 2|a| \cdot |b|$

$\therefore a^2 + b^2 + 2ab \leqslant |a|^2 + |b|^2 + 2|a| \cdot |b| \Rightarrow$

$\Rightarrow (a + b)^2 \leqslant (|a| + |b|)^2$

$\therefore |a + b| \leqslant ||a| + |b|| \Rightarrow |a + b| \leqslant |a| + |b|$

Página 241: O gráfico da função g é translação vertical (paralela ao eixo Oy) de duas unidades para cima do gráfico da função f. O gráfico da função h é translação vertical (paralela ao eixo Oy) de duas unidades para baixo do gráfico da função f.

CONECTADO

a. Considere $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$. Construindo os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = |x^2 - 5x + 6|$ no mesmo plano cartesiano, pode-se perceber que o gráfico da função g é obtido a partir do gráfico da função f conservando os pontos de ordenadas não negativas e transformando os de ordenadas negativas nos seus simétricos em relação ao eixo x.

b. Para que o gráfico de uma função polinomial do 2º de lei $g(x) = |ax^2 + bx + c|$ não sofra nenhuma modificação em relação ao gráfico da função de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, é necessário que $f(x)$ não assuma valores negativos, ou seja, que $ax^2 + bx + c \geqslant 0$. Daí é necessário que $a > 0$ e que a equação tenha apenas uma ou nenhuma raiz ($\Delta < 0$).

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

2. $36.000.000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 9.000.000$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 8

1. alternativa **d**

Devemos considerar duas possibilidades:

- Se o ponto B estiver à direita de A ou coincidir com A, isto é, se $k \geqslant -4$, então: $AB = k - (-4)$, ou seja, $AB = k + 4$
- Se o ponto B estiver à esquerda de A, isto é, se $k < -4$, então: $AB = -4 - k$

Podemos resumir essas duas possibilidades escrevendo a distância AB, em quilômetro, do seguinte modo:

$$AB = \begin{cases} k + 4, \text{ se } k \geqslant -4 \\ -4 - k, \text{ se } k < -4 \end{cases}$$

Logo, por definição de módulo de um número real, temos: $AB = |k + 4|$.

2. a. Pela propriedade P1, temos que $|x - 4| \geqslant 0$; logo, a equação $|x - 4| = -7$ não tem raízes, e, portanto, seu conjunto solução S é vazio: $S = \varnothing$

b. Pela propriedade P4, temos:

$|3x - 4| = |2x + 6| \Leftrightarrow 3x - 4 = 2x + 6$ ou

$3x - 4 = -2x - 6$, e, portanto, x = 10 ou $x = -\frac{2}{5}$

$S = \left\{10, -\frac{2}{5}\right\}$

c. Pela propriedade P1, impomos a condição de existência do módulo: $x^2 + 1 \geqslant 0$

Observando que x^2 é positivo ou nulo para qualquer valor real de x e que 1 é um número positivo, concluímos que $x^2 + 1$ é positivo para qualquer valor real de x.

Assim, a condição de existência é obedecida para qualquer valor real de x.

Pela propriedade P4, temos:

$|x^2 + 1| = x^2 + 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 1 = x^2 + 1}_{(1)}$ ou $\underbrace{x^2 + 1 = -x^2 - 1}_{(2)}$

A igualdade (1) é uma identidade em $\mathbb{R}$, isto é, a igualdade é verdadeira para qualquer valor real de x; a equação (2) tem o $\varnothing$ como conjunto solução. Logo: $S = \mathbb{R}$

3. alternativa **e**

Se $x \geqslant 28\%$, temos que $x - 28\% \leqslant 3\%$; e

se $x < 28\%$, temos que $28\% - x \leqslant 3\%$

Essas duas inequações podem ser expressas pela seguinte inequação modular: $|x - 28\%| \leqslant 3\%$

4. Executamos os seguintes passos:

- construímos o gráfico da função $g(x) = x^2 - 4x$
- no gráfico de g, conservamos os pontos de **ordenadas não negativas** e transformamos os pontos de **ordenadas negativas** em seus simétricos em relação ao eixo das abscissas, obtendo assim o gráfico de $y = |x^2 + 4x|$.
- transladamos, verticalmente, 3 unidades para cima o gráfico anterior, obtendo o gráfico da função: $f(x) = |x^2 - 4x| + 3$

CAPÍTULO 9 Função exponencial

ALÉM DA TEORIA

O valor de t, que corresponde a 5 horas depois da morte, é $t = 2$. Assim, temos:

$T(t) = 27 + [37 - 27]e^{-0,05t} = \Rightarrow T(t) = 27 + 10e^{-0,05t}$

$\therefore T(2) = 27 + 10e^{-0,05 \cdot 2} \Rightarrow T(2) \approx 27 + 10 \cdot (2,71)^{-0,1}$

$\therefore T(2) \approx 36,05$

Concluímos, então, que a temperatura do corpo do animal, 5 horas depois da morte, era de 36 °C, aproximadamente.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. $(-5)^2 = (-5)(-5) = 25$

b. $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$

c. $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$

d. $9^0 = 1$

e. $1^{43} = 1$

f. $(-1)^{13} = -1$

g. $\left(-\frac{5}{2}\right)^{-2} = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

h. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

2. a. $x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$

b. $y^6 : y^2 = y^{6-2} = y^4$

c. $\left(\frac{2xy^5}{z^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{xz^3}{y}\right)^4 = \frac{8x^3y^{15}}{z^6} \cdot \frac{x^4z^{12}}{y^4} = 8x^7y^{11}z^6$

d. $\left(\frac{3a^2b^3}{cd}\right)^3 : \left(\frac{c^2d^3}{3ab^4}\right)^{-2} = \frac{27a^6b^9}{c^3d^3} \cdot \frac{c^4d^6}{9a^2b^8} = 3a^4bcd^3$

3. alternativa **e**

O número de minutos de 70 anos é $60 \cdot 24 \cdot 360 \cdot 70$, aproximadamente. Assim, o número de batimentos cardíacos de uma pessoa em 70 anos é, aproximadamente, $72 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 360 \cdot 70$. Logo:

$$\underbrace{2^3 \cdot 3^2}_{72} \cdot \underbrace{2^2 \cdot 3 \cdot 5}_{60} \cdot \underbrace{2^3 \cdot 3}_{24} \cdot \underbrace{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}_{360} \cdot \underbrace{2 \cdot 5 \cdot 7}_{70} = 2^{12} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7$$

4. alternativa **b**

Temos que: 1 hora tem 3.600 segundos; 1 dia tem 24 horas; e 1 ano tem 365 dias. Assim, 1 ano-luz equivale à medida d, em quilômetro, calculada por:

$d = 300.000 \cdot 3.600 \cdot 24 \cdot 365 = 9.460.800.000.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow d \approx 9,46 \cdot 10^{12}$.

6. b. $0,00002 \text{ mm} = \frac{2}{10^5} \text{ mm} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ mm}$

c. $0,00002 \text{ mm} = 0,000002 \text{ cm} = \frac{2}{10^6} \text{ cm} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$

d. Temos que $1 \text{Å} = 10^{-10} \text{ m} = 10^{-8} \text{ cm}$.

Assim, a medida x, em angstrom, do poliovírus é dada pela proporção: $\frac{1}{10^{-8}} = \frac{x}{2 \cdot 10^{-6}} \therefore x = 2 \cdot 10^2$

Logo, a medida do poliovírus é $2 \cdot 10^2$ Å

7. a. $\sqrt{25} = 5$

b. $\sqrt{0,25} = 0,5$

c. $\sqrt[3]{8} = 2$

d. $\sqrt[3]{0,008} = 0,2$

e. $\sqrt[5]{-32} = -2$

f. $\sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10}$

g. $\sqrt[5]{1} = 1$

h. $\sqrt[3]{0} = 0$

i. $\sqrt[1]{12} = 12$

8. a. Verdadeira, pela propriedade P1.

b. Falsa, pois temos:

$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$ e $\sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$

Logo: $\sqrt{9} + \sqrt{16} \neq \sqrt{(9 + 16)}$

c. Verdadeira, pois, pela propriedade P2, temos:

$\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{10}{5}} = \sqrt[3]{2}$

d. Verdadeira, pela propriedade P5.

e. Falsa, pois, pela propriedade P5, temos:

$\sqrt[3]{\sqrt{7}} = \sqrt[3 \cdot 2]{7} = \sqrt[6]{7}$

f. Verdadeira, pois temos que:

$\sqrt{2\sqrt[3]{5}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \sqrt[6]{40}$

9. a. No primeiro radical, multiplicamos por 2 o índice 3 do radical e o expoente 1 do radicando, obtendo:
$\sqrt[3]{5^1} = \sqrt[3\cdot 2]{5^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{5^2}$

No segundo radical, multiplicamos por 3 o índice 2 do radical e o expoente 3 do radicando, obtendo:
$\sqrt[2]{2^3} = \sqrt[2\cdot 3]{2^{3\cdot 3}} = \sqrt[6]{2^9}$

Portanto, os radicais têm o mesmo índice 6.

b. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[3\cdot 4]{5^{1\cdot 4}} \cdot \sqrt[4\cdot 3]{5^{1\cdot 3}} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 5^3} = \sqrt[12]{5^7}$

c. $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[5]{3}} = \dfrac{\sqrt[4\cdot 5]{3^{1\cdot 5}}}{\sqrt[5\cdot 4]{3^{1\cdot 4}}} = \sqrt[20]{\dfrac{3^5}{3^4}} = \sqrt[20]{3}$

d. Reduzindo os radicais ao mesmo índice:
$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3\cdot 4]{3^4} = \sqrt[12]{81}$ $\qquad$ $\sqrt[4]{5} = \sqrt[4\cdot 3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$
$\sqrt{2} = \sqrt[2\cdot 6]{2^6} = \sqrt[12]{64}$
Como $\sqrt[12]{125} > \sqrt[12]{81} > \sqrt[12]{64}$, temos que $\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

10. a. $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6} = 3^2 = 9$ $\qquad$ **c.** $\sqrt{1.024} = \sqrt{2^{10}} = 2^5 = 32$

b. $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$ $\qquad$ **d.** $\sqrt[3]{\dfrac{512}{125}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^9}{5^3}} = \dfrac{2^3}{5} = \dfrac{8}{5}$

e. $\sqrt{0{,}1296} = \sqrt{\dfrac{1.296}{10.000}} = \sqrt{\dfrac{2^4 \cdot 3^4}{10^4}} = \dfrac{2^2 \cdot 3^2}{10^2} = \dfrac{36}{100} = 0{,}36$

f. $\sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ $\qquad$ **g.** $\sqrt[3]{-0{,}027} = \sqrt[3]{(-0{,}3)^3} = -0{,}3$

h. $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} - \sqrt{2} = |1-\sqrt{2}| - \sqrt{2} = (\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} = -1$

Note que, como $1 < \sqrt{2}$, temos: $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

11. a. $\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$

b. $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

c. $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

d. $\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 2} = 2\sqrt[4]{2}$

e. $\sqrt{40} = \sqrt{2^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 10} = 2\sqrt{10}$

f. $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}$

g. $\sqrt{\dfrac{48}{25}} = \dfrac{\sqrt{2^4 \cdot 3}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{5} = \dfrac{4\sqrt{3}}{5}$

h. $\sqrt[3]{\dfrac{81}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{3}}{2}$

i. $\sqrt{\dfrac{75}{64}} = \dfrac{\sqrt{3 \cdot 5^2}}{\sqrt{2^6}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2^3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{8}$

12. a. $4\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(4 + 6 - 2) = 8\sqrt{3}$

b. $2\sqrt{50} + \sqrt{125} - 6\sqrt{5} =$
$= 2\sqrt{5^2 \cdot 2} + \sqrt{5^2 \cdot 5} - 6\sqrt{5} = 10\sqrt{2} - \sqrt{5}$

c. $4\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{128} =$
$= 4\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + 2\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{4^3 \cdot 2} = 18\sqrt[3]{2}$

d. $4\sqrt[5]{3} \cdot 2\sqrt[5]{4} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{3 \cdot 4} = 8\sqrt[5]{12}$

e. $12\sqrt[3]{4} \cdot 6\sqrt[3]{2} = 72 \cdot \sqrt[3]{4 \cdot 2} = 72 \cdot \sqrt[3]{2^3} = 144$

f. $6\sqrt{10} : 2\sqrt{5} = \dfrac{6\sqrt{10}}{2\sqrt{5}} = 3\sqrt{\dfrac{10}{5}} = 3\sqrt{2}$

g. $12\sqrt[3]{16} : 6\sqrt[3]{2} = \dfrac{12\sqrt[3]{16}}{6\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{8} = 2 \cdot 2 = 4$

13. $2m_0 = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore 1 - \dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 1 - \dfrac{1}{4} = \left(\dfrac{v}{c}\right)^2 \therefore \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \dfrac{v}{c} \Rightarrow v = \dfrac{\sqrt{3}\,c}{2}$

Assim, para que a massa m_0 do objeto duplique, sua velocidade v deve atingir $\dfrac{\sqrt{3}\,c}{2}$ ou, aproximadamente, 0,87c.

14. a. $9^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{9^2} = \sqrt[5]{81}$ $\qquad$ **d.** $7^{0{,}5} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

b. $6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$ $\qquad$ **e.** $3^{0{,}75} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$

c. $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$ $\qquad$ **f.** $123^{0{,}1} = \sqrt[10]{123}$

16. a. Temos:
$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$
$27^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{27}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3^3}} = \dfrac{1}{3}$
$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = 2^3 = 8$
Portanto: $36^{\frac{1}{2}} + 27^{-\frac{1}{3}} - 16^{\frac{3}{4}} = 6 + \dfrac{1}{3} - 8 = -\dfrac{5}{3}$

b. Temos:
$100^{0{,}5} = 100^{\frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$
$81^{0{,}75} = 81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = 3^3 = 27$
$16^{-1{,}25} = 16^{-\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{16^{-5}} = \sqrt[4]{(2^4)^{-5}} = 2^{-5} = \dfrac{1}{32}$
Portanto: $100^{0{,}5} - 81^{0{,}75} + 16^{-1{,}25} =$
$= 10 - 27 + \dfrac{1}{32} = -\dfrac{543}{32}$

18. a. $\left[(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{3})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{3})^2 = 3$

b. $\left(3^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{27}}\right)^{\sqrt{3}} = (3)^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}} = 3^3 \cdot 2^9 = 13.824$

c. $1^{\sqrt{5}} + 0^{\pi} = 1 + 0 = 1$

d. $\dfrac{81^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{81}} = \dfrac{81^{\frac{3}{4}}}{81^{\frac{1}{2}}} = 81^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = 81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = 3$

20. alternativa **c**

Como os pontos (1, 1.500) e (3, 3.375) pertencem ao gráfico da função $N(t) = ba^t$, temos: $\begin{cases} ba^1 = 1.500 \quad (1) \\ ba^3 = 3.375 \quad (2) \end{cases}$

Dividindo, membro a membro, (2) por (1), temos $a = 1{,}5$.
Substituindo a por 1,5 em qualquer uma das equações, (1) ou (2), obtemos $b = 1.000$.
Assim, deduzimos que $N(t) = 1.000 \cdot 1{,}5^t$.
Para $t = 2$, temos: $N(2) = 1.000 \cdot 1{,}5^2 \Rightarrow N(2) = 2.250$

21. a. Raciocinando como no cálculo do montante a juro composto, a população mundial P, em milhão de habitantes, em função do tempo t, em ano, desde o início de 1701 até o final de 1900, é dada por:

$$P = 600(1 + 0{,}2\%)^t \Rightarrow P = 600(1{,}002)^t$$

b. Atribuindo o valor 40 à variável t da equação obtida no item **a**, temos:

$$P = 600(1{,}002)^{40} \Rightarrow P \approx 600 \cdot 1{,}08 \therefore P \approx 648$$

c. Atribuindo o valor 200 à variável t da equação obtida no item **a**, temos:

$P = 600(1{,}002)^{200} \Rightarrow P \approx 600 \cdot 1{,}49 \therefore P \approx 894$

22. a. Raciocinando como no cálculo do montante a juro composto, temos que o volume $V(t)$, em milhão de metro cúbico, de água na barragem, em função do tempo t, em mês, é dado por:

$V(t) = 240(1 - 3\%)^t \Rightarrow V(t) = 240(0{,}97)^t$

b. Para $t = 5$, temos, na equação obtida no item **a**:

$V(5) = 240(0{,}97)^5 \Rightarrow V(5) = 240 \cdot 0{,}86 = 206{,}4$

24. a. $64^x = 256 \Rightarrow (2^6)^x = 2^8$, ou seja, $2^{6x} = 2^8 \Rightarrow 6x = 8$

$\therefore x = \frac{4}{3}$; Logo: $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

b. $25^{x+2} = 125^{x+5} \Rightarrow (5^2)^{x+2} = (5^3)^{x+5}$; ou seja:

$2x + 4 = 3x + 15 \Rightarrow x = -11$; Logo: $S = \{-11\}$

c. $\left(\frac{8}{125}\right)^{2x-1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2x} \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^{2x-1} = \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{2x}$; ou seja:

$6x - 3 = -4x \Rightarrow x = \frac{3}{10}$; logo: $S = \left\{\frac{3}{10}\right\}$

d. $5^{2x-1} = 1 \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^0$, e, portanto, $2x - 1 = 0$; ou seja:

$x = \frac{1}{2}$; logo: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

e. $7^x = 8^x \Rightarrow \frac{7^x}{8^x} = \frac{8^x}{8^x}$, ou seja, $\left(\frac{7}{8}\right)^x = 1 \Rightarrow \left(\frac{7}{8}\right)^x = \left(\frac{7}{8}\right)^0$

$\therefore x = 0$; Logo: $S = \{0\}$

f. $\sqrt[3]{25^x} = \sqrt{5} \Rightarrow 25^{\frac{x}{3}} = 5^{\frac{1}{2}}$; ou seja: $5^{\frac{2x}{3}} = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{3}{4}$; logo: $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$

25. a. $2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2} = 20 \Rightarrow 2^x \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 20$; ou seja: $2^x = 8$;

logo: $x = 3$; Portanto: $S = \{3\}$

b. $3^x \cdot 3^1 - 3^x \cdot 3^2 = -54 \Rightarrow 3^x \cdot (3 - 9) = -54$; ou seja:

$3^x = 9$; logo: $x = 2$; portanto: $S = \{2\}$

c. $2^{x+1} + 2^{1-x} - 5 = 0 \Rightarrow 2^x \cdot 2 + \frac{2}{2^x} - 5 = 0$

Fazendo a mudança de variável $2^x = k$, temos:

$2k + \frac{2}{k} - 5 = 0$, condição de existência $k > 0$.

$\therefore 2k^2 - 5k + 2 = 0 \Rightarrow k = 2$ ou $k = \frac{1}{2}$

Retornando à variável original x, temos:

$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ ou $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$

Logo: $S = \{1, -1\}$

26. No momento em que as duas colônias terão o mesmo número de bactérias, teremos $f(t) = g(t)$. Assim:

$2^{t+1} + 200 = 4^t + 152 \Rightarrow 2^t \cdot 2 + 200 = (2^t)^2 + 152 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2^t)^2 - 2 \cdot 2^t - 48 = 0$

Fazendo a mudança de variável $2^t = x$, temos:

$x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow x = 8$ ou $x = -6$

Retornando à variável original, temos:

$2^t = 8 \Rightarrow t = 3$ ou $2^t = -6$ (não tem solução)

Portanto $t = 3$, ou seja, as duas colônias terão o mesmo número de bactérias daqui a 3 anos.

27. a. Aplicando o mesmo raciocínio utilizado no cálculo do montante acumulado em regime de juros compostos, temos que, se uma grandeza C cresce ou decresce durante t unidades de tempo, a uma taxa percentual constante i por unidade de tempo, então o montante M dessa grandeza ao final das t unidades de tempo é dado por: $M = C(1 + i)^t$

Assim, a equação pedida é: $M = 6 \cdot (1 - 0{,}488)^t$

Ou seja, $M = 6 \cdot (0{,}512)^t$

b. Como 4 meses equivalem à terça parte do ano, substituímos por $\frac{1}{3}$ a variável t da equação obtida no item **a**:

$M = 6 \cdot (0{,}512)^{\frac{1}{3}}$

Observando que $0{,}512 = \frac{512}{1\,000} = \frac{2^9}{10^3}$, concluímos:

$M = 6 \cdot \left(\frac{2^9}{10^3}\right)^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \frac{2^3}{10} = 4{,}8$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. $1\text{ GB} = 10^3\text{ MB} = 10^3 \cdot 10^3\text{ KB} =$

$= 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3\text{ B} = 10^9\text{ B}$

Logo, $500\text{ GB} = 500 \cdot 10^9\text{ B} = 5 \cdot 10^{11}\text{ B}$

b. $1\text{ PB} = 10^3\text{ TB} = 10^3 \cdot 10^3\text{ GB} = 10^6\text{ GB}$

Dividindo a capacidade de armazenamento do *Frontier* pela capacidade de armazenamento do PC do item **a**, chegamos a:

$\frac{700\text{ PB}}{500\text{ GB}} = \frac{700 \cdot 10^6\text{ GB}}{500\text{ GB}} = \frac{7 \cdot 10^8\text{ GB}}{5 \cdot 10^2\text{ GB}} = 1{,}4 \cdot 10^6$

2. A medida do volume de um cubo de aresta ℓ é ℓ^3, e a medida do volume de um cubo de aresta 2ℓ é $8\ell^3$. Como o número de átomos de cubo de alumínio de aresta ℓ é $4{,}816 \cdot 10^{24}$, temos que o número de átomos de um cubo de alumínio de aresta 2ℓ é $8 \cdot 4{,}816 \cdot 10^{24}$, ou seja, $3{,}8528 \cdot 10^{25}$ átomos.

Dividindo o número de átomos do cubo maior por $6{,}02 \cdot 10^{23}$, obtemos: $\frac{3{,}8528 \cdot 10^{25}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} = 64$

Concluímos, então, que o cubo maior tem 64 mols de átomos.

3. Transformando os radicais em potências com expoentes racionais e usando uma calculadora científica, obtemos:

a. $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{0,5} \approx 1{,}7321$

b. $\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}} = 7^{0,25} \approx 1{,}6266$

c. $\sqrt[5]{9} = 9^{\frac{1}{5}} = 9^{0,2} \approx 1{,}5518$

4. a. $3^{\sqrt{2}} = 3^{2^{0,5}} \approx 3^{1,4142} \approx 4{,}7288$

b. $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} = (2^{0,5})^{3^{0,5}} \approx (2^{0,5})^{1,7320} \approx 2^{0,8660} \approx 1{,}8226$

c. $4^{\pi} \approx 77{,}8802$

5. a. Ao final de 1 hora: $\frac{512.000}{2} = 256.000$

Ao final de 2 horas: $\frac{256.000}{2} = 128.000$

Ao final de 3 horas: $\frac{128.000}{2} = 64.000$

Ao final de 4 horas: $\frac{64.000}{2} = 32.000$

b. A população P depende do valor inicial (512.000), do tempo t e da taxa de decrescimento (50%); assim, $P(t) = 512.000(1 - 50\%)^t$, ou seja, $P(t) = 512.000\left(\frac{1}{2}\right)^t$.

6. a. A taxa mensal i de juros do empréstimo A pode ser calculada por: $2.000 + 2.000 \cdot i \cdot 3 \Rightarrow i = 0,1 = 10\%$

Assim, temos que a lei de associação que expressa y em função de x para o empréstimo A é $y = 2.000 + 2.000 \cdot 0,1 \cdot x$, ou seja, $y = 2.000 + 200x$, com $0 \leqslant x \leqslant 3$

Como a taxa mensal de juros é a mesma para os dois empréstimos, temos que o montante y em função de x para o empréstimo B é dado por:

$y = 2.000 \cdot (1 + 0,1)^x$, ou seja, $y = 2.000 \cdot (1,1)^x$

b. O montante M ao final dos três meses é calculado por:

$M = 2.000 \cdot (1,1)^3 \cdot M = 2.662$

Concluímos, então, que, ao final dos três meses, o montante da dívida do empréstimo B era de R$ 2.662,00.

7. a. $P_0 = 1$ atm; $i = 9\% = 0,09$

Aplicando a fórmula $P = P_0(1 - i)^h$, temos:

$P = P_0(1 - 0,09)^h \Rightarrow P = (0,91)^h$

b. Para $h = 5$, temos: $P = (0,91)^5 \approx 0,624$

8. alternativa **e**

Temos:

$M(0) = a \cdot 2^{0,0625 \cdot 0} \Rightarrow a \cdot 2^{0,0625 \cdot 0} = 1.000 \Rightarrow a = 1.000$

Assim: $M(t) = 8.000 \Rightarrow 1.000 \cdot 2^{0,0625 \cdot t} = 8.000$

$\therefore 2^{0,0625 \cdot t} = 2^3 \Rightarrow 0,0625 \cdot t = 3 \therefore t = 48$

Concluímos, então, que o montante será igual a R$ 8.000,00 daqui a 48 meses.

9. Fazendo uma analogia desse tipo de questão com questões de aplicação ou retirada de dinheiro, uma vez que a diminuição do nível sonoro se dará sempre em cima do novo valor de comprimento, temos:

Nível sonoro inicial: $s_0 = 50$

Nível sonoro final: s

Taxa de diminuição do som: $i = 10\% = 0,1$ (taxa por metro)

Número de metros: n

Assim: $s = s_0 \cdot (1 - i)^n \Rightarrow s = 50 \cdot (1 - 0,1)^n$

Para $s = 32,805$, temos:

$32,805 = 50 \cdot (1 - 0,1)^n \Rightarrow (0,9)^n = \frac{65,61}{100}$

$\therefore \left(\frac{9}{10}\right)^n = \frac{6.561}{10.000} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n = \left(\frac{9}{10}\right)^4 \therefore n = 4$

Logo, o comprimento do barbante é de 4 metros.

10. a. No momento da medição, temos $t = 0$. Assim:

$N(0) = 2 \cdot (0,5)^0 = 2 \cdot 1 \Rightarrow N(0) = 2$

Logo, no instante da medição, o nível da substância no sangue do atleta era de 2 g/L.

b. Devemos determinar o valor de t para que $N(t) = 0,5$. Assim:

$2 \cdot (0,5)^t = 0,5 \Rightarrow (0,5)^t = 0,25$

$(0,5)^t = (0,5)^2 \Rightarrow t = 2$

Logo, o nível da substância atingirá 0,5 g/L depois de 2 horas da medicação inicial.

c. Para $t = 3$, temos: $N(3) = 2 \cdot (0,5)^3 = 2 \cdot 0,125 = 0,25$

Logo, o nível de substância era de 0,25 g/L.

d. Para que o nível da substância atinja 0,0625 g/L, temos:

$2 \cdot (0,5)^t < 0,0625 \Rightarrow (0,5)^t < 0,03125$

$(0,5)^t < (0,5)^5 \Rightarrow t < 5$

Pela propriedade P3, temos que toda função $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$, é decrescente, logo; $t > 5$.

Concluímos, então, que o atleta deve esperar mais de 5 horas para participar de uma partida oficial de futebol.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 9

1. alternativa **b.**

Transformando os dados em notação científica, temos:

$5.702.400.000.000.000 \text{ km} = 5,7024 \cdot 10^{15}$ km

$300.000 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^5$ km/s

Assim, o tempo, em segundo, necessário para que a luz percorra o trajeto da estrela Alpha Scorpii à Terra é dado por: $\frac{5,7024 \cdot 10^{15}}{3 \cdot 10^5} = 1,9008 \cdot 10^{10}$

Dividindo esse resultado por $8,64 \cdot 10^4$, que é o número de segundos de um dia, obtemos $2,2 \cdot 10^5$

Concluímos, então, que a luz demora $2,2 \cdot 10^5$ dias para percorrer o trajeto da estrela Alpha Scorpii à Terra.

2. alternativa **d**

Primeiramente, temos que obter a lei de associação que expressa a quantidade $f(t)$, em miligrama, do medicamento presente na corrente sanguínea do paciente, em função da medida do tempo t, em hora. Sabemos que, a cada 2 horas, a quantidade do medicamento na corrente sanguínea do paciente reduz-se à metade. Assim, temos:

$f(t) = 800\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Rightarrow f(t) = 800 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$

Fazendo $f(t) = 6,25$ na função obtida, temos:

$6,25 = 800 \cdot 2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow \frac{6,25}{800} = 2^{-\frac{t}{2}}$

$\therefore \frac{1}{128} = 2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{-7} = 2^{-\frac{t}{2}} \therefore -7 = -\frac{t}{2} \Rightarrow t = 14$

3. alternativa **a**

Os pontos $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ e $\left(2, \frac{18}{5}\right)$ pertencem ao gráfico de f; logo:

$\begin{cases} f(0) = \frac{5}{2} \\ f(2) = \frac{18}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \cdot a^0 = \frac{5}{2} \\ k \cdot a^2 = \frac{18}{5} \end{cases} \therefore k = \frac{5}{2}$, e $a = \frac{6}{5}$

Assim, $f(x) = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^x$, e, portanto: $f(3) = \frac{108}{25}$

CAPÍTULO 10 Função logarítmica

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. a. $2^x = 256 \Rightarrow 2^x = 2^8 \Rightarrow x = 8$

b. $7^x = \frac{1}{49} \Rightarrow 7^x = 7^{-2} \Rightarrow x = -2$

c. $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{125}{8} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^3 \Rightarrow x = 3$

d. $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{16}{81} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} \Rightarrow x = -4$

e. $10^x = 10.000 \Rightarrow 10^x = 10^4 \Rightarrow x = 4$

f. $(256)^x = 128 \Rightarrow 2^{8x} = 2^7 \Rightarrow x = \frac{7}{8}$

g. $10^x = 100^{\frac{1}{5}} \Rightarrow 10^x = 10^{\frac{2}{5}} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

h. $0{,}5^x = 0{,}125 \Rightarrow 0{,}5^x = 0{,}5^3 \Rightarrow x = 3$

2. a. $\log_3 8 = \log_3 2^3 = 3 \log_3 2 = 3 \cdot 0{,}63 = 1{,}89$

b. $\log_3 \frac{1}{16} = \log_3 16^{-1} = \log_3 2^{-4} = -4 \cdot \log_3 2 = -4 \cdot 0{,}63 = -2{,}52$

c. $\log_3 \sqrt[3]{4} = \log_3 4^{\frac{1}{3}} = \log_3 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \log_3 2 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}63 = 0{,}42$

d. $9^{\log_3 4} = 3^{2 \log_3 4} = 3^{\log_3 4^2} = 4^2 = 16$

3. $E = \log_2 [\log_3 (\log_2 512)] \Rightarrow E = \log_2 [\log_3 (\log_2 2^9)]$

$\therefore E = \log_2 [\log_3 9] \Rightarrow E = \log_2 [\log_3 3^2]$

$\therefore E = \log_2 2 \Rightarrow E = 1$

4. a. Para $P = 0{,}5$, temos:

$h = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{0{,}5}\right) = 20 \cdot \log 2 \approx 20 \cdot 0{,}3 = 6$

b. Para $P = 0{,}25$, temos:

$h = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{0{,}25}\right) = 20 \cdot \log 4 = 20 \cdot \log 2^2 = 20 \cdot 2 \cdot \log 2 \approx 20 \cdot 2 \cdot 0{,}3 = 12$

c. Como 20.000 m = 20 km, temos, para $h = 20$:

$20 = 20 \cdot \log \left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow \log \left(\frac{1}{p}\right) = 1 \Rightarrow 10^1 = \frac{1}{p} \Rightarrow p = 0{,}1$

5. alternativa **b**

Dados $M = 1.430$, $C = 1.000$ e $i = 10\% = 0{,}1$, temos:

$M = C(1 + i)^n \Rightarrow 1.430 = 1.000(1 + 0{,}1)^n \Rightarrow 1{,}43 = 1{,}1^n \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \log_{1{,}1} 1{,}43$

6. Indicando por x e y as concentrações de íons H^+, em mol/L, nos sucos de limão e de tomate, respectivamente, temos:

$2 = -\log x \Rightarrow x = 10^{-2}$ e $4 = -\log y \Rightarrow y = 10^{-4}$

a. A concentração de íons H^+ é 10^{-2} mol/L.

b. $\frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 10^2 = 100$

Portanto equivale a 100 vezes.

7. alternativa **e**

Para $M_W = 7{,}3$, temos:

$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3} \log (M_0) \Rightarrow \frac{2}{3} \log (M_0) = 18$

$\therefore \log (M_0) = 27 \Rightarrow M_0 = 10^{27}$

9. a. $\log_6 22 = \log_6 (2 \cdot 11) = \log_6 2 + \log_6 11 = 1{,}34 + 0{,}39 = 1{,}73$

b. $\log_6 \frac{2}{11} = \log_6 2 - \log_6 11 = 0{,}39 - 1{,}34 = -0{,}95$

c. $\log_6 5{,}5 = \log_6 \frac{11}{2} = \log_6 11 - \log_6 2 = 1{,}34 - 0{,}39 = 0{,}95$

d. $\log_2 11 = \frac{\log_6 11}{\log_6 2} = \frac{1{,}34}{0{,}39} \approx 3{,}44$

e. $\log_{11} 2 = \frac{\log_6 2}{\log_6 11} = \frac{0{,}39}{1{,}34} \approx 0{,}29$

f. $\log_6 16 = \log_6 2^4 = 4 \cdot \log_6 2 = 4 \cdot 0{,}39 = 1{,}56$

10. $\log 6 = \log \frac{30}{5} = \log 30 - \log 5 = \log (3 \cdot 10) - \log 5 =$

$= \log 3 + \log 10 - \log 5 = 0{,}48 + \log 10 - 0{,}70 =$

$= \log 10 - 0{,}22 = 1 - 0{,}22 = 0{,}78$

12. $x = \log_7 25 \cdot \log_5 7 \Rightarrow x = \frac{\log_5 25}{\log_5 7} \cdot \log_5 7 \Rightarrow x = \log_5 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$

13. alternativa **e**

$x - y = \log_4 7 - \log_{16} 49 = \log_4 7 - \frac{\log_4 49}{\log_4 16} =$

$= \log_4 7 - \frac{\log_4 49}{2} = \log_4 7 - \log_4 \sqrt{49} = 0$

14. alternativa **b**

$\log_2 3 = x \Rightarrow 2^x = 3$

$8^x + 4^{2x-1} = 2^{3x} + 2^{4x-2} = (2^x)^3 + \frac{(2^x)^4}{4} =$

$= 3^3 + \frac{3^4}{4} = \frac{189}{4} = 47{,}25$

15. a. Para $t = 0$, temos:

$m(t) = 0{,}5 + \log(2t + 1) \Rightarrow m(0) = 0{,}5 + \log 1 = 0{,}5$

b. Para $t = 7$, temos:

$= 0{,}5 + \log 15 = 0{,}5 + \log 3 + \log 5$

Adotando $\log 3 = 0{,}48$ e $\log 5 = 0{,}7$, temos:

$m = 0{,}5 + 0{,}48 + 0{,}7 = 1{,}68$

16. A partir do momento atual, a área A destruída pelo incêndio, em hectare, é calculada em função do tempo, em hora, pela equação: $A = 50(1 + 0{,}024)^t$

Para $A = 100$, temos:

$100 = 50(1{,}024)^t \Rightarrow (1{,}024)^t = 2$

$\therefore t = \log_{1{,}024} 2 \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}024}$

$\therefore t = \frac{\log 2}{\log \frac{1.024}{1.000}} = \frac{\log 2}{\log 1.024 - \log 1.000} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 2^{10} - \log 10^3} \Rightarrow t = \frac{\log 2}{10 \cdot \log 2 - 3 \cdot \log 10} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{0{,}301}{10 \cdot 0{,}301 - 3 \cdot 1} \Rightarrow t = \frac{0{,}301}{0{,}01} = 30{,}1$

17. alternativa **d**

Considerando cada unidade de tempo t como um intervalo de 30 min, temos que o tempo t necessário para que a liga atinja 30 °C é dado por:

$30 = 3.000(1 - 0{,}01)^t \Rightarrow$ ou seja, $(0{,}99)^t = 0{,}01$

$\therefore t = \log_{0{,}99} 0{,}01 \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}01}{\log 0{,}99}$

$\therefore t = \frac{\log 10^{-2}}{\log \frac{99}{100}} \Rightarrow t = \frac{\log 10^{-2}}{\log 99 - \log 100}$

$\therefore t = \frac{\log 10^{-2}}{\log (9 \cdot 11) - \log 10^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\log 10^{-2}}{\log 9 + \log 11 - \log 10^2}$

$\therefore t = \frac{\log 10^{-2}}{\log 3^2 + \log 11 - \log 10^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{-2 \cdot \log 10}{2 \cdot \log 3 + \log 11 - 2 \cdot \log 10}$

$\therefore t = \frac{-2 \cdot 1}{2 \cdot 0{,}477 + 1{,}041 - 2 \cdot 1} \Rightarrow t = 400$

Assim, são necessários 400 intervalos de 30 minutos, ou seja, 200 horas.

18. Sabemos que uma amostra de massa m do isótopo Ra-226 se reduz à massa $\frac{m}{2}$ em 1.600 anos. Sendo x a taxa percentual anual de desintegração desse isótopo, temos:

$0{,}5m = m(1-x)^{1.600} \Rightarrow 0{,}5 = (1-x)^{1.600}$

$\therefore \log_{(1-x)} 0{,}5 = 1.600 \Rightarrow \dfrac{\log 0{,}5}{\log (1-x)} = 1.600$

$\therefore \log (1-x) = \dfrac{\log 0{,}5}{1.600}$

$\log (1-x) \approx -0{,}000188 \Rightarrow 1 - x \approx 10^{-0{,}000188} \approx 0{,}000433$

Assim, a taxa anual de desintegração do isótopo é 0,0433%, aproximadamente.

Portanto, o tempo t, em ano, necessário para que 10 g desse isótopo se reduza a 1 g é dado por:

$1 = 10(1 - 0{,}000433)^t \Rightarrow 0{,}1 = (0{,}999567)^t$

$\therefore t = \log_{0{,}999567} 0{,}1 \Rightarrow t \approx 5.316$

Concluímos, então, que o tempo necessário para que 10 g do isótopo Ra-226 se reduza a 1 g é 5.300 anos, aproximadamente.

23. a. Condição de existência: $5x - 6 > 0 \Rightarrow x > \frac{6}{5}$

$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{6}{5} \right\}$

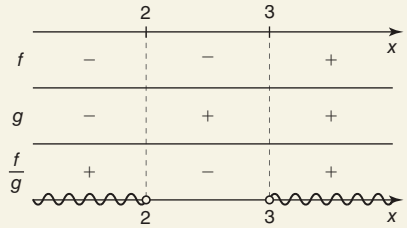
b. Condição de existência: $x^2 - 5x + 6 > 0 \Rightarrow x < 2$ ou $x > 3$

$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

c. Como a base do logaritmo (5) é positiva e diferente de 1, basta impormos a condição sobre o logaritmando:

$\dfrac{2x-6}{x-2} > 0$

Estudando o sinal de $f(x) = 2x - 6$ e $g(x) = x - 2$, temos:



$D(t) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

24. a. Sendo x_1 e x_2 as abscissas dos pontos D e B, respectivamente, temos: $\log_{\frac{1}{2}} x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$ e $\log_{\frac{1}{2}} x_2 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = 2$

Logo: $BC = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Como $AB = 1 - (-1) = 2$, temos:

$$S_{ABCD} = BC \cdot AB = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3$$

b. Sendo x_E a abscissa do ponto E, temos:

$$\log_{\frac{1}{2}} x_E = 0 \Rightarrow x_E = 1$$

$$S_{CDE} = \frac{CD \cdot EF}{2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

c. Sendo $G(2, 0)$, temos que os triângulos AGE e BGE são congruentes (caso LAL) e retângulos.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo AGE, tem-se:

$(EG)^2 + (AG)^2 = (AE)^2 \Rightarrow 1^2 + 1^2 = (AE)^2$

$\therefore AE = \sqrt{2}$

Logo, o perímetro do triângulo ABE é dado por: $2 + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2(1 + \sqrt{2})$.

25. a. $y = \log_3 x$

Permutamos as variáveis x e y: $x = \log_3 y$

Isolamos a variável y: $y = 3^x$

Logo, a inversa de $f(x) = \log_3 x$ é $f^{-1}(x) = 3^x$.

b. $y = \log \sqrt{x+1}$

Permutamos as variáveis x e y: $x = \log \sqrt{y+1}$

Isolamos a variável y: $y = 10^{2x} - 1$

A inversa de

$g(x) = \log \sqrt{x+1}$ é $g^{-1}(x) = 10^{2x} - 1$.

c. $y = \log_2 5 + \log_2 (2x + 1)$

Permutamos as variáveis x e y:

$x = \log_2 5 + \log_2 (2y + 1) \Rightarrow x = \log_2 (10y + 5)$

Isolamos a variável y: $y = \dfrac{2^x - 5}{10}$

A inversa de

$h(x) = \log_2 5 + \log_2 (2x + 1)$ é $h^{-1}(x) = \dfrac{2^x - 5}{10}$.

d. $y = \log_5 2 - \log_5 (x + 1)$

Permutamos as variáveis x e y:

$x = \log_5 2 - \log_5 (y + 1) \Rightarrow x = \log_5 \dfrac{2}{y+1}$

Isolamos a variável y: $y = \dfrac{2}{5^x} - 1$

A inversa de

$p(x) = \log_5 2 - \log_5 (x + 1)$ é $p^{-1}(x) = \dfrac{2}{5^x} - 1$.

26. a. Sendo $A(t)$ a área ocupada pela planta em função do tempo t, temos: $A(t) = 1 \cdot (1 - 0{,}5)^t = 0{,}5^t$

$A(1) = 0{,}5 = a$; $A(2) = 0{,}25 = b$; $A(3) = 0{,}125 = c$; $A(4) = 0{,}0625 = d$

Portanto, $a = 0{,}5$, $b = 0{,}25$, $c = 0{,}125$, e $d = 0{,}0625$.

b. $x = 1(1 - 0{,}5)^t = 0{,}5^t$, e, portanto, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

27. b. $N = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow \dfrac{N}{100} = 2^{\frac{t}{3}} \Rightarrow \log_2 \left(\dfrac{N}{100}\right) = \dfrac{t}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 3 \cdot \log_2 \left(\dfrac{N}{100}\right) \Rightarrow t = \log_2 \left(\dfrac{N}{100}\right)^3$

29. a. Condição de existência:

$5x - 6 > 0 \Rightarrow x > \frac{6}{5}$

Pela definição de logaritmo, temos:

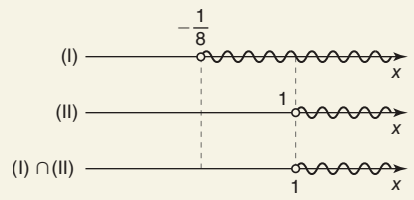
$\log_3 (5x - 6) = 2 \Rightarrow 3^2 = 5x - 6 \Rightarrow x = 3$

Como $x = 3$ satisfaz a condição de existência, temos:

$S = \{3\}$.

b. Condição de existência:

$$\begin{cases} 8x + 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{8} & \text{(I)} \\ x > 1 & \text{(II)} \end{cases}$$



Logo, $x > 1$.

ILUSTRAÇÕES: FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução da equação:

$\log_3 (8x + 1) - \log_3 (x - 1) = 2 \Rightarrow \log_3 \frac{(8x + 1)}{(x - 1)} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{8x + 1}{x - 1} = 3^2$

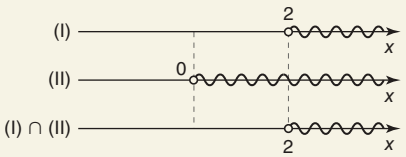
$8x + 1 = 9(x - 1) \Rightarrow x = 10$

Como $x = 10$ satisfaz a condição de existência, temos: $S = \{10\}$.

c. Condição de existência:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \quad \text{(I)} \\ x > 0 \quad \text{(II)} \\ x > 0 \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Como (II) é igual a (III), representaremos apenas (II) na intersecção.



FAUSTINO/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, $x > 2$.

Resolução da equação:

$\log_2 (x - 2) + 2 \log_4 x = 3 \log_8 (2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 (x - 2) + 2 \cdot \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\log_2 (2x)}{\log_2 8}\right) \Rightarrow$

$\log_2 (x - 2) + \log_2 x = \log_2 (2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 [x(x - 2)] = \log_2 (2x) \Rightarrow x^2 - 2x = 2x \Rightarrow x = 0$ ou $x = 4$

Como apenas $x = 4$ satisfaz a condição de existência, temos: $S = \{4\}$.

30. Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x + 50 > 0 \\ \frac{x + 40}{2} > 0 \\ x \geqslant 0 \text{ (pois } x \text{ representa o número de semanas)} \end{cases}$$

Logo, $x \geqslant 0$. $f(x) = g(x)$

$\log_3 (2x + 50) = 1 + \log_3 \left(\frac{x + 40}{2}\right)$

$\log_3 (2x + 50) = \log_3 3 + \log_3 \left(\frac{x + 40}{2}\right)$

$\log_3 (2x + 50) = \log_3 \frac{3(x + 40)}{2}$

$2x + 50 = \frac{3(x + 40)}{2}$

$\Rightarrow x = 20$

Como esse valor de x satisfaz a condição de existência, concluímos que as duas populações atingirão o mesmo número de indivíduos em 20 semanas.

31. alternativa **d**

Aplicando a fórmula do montante acumulado à taxa constante de juro, obtemos:

$$\begin{cases} M_A = 3.200 \cdot (1,01)^t \\ M_B = 1.600 \cdot (1,02)^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \log_{1,01} \frac{M_A}{3.200} \\ t = \log_{1,02} \frac{M_B}{1.600} \end{cases}$$

Assim:

$\log_{1,01} \frac{M_A}{3.200} = \log_{1,02} \frac{M_B}{1.600} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{1,01} \frac{M_A}{3.200} = \frac{\log_{1,01} \frac{M_B}{1.600}}{\log_{1,01} 1,02}$

$\therefore \log_{1,01} \frac{M_A}{3.200} = \frac{\log_{1,01} \frac{M_B}{1.600}}{2} \Rightarrow \log_{1,01} \frac{M_A}{3.200} =$

$= \log_{1,01} \left(\frac{M_B}{1.600}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore \frac{M_A}{3.200} = \sqrt{\frac{M_B}{1.600}} \Rightarrow M_A = 80\sqrt{M_B}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

1. a. A partir do início do estudo, a área desmatada A, em hectare, em função do tempo t, em década, é dada por: $A = 10.000 \cdot 2^t$.

b. $90.000 = 10.000 \cdot 2^t \Rightarrow 2^t = 9$

$\therefore t = \log_2 9 \Rightarrow \log_2 3^2 = 2 \cdot \log_2 3 = 2 \cdot 1,58$ $t = 3,16$

Como o valor de t está expresso em década, concluímos que se passaram 31,6 anos para que a área desmatada atingisse 90.000 ha.

2. Para uma magnitude aparente de 0,2, ou seja, $m = 0,2$, e magnitude absoluta de −6,8, ou seja, $M = -6,8$, temos:

$-6,8 = 0,2 + 5 \log_3 (3d^{-0,48}) \Rightarrow -\frac{7}{5} = \log_3 3 + \log_3 d^{-0,48}$

$\therefore -\frac{7}{5} - 1 = -0,48 \log_3 d \Rightarrow 0,48 \log_3 d = \frac{12}{5}$

$\therefore \log_3 d = \frac{12}{5} \cdot \frac{100}{48} \Rightarrow \log_3 d = 5$

$\therefore d = 3^5 = 243$

Logo, a distância de Rigel ao planeta Terra é de 243 *parsecs*. Em quilômetro, temos:

$d = 243 \cdot 3 \cdot 10^{13} = 729 \cdot 10^{13} = 7,29 \cdot 10^{15}$

3. a. $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 3 \cdot 0,3 = 0,9$

b. Substituímos $m(t)$ por $\frac{m_0}{8}$, obtendo:

$\frac{m_0}{8} = m_0 \cdot 10^{-\frac{t}{70}} \Rightarrow 2^{-3} = 10^{-\frac{t}{70}}$

$\therefore \log 2^{-3} = \log 10^{-\frac{t}{70}} \Rightarrow -\log 8 = -\frac{t}{70} \cdot \log 10$

$\therefore -0,9 = -\frac{t}{70} \Rightarrow t = 63$

Logo, demorarão 63 anos para o elemento se decompor a um oitavo de sua massa inicial.

4. alternativa **e**

Como a meia-vida do césio-137 é 30 anos, temos:

$\frac{A}{2} = A \cdot (2,7)^{30k} \Rightarrow (2,7)^{30k} = \frac{1}{2}$

$\therefore [(2,7)^k]^{30} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2,7^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}$ (I)

Para que a massa A se reduza a $\frac{A}{10}$, devemos ter:

$\frac{A}{10} = A \cdot (2,7)^{kt} \Rightarrow \frac{1}{10} = [(2,7)^k]^t$ (II)

Substituindo (I) em (II), chegamos a:

$\frac{1}{10} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{30}}\right]^t \Rightarrow \log \frac{1}{10} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$

$\therefore \log \frac{1}{10} = \log 2^{-\frac{t}{30}} \Rightarrow \log \frac{1}{10} = \left(-\frac{t}{30}\right) \log 2$

$\therefore -1 = \left(-\frac{t}{30}\right) \cdot 0{,}3 \Rightarrow t = 100$

5. 1 *gigabyte* equivale a 10^9 *bytes*

30 *gigabytes* $= 30 \cdot 10^9$ *bytes*

$30 \cdot 10^9 = p \cdot 2^{30} \Rightarrow p = \frac{30 \cdot 10^9}{2^{30}}$

$\therefore \log p = \log \left(\frac{30 \cdot 10^9}{2^{30}}\right)$

$\therefore \log p = \log 30 + 9 \log 10 - 30 \log 2$

$\therefore \log p = \log 3 + \log 10 + 9 \log 10 - 30 \log 2$

$\log p = 0{,}477 + 1 + 9 - 9{,}03 \Rightarrow \log p = 1{,}447$

$\therefore \log p = 1 + 0{,}477$

Pela tabela, 0,477, $= \log 2{,}8$ portanto:

$\log p = \log 10 + \log 2{,}8 \Rightarrow \log p = \log (10 \cdot 2{,}8)$

$\therefore p = 28$

6. a. A partir do momento do comunicado à Capitania dos Portos, a área A da mancha de óleo, em quilômetro quadrado, em função do tempo t, em hora, é dada por:

$A = 10 \cdot (1 + 0{,}08)^t$, ou seja, $A = 10 \cdot (1{,}08)^t$

Para $A = 12$, temos:

$12 = 10 \cdot (1{,}08)^t \Rightarrow 1{,}2 = (1{,}08)^t$

$\therefore t = \log_{1{,}08} 1{,}2 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}2}{\log 1{,}08}$

$\therefore t = \frac{\log \frac{12}{10}}{\log \frac{108}{100}} = \frac{\log 12 - \log 10}{\log 108 - \log 100}$

$\therefore t = \frac{\log (2^2 \cdot 3) - \log 10}{\log (2^2 \cdot 3^3) - \log 100} =$

$= \frac{\log 2^2 + \log 3 - \log 10}{\log 2^2 + \log 3^3 - \log 100}$

$\therefore t = \frac{2 \log 2 + \log 3 - \log 10}{2 \log 2 + 3 \log 3 - \log 100} =$

$= \frac{2 \cdot 0{,}30 + 0{,}48 - 1}{2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}48 - 2} \; t = 2$

7. a. $10^{0{,}3} = 2 \Rightarrow \log 2 = 0{,}3$

$IDH_R = \frac{\log 16.000 - 2}{2(1 + \log 2)} = \frac{\log (16 \cdot 1.000) - 2}{2(1 + \log 2)}$

$\therefore IDH_R = \frac{\log 16 + \log 1.000 - 2}{2(1 + \log 2)} =$

$= \frac{\log 2^4 + \log 10^3 - 2}{2(1 + \log 2)}$

$\therefore IDH_R = \frac{4 \log 2 + 3 \log 10 - 2}{2(1 + \log 2)} =$

$= \frac{4 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 1 - 2}{2(1 + 0{,}3)} \approx 0{,}846$

b. $0{,}500 = \frac{\log (PIB_{pc}) - 2}{2(1 + \log 2)} \Rightarrow 0{,}500 = \frac{\log (PIB_{pc}) - 2}{2(1 + 0{,}3)}$

$\therefore 0{,}500 = \frac{\log (PIB_{pc}) - 2}{2{,}6} \Rightarrow 1{,}3 = \log (PIB_{pc}) - 2$

$\therefore 3{,}3 = \log (PIB_{pc}) \Rightarrow 10^{3{,}3} = PIB_{pc}$

$\therefore 10^3 \cdot 10^{0{,}3} = PIB_{pc} \Rightarrow 1.000 \cdot 2 = PIB_{pc}$

$\therefore PIB_{pc} = 2.000$

Logo, o PIB_{pc} é 2.000 dólares.

c. Podemos justificar a afirmação mostrando que a função $f(x) = \frac{\log (x) - 2}{2(1 + \log 2)}$ é crescente.

Como a base do logaritmo é maior que 1, temos que: $x_2 > x_1 \Rightarrow \log x_2 > \log x_1$, para quaisquer números reais positivos x_1 e x_2.

Subtraindo 2 de ambos os membros, obtemos: $\log (x_2) - 2 > \log (x_1) - 2$.

Dividindo ambos os membros por $2(1 + \log 2)$ chegamos a:

$\frac{\log (x_2) - 2}{2(1 + \log 2)} > \frac{\log (x_1) - 2}{2(1 + \log 2)}$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$

Desse modo, provamos que, para quaisquer números positivos x_2 e x_1, temos: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

Logo, a função f é crescente.

Assim, quanto maior o PIB_{pc} na equação $IDH_R = \frac{\log (PIB_{pc}) - 2}{2(1 + \log 2)}$, maior será o IDH_R.

MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS

2. O tempo t, em ano, para que uma massa de medida m de C_{14} seja reduzida a $0{,}5m$ é dado por:

$0{,}5m = m(1 - 0{,}0001209)^t$

de onde obtemos:

$0{,}5 = (0{,}9998791)^t \Rightarrow t = \log_{0{,}9998791} 0{,}5$

$\therefore t \approx 5.732$

Logo, a meia-vida do C_{14} é de 5.700 anos, aproximadamente.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU NO CAPÍTULO 10

1. alternativa **a**

$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \cdot \log_2 2 = 5 \cdot 1 = 5$

$\log_3 \sqrt[6]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \cdot \log_3 3 = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

$\log \frac{1}{1.000} = \log 10^{-3} = -3 \cdot \log 10 = -3 \cdot 1 = -3$

$\log_{16} 8^{12} = 12 \cdot \log_{16} 8 = 12 \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 16} = 12 \cdot \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} =$

$= 12 \cdot \frac{3 \cdot \log_2 2}{4 \cdot \log_2 2} = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9$

$\log_{\frac{1}{7}} 49 = \log_{\frac{1}{7}} 7^2 = \log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = -2 \cdot \log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{7} = -2 \cdot 1 = -2$

2. a. $\log_6 44 = \log_6 (2 \cdot 2 \cdot 11) = \log_6 2 + \log_6 2 + \log_6 11 =$

$= 0{,}39 + 0{,}39 + 1{,}34 = 2{,}12$

b. $\log_6 \frac{11}{2} = \log_6 11 - \log_6 2 = 1{,}34 - 0{,}39 = 0{,}95$

c. $\log_2 11 = \frac{\log_6 11}{\log_6 2} = \frac{1{,}34}{0{,}39} \cong 3{,}44$

3. alternativa **b**

Aplicando a fórmula do montante acumulado à taxa constante de juro, obtemos:

$1.430 = 1.000 \cdot (1 + 0{,}1)^t \implies 1{,}43 = 1{,}1^t$

$\log 1{,}1^t = \log 1{,}43 \Rightarrow t = \frac{\log 1{,}43}{\log 1{,}1} \approx \frac{0{,}155}{0{,}041} \approx 3{,}78$

4. alternativa **b**

$20 = 90 \cdot 2^{-6t} + 30 \cdot 2^{-3t}$

$20 = 90 \cdot \left(2^{-3t}\right)^2 + 30 \cdot 2^{-3t}$

$2 = 9 \cdot \left(2^{-3t}\right)^2 + 3 \cdot 2^{-3t}$

Fazendo a mudança de variável $2^{-3t} = x$, temos:

$2 = 9 \cdot x^2 + 3 \cdot x \Rightarrow 9x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ ou $x = -\frac{2}{3}$

Para $x = \frac{1}{3}$, temos:

$2^{-3t} = \frac{1}{3} \Rightarrow -3t = \log_2 \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow t = -\frac{1}{3}\log_2 \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\log_2 \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\log_2 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{1}{3} \cdot \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0{,}48}{0{,}3} \Rightarrow t = \frac{8}{15}$

Para $x = -\frac{2}{3}$, $2^{-3t} = -\frac{2}{3}$ não tem solução.

Concluímos que $t = \frac{8}{15}$ anos.

Portanto são necessários, aproximadamente, 195 dias para que a concentração seja reduzida a 20 indivíduos por litro.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

BICUDO, M. A. V. (org.). **Educação matemática**. 2. ed. São Paulo: Centauro, 2005.

Traz artigos relacionados a pesquisas realizadas em educação matemática, com foco em metodologia e ensino.

BLACK DOG INSTITUTE. Structured Problem Solving. Disponível em: https://www.blackdoginstitute.org.au/wp-content/uploads/2020/04/16-structured-problem-solving.pdf. Acesso em: 22 set. 2024.

Roteiro para solução estruturada de problemas.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica**. 2017. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

Pesquisa sobre a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica exclusivamente por meio de atividades sem o uso de computadores.

BRASIL. **Lei nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023**. Diário Oficial da União: seção 1, Brasília, DF, 12 jan. 2023.

Lei que institui a Política Nacional de Educação Digital.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília, DF: MEC, 2018.

Documento que regulamenta o ensino nas escolas brasileiras públicas e particulares de Educação Infantil, Ensinos Fundamental e Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. Política Nacional de Ensino Médio. **Gov.br.** Brasília, DF, 2024. Disponível em: https://www.gov.br/mec/pt-br/areas-de-atuacao/eb/politica-nacional-ensino-medio. Acesso em: 31 ago. 2024.

Lei que regulamenta a Política Nacional de Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019.

Guia com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

CRUZ, L. F. C. Bases neuroanatômicas e neurofisiológicas do processo ensino e aprendizagem. *In*: **III Curso de Atualização de Professores da Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio. A Neurociência e a Educação**: Como nosso cérebro aprende?. Ouro Preto, 2016.

Documento com artigos sobre a neurociência e a educação.

CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

O livro traz uma revisão da literatura sobre a temática no Brasil e no mundo, discutindo-as com base em diferentes perspectivas.

DENARDI, V. B. Teoria dos registros e representação semiótica: contribuições para a formação de professores de matemática. *In*: XXI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2017, Pelotas, RS. **Anais do XXI EBRAPEM**. Pelotas: Universidade Federal de Pelotas, 2017.

Partes de uma pesquisa que tem como objetivo investigar as contribuições da semiótica para a compreensão de conceitos matemáticos necessários à formação de professores de matemática.

HOFFMANN, J. **Avaliar para promover**: as setas do caminho. Porto Alegre: Mediação, 2005.

O livro apresenta os cinco princípios essenciais da avaliação mediadora.

ITAÚ EDUCAÇÃO E TRABALHO (org.). **O Futuro do mundo do trabalho para as juventudes Brasileiras**. São Paulo: Itaú educação e trabalho, 2023.

A pesquisa traça um perfil de jovens entre 14 e 29 anos sobre a inserção educacional e laboral desse grupo.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 2000.

O livro apresenta um panorama de contextos e abordagens relacionados à avaliação da aprendizagem.

MONTEIRO, A.; POMPEU JÚNIOR, G. **A Matemática e os temas transversais**. São Paulo: Moderna, 2003.

A obra questiona alguns conceitos relacionados aos temas transversais e à função que a Matemática exerce nesse mecanismo.

MORAN, J. M.; MASSETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 12. ed. Campinas: Papirus, 2006.

A obra aborda os problemas do ensino e da educação, além de discutir o uso da tecnologia como mediação pedagógica.

NOGUEIRA, N. R. **Pedagogia dos projetos**: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências. 7. ed. São Paulo: Érica, 2010.

Nessa obra a autora discute questões conceituais, procedimentais e atitudinais na dinâmica de trabalho com projetos.

ORGANIZAÇÃO das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura. **Violência escolar e *bullying***: relatório sobre a situação mundial. Brasília, DF: UNESCO, 2019.

Relatório apresentado no Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *bullying*: das evidências à ação, Seul, República da Coreia, de 17 a 19 de janeiro de 2017.

PITANGA, G. *et al. Bullying* e violência escolar: suas consequências e como combatê-las. *In*: **Blog #tmjUNICEF**. Brasília, DF: 18 jul. 2023. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/blog/bullying-e-violencia-escolar. Acesso em: 22 set. 2024.

Texto sobre *bullying* e violência escolar apresentando suas consequências e dicas para serem combatidos.

SILVA, M. R. G. da. Considerações sobre o trabalho em grupo na aula de Matemática. **Mimesis**, Bauru, v. 19, n. 2, 1998.

Artigo sobre a aprendizagem matemática por meio da organização dos estudantes em grupos.

ISBN 978-85-16-13980-3

