MANUAL DO PROFESSOR

SÃO PAULO EM AÇÃO

MATEMÁTICA

3

editora ática

MANUAL DO PROFESSOR

SÃO PAULO EM AÇÃO

MATEMÁTICA

3

editora ática

editora ática

Direção executiva de negócio e editorial: Flavia Alves Bravin
Direção de negócio: Volnei Korzenieski
Direção editorial: Lidiane Vivaldini Olo
Gerência de conteúdo: Julio Cesar Augustus de Paula Santos
Edição: Silvana Alves (coord.), Valéria Elvira Prete
Produção editorial: Renata Galdino
Revisão: Saberes Editorial
Arte: Elen Coppini Camioto (coord.), Patricia Mayumi Ishihara, Glauber Benevenuto (ed. de arte)
Digital: Daniela Teves Nardi (ger.), Rafael Pereira De Paula Freitas (coord. produção multimídia), Daniella dos Santos Di Nubila (coord. produção digital), Rogerio Fabio Alves (coord. conteúdo digital e publicação), Mailton Galdino Dias (produtos)
Cartografia: Fernanda Costa da Silva (ger.), Eric Fuzii (coord.), Robson Rosendo da Rocha
Design: Elen Coppini Camioto (coord.), Tatiane Porusselli (capa e projeto gráfico miolo), Ana Carolina Orsolin (Manual do Professor), Danielle Cavalcante (assist.)
Licenciamentos: Flávio Matuguma
Licenciamento e iconografia: Roberta Bento (ger.), Iron Mantovanello (coord.), Claudia Balista, Douglas Cometti, Jad Silva, Mariana Valeiro, Paula Squaiella, Roberta Freire, Thaisi Albarracin Lima (pesquisa e licenciamento), Fernanda Crevin (tratamento de imagens), Daniel Scucuglia, Liliane Rodrigues, Raísa Maris Reina, Sabrina Regina de Marinho (analista de licenciamento)
Pré-impressão: Fernanda Costa da Silva (ger.), Alessandro de Oliveira Queiroz, Camilla Feliz Cianelli Chaves, Debora Fernandes, Fabio Roldan, Fernanda de Oliveira, Lucas Meireles dos Santos, Valmir da Silva Santos

Alameda Santos, 960, 4º andar, setor 1
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
atendimento@aticascipione.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

São Paulo em ação : Matemática : 3 / obra coletiva. -- 1. ed. -- São Paulo : Ática, 2025.

Suplementado pelo manual do professor
ISBN 978-65-267-0543-8 - aluno
ISBN 978-65-267-0544-5 - professor

1. Matemática

25-4780 CDD 510

Angélica Ilacqua - CRB-8/7057

2025
Código da obra CL 722660
CAE 924223 (AL) / 924224 (PR)
1ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.
Organizadora: Editora Ática S.A.
Obra coletiva concebida pela Editora Ática S.A.
Editor responsável: Júlio César Augustus de Paula Santos

Impressão e acabamento

Olá, estudante!

Estudar no Ensino Médio é desafiador, não apenas pelas dificuldades que podem surgir com as matérias e os conceitos, mas também pelos problemas que você precisa enfrentar fora da sala de aula.

Em meio a essas adversidades, você pode reinventar sua realidade e buscar soluções inovadoras para os problemas educacionais por meio de ferramentas adequadas para uma educação mais inclusiva e igualitária.

Esta coleção se propõe a ser uma dessas ferramentas, pois visa ampliar sua experiência, contribuindo para a construção dos saberes e conhecimentos dos estudantes.

Desejamos que você tenha sucesso nesta jornada!

Conte conosco!

Conheça seu livro

Este livro apresenta situações que permitem desenvolver seus conhecimentos de um jeito fácil e eficiente! Veja como ele foi organizado e aproveite ao máximo seus estudos!

_JORNADA

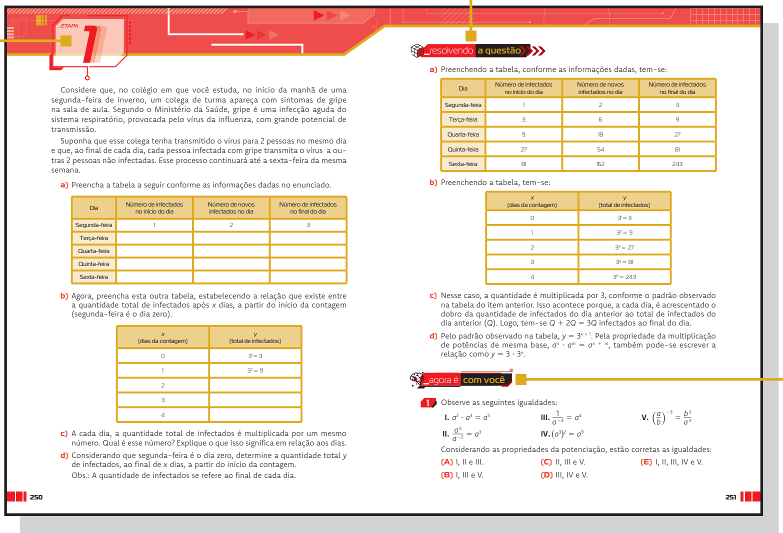
Este livro está organizado em jornadas desafiadoras! A abertura da jornada apresenta um tema do cotidiano que se relaciona ao conteúdo que você vai estudar.

_ETAPA 1

O primeiro desafio é enfrentar uma situação-problema para conhecer ou relembrar conteúdos importantes para toda a jornada.

_resolvendo a questão

Antes de pôr a mão na massa, veja o exemplo da situação-problema para depois usá-lo como referência.

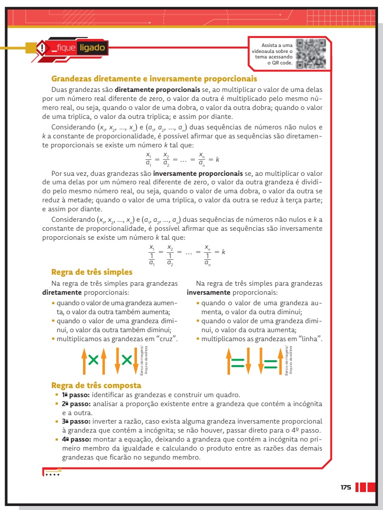


_agora é com você

Mãos à obra! Primeira seção de atividades da jornada, para revisitar conceitos mais elementares.

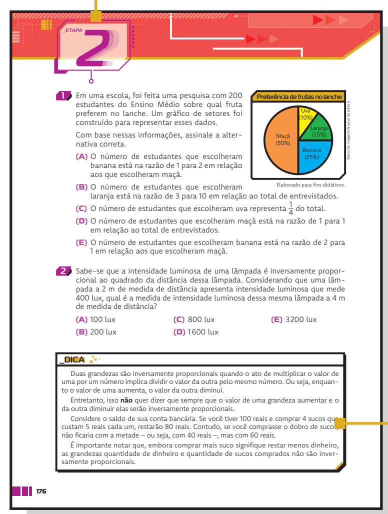
_fique ligado

Para ativar seus conhecimentos e avançar nas jornadas, não perca nenhum conceito importante!



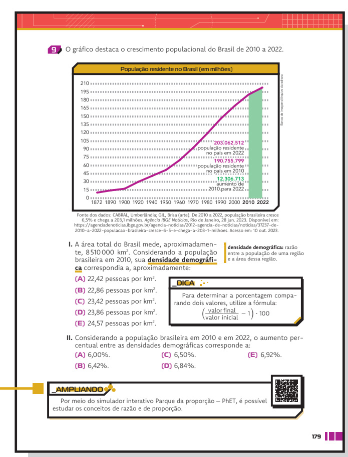
_ETAPA 2

Depois de retomar seus conhecimentos, novos desafios são apresentados em atividades de aprofundamento em formato de múltipla escolha!



_DICA

Sugestões que aparecem ao longo da jornada para auxiliá-lo nas questões.

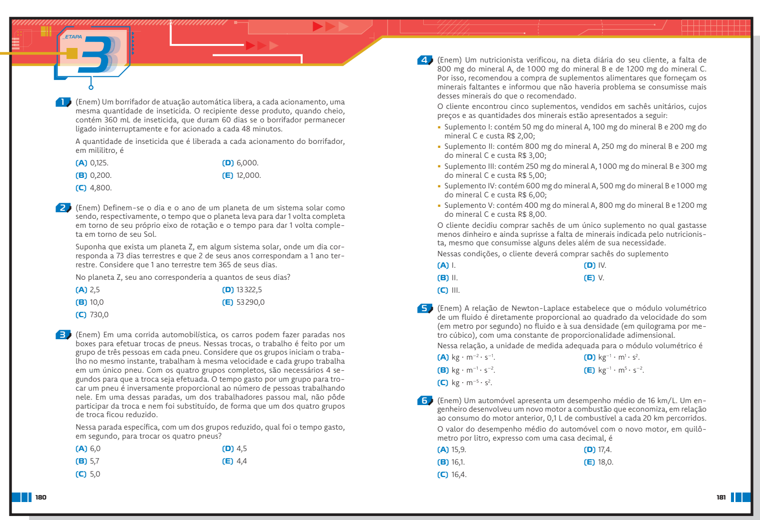


_AMPLIANDO

Você pode expandir sua jornada por meio de dicas de livros, vídeos, séries, artigos e muito mais!

_ETAPA 3

Aplique os conhecimentos desenvolvidos na jornada em questões do Enem e de vestibulares, que podem ser de múltipla escolha ou discursivas!



Sumário

JORNADA 1

Medidas e notação científica

Rolaks/Shutterstock

Computadores típicos da década de 1990 e início dos anos 2000. Nessa época, a medida de velocidade de transmissão de dados era muito baixa.

Quando a internet começou a se popularizar no Brasil, entre o fim da década de 1990 e o início dos anos 2000, era necessário ter uma linha telefônica disponível e uma assinatura com um “provedor”. A cobrança pelo uso era proporcional ao tempo que se passava *on-line*, e o valor da fatura mensal do telefone poderia ser consideravelmente alto. Para economizar, as pessoas acessavam a internet em horários específicos: de 0 h às 6 h em dias úteis e na maior parte do fim de semana.

Não existiam serviços de *streaming*. Para consumir mídias, era necessário baixar músicas, filmes, programas, etc. Às vezes, o tempo de *download* ultrapassava horas e até dias, mesmo para arquivos pequenos. Essa era a função mais importante da internet: a transferência de dados. E, até hoje, medimos a velocidade em que as transferências ocorrem, ou seja, a quantidade de dados transferida em determinado intervalo de tempo.

A unidade de medida básica de capacidade de armazenamento de dados é o *byte*; 1 *byte* (B) equivale a 8 *bits* (o *bit* é o dígito binário 0 ou 1). Os múltiplos do *byte* são: 1 *kilobyte* (kB) = 1024 B; 1 *megabyte* (MB) = = 1024 KB; 1 *gigabyte* (GB) = 1024 MB; e continua com *terabyte*, *petabyte*, *exabyte*, etc. A velocidade de transmissão de dados é baseada no *bit* (b), por exemplo, 1 Mbps ou Mb/s (*megabit* por segundo) é capaz de transferir 1 048 576 *bits* por segundo.

1. Antigamente, era comum baixar filmes e músicas em computadores para assistir e ouvir depois. Hoje, esse hábito de consumo mudou. Como o aumento da medida de velocidade da internet impactou esse hábito?

2. Em uma conversa informal, Pedro afirma que a internet dele “tem 1 giga”, enquanto Marina diz que o celular dela “tem 256 gigas”. Explique, de maneira mais específica, os conceitos de medida de capacidade de armazenamento e de velocidade de transmissão que foram usados na conversa.

3. Por que a qualidade (resolução) de um vídeo em *streaming* cai se a conexão com a internet oscilar muito ou não estiver muito boa naquele momento?

Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor.**

_ETAPA

1

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

As distâncias envolvidas na Astronomia (estudo dos astros) são tão imensas que foi necessário determinar uma medida de distância própria chamada **ano-luz**. Em 2022, por meio do telescópio espacial Hubble, da Nasa, foi detectada Earendel, a estrela mais distante já observada, que está a, aproximadamente, 12,9 bilhões de anos-luz da Terra.


Johns Hopkins University/NASA, ESA, CSA, D. Coe

A estrela Earendel, também conhecida como WHL0137-LS.

ano-luz: distância que a luz percorre durante um ano terrestre no vácuo. 1 ano-luz é igual a, aproximadamente, 9 461 000 000 000 km.

Convertendo essa distância para quilômetro, teríamos:

122 046 900 000 000 000 000 000 km

Não é prático trabalhar com números desse tamanho. Até em anos-luz eles ficam muito extensos. Então, utilizamos a notação científica, como $a \cdot 10^n$:

- $1 \leqslant a < 10$;
- n é um número inteiro;
- por exemplo, 1 ano-luz corresponde a $9{,}461 \cdot 10^{12}$ km;
- para cada casa decimal avançada para a direita (que acontece quando o número é multiplicado por 10), o expoente da potência de 10 diminui em 1 unidade.

Sabendo dessas informações, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Crie uma tabela que relacione mil, milhão, bilhão e trilhão com suas respectivas potências de 10.

b) Determine, em anos-luz, a medida da distância de Earendel até a Terra utilizando notação científica.

c) Determine, em km, a medida da distância de Earendel até a Terra utilizando notação científica.

d) A notação científica é útil para números muito grandes. Ela também pode ser útil para trabalhar com números muito pequenos? Explique.

_resolvendo a questão

a) A ideia é associar os valores a potências de 10, então:

1 mil = 1000	10^3
1 milhão = 1 000 000	10^6
1 bilhão = 1 000 000 000	10^9
1 trilhão = 1 000 000 000 000	10^{12}

b) A medida da distância é de 12,9 bilhões de anos-luz. Usando a relação da tabela, pode-se escrever $12{,}9 \cdot 10^9$.

Em notação científica, temos $1{,}29 \cdot 10^{10}$, pois é necessário indicar um número entre 1 e 10 e, assim, retroceder 1 casa decimal com a vírgula; portanto, aumentar em 1 unidade o expoente da potência de 10.

c) Devem-se multiplicar os números decimais e, para multiplicar as potências de 10, é preciso manter a base e somar os expoentes.

$$9{,}461 \cdot 10^{12} \cdot 1{,}29 \cdot 10^{10} = 12{,}20469 \cdot 10^{22}$$

Transformando para notação científica:

$$1{,}220469 \cdot 10^{23} \text{ km}$$

d) É possível ter a representação de números pequenos por notação científica com um raciocínio análogo, já que $10^{-2} = 0{,}01$. Assim, números menores do que 1 podem ser indicados por meio de potências de 10 com expoente negativo.

_agora é com você

1 Para fazer uma maquete, um estudante deve ampliar, em 10 bilhões de vezes, um átomo que mede cerca de 0,0000001 mm de diâmetro. A medida do diâmetro da maquete será:

(A) 100 mm.

(B) 1 m.

(C) 1000 cm.

(D) 10 m.

(E) 100 mm.

Alternativa **B**.

2 Em determinado momento, a medida da distância entre a Terra e Plutão é igual a 0,00054396 ano-luz. Sabendo que 1 ano-luz equivale a 9,46 trilhões de quilômetros, a medida da distância entre o planeta Terra e o planeta-anão é, aproximadamente:

(A) 5,1 trilhões de km.

(B) $5{,}1 \cdot 10^{10}$ km.

(C) 51 bilhões de km.

(D) 0,51 bilhões de km.

(E) $5{,}1 \cdot 10^9$ km.

Alternativa **E**.

3 Uma caixa tem as seguintes medidas: 126,40 cm de comprimento, 852,021 mm de largura e 0,002340 hm de altura.

A quantidade de algarismos significativos nesses números são, respectivamente:

(A) 4, 5 e 3.

(B) 5, 6 e 4.

(C) 5, 6 e 7.

(D) 3, 3 e 1.

(E) 2, 3 e 6.

Alternativa **B**.

4 Observe o preço de dois tipos de combustível em um posto. Os valores correspondem a 1 litro do produto.

Tipo de combustível	Preço (em R$)
Etanol comum	4,196
Gasolina comum	5,598

Até 2022, o preço dos combustíveis era, por lei, divulgado com 3 dígitos após a vírgula. Segundo a legislação, o consumidor deveria pagar somente o valor descrito até o segundo dígito após a vírgula, ou seja, excluindo o:

(A) primeiro algarismo significativo.

(B) terceiro algarismo significativo.

(C) algarismo duvidoso.

(D) terceiro algarismo duvidoso.

(E) quarto algarismo duvidoso.

Alternativa **C**.

5 Assinale a alternativa que contém o número com maior quantidade de algarismos significativos.

(A) 0,0001234

(B) 12,341000

(C) 1234 099

(D) 0,0123456

(E) 1,230019

Alternativa **B**.

6 A velocidade da luz no vácuo é constante e igual a 299 792 458 m/s. No entanto, ao se propagar em outros meios, ela sofre redução. Na água, por exemplo, a 20 °C, estima-se que a velocidade da luz mede 225 407 863 m/s.

Transforme a medida da velocidade da luz na água, a 20 °C, em notação científica.

(A) $225{,}407863 \cdot 10^{6}$ m/s

(B) $2{,}99702547 \cdot 10^{8}$ m/s

(C) $225 \cdot 10^{6}$ m/s

(D) $2{,}25407863 \cdot 10^{8}$ m/s

(E) $22{,}5407863 \cdot 10^{7}$ m/s

Alternativa **D.**

7 Uma empresa de biotecnologia está desenvolvendo um novo medicamento e precisa determinar a dose exata que será administrada em cada teste.

Atualmente, a empresa tem apenas 0,0001545 g do composto ativo para realizar 150 mil testes. Quantas gramas do composto ativo será utilizado em cada teste?

(A) $103 \cdot 10^{11}$ g

(B) $10{,}3 \cdot 10^{-11}$ g

(C) $1{,}03 \cdot 10^{-11}$ g

(D) $103 \cdot 10^{-11}$ g

(E) $10{,}3 \cdot 10^{11}$ g

Alternativa **D.**

8 O nome da empresa Google foi inspirado em um número chamado *googol*, que é o numeral 1 seguido de 100 zeros, isto é, 10^{100}.

Diversos estudos estimam que a quantidade de átomos no Universo seja aproximadamente 10^{80}. Se o *googol* é N vezes o número de átomos do Universo, N é igual a:

(A) 20.

(B) 1,25.

(C) $10^{1,25}$.

(D) 1^{20}.

(E) 10^{20}.

Alternativa **E.**

9 Faça os cálculos necessários e determine o resultado da expressão a seguir.

$$\frac{2{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{12}}{0{,}000025}$$

(A) $2 \cdot 10^{20}$

(B) $2 \cdot 10^{13}$

(C) $2 \cdot 10^{10}$

(D) 2

(E) $2 \cdot 10^{-25}$

Alternativa **C.**

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Unidades de medida, múltiplos e submúltiplos

Unidades de medida são padrões convencionais usados para quantificar diversas grandezas, por exemplo, comprimento, área, volume e massa. Grande parte do mundo utiliza as unidades estabelecidas pelo Sistema Internacional de Unidades (SI), que se baseia no sistema métrico decimal.

Grandeza	Unidade-padrão	Múltiplos	Submúltiplos	Variações
Comprimento	metro (m)	quilômetro (km) hectômetro (hm) decâmetro (dam)	decímetro (dm) centímetro (cm) milímetro (mm)	1 milha (mi) ≃ 1609 m 1 jarda (yd) = 0,9144 m 1 pé (ft) = 0,3048 m 1 polegada (in) = 0,0254 m
Área	metro quadrado (m^2)	quilômetro quadrado (km^2) hectômetro quadrado (hm^2) decâmetro quadrado (dam^2)	decímetro quadrado (dm^2) centímetro quadrado (cm^2) milímetro quadrado (mm^2)	1 are (a) = 10^2 m^2 1 hectare (ha) = 10^4 m^2
Volume	metro cúbico (m^3)	quilômetro cúbico (km^3) hectômetro cúbico (hm^3) decâmetro cúbico (dam^3)	decímetro cúbico (dm^3) centímetro cúbico (cm^3) milímetro cúbico (mm^3)	1 litro (L) = 10^{-3} m^3 1 galão (gal) ≃ 3,7864 L
Massa	quilograma (kg)	tonelada (t) quintal (q)	hectograma (hg) decagrama (dag) grama (g) decigrama (dg) centigrama (cg) miligrama (mg)	1 onça (oz) = 28,3495 g

Os prefixos do SI, empregados antes de uma unidade de medida, têm relação com a notação científica, uma vez que expressam potências de 10.

Múltiplo	Prefixo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	quilo	k
10^2	hecto	h
10^1	deca	da

Submúltiplo	Prefixo	Símbolo
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Capacidade de armazenamento digital

Embora os prefixos do SI sejam associados a potências de 10, as grandezas relacionadas ao armazenamento de dados geralmente são organizadas em uma escala de potências de 2 denominada **binária**, sendo 1 *bit* (b) a menor quantidade de informação que um computador pode processar, operando informações como 0 ou 1. Já o *byte* (B) corresponde a 8 *bits* e à quantidade de espaço necessária para armazenar, em um dispositivo, um caractere.

Unidade de medida	Quantidade de caracteres	Relação
byte (B)	2^0	1 B = 8 b
kilobyte (kB)	2^{10}	1024 B = 1024^1 B
megabyte (MB)	2^{20}	1024 kB = 1024^2 B
gigabyte (GB)	2^{30}	1024 MB = 1024^3 B
terabyte (TB)	2^{40}	1024 GB = 1024^4 B

ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Ao realizar um teste de velocidade da internet, um usuário obteve o seguinte resultado:

Download (Mbps)	*Upload* (Mbps)
141,02	71,98

A velocidade de transmissão é dada em Mbps, isto é, em *megabits* por segundo. Saiba que 8 *megabits* equivalem a 1 *megabyte*. Assim, a medida de intervalo de tempo para baixar um arquivo de 176 *megabytes* é, aproximadamente:

(A) 100 s.

(B) 10 s.

(C) 1,2 s.

(D) 124 s.

(E) 8 s.

Alternativa **B**.

_DICA

A **velocidade de transmissão** é medida em *bits* por segundo, e as unidades de medida de transferência mais usadas são kbps, Mbps e Gbps.

Já a **capacidade de armazenamento** é expressa em *megabytes*.

Para transformar *bits* em *bytes*, deve-se dividir por 8.

2 O hectare é uma unidade de medida de área muito utilizada para medir a área de plantações e de propriedades rurais. Leia o texto a seguir para resolver a questão.

[...] Entre 2021 e 2022, o valor médio do hectare para cultivo de soja e milho, por exemplo, passou de R$ 36,7 mil para R$ 53,3 mil, puxado pela forte demanda de investidores nesse mercado e pela rentabilidade positiva da produção agropecuária [...].

PREÇOS de terras agrícolas destinadas ao plantio de grãos aumentam. *Agrimídia*, 30 jan. 2023. Disponível em: https://www.agrimidia.com.br/agronegocio/precos-de-terras-agricolas-destinadas-ao-plantio-de-graos-aumentam/#:~:text=Entre%202021%20e%202022%2C%20o,relatório%20mais%20recente%20da%20S%26P. Acesso em: 18 out. 2023.

Sabendo que 1 ha equivale a 1 hm^2, o valor médio do metro quadrado (m^2) para cultivo de soja e milho, entre 2021 e 2022, passou a ser de:

(A) R$ 53,30.

(B) R$ 533,00.

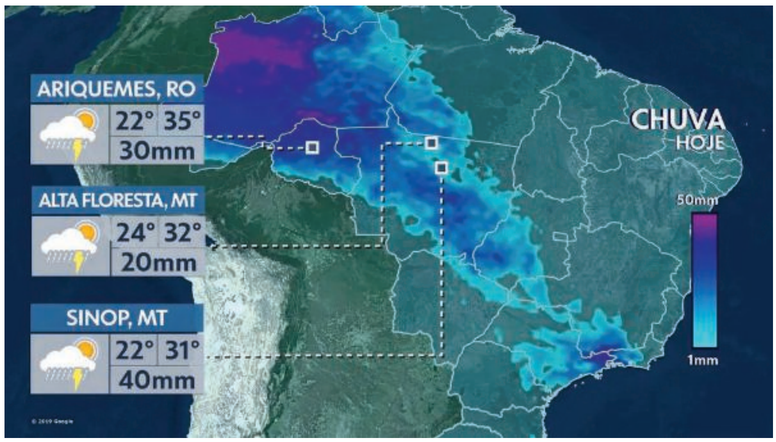
(C) R$ 5.330,00.

(D) R$ 0,53.

(E) R$ 5,33.

Alternativa **E**.

3 O mapa a seguir mostra a quantidade de chuva prevista nas cidades de Ariquemes (RO), Alta Floresta (MT) e Sinop (MT) no dia 8 de outubro de 2019 aferida em milímetros. Para compreender essa maneira de medir a chuva, considere uma área que mede 1 m^2. Se choveu 20 mm, isso significa que a água, nesse local, atingiu 20 mm de altura.



Reprodução/TV GLOBO

É possível afirmar que, na cidade que provavelmente teve o maior volume de chuva acumulado no dia 8 de outubro de 2019, para cada metro quadrado da região, houve uma precipitação, em litros, de:

(A) 0,08.

(B) 0,4.

(C) 60.

(D) 40.

(E) 400.

Alternativa **D.**

4 A medida da velocidade em que o *download* de um arquivo de vídeo de 30 GB ocorre é 51,2 Mb/s. Considerando 1 GB = 1024 MB, a medida de intervalo de tempo estimado de *download* é, aproximadamente:

(A) 80 min.

(B) 75 s.

(C) 10 s.

(D) 1 h.

(E) 600 min.

Alternativa **A.**

5 O tubarão-baleia, apesar de seu nome, não é considerado um mamífero e representa a maior espécie de peixe do mundo. Além de ser praticamente inofensivo, ele se alimenta por filtração ao nadar de boca aberta, capturando plâncton e pequenos peixes.

Sabe-se que plâncton é um grupo de organismos aquáticos microscópicos que se movem na água, geralmente impulsionados pelos movimentos do ambiente, como ondas e correntes. Em virtude da diversidade específica, que engloba desde microrganismos como vírus até pequenos vertebrados, os organismos do plâncton podem apresentar diferentes tamanhos. O nanoplâncton, por exemplo, é um grupo de organismos que podem chegar a 2 μm.

Se um 1 micrômetro (μm) corresponde a 1 milionésimo de metro, é possível afirmar que a razão entre as medidas de comprimento de um tubarão-baleia e um organismo do nanoplâncton que medem, 10 m e 10 μm, respectivamente, é:

(A) 10^{-2}.

(B) 10^{2}.

(C) 10^{5}.

(D) 10^{-1}.

(E) 10^{6}.

Alternativa **E.**

6 Leia o texto a seguir.

> [...]
>
> Os brasileiros despejam na natureza o volume de mais de 5700 piscinas olímpicas cheias de esgoto sem nenhum tratamento. É mais da metade de todo o esgoto que o nosso país produz diariamente. [...]
>
> NATUREZA recebe por dia 5700 piscinas olímpicas de esgoto sem tratamento. G1. Rio de Janeiro, 18 abr. 2018. Disponível em: https://g1.globo.com/jornal-nacional/noticia/2018/04/no-es-aplicativo-mostra-imoveis-que-nao-estao-ligados-rede-de-esgoto.html. Acesso em: 18 out. 2023.

Se a capacidade de uma piscina olímpica mede, em média, 2 milhões e 500 mil litros, os brasileiros despejam na natureza, diariamente, uma quantidade de esgoto de, aproximadamente:

(A) 1 425 000 L.

(B) $1{,}425 \cdot 10^{10}$ L.

(C) 14 250 L.

(D) $14\,250 \cdot 10^{3}$ L.

(E) $1{,}425 \cdot 10^{6}$ L.

Alternativa **B.**

7 A medida da distância média entre a Terra e a Lua é aproximadamente 384 400 km. Logo, pode-se afirmar que essa distância, em metros e em notação científica, mede:

(A) $3{,}844 \cdot 10^{8}$.

(B) 3 844 000.

(C) 384,4.

(D) $38{,}44 \cdot 10^{6}$.

(E) $3\,844 \cdot 10^{3}$.

Alternativa **A.**

8 Uma marca de celular oferece modelos de 128 GB, 256 GB, 512 GB e 1 TB. Considere que o sistema operacional ocupa cerca de 2,88 GB da capacidade de cada aparelho e não pode ser desinstalado. Considerando 1 TB = 1024 GB, quem compra um modelo de 1 TB recebe, de fato, um celular com capacidade de armazenamento que mede aproximadamente:

(A) 1 GB.

(B) 10 GB.

(C) 102 GB.

(D) 1021 GB.

(E) 10 211 GB.

Alternativa **D**.

9 De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), uma pessoa precisa beber 35 mL de água para cada quilograma de massa corporal por dia.

Uma pessoa que pesa 90 kg deve beber em torno de:

(A) 3150 L de água.

(B) 31,5 L de água.

(C) 315 mL de água.

(D) 3,15 L de água.

(E) 31 500 mL de água.

Alternativa **D**.

10 Leia atentamente o texto a seguir.

> [...]
>
> A construção do detector Atlas iniciou-se em 1994, mas só recentemente, em 2008, começou a funcionar. Suas medidas aproximadas são de 45 metros de comprimento e 25 metros de altura, e o peso surpreende qualquer leigo no assunto: cerca de 7 mil toneladas. [...]

UFSJ. Partícula de Deus. *Ascom*, 25 fev. 2013. Disponível em: https://ufsj.edu.br/noticias_ler.php?codigo_noticia=3687. Acesso em: 18 out. 2023.

Quantas pessoas de 70 kg de medida de massa seriam necessárias para atingir o peso descrito nesse texto?

(A) 10 000 000

(B) 1 000 000

(C) 1000

(D) 100

(E) 100 000

Alternativa **E**.

11 Leia atentamente este texto.

Megasoma anubis: o besouro rinoceronte

[...]

Os besouros do gênero *Megasoma* fazem jus ao nome – megasoma, traduz-se do grego como “corpos largos”. Trata-se de uma das maiores espécies de besouros do planeta, podendo chegar até 13,5 cm de comprimento.

São fortes como os rinocerontes de quem emprestam o nome. Os megasoma podem erguer 850 vezes o próprio peso, o que seria equivalente a um humano carregando 60 toneladas. Os “chifres” (apêndices cefálicos e torácicos) só são encontrados nos machos, que costumam utilizá-los nos combates que travam entre si por privilégios de acasalamento.

[...]

FERREIRA, Rafael. *Megasoma anubis*: o besouro rinoceronte. *((O))Eco*, Rio de Janeiro, 1º mar. 2013. Disponível em: https://oeco.org.br/noticias/26944-megasoma-anubis-o-besouro-rinoceronte/#:~:text=Trata%2Dse%20de%20uma%20das,um%20humano%20carregando%2060%20toneladas. Acesso em: 18 out. 2023.

Considere que um besouro rinoceronte, pesando cerca de 100 g, seja capaz de levantar até 85 kg. Se um ser humano de 70 kg tivesse essa força, ele conseguiria levantar até:

(A) 595 t.

(B) 5 950 kg.

(C) 5,95 t.

(D) 595 kg.

(E) 59,5 t.

Alternativa **E**.

_AMPLIANDO

O sistema de medidas imperial tem essa denominação porque era usado pelo Império Britânico. Consequentemente, suas colônias ao redor do mundo também utilizavam as mesmas medidas.

Ao longo do século XIX, o Reino Unido padronizou seu sistema de medidas, corrigindo divergências e dando mais precisão aos valores de pés, polegadas e jardas.

Com a independência das colônias britânicas, muitas delas seguiram o restante do mundo e adotaram o sistema métrico decimal. Contudo, determinados países, ainda hoje, adotam o sistema imperial — alguns em parte, outros com diferenças —, como Libéria, Mianmar, Estados Unidos, Reino Unido, entre outros.

Para entender melhor como foram definidas algumas unidades de medida-padrão, assista ao vídeo *A revolução das medidas* publicado pelo canal Nerdologia no YouTube.

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) A bula de um antibiótico infantil, fabricado na forma de xarope, recomenda que sejam ministrados, diariamente, no máximo 500 mg desse medicamento para cada quilograma de massa do paciente. Um pediatra prescreveu a dosagem máxima desse antibiótico para ser ministrada diariamente a uma criança de 20 kg pelo período de 5 dias. Esse medicamento pode ser comprado em frascos de 10 mL, 50 mL, 100 mL, 250 mL e 500 mL. Os pais dessa criança decidiram comprar a quantidade exata de medicamento que precisará ser ministrada no tratamento, evitando a sobra de medicamento. Considere que 1 g desse medicamento ocupe um volume de 1 cm^3.

A capacidade do frasco, em mililitro, que esses pais deverão comprar é

(A) 10.

(B) 50.

(C) 100.

(D) 250.

(E) 500.

Alternativa **B**.

2 (Enem)

O projeto de transposição do Rio São Francisco consiste na tentativa de solucionar um problema que há muito afeta as populações do semiárido brasileiro, a seca. O projeto prevê a retirada de 26,4 m^3/s de água desse rio. Para tornar mais compreensível a informação do volume de água a ser retirado, deseja-se expressar essa quantidade em litro por minuto.

Disponível em: www.infoescola.com. Acesso em: 28 out. 2015.

Com base nas informações, qual expressão representa a quantidade de água retirada, em litro por minuto?

(A) $\dfrac{26,4}{1000} \times 60$

(B) $\dfrac{26,4}{10} \times 60$

(C) $26,4 \times 1 \times 60$

(D) $26,4 \times 10 \times 60$

(E) $26,4 \times 1000 \times 60$

Alternativa **E**.

3 (Enem) Nos Estados Unidos a unidade de medida de volume mais utilizada em latas de refrigerante é a onça fluida (fl oz), que equivale a aproximadamente 2,95 centilitros (cL).

Sabe-se que o centilitro é a centésima parte do litro e que a lata de refrigerante usualmente comercializada no Brasil tem capacidade de 355 mL.

Assim, a medida do volume da lata de refrigerante de 355 mL, em onça fluida (fl oz), é mais próxima de

(A) 0,83.

(B) 1,20.

(C) 12,03.

(D) 104,73.

(E) 120,34.

Alternativa **C**.

4 (Enem) Três pessoas, X, Y e Z, compraram plantas ornamentais de uma mesma espécie que serão cultivadas em vasos de diferentes tamanhos.

O vaso escolhido pela pessoa X tem capacidade de 4 dm^3. O vaso da pessoa Y tem capacidade de 7000 cm^3 e o de Z tem capacidade igual a 20 L.

Após um tempo do plantio das mudas, um botânico que acompanha o desenvolvimento delas realizou algumas medições e registrou que a planta que está no vaso da pessoa X tem 0,6 m de altura. Já as plantas que estão nos vasos de Y e Z têm, respectivamente, alturas medindo 120 cm e 900 mm.

O vaso de maior capacidade e a planta de maior altura são, respectivamente, os de

(A) Y e X.

(B) Y e Z.

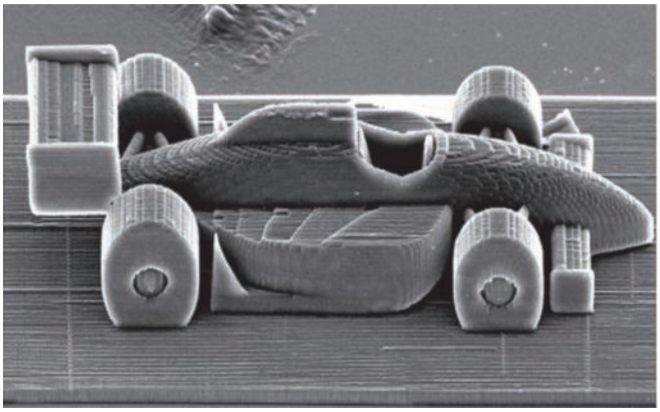
(C) Z e X.

(D) Z e Y.

(E) Z e Z.

Alternativa **D**.

5 (Enem) Pesquisadores da Universidade de Tecnologia de Viena, na Áustria, produziram miniaturas de objetos em impressoras 3D de alta precisão. Ao serem ativadas, tais impressoras lançam feixes de *laser* sobre um tipo de resina, esculpindo o objeto desejado. O produto final da impressão é uma escultura microscópica de três dimensões, como visto na imagem ampliada.



Reprodução/ENEM, 2020.

A escultura apresentada é uma miniatura de um carro de Fórmula 1, com 100 micrômetros de comprimento. Um micrômetro é a milionésima parte de um metro.

Usando notação científica, qual é a representação do comprimento dessa miniatura, em metro?

(A) 1×10^{-1}

(B) 1×10^{-3}

(C) 1×10^{-4}

(D) 1×10^{-6}

(E) 1×10^{-7}

Alternativa **C**.

6 (Enem)

A volemia (V) de um indivíduo é a quantidade total de sangue em seu sistema circulatório (coração, artérias, veias e capilares). Ela é útil quando se pretende estimar o número total (N) de hemácias de uma pessoa, a qual é obtida multiplicando-se a volemia (V) pela concentração (C) de hemácias no sangue, isto é, $N = V \times C$. Num adulto normal, essa concentração é de 5 200 000 hemácias por mL de sangue, conduzindo a grandes valores de N. Uma maneira adequada de informar essas grandes quantidades é utilizar a notação científica, que consiste em expressar N na forma $N = Q \times 10^n$, sendo $1 \leqslant Q < 10$ e n um número inteiro.

Considere um adulto normal, com volemia de 5 000 mL.

http:/lperfline.com. Acesso em: 23 fev. 2013 (adaptado)

Qual a quantidade total de hemácias desse adulto, em notação científica?

(A) $2{,}6 \times 10^{-10}$

(B) $2{,}6 \times 10^{-9}$

(C) $2{,}6 \times 10^{9}$

(D) $2{,}6 \times 10^{10}$

(E) $2{,}6 \times 10^{11}$

Alternativa **D**.

7 (Enem) Medir distâncias sempre foi uma necessidade da humanidade. Ao longo do tempo fez-se necessária a criação de unidades de medidas que pudessem representar tais distâncias, como, por exemplo, o metro. Uma unidade de comprimento pouco conhecida é a Unidade Astronômica (UA), utilizada para descrever, por exemplo, distâncias entre corpos celestes. Por definição, 1 UA equivale à distância entre a Terra e o Sol, que em notação científica é dada por $1{,}496 \times 10^2$ milhões de quilômetros.

Na mesma forma de representação, 1 UA, em metro, equivale a

(A) $1{,}496 \times 10^{11}$ m

(B) $1{,}496 \times 10^{10}$ m

(C) $1{,}496 \times 10^{8}$ m

(D) $1{,}496 \times 10^{6}$ m

(E) $1{,}496 \times 10^{5}$ m

Alternativa **A**.

8 (Unifesp) O coração de um beija-flor é considerado relativamente gigante se comparado com o tamanho do corpo de qualquer outra espécie animal. A massa do coração de um beija-flor equivale de 1,9% a 2,5% da sua massa corporal, que varia de 2,4 g a 5 g.

a) Uma veterinária coloca um beija-flor, enrolado em uma toalha, em uma balança de precisão, que acusa 129,6 g. Em seguida, ela retira o beija-flor e deixa apenas a toalha na balança, que acusa 125,9 g. Estime o maior valor possível da massa do coração desse beija-flor, em miligramas.

b) Enquanto o ritmo normal do coração humano é de 70 batimentos por minuto, o de um beija-flor é de 1015 vezes por minuto. O coração de um beija-flor que tenha vivido 4 anos bateu tantas vezes quanto o número de vezes que já bateu o coração de João, que faz aniversário hoje. Considerando-se que todos os anos tenham o mesmo número de dias, estime a idade de João hoje.

a) 92,5 mg
b) 58 anos

9 (Unifesp) Um gato tem cerca de 100 vezes a massa de um rato, porém, sua taxa metabólica é, aproximadamente, 31 vezes a de um rato. Observações experimentais permitiram que, em 1932, Max Kleiber formulasse empiricamente uma lei relacionando a taxa metabólica basal B de um animal, em quilocalorias por dia (kcal por dia), e sua massa M, em quilogramas (kg). Tal lei é dada pela fórmula $B = k \cdot M^{\frac{3}{4}}$, sendo k uma constante real.

a) Determine o valor de k, sabendo que a lei de Kleiber se aplica a um animal de massa igual a 16 kg e taxa metabólica basal de 600 kcal por dia.

b) Considere que a lei de Kleiber se aplique para um animal pequeno P e para um animal grande G, com a mesma constante real k. Sabendo que a massa de G, em kg, é 10^6 vezes a massa de P, calcule a razão entre as taxas metabólicas basais de G e de P, ou seja, $\frac{B_G}{B_P}$, utilizando os dados da tabela no cálculo final.

x	0,5	0,5625	0,75	4,5	5	10	10,25	10,75	31,623
$\sqrt{x}$	0,7071	0,75	0,8660	2,1213	2,2361	3,1623	3,2016	3,2787	5,6234

a) $75 \frac{\text{kcal}}{\text{dia} \cdot \sqrt[4]{\text{kg}^3}}$
b) 31 623

JORNADA 2

Tabelas e gráficos

Joa Souza/Shutterstock

Recenseadora do IBGE coleta dados para o Censo Demográfico de 2022. Cardeal da Silva, Bahia, Brasil.

O Censo Demográfico, no Brasil, é uma tarefa monumental, dado o tamanho e a diversidade do país. A cada 10 anos, o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) emprega métodos de amostragem para reunir e divulgar dados representativos dos habitantes, com a garantia de inclusão de todos os grupos da população.

Na etapa de seleção da amostra, uma parcela da população é escolhida para representar a diversidade do Brasil. Essa seleção estratégica evita que seja necessário entrevistar cada indivíduo, tornando o processo mais eficiente.

Uma vez definida a amostra, é hora de coletar os dados. Milhares de recenseadores saem às ruas para recolher informações vitais sobre cada domicílio e seus moradores. Para extrair percepções e análises significativas, os dados são gerenciados, organizados, tabulados e categorizados eletronicamente.

Para que toda a sociedade tenha acesso aos dados do Censo, o IBGE divulga os resultados por meio de seus *sites* e de suas redes sociais. Além disso, campanhas são promovidas para ensinar as pessoas a usar os dados. Os recenseamentos permanecem disponíveis por meio de gráficos, relatórios e tabelas que permitem visualizar rapidamente as principais tendências e padrões populacionais.

O último Censo Demográfico, realizado em 2022 por conta da pandemia da covid-19 e de cortes de gastos, apontou uma população brasileira de 203 062 512 habitantes e um crescimento populacional de 6,45% em relação à edição anterior da pesquisa, em 2010.

1. Quais são os principais tipos de gráfico que você conhece?

2. Em sua opinião, como tabelas e gráficos sintetizam e passam as informações para as pessoas?

3. Cite algumas etapas importantes no planejamento de uma pesquisa.

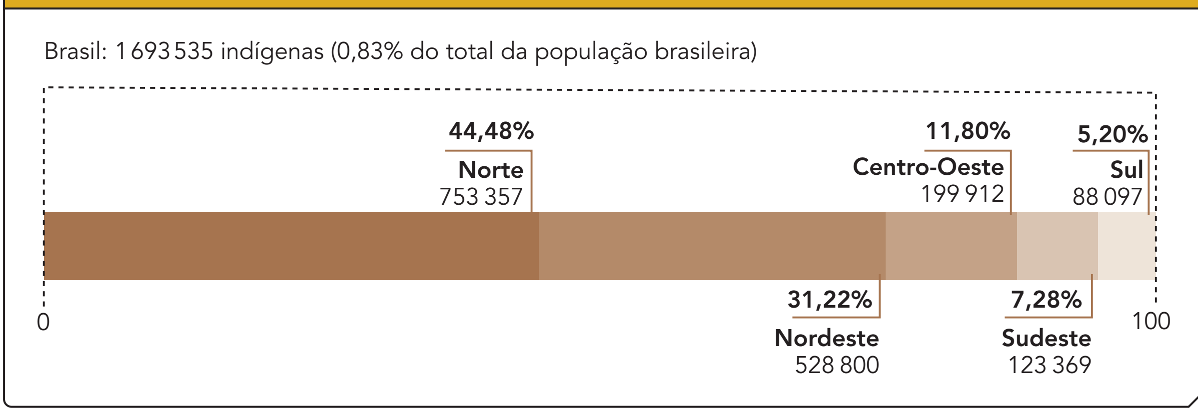
Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

ETAPA 1

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Observe o gráfico a seguir referente ao último Censo Demográfico realizado pelo IBGE no Brasil, em 2022. Além de evidenciar que os povos indígenas, atualmente, representam uma fração muito pequena da população brasileira, o gráfico traz a proporção de indígenas residentes nas grandes regiões brasileiras.

População indígena no Brasil por grandes regiões em 2022



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE. *Brasil tem 1,69 milhão de indígenas, aponta Censo 2022*. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/secom/pt-br/assuntos/noticias/2023/08/brasil-tem-1-69-milhao-de-indigenas-aponta-censo-2022. Acesso em: 26 out. 2023.

a) Qual é o tipo de gráfico mais indicado para apresentar a população indígena como uma fração pequena da população brasileira? Como construir tal gráfico manualmente, com a ajuda de um transferidor?

b) Que outro tipo de gráfico poderia ser utilizado para representar a distribuição percentual da população indígena por regiões?

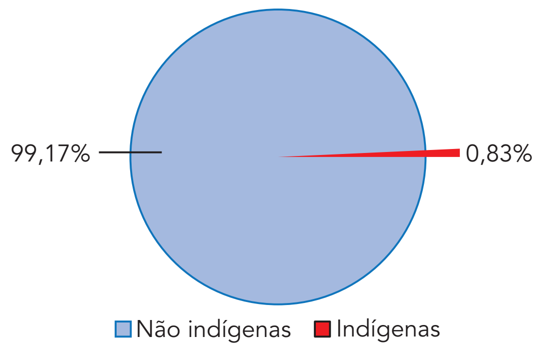
_resolvendo a questão

a) O gráfico de setores, também conhecido como gráfico de *pizza*, é ideal para comparar uma parte com o todo. Com os dados sobre população indígena e não indígena e considerando que o total de indígenas no país em 2022 era de 1 693 535 indivíduos e que esse total equivale a 0,83% do total da população, é possível obter a medida do ângulo de cada setor do gráfico:

População	Percentual (%)	Medida do ângulo
Não indígena	99,17	99,17% de 360° = (99,17 · 3,6°) = 357,012°
Indígena	0,83	0,83% de 360° = (0,83 · 3,6°) = 2,988°

Se fosse feito com a ajuda de um transferidor, esse gráfico teria seus setores com valores aproximados para 3° e 357°. Já com o uso de *softwares* de Geometria dinâmica, específicos para esse tipo de construção, essa aproximação não seria necessária.

Proporção de pessoas indígenas e não indígenas no Brasil em 2022



Elaborado para fins didáticos com base em dados do IBGE.

b) Outra maneira de representar os dados fornecidos pelo gráfico apresentado seria por meio de um gráfico de colunas ou, ainda, por outro gráfico de setores. Com os percentuais da população indígena por regiões, é possível calcular a medida do ângulo de cada setor do gráfico.

_AMPLIANDO

Visualize os principais resultados do Censo Demográfico 2022 promovido pelo IBGE, por meio de mapas e estatísticas sobre população e domicílios no Brasil, nas grandes regiões, nas unidades da federação e nos municípios.

_agora é com você

1 A tabela a seguir apresenta a quantidade de horas que Alice deixou seu computador ligado por dia durante 6 semanas. Complete-a e responda aos seguintes itens.

Quantidade de horas que Alice deixou seu computador ligado

Semana \ Dia da semana	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado	Domingo	Total de horas
Semana 1	18,5	17,0	13,0	9,0	6,0	7,5	2,0	73,0
Semana 2	13,0	4,0	7,0	17,0	16,2	3,0	0,0	60,2
Semana 3	15,0	12,5	11,0	12,0	9,5	11,0	0,0	71,0
Semana 4	11,0	9,0	8,1	0,6	20,0	0,0	0,0	48,7
Semana 5	12,1	12,0	9,5	17,0	8,0	16,5	3,0	78,1
Semana 6	15,5	7,0	12,0	8,1	21,0	9,4	1,0	74,0
Total de horas	85,1	61,5	60,6	63,7	80,7	47,4	6,0	405,0

Elaborada para fins didáticos.

I. O dia da semana no qual o computador de Alice teve maior média de horas ligado é:

(A) segunda-feira.
(B) terça-feira.
(C) quinta-feira.
(D) sexta-feira.
(E) sábado.

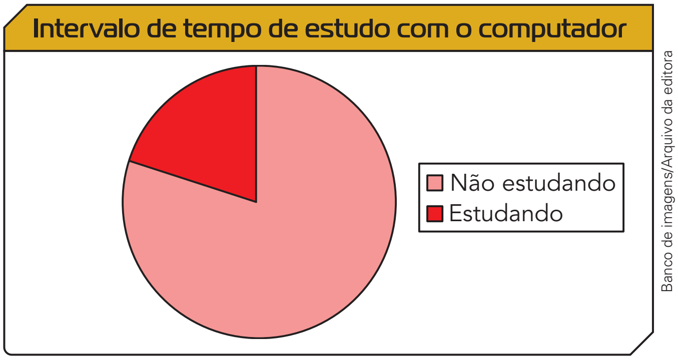
Alternativa **A.**

II. Qual foi a semana em que o total de horas que o computador de Alice permaneceu ligado foi o menor?

(A) Semana 1
(B) Semana 2
(C) Semana 4
(D) Semana 5
(E) Semana 6

Alternativa **C.**

III. Alice utiliza seu computador durante 4 horas diárias, em média, durante 6 dias da semana. Ela usa parte desse tempo para estudar. Considere que, no gráfico a seguir, o menor setor tem um ângulo de 72° e representa o intervalo de tempo em que o computador é usado para fins de estudo.



Elaborado para fins didáticos.

Nessas condições, quantos minutos por semana, em média, Alice usa o computador para estudar?

(A) 240.
(B) 260.
(C) 288.
(D) 296.
(E) 324.

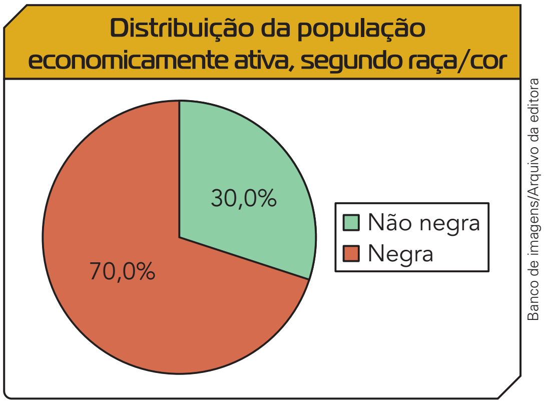
Alternativa **C.**

2 Como parte de uma pesquisa sobre emprego e desemprego no Distrito Federal no 1º semestre de 2019, o Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (DIEESE) publicou este gráfico.

Para construir esse gráfico sem tecnologias, o ângulo central, relativo ao setor circular que representa o percentual de negros na distribuição da população economicamente ativa, mede:

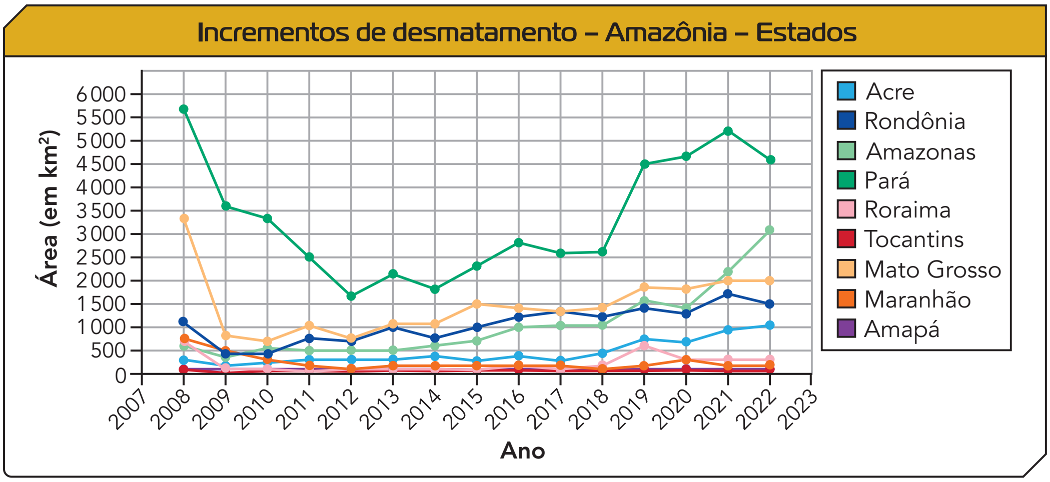
(A) 30°.
(B) 70°.
(C) 108°.
(D) 126°.
(E) 252°.

Alternativa **E.**



Fonte dos dados: DIEESE. *Pesquisa de Emprego e Desemprego do Distrito Federal (PED-DF) Resultados 1º sem. 2018/2019*. Disponível em: http://www.ipe.df.gov.br/wp-content/uploads/2019/11/Boletim-Negros-DF_2019-vf-vs-coletiva-DF.pdf. Acesso em: 25 out. 2023.

3 Observe o gráfico a seguir que mostra os incrementos de desmatamento do bioma amazônico.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: INPE. *TerraBrasilis*. Disponível em: http://terrabrasilis.dpi.inpe.br/app/dashboard/deforestation/biomes/amazon/increments. Acesso em: 26 out. 2023.

Em que ano houve menor incremento de desmatamento do bioma amazônico no estado do Pará?

(A) 2008

(B) 2012

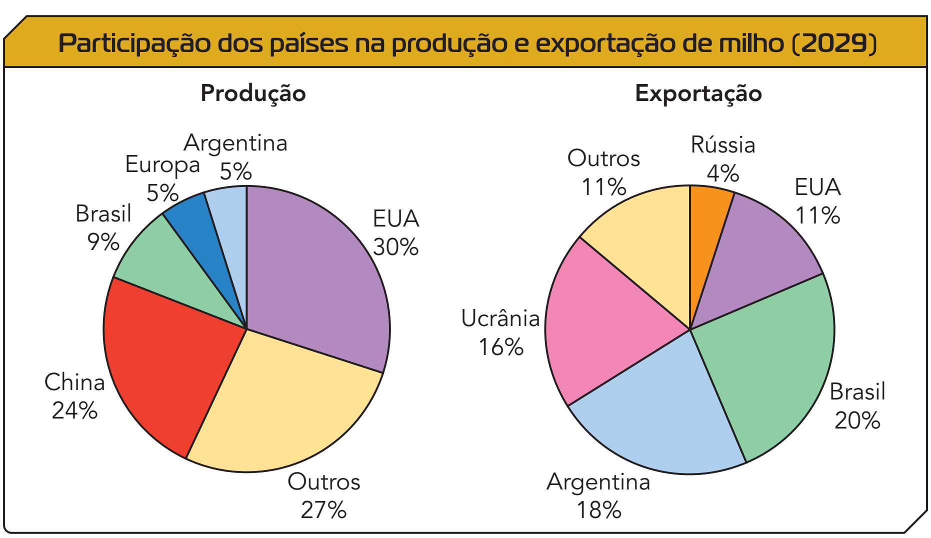
(C) 2017

(D) 2020

(E) 2022

Alternativa **B.**

4 Os gráficos a seguir mostram projeções para a participação dos principais produtores e exportadores mundiais de milho para o ano de 2029.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: OECD. *OECD-FAO Agricultural Outlook 2020-2029*. Disponível em: http://www.fao.org/3/ca8861en/ca8861en.pdf. Acesso em: 25 out. 2023.

O Brasil, em 2029, ocupará quais posições, respectivamente, na participação da produção e exportação de milho?

(A) 3ª e 2ª posições.

(B) 1ª e 4ª posições.

(C) 2ª e 3ª posições.

(D) 4ª e 1ª posições.

(E) 2ª e 5ª posições.

Alternativa **D.**

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Frequências

- **Rol** é a lista ordenada dos n dados do conjunto.
- **Frequência absoluta** (f_i) é a quantidade de vezes que determinado dado x_i aparece no conjunto de dados.
- **Frequência relativa** é a razão entre a frequência absoluta e a quantidade de elementos (n) da população.

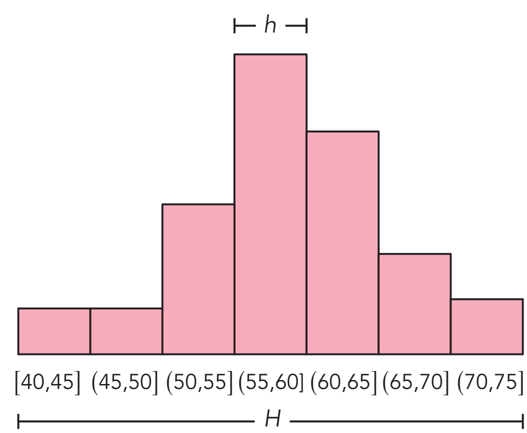
Analise a seguinte tabela de frequências para o conjunto de n dados:

	Intervalo ou classe	f_i
k classes	$a_1 \vdash a_2$	f_1
	$a_2 \vdash a_3$	f_2
	$a_3 \vdash a_4$	f_3
	$\vdots$	$\vdots$
	$a_{n-1} \vdash a_n$	f_{n-1}
	h	

Nela, $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$, ou seja, o somatório das frequências absolutas é igual a n.

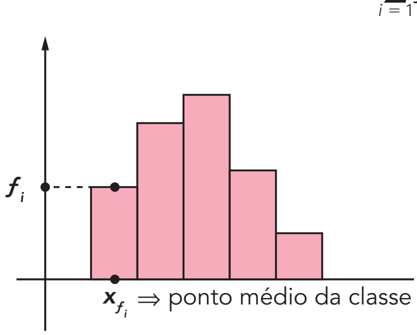
Histograma

É a representação gráfica da distribuição dos dados organizados por intervalos ou classes.



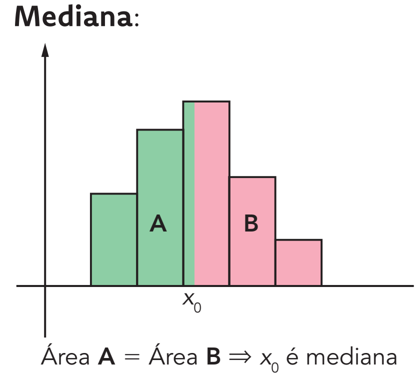
Banco de imagens/Arquivo da editora

- **Amplitude total** (H) é a diferença entre o maior e o menor valor (valores extremos) do conjunto de dados.
- **Amplitude da classe** (h) é a diferença entre os extremos da classe.
- **Média**: se x_{f_i} é o ponto médio da classe, então a média será $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} x_{f_i} \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

- **Mediana**:

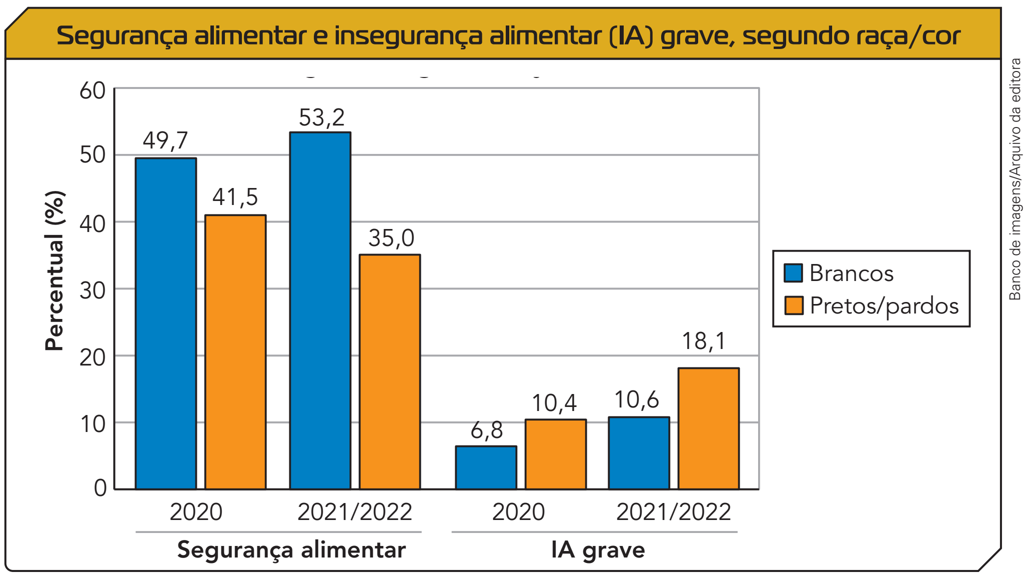


Banco de imagens/Arquivo da editora

ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 O gráfico a seguir compara as tendências de segurança alimentar com as de insegurança alimentar entre dois períodos, segundo raça/cor autorreferida da pessoa de referência, e faz parte do *Inquérito nacional sobre insegurança alimentar no contexto da pandemia da covid-19 no Brasil*, de 2022.



Fonte dos dados: PENSSAN. *II VIGISAN. Inquérito nacional sobre insegurança alimentar no contexto da pandemia da covid-19 no Brasil*. São Paulo: Fundação Friedrich Ebert: Rede PENSSAN, 2022. Disponível em: https://olheparaafome.com.br/wp-content/uploads/2022/06/Relatorio-II-VIGISAN-2022.pdf. Acesso em: 26 out. 2023.

Assinale a alternativa correta.

(A) Os dados de 2021/2022 indicam que a razão entre os percentuais referentes a brancos e negros em segurança alimentar diminuiu se comparada com os dados de 2020.

(B) Comparando os dados de 2020 com os de 2021/2022 e considerando tanto brancos como negros, havia uma parcela menor dessas populações em 2021/2022 classificadas em segurança alimentar.

(C) Os dados de 2021/2022 indicam que a insegurança alimentar grave aumentou, se comparada com o ano de 2020, mas a razão entre os percentuais de negros e brancos nessas condições diminuiu.

(D) Os dados de 2021/2022 indicam que o percentual de brancos em condição de segurança alimentar é 52% maior que o de negros, e o percentual de negros em situação de insegurança alimentar grave é, aproximadamente, 71% maior que o de brancos nessa condição.

(E) Os dados de 2020 indicam que não só o percentual de segurança alimentar entre negros era maior, mas também era maior o percentual dessa população com insegurança alimentar grave.

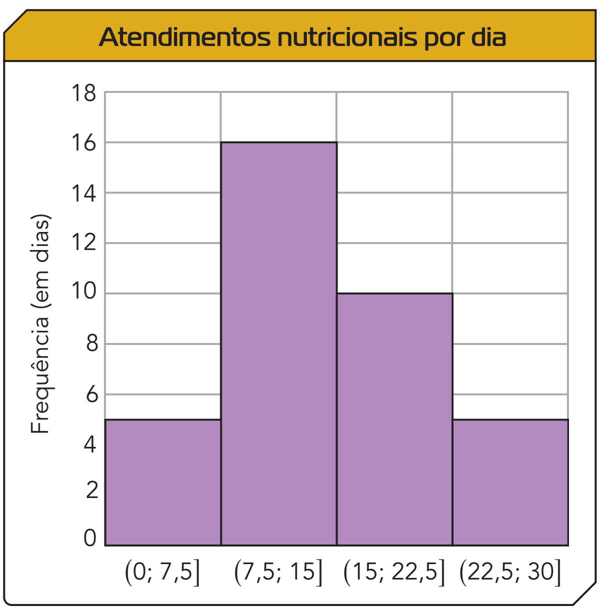
Alternativa **D**.

2 A tabela a seguir apresenta a quantidade de atendimentos nutricionais realizados por dia, durante 6 semanas, em uma academia. Com base nesses dados, foi elaborado um histograma.

Atendimentos nutricionais por dia

Semana \ Dia da semana	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado
Semana 1	18	27	23	9	17	7
Semana 2	13	4	7	17	21	13
Semana 3	15	12	21	23	9	21
Semana 4	11	29	8	0	20	0
Semana 5	12	12	9	23	8	17
Semana 6	15	17	12	8	21	9

Elaborada para fins didáticos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Elaborado para fins didáticos.

DICA

Em um histograma, as áreas dos retângulos devem ser proporcionais às respectivas frequências. Quando se utilizam classes com amplitudes diferentes entre si, as alturas dos retângulos podem não refletir com precisão as frequências das respectivas classes. Portanto, é comum adotar classes de mesma amplitude para garantir uma representação mais apropriada das frequências.

Para finalizar o histograma, o gerente da academia deve indicar a média e a mediana. Para isso, ele vai desenhar duas linhas verticais e paralelas no gráfico. Essas linhas serão tais que:

(A) estarão sobre os retângulos diferentes.

(B) a linha da mediana estará mais afastada do eixo vertical (frequência) que a linha da média.

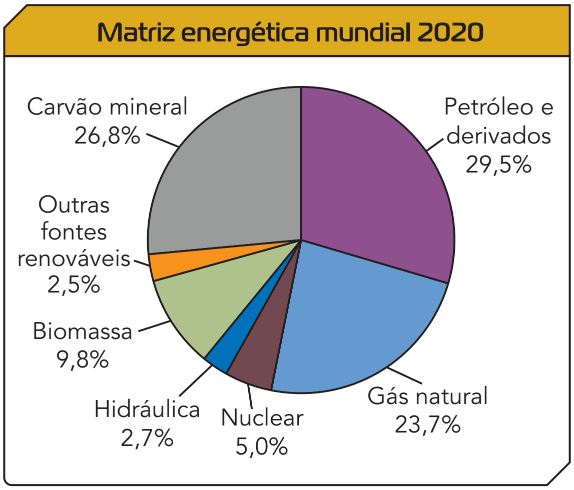
(C) a linha da mediana estará mais próxima do eixo vertical (frequência) e sobre o retângulo que representa (7,5; 15] atendimentos por dia.

(D) a linha da média estará no retângulo que representa (7,5; 15] atendimentos por dia, e a mediana estará nesse mesmo retângulo, mais próxima do eixo vertical (frequência).

(E) as duas linhas estarão superpostas no retângulo que representa (15; 22,5] atendimentos por dia.

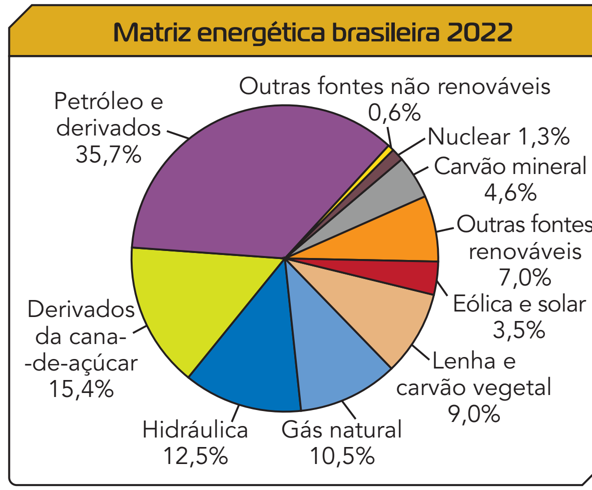
Alternativa **D**.

3 Os gráficos a seguir apresentam dados referentes às matrizes energéticas mundial e brasileira nos anos 2020 e 2022, respectivamente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IEA. *Energy Statistics Data Browser*. Disponível em: https://www.iea.org/data-and-statistics/data-tools/energy-statistics-data-browser?country=WORLD&fuel=Energy%20supply&indicator=TESbySource. Acesso em: 26 out. 2023.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: EPE. *Balanço Energético Nacional 2023*. Disponível em: https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-748/topico-687/BEN2023.pdf. Acesso em: 26 out. 2023.

Se *A* é o percentual de energia renovável da matriz energética brasileira de 2022 e *B* é o respectivo percentual na matriz energética mundial de 2020, é possível afirmar que:

(A) $A < 2B$.

(B) $A = B$.

(C) $A = \frac{B}{2}$.

(D) $A = 3B$.

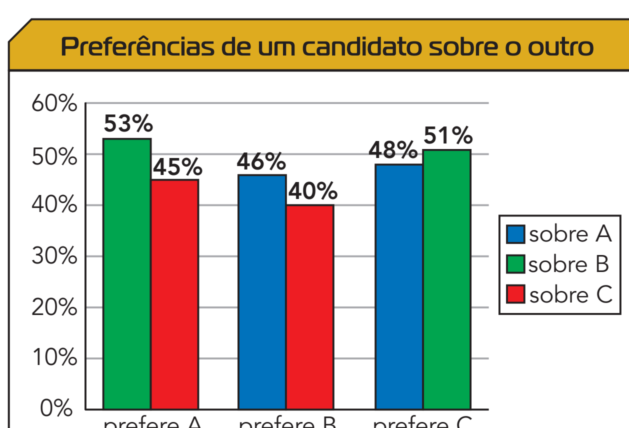
(E) $A > 3B$.

Alternativa **E.**

4 Em uma eleição para presidente de um clube foi utilizado o **método de Condorcet** para eleger um dos 3 candidatos, A, B e C. Nesse método, cada eleitor vota em 2 categorias: favorito e alternativo. Por isso, cada voto indica também um candidato não desejado. Se um eleitor, ao votar no candidato alternativo, repetir o voto do candidato favorito, anula-se o voto para essa categoria. Com base na tabela de frequências, durante a apuração dos votos dessa eleição, foi feito o gráfico de preferência de um candidato sobre o outro.

Favorito	Alternativo	Frequência
A	Nulo	9%
A	B	1%
A	C	*p*%
B	Nulo	7%
B	A	1%
B	C	31%
C	Nulo	*q*%
C	A	9%
C	B	7%

Elaborada para fins didáticos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

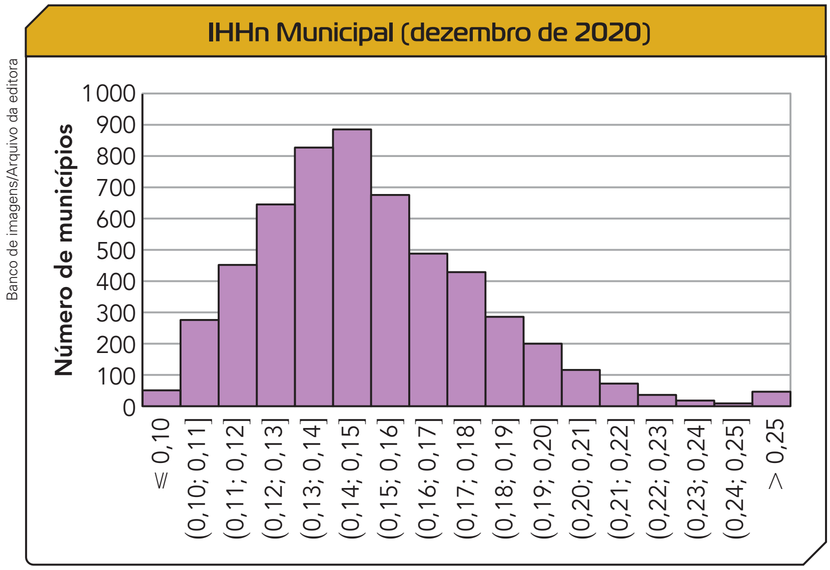
Elaborado para fins didáticos.

Sendo *p* o percentual de votos em que A é o preferido e C o alternativo, é possível concluir que *p* é igual a:

(A) 78.
(B) 53.
(C) 43.
(D) 35.
(E) 34.

Alternativa **E.**

5 O **Índice Herfindahl-Hirschman Normalizado (IHHn)** é utilizado para analisar a concentração bancária no Brasil e em seus 5570 municípios, com base nos relacionamentos bancários. Observe o histograma a seguir, extraído do *Relatório da Cidadania Financeira 2021,* publicado pelo Banco Central.



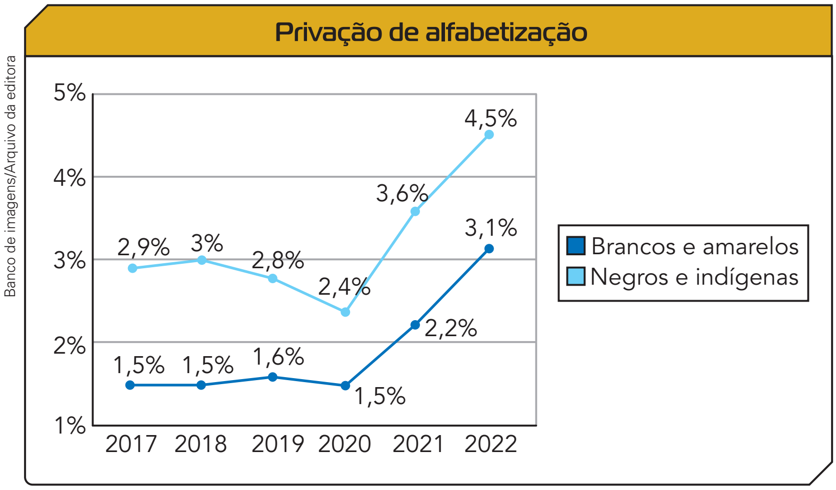
Fonte dos dados: BCB. *Relatório de Cidadania Financeira*. Brasília, DF, 2021. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/RIF/Relatorio_de_Cidadania_Financeira_2021.pdf. Acesso em: 26 out. 2023.

Segundo o histograma, a quantidade de municípios no final de 2020 com IHHn maior que 0,10 é de, aproximadamente:

(A) 100.
(B) 300.
(C) 5520.
(D) 5270.
(E) 5000.

Alternativa **C.**

6 Leia o gráfico a seguir para responder aos itens I e II.



Fonte dos dados: APÓS a pandemia, dobra o número de crianças sem acesso à alfabetização. *Fundação Roberto Marinho*. Disponível em: https://www.frm.org.br/conteudo/educacao-basica/noticia/apos-pandemia-dobra-o-numero-de-criancas-sem-acesso-alfabetizacao. Acesso em: 22 out. 2023.

I. Segundo o gráfico, a privação da alfabetização afeta, principalmente, crianças e adolescentes negros e indígenas.

A razão entre os percentuais de privação de alfabetização de negros e indígenas e os de brancos e amarelos foi maior no ano de:

(A) 2017.
(B) 2018.
(C) 2019.
(D) 2020.
(E) 2021.

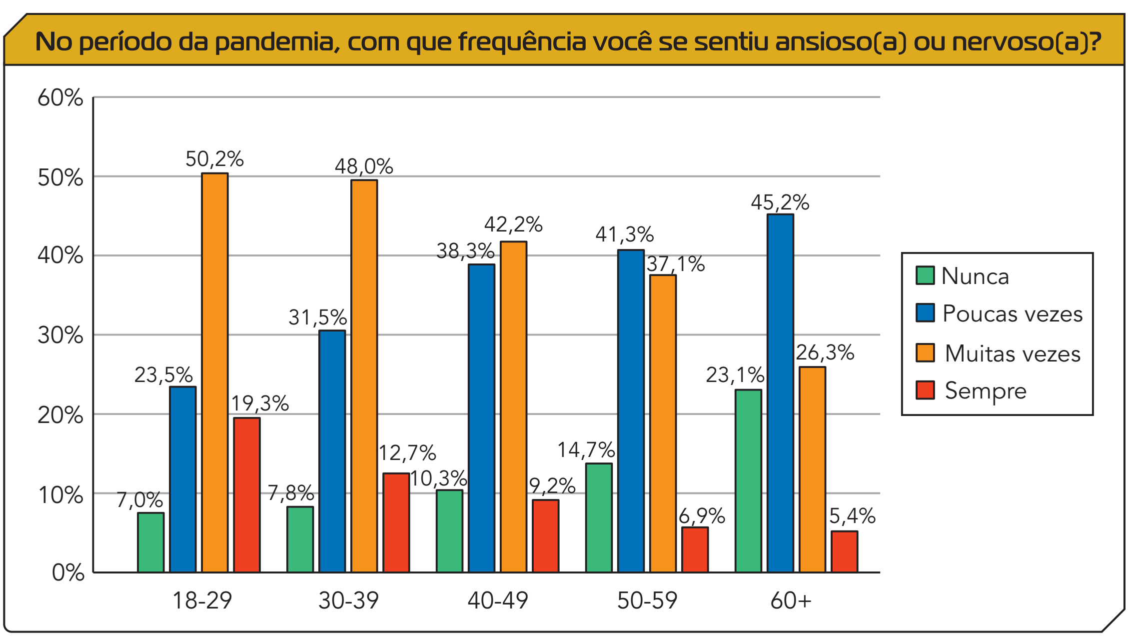
Alternativa **B**.

II. É possível afirmar que, na pandemia de covid-19, que ocorreu entre 2020 e 2022, os índices de privação de alfabetização para os grupos raciais citados foram tais que:

(A) os dois se mantiveram inalterados.
(B) diminuíram drasticamente em ambos os casos.
(C) os dois tiveram aumento desprezível.
(D) um quase dobrou e o outro mais do que dobrou.
(E) as tendências de crescimento observadas de 2019 para 2020 se mantiveram.

Alternativa **D**.

7 No Brasil, durante a pandemia de covid-19, observou-se um aumento na taxa de pessoas sofrendo com transtorno de ansiedade. O gráfico a seguir apresenta os resultados obtidos por meio de uma pesquisa realizada pela Fiocruz, pela UFMG e pela Unicamp entre 24 de abril e 24 de maio de 2020.



Fonte dos dados: FIOCRUZ. *ConVid Pesquisa de Comportamentos*. Disponível em: https://convid.fiocruz.br/arquivos/QuestionarioConVidPesquisaDeComportamentos.pdf. Acesso em: 10 out. 2025.

Segundo os dados da pesquisa, o percentual de pessoas com idade entre 18 e 29 anos que se sentiram frequentemente ansiosas ou nervosas durante o período da pandemia é de:

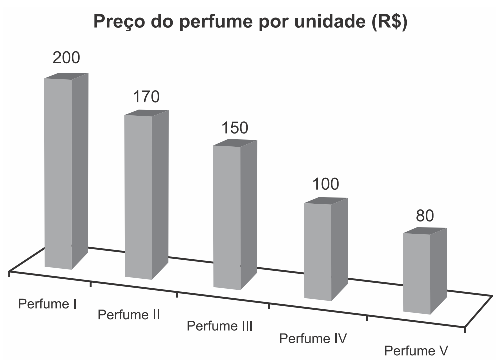
(A) 50,0%.
(B) 19,5%.
(C) 48,6%.
(D) 61,4%.
(E) 69,5%.

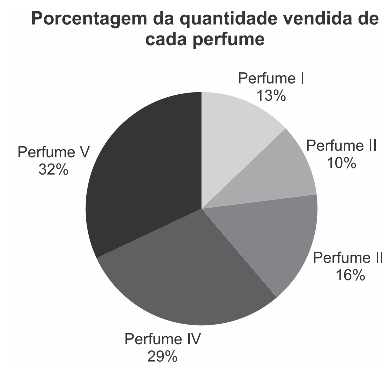
Alternativa **E**.

_ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) O gerente de uma loja de cosméticos colocou à venda cinco diferentes tipos de perfume, tendo em estoque na loja as mesmas quantidades de cada um deles. O setor de controle de estoque encaminhou ao gerente registros gráficos descrevendo os preços unitários de cada perfume, em real, e a quantidade vendida de cada um deles, em percentual, ocorrida no mês de novembro.





Reprodução/ENEM, 2020.

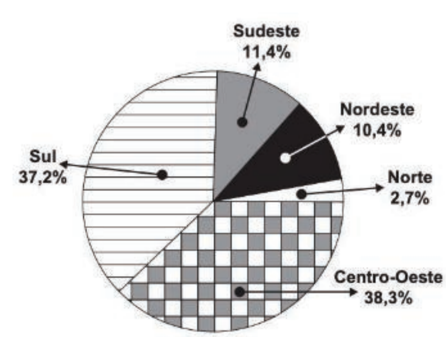
Dados a chegada do final de ano e o aumento das vendas, a gerência pretende aumentar a quantidade estocada do perfume do tipo que gerou a maior arrecadação em espécie, em real, no mês de novembro.

Nessas condições, qual o tipo de perfume que deverá ter maior reposição no estoque?

(A) I
(B) II
(C) III
(D) IV
(E) V

Alternativa **D**.

2 (Enem) Considere que a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, aponte uma participação por região conforme indicado no gráfico. Em valores absolutos, essas estimativas indicam que as duas regiões maiores produtoras deveriam produzir juntas um total de 119,8 milhões de toneladas em 2012.



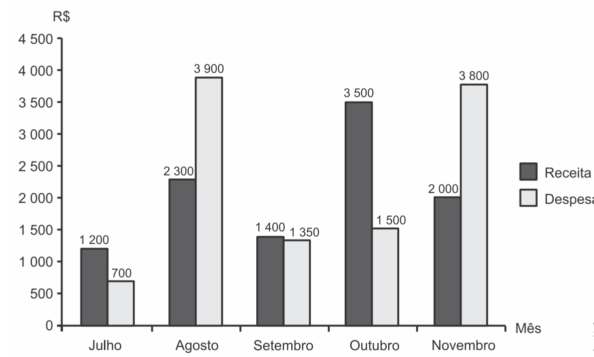
Reprodução/ENEM, 2019.

De acordo com esses dados, a produção estimada, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país, foi um valor mais aproximado de

(A) 11,4.
(B) 13,6.
(C) 15,7.
(D) 18,1.
(E) 35,6.

Alternativa **D**.

3 (Enem) O gráfico mostra as receitas e as despesas de uma empresa nos meses de julho a novembro de um ano. O resultado financeiro, obtido pela diferença entre receita e despesa, pode ser positivo (lucro) ou negativo (prejuízo).



Reprodução/ENEM, 2020.

Sabendo que o mês de dezembro é, em geral, de melhores vendas, o dono da empresa faz uma previsão de que a receita naquele mês terá um aumento, em relação ao mês anterior, com a mesma taxa de crescimento ocorrida de setembro para outubro, e que a despesa irá se manter a mesma de novembro.

Se confirmadas as previsões do dono da empresa, o resultado financeiro a ser obtido no semestre de julho a dezembro será um

(A) prejuízo de R$ 2 650,00.

(B) prejuízo de R$ 850,00.

(C) lucro de R$ 7 150,00.

(D) lucro de R$ 5 950,00.

(E) lucro de R$ 350,00.

Alternativa **E.**

4 (Enem) Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R$ 400 000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no Gráfico 2.

Distribuição da folha salarial

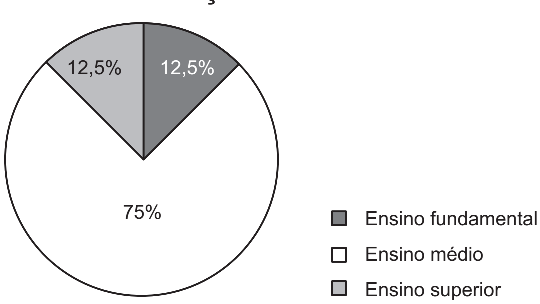


Gráfico 1

Número de funcionários por grau de instrução

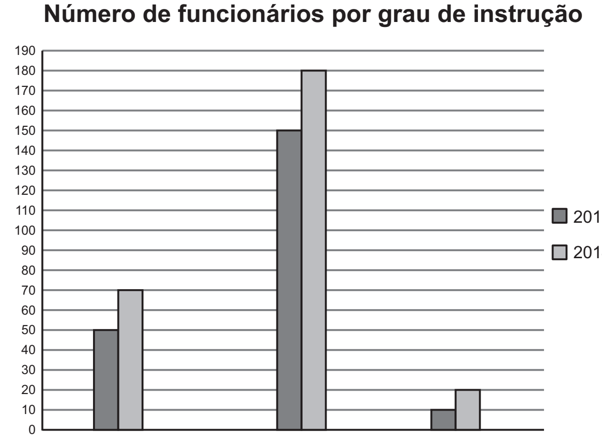


Gráfico 2

Reprodução/ENEM, 2014.

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

(A) R$ 114 285,00

(B) R$ 130 000,00

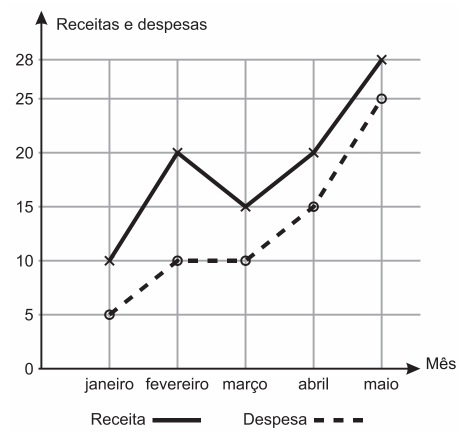
(C) R$ 160 000,00

(D) R$ 210 000,00

(E) R$ 213 333,00

Alternativa **B.**

5 (Enem) A receita *R* de uma empresa ao final de um mês é o dinheiro captado com a venda de mercadorias ou com a prestação de serviços nesse mês, e a despesa *D* é todo o dinheiro utilizado para pagamento de salários, contas de água e luz, impostos, entre outros. O lucro mensal obtido ao final do mês é a diferença entre a receita e a despesa registradas no mês. O gráfico apresenta as receitas e despesas, em milhão de real, de uma empresa ao final dos cinco primeiros meses de um dado ano.



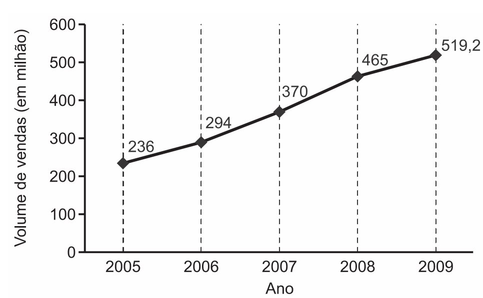
A previsão para os próximos meses é que o lucro mensal não seja inferior ao maior lucro obtido até o mês de maio.

Nessas condições, o lucro mensal para os próximos meses deve ser maior ou igual ao do mês de

(A) janeiro.
(B) fevereiro.
(C) março.
(D) abril.
(E) maio.

Alternativa **B.**

6 (Enem) A depressão caracteriza-se por um desequilíbrio na química cerebral. Os neurônios de um deprimido não respondem bem aos estímulos dos neurotransmissores. Os remédios que combatem a depressão têm o objetivo de restabelecer a química cerebral. Com o aumento gradativo de casos de depressão, a venda desses medicamentos está em crescente evolução, conforme ilustra o gráfico.



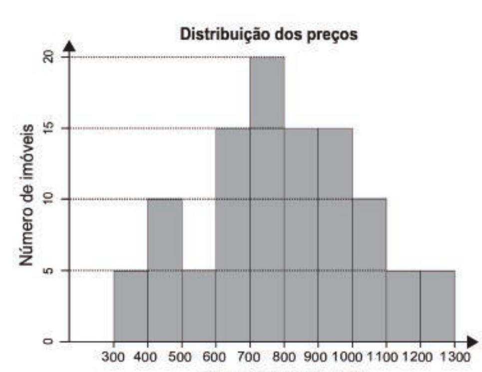
Veja, 10 fev. 2010 (adaptado).

No período de 2005 a 2009, o aumento percentual no volume de vendas foi de

(A) 45,4.
(B) 54,5.
(C) 120.
(D) 220.
(E) 283,2.

Alternativa **C.**

7 (Enem) Um casal está planejando comprar um apartamento de dois quartos num bairro de uma cidade e consultou a página de uma corretora de imóveis, encontrando 105 apartamentos de dois quartos à venda no bairro desejado. Eles usaram um aplicativo da corretora para gerar a distribuição dos preços do conjunto de imóveis selecionados.



O gráfico ilustra a distribuição de frequências dos preços de venda dos apartamentos dessa lista (em mil reais), no qual as faixas de preço são dadas por]300, 400],]400, 500],]500, 600],]600, 700],]700, 800],]800, 900],]900, 1000],]1000, 1100],]1100, 1200] e]1200, 1300].

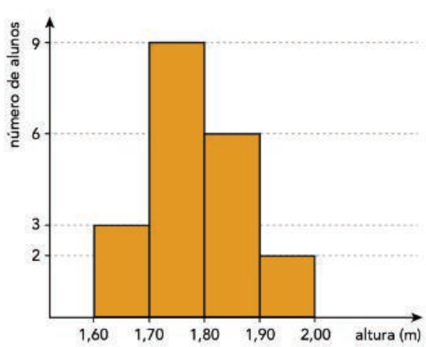
A mesma corretora anuncia que cerca de 50% dos apartamentos de dois quartos nesse bairro, publicados em sua página, têm preço de venda inferior a 550 mil reais. No entanto, o casal achou que essa última informação não era compatível com o gráfico obtido.

Com base no gráfico obtido, o menor preço, *p* (em mil reais), para o qual pelo menos 50% dos apartamentos apresenta preço inferior a *p* é

(A) 600.
(B) 700.
(C) 800.
(D) 900.
(E) 1000.

Alternativa **C**.

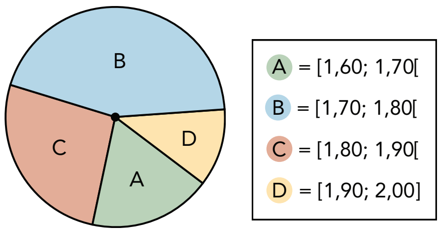
8 (UERJ) Após serem medidas as alturas dos alunos de uma turma, elaborou-se o seguinte histograma:



Reprodução/UERJ, 2021.

I. Sabe-se que, em um histograma, se uma reta vertical de equação $x = x_0$ divide ao meio a área do polígono formado pelas barras retangulares, o valor de x_0 corresponde à mediana da distribuição dos dados representados. Calcule a mediana das alturas dos alunos representadas no histograma.

II. Os dados do histograma também podem ser representados em um gráfico de setores. Observe:
Calcule o maior ângulo central, em graus, desse gráfico de setores.



Reprodução/UERJ, 2021.

I. $1,\overline{7}$
II. 162°

JORNADA 3

Porcentagens e variações percentuais

Edson Souza/iStockphoto/Getty Images

inflação: nome dado ao aumento dos preços de produtos e serviços. É calculada pelos índices de preços, comumente chamados de índices de inflação, por exemplo, o IPCA.

O Banco Central do Brasil (BC) é o órgão do governo federal responsável por decisões econômicas importantes, atuando no combate à **inflação** e na regulamentação de taxas de juros básicas, que, por sua vez, influenciam vários aspectos da vida dos brasileiros, a exemplo do custo de empréstimos. Nos meses de agosto e setembro de 2023, após 3 anos sem redução, o BC reduziu a taxa básica de juros da economia brasileira (taxa Selic) em 0,5 ponto percentual ao mês, de 13,75% para 12,75% ao ano.

Com isso, bancos públicos e privados são motivados a reduzir também as taxas de juros para empréstimos e financiamentos, provocando a queda de preços de produtos, estimulando o consumo e impulsionando a produção. Assim, a população tende a comprar mais, as empresas tendem a investir em novos negócios e novos empregos tendem a ser gerados. Uma Selic baixa aquece a economia, pois o crédito torna-se mais acessível, estimulando o consumo de bens duráveis, como automóveis e imóveis.

Contudo, também é necessário manter o controle da inflação por meio de alguns índices, o que é um grande desafio para que a prosperidade econômica de todos os segmentos seja sustentável.

O Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA) mede a variação de preços de uma cesta de produtos e serviços consumida pela população. O resultado mostra se os preços aumentaram ou diminuíram de um mês para o outro. O governo federal do Brasil utiliza o IPCA como índice oficial de inflação no país.

1. Em quais lugares e contextos você já ouviu falar sobre a taxa Selic e o IPCA?
2. Quais impactos em sua vida e na de sua família você acha que a queda da taxa Selic pode causar?
3. De que maneira você e sua família costumam organizar as despesas e os recursos financeiros da casa?

Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

ETAPA 1

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Ana Júlia vende seguros de carro e ganha uma comissão de 5% sobre o valor de cada seguro vendido. Considere que o preço do seguro aumentou, em média, 12% em 2021 e 8% em 2022, sempre no início do ano. Leve em consideração a variação percentual anual calculada sobre o ano anterior.

Com base nessas informações, responda às perguntas a seguir.

a) Se Ana Júlia, em 2020, vendeu 16 seguros por mês a R$ 3.000,00 cada um, qual foi a comissão mensal dela em 2020?

b) No fim de 2020, o seguro de certo tipo de automóvel custava R$ 2.500,00. Após o aumento do período, quanto passou a custar em 2021?

c) Considerando o resultado do item anterior, quanto o seguro desse automóvel passou a custar em 2022?

_resolvendo a questão

a) Com as informações dadas, é possível calcular a comissão média mensal de Ana Júlia:

$$5\% \cdot 3000 \cdot 16 = \frac{5}{100} \cdot 3000 \cdot 16 = 150 \cdot 16 = 2400$$

Assim, a comissão mensal de Ana Júlia em 2020 foi de R$ 2.400,00.

b) Se no início de 2021 os valores dos seguros receberam um aumento de 12%, então o seguro desse tipo de automóvel passou a custar:

$$2500 + 12\% \cdot 2500 = 2500 + \frac{12}{100} \cdot 2500 = 2500 + 12 \cdot 25 =$$
$$= 2500 + 300 = 2800$$

Logo, em 2021 o seguro desse tipo de automóvel passou a custar R$ 2.800,00.

c) Em 2022, o preço do seguro teve um aumento de 8%. Utilizando o resultado do item anterior, o seguro do automóvel passou a custar:

$$2800 + 8\% \cdot 2800 = 2800 + \frac{8}{100} \cdot 2800 = 2800 + 8 \cdot 28 =$$
$$= 2800 + 224 = 3024$$

Assim, em 2022 o seguro desse tipo de automóvel passou a custar R$ 3.024,00.

_AMPLIANDO

No vídeo sugerido, é explicado um pouco mais sobre alguns índices muito utilizados na economia do país, o IPCA e o Índice Nacional de Preços ao Consumidor (INPC), ambos calculados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE): o que significam, o que medem, para que servem e como são calculados.

_agora é com você

1 O salário mínimo no Brasil, no final de 2022, era de R$ 1.212,00. Em 2023, teve um aumento de, aproximadamente, 9%.

Qual é o novo valor aproximado do salário mínimo para 2023?

(A) R$ 1.291,00
(B) R$ 1.301,06
(C) R$ 1.317,08
(D) R$ 1.321,08
(E) R$ 1.341,06

Alternativa **D**.

2 Determinada pessoa recebe o salário de 2 000 reais por mês e gasta, mensalmente, 600 reais com alimentação.

Que percentual do salário dessa pessoa é gasto com alimentação?

(A) 10%
(B) 20%
(C) 30%
(D) 40%
(E) 50%

Alternativa **C**.

3 Leia o texto a seguir.

> Um estudo da UFMG apontou que, com a Reforma [Tributária], o emprego no Brasil deve aumentar 7,5% em 15 anos. Seria como se, hoje, tivéssemos 7,5 milhões de empregos a mais. Isso significa mais consumidores para o pequeno negócio e uma economia muito mais fortalecida.
>
> POR QUE o Brasil precisa de uma reforma tributária? *Sebrae*, c2021. Disponível em: https://sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/reformatributaria. Acesso em: 12 out. 2023.

Com base nessas informações, o número de empregados no Brasil no momento em que o texto foi escrito, em milhões de trabalhadores, era de, aproximadamente:

(A) 80.
(B) 90.
(C) 100.
(D) 107.
(E) 115.

Alternativa **C**.

4 Marcos está com problemas financeiros há 6 meses, pois tem gastado mais do que ganha. Ele tem recorrido ao cheque especial, um tipo de empréstimo automático efetuado diretamente em sua conta-corrente bancária. Em determinado mês, Marcos gastou 5 000 reais, porém ganhou 3 500 reais. E, para conseguir arcar com o custo extra, nesse mês ele utilizou o cheque especial.

O banco em que Marcos tem conta cobra pela utilização do cheque especial, por mês, uma taxa adicional de 10%, chamada **juro**, calculada sobre o valor gasto a mais, ou seja, 10% do valor emprestado na operação.

Qual foi o valor adicional que o banco cobrou naquele mês por Marcos utilizar o cheque especial?

(A) R$ 150,00
(B) R$ 180,00
(C) R$ 190,00
(D) R$ 200,00
(E) R$ 210,00

Alternativa **A**.

5 Em uma cidade, 20% da população é constituída por jovens de 18 a 25 anos. Uma pesquisa, realizada com todos os jovens da população, mostrou que 40% deles não trabalham nem estudam.

Se a cidade tem uma população de, aproximadamente, 300 mil habitantes, quantos jovens entre 18 e 25 anos não trabalham nem estudam?

(A) 60 mil

(B) 56 mil

(C) 45 mil

(D) 30 mil

(E) 24 mil

Alternativa **E.**

6 Considere que o valor do plano de saúde de determinada família aumentou 20% em 2021 e 10% em 2022, calculados sobre o ano anterior.

Se em 2020 o plano de saúde custava R$ 800,00, quanto ele passou a custar em 2022?

(A) R$ 1.060,00

(B) R$ 1.056,00

(C) R$ 960,00

(D) R$ 956,00

(E) R$ 920,00

Alternativa **B.**

7 Eduardo gasta 30% do salário mensal com passeios, que incluem sua atividade favorita: conhecer novos restaurantes. Dos gastos com passeios, Eduardo separa 40% para essa atividade específica. Considere que o salário mensal de Eduardo seja de R$ 8.000,00.

I. Quantos reais Eduardo gasta por mês com restaurantes?

(A) 960

(B) 1200

(C) 700

(D) 560

(E) 2400

Alternativa **A.**

II. Quantos reais Eduardo gasta por mês com passeios?

(A) 960

(B) 1200

(C) 1600

(D) 2380

(E) 2400

Alternativa **E.**

fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Porcentagem

É uma razão cujo denominador é 100, ou seja, expressa uma parte ou uma proporção de um número em relação a 100.

Para calcular uma porcentagem, divide-se a parte que deseja expressar como porcentagem pelo todo e multiplica-se o resultado por 100. E, para calcular quanto vale a porcentagem de uma quantidade, deve-se multiplicar essa porcentagem pelo valor da quantidade.

$$\text{Porcentagem} = \left(\frac{\text{Parte}}{\text{Todo}} \cdot 100\right)\%$$

Variação percentual

É a relação da diferença entre quantidades que sofreram alteração pela quantidade original. É calculada subtraindo-se o valor original do novo valor, dividindo esse resultado pelo valor original e multiplicando-o por 100:

$$\text{Variação percentual} = \left(\frac{\text{Novo valor} - \text{Valor original}}{\text{Valor original}} \cdot 100\right)\%$$

Aumentos e descontos sucessivos

Para calcular um **aumento** de certa quantidade, basta multiplicar a quantidade por: (1 + Valor da porcentagem).

Por exemplo, o aumento de 8% de 150 pode ser calculado por:

$$150 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 150 \cdot (1 + 0{,}08) = 150 \cdot 1{,}08 = 162$$

Já para calcular um **desconto** de certa quantidade, basta multiplicar a quantidade por: (1 − Valor da porcentagem).

Por exemplo, o desconto de 8% de 150 pode ser calculado por:

$$150 \cdot \left(1 - \frac{8}{100}\right) = 150 \cdot (1 - 0{,}08) = 150 \cdot 0{,}92 = 138$$

Os aumentos e descontos sucessivos são aplicados em etapas sequenciais. Quando precisamos calcular o efeito total de aumentos ou descontos sucessivos, dados em porcentagem, é possível usar a seguinte fórmula:

$$\text{Novo valor} = \text{Valor original} \cdot \left(1 \pm \frac{1^{\underline{a}}\ \text{porcentagem}}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{2^{\underline{a}}\ \text{porcentagem}}{100}\right)$$

Regra de sociedade

Em uma sociedade de dois sócios, A e B, na qual A participa com x reais e B com y reais, as fórmulas para calcular a parte do lucro que foi repartido proporcionalmente aos valores que cada sócio investiu são:

$$\text{Lucro de } A = \text{Lucro total} \cdot \frac{x}{x + y} \qquad \text{Lucro de } B = \text{Lucro total} \cdot \frac{y}{x + y}$$

Esse resultado pode ser estendido, analogamente, para 3, 4, ..., n sócios.

_ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Depois de pagar impostos e contribuir com a Previdência, os integrantes de uma família retêm uma renda total líquida de R$ 6.000,00. Eles pretendem separar 10% dessa renda líquida para aplicar em investimentos financeiros de longo prazo. Do que sobrou, pretendem utilizar 80% com despesas fixas e 20% com passeios e lazer.

I. Quanto a família pretende destinar a passeios e lazer?

(A) R$ 800,00

(B) R$ 820,00

(C) R$ 1.080,00

(D) R$ 3.280,00

(E) R$ 3.680,00

Alternativa **C**.

II. Quanto a família pretende destinar a despesas fixas?

(A) R$ 1.800,00

(B) R$ 1.820,00

(C) R$ 3.080,00

(D) R$ 4.320,00

(E) R$ 4.680,00

Alternativa **D**.

2 Ana Lúcia aplicou R$ 50.000,00 em um investimento de **renda fixa** que faz o capital dela crescer 12% ao ano, sempre em comparação com o total do ano anterior.

Assim, após um ano, o valor na aplicação desse investimento será de, aproximadamente:

(A) R$ 56.000,00.

(B) R$ 58.000,00.

(C) R$ 60.000,00.

(D) R$ 62.000,00.

(E) R$ 64.000,00.

Alternativa **A**.

renda fixa: investimento de renda fixa é um termo que se refere a qualquer tipo de investimento que tem regras de remuneração definidas no momento da aplicação no título. Os tipos de investimento de renda fixa mais utilizados são: CDB (Certificado de Depósito Bancário), LCI (Letra de Crédito Imobiliário) e LCA (Letra de Crédito do Agronegócio).

3 Uma lojista conseguiu vender 100 mil reais em produtos em janeiro de 2024. Em fevereiro, ela vendeu 30% a mais que em janeiro. Em março, vendeu 30% a mais que em fevereiro. Já, em abril, as vendas caíram 20% em relação às vendas de março.

Qual foi o valor das vendas, em reais, em abril?

(A) 169 000

(B) 160 000

(C) 152 000

(D) 140 000

(E) 135 200

Alternativa **E**.

4 Suponha que, em 2022, o preço do combustível em determinado posto de Tocantins sofreu 3 aumentos sucessivos de 10%.

Alexandru Nika/Shutterstock

A variação percentual total, após os 3 aumentos sucessivos, foi de, aproximadamente:

(A) 30%.
(B) 33%.
(C) 40%.
(D) 43%.
(E) 53%.

Alternativa **B**.

5 Em 2022, a renda de uma família aumentou 20% em relação a 2021. E, em 2023, aumentou 20% em relação a 2022.

O aumento percentual total da renda dessa família, imediatamente após esses 2 aumentos, foi de:

(A) 4%.
(B) 40%.
(C) 44%.
(D) 48%.
(E) 60%.

Alternativa **C**.

6 José Mário é proprietário de uma loja e precisa calcular os tributos sobre um produto que custa R$ 500,00. Os tributos incluem um imposto estadual de 10% sobre o preço inicial e um imposto municipal de 5% sobre o preço do produto mais o imposto estadual. Além disso, há uma taxa de processamento de 2% sobre o preço final com todos os impostos.

Qual foi o total pago por esses 3 tributos?

(A) R$ 27,50
(B) R$ 50,00
(C) R$ 55,00
(D) R$ 77,50
(E) R$ 89,05

Alternativa **E**.

7 Após décadas de trabalho, uma pessoa foi demitida e recebeu uma indenização de R$ 300.000,00. Desse valor, ela gastou uma parte e investiu outra, aplicando R$ 200.000,00 em um investimento de renda fixa que promete pagar um percentual fixo de 20% ao ano. Ou seja, o capital vai ter aumentos sucessivos de 20% ao ano, sempre na comparação com o acumulado do ano anterior.

Sabe-se que, no resgate, essa pessoa precisa pagar o imposto de renda (IR) sobre a rentabilidade do investimento, isto é, sobre a diferença entre o que ela investiu e o que recebeu. O quadro a seguir traz o percentual de IR que deve ser pago em função do intervalo de tempo da aplicação.

Intervalo de tempo de aplicação	Percentual de IR sobre a rentabilidade bruta do investimento
Até 6 meses completos	22,5%
A partir de 6 meses até 12 meses completos	20,0%
A partir de 12 meses até 24 meses completos	17,5%
A partir de 24 meses completos	15,0%

Qual é o valor do imposto de renda, em reais, que essa pessoa vai pagar ao resgatar todo o saldo da aplicação após exatos 3 anos?

(A) 18 000
(B) 14 840
(C) 21 840
(D) 22 840
(E) 51 840

Alternativa **C**.

_DICA

Na compra e venda de qualquer mercadoria, o preço de venda pode ser expresso em função dos valores do custo e do lucro da seguinte maneira:

$$\text{Venda} = \text{Custo} + \text{Lucro}$$

Além disso, é possível estabelecer relações percentuais do valor do lucro em função do preço de custo ou do preço de venda. Analise o exemplo a seguir.

Quem compra por R$ 500,00 e vende por R$ 800,00 obtém um lucro de R$ 300,00, que representa:

- $\frac{300}{500} = 0{,}60 = 60\%$ sobre o preço de custo;
- $\frac{300}{800} = 0{,}375 = 37{,}5\%$ sobre o preço de venda.

Note que, para o mesmo valor em reais, os percentuais de lucro são diferentes, pois dependem da referência.

8 A gerente de uma loja de departamentos comprou um lote de mercadorias para vender. Cada unidade lhe custou R$ 230,00. Esse produto foi vendido gerando um lucro de 65% sobre o preço de custo da mercadoria.

Qual foi o preço de venda dessa mercadoria?

(A) R$ 365,00
(B) R$ 379,50
(C) R$ 387,50
(D) R$ 395,00
(E) R$ 405,00

Alternativa **B**.

9 Um vendedor tem uma meta de lucro de 70% sobre o preço de venda de um produto. Suponha que esse produto esteja cotado no valor de R$ 600,00.

Qual deverá ser o preço de venda para que a meta seja atingida?

(A) R$ 1.120,00
(B) R$ 1.420,00
(C) R$ 1.620,00
(D) R$ 1.720,00
(E) R$ 2.000,00

Alternativa **E.**

10 Arthur é dono de uma sala comercial e contratou uma imobiliária para ajudá-lo a alugar o imóvel. A sala foi rapidamente alugada, e, pelo serviço, a imobiliária cobra 10% todo mês sobre o valor do aluguel mensal.

Para receber R$ 1.800,00, já descontados os 10% da imobiliária, por quanto Arthur precisa alugar a sala comercial?

(A) R$ 1.800,00
(B) R$ 1.900,00
(C) R$ 2.000,00
(D) R$ 2.100,00
(E) R$ 2.200,00

Alternativa **C.**

11 Fernando, Roberto e Wagner abriram uma empresa, com participação de 50%, 30% e 20%, respectivamente. Em determinado ano, cujos lucros foram de 15% do valor do faturamento, Roberto recebeu uma quantia igual a 108 mil reais relativa à participação nos lucros. Sabe-se que, do lucro da empresa, 80% foram repartidos entre os três sócios e 20% foram reinvestidos na empresa.

Qual foi o faturamento da empresa, em milhões de reais, naquele ano?

(A) 1,8
(B) 2,4
(C) 2,8
(D) 3,0
(E) 3,6

Alternativa **D.**

12 Enganando seus consumidores em relação aos descontos, uma loja aumentou em 25% o preço de suas mercadorias. Em seguida, anunciou descontos de 20%.

Qual foi a variação percentual sofrida pelo preço das mercadorias?

(A) 0%
(B) 2,5%
(C) 5,0%
(D) 7,5%
(E) 1,0%

Alternativa **A.**

13 Carlos e Amanda têm participação de 70% e de 30%, respectivamente, na sociedade de uma empresa, da qual são os únicos sócios. Em um ano, a empresa faturou 2 milhões de reais. Desse valor, 20% foi lucro. Eles decidiram dividir 60% dos lucros, de maneira proporcional às participações na sociedade, e reinvestir os 40% restantes na própria empresa.

Nessa repartição, o valor, em reais, recebido por Carlos foi de:

(A) 160 000.
(B) 168 000.
(C) 208 000.
(D) 240 000.
(E) 280 000.

Alternativa **B.**

14 Para uma temporada de ofertas, conhecida como Black Friday, um atacadista decidiu aumentar o preço dos produtos em 40% antes desse período. No primeiro dia das promoções, ele anunciou descontos de 30%.

Como essa prática costuma ser ilegal, o atacadista foi denunciado. O agente do Instituto de Defesa do Consumidor (Procon) comparou os preços imediatamente antes e após esses 2 ajustes e descobriu que a empresa, efetivamente, ofereceu um desconto de:

(A) 1%.

(B) 2%.

(C) 8%.

(D) 12%.

(E) 30%.

Alternativa **B**.

15 Isabel e Valéria entraram como sócias em um negócio. Isabel investiu um capital de 50 mil reais; e Valéria, 100 mil. Elas concorreram com outras empresas e ganharam um contrato no valor de 200 mil reais. Ao fim do processo, o lucro foi de 30% do valor do contrato, tendo sido repartido proporcionalmente entre as duas sócias, conforme o capital que cada uma investiu.

Nessas condições, a quantia que Valéria recebeu foi igual a:

(A) R$ 20.000,00.

(B) R$ 30.000,00.

(C) R$ 40.000,00.

(D) R$ 50.000,00.

(E) R$ 60.000,00.

Alternativa **C**.

16 O produto de uma loja que custava 200 reais passou a custar 250 reais após um reajuste.

De quanto foi a variação percentual desse produto?

(A) 10%

(B) 15%

(C) 20%

(D) 25%

(E) 30%

Alternativa **D**.

17 Um casal aplicou certa quantia em algumas ações que, em 2021, renderam 6% e, em 2022, renderam 7%. Eles não resgataram nenhuma quantia nesse período.

Se a quantia aplicada pelo casal foi de 50 mil reais, quanto de rendimento esse investimento rendeu até o início de 2023?

(A) 5,74 mil reais

(B) 8 mil reais

(C) 6,71 mil reais

(D) 2,95 mil reais

(E) 4 mil reais

Alternativa **C**.

ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) Uma pessoa, que perdeu um objeto pessoal quando visitou uma cidade, pretende divulgar nos meios de comunicação informações a respeito da perda desse objeto e de seu contato para eventual devolução. No entanto, ela lembra que, de acordo com o Art. 1234 do Código Civil, poderá ter que pagar pelas despesas do transporte desse objeto até sua cidade e poderá ter que recompensar a pessoa que lhe restituir o objeto em, pelo menos, 5% do valor do objeto.

Ela sabe que o custo com transporte será de um quinto do valor atual do objeto e, como ela tem muito interesse em reavê-lo, pretende ofertar o maior percentual possível de recompensa, desde que o gasto total com as despesas não ultrapasse o valor atual do objeto.

Nessas condições, o percentual sobre o valor do objeto, dado como recompensa, que ela deverá ofertar é igual a

(A) 20%
(B) 25%
(C) 40%
(D) 60%
(E) 80%

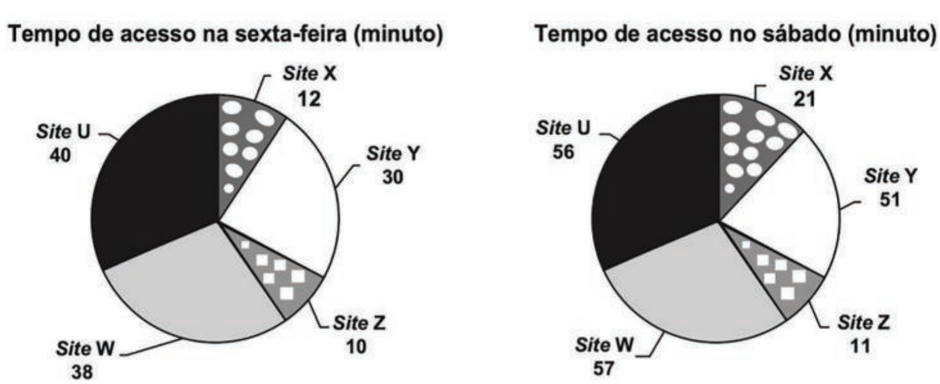
Alternativa **E.**

2 (Unicamp-SP) Uma compra no valor de 1.000 reais será paga com uma entrada de 600 reais e uma mensalidade de 420 reais. A taxa de juros aplicada na mensalidade é igual a

(A) 2%
(B) 5%
(C) 8%
(D) 10%

Alternativa **B.**

3 (Enem) Quanto tempo você fica conectado à internet? Para responder a essa pergunta foi criado um miniaplicativo de computador que roda na área de trabalho, para gerar automaticamente um gráfico de setores, mapeando o tempo que uma pessoa acessa cinco *sites* visitados. Em um computador, foi observado que houve um aumento significativo do tempo de acesso da sexta-feira para o sábado, nos cinco *sites* mais acessados. A seguir, temos os dados do miniaplicativo para esses dias.



Reprodução/ENEM, 2017.

Analisando os gráficos do computador, a maior taxa de aumento no tempo de acesso, da sexta-feira para o sábado, foi no *site*

(A) X.

(B) Y.

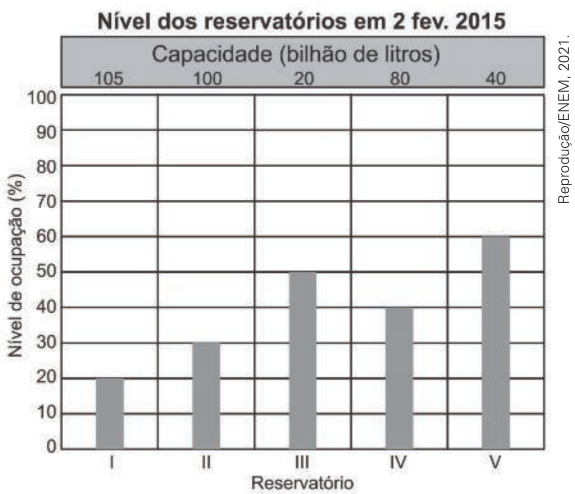
(C) Z.

(D) W.

(E) U.

Alternativa **A**.

4 (Enem) O gráfico apresenta o nível de ocupação dos cinco reservatórios de água que abasteciam uma cidade em 2 de fevereiro de 2015.



Nessa data, o reservatório com o maior volume de água era o

(A) I.

(B) II.

(C) III.

(D) IV.

(E) V.

Alternativa **D**.

5 (Enem) Em uma loja, o preço promocional de uma geladeira é de R$ 1000,00 para pagamento somente em dinheiro. Seu preço normal, fora da promoção, é 10% maior. Para pagamento feito com o cartão de crédito da loja, é dado um desconto de 2% sobre o preço normal.

Uma cliente decidiu comprar essa geladeira, optando pelo pagamento com o cartão de crédito da loja. Ela calculou que o valor a ser pago seria o preço promocional acrescido de 8%. Ao ser informada pela loja do valor a pagar, segundo sua opção, percebeu uma diferença entre seu cálculo e o valor que lhe foi apresentado.

O valor apresentado pela loja, comparado ao valor calculado pela cliente, foi

(A) R$ 2,00 menor.

(B) R$ 100,00 menor.

(C) R$ 200,00 menor.

(D) R$ 42,00 maior.

(E) R$ 80,00 maior.

Alternativa **A**.

6 (Enem)

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R$ 1250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. *Censo 2010*. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado).

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de

(A) R$ 1340,00.

(B) R$ 1349,00.

(C) R$ 1375,00.

(D) R$ 1465,00.

(E) R$ 1474,00.

Alternativa **E.**

7 (Unicamp-SP) Os preços que aparecem no cardápio de um restaurante já incluem um acréscimo de 10% referente ao total de impostos. Na conta, o valor a ser pago contém o acréscimo de 10% relativo aos serviços (gorjeta). Se o valor total da conta for p reais, o cliente estará desembolsando pelo custo original da refeição, em reais, a quantia de

(A) p / 1,20.

(B) p / 1,21.

(C) $p \times 0{,}80$.

(D) $p \times 0{,}81$.

Alternativa **B.**

8 (Enem) Uma equipe de *marketing* digital foi contratada para aumentar as vendas de um produto ofertado em um *site* de comércio eletrônico. Para isso, elaborou um anúncio que, quando o cliente clica sobre ele, é direcionado para a página de vendas do produto. Esse anúncio foi divulgado em duas redes sociais, A e B, e foram obtidos os seguintes resultados:

- rede social A: o anúncio foi visualizado por 3 000 pessoas; 10% delas clicaram sobre o anúncio e foram redirecionadas para o *site*; 3% das que clicaram sobre o anúncio compraram o produto. O investimento feito para a publicação do anúncio nessa rede foi de R$ 100,00;
- rede social B: o anúncio foi visualizado por 1 000 pessoas; 30% delas clicaram sobre o anúncio e foram redirecionadas para o *site*; 2% das que clicaram sobre o anúncio compraram o produto. O investimento feito para a publicação do anúncio nessa rede foi de R$ 200,00.

Por experiência, o pessoal da equipe de *marketing* considera que a quantidade de novas pessoas que verão o anúncio é diretamente proporcional ao investimento realizado, e que a quantidade de pessoas que comprarão o produto também se manterá proporcional à quantidade de pessoas que clicarão sobre o anúncio.

O responsável pelo produto decidiu, então, investir mais R$ 300,00 em cada uma das duas redes sociais para a divulgação desse anúncio e obteve, de fato, o aumento proporcional esperado na quantidade de clientes que compraram esse produto. Para classificar o aumento obtido na quantidade (Q) de compradores desse produto, em consequência dessa segunda divulgação, em relação aos resultados observados na primeira divulgação, o responsável pelo produto adotou o seguinte critério:

- $Q \leq 60\%$: não satisfatório;
- $60\% < Q \leq 100\%$: regular;
- $100\% < Q \leq 150\%$: bom;
- $150\% < Q \leq 190\%$: muito bom;
- $190\% < Q \leq 200\%$: excelente.

O aumento na quantidade de compradores, em consequência dessa segunda divulgação, em relação ao que foi registrado com a primeira divulgação, foi classificado como

(A) não satisfatório.
(B) regular.
(C) bom.
(D) muito bom.
(E) excelente.

Alternativa **C**.

9 (Enem) O quadro representa os gastos mensais, em real, de uma família com internet, mensalidade escolar e mesada do filho.

Internet	Mensalidade escolar	Mesada do filho
120	700	400

Reprodução/ENEM, 2020.

No início do ano, a internet e a mensalidade escolar tiveram acréscimos, respectivamente, de 20% e 10%. Necessitando manter o valor da despesa mensal total com os itens citados, a família reduzirá a mesada do filho.

Qual será a porcentagem da redução da mesada?

(A) 15,0
(B) 23,5
(C) 30,0
(D) 70,0
(E) 76,5

Alternativa **B**.

10 (Enem) Três sócios resolveram fundar uma fábrica. O investimento inicial foi de R$ 1 000 000,00. E, independentemente do valor que cada um investiu nesse primeiro momento, resolveram considerar que cada um deles contribuiu com um terço do investimento inicial.

Algum tempo depois, um quarto sócio entrou para a sociedade, e os quatro, juntos, investiram mais R$ 800 000,00 na fábrica. Cada um deles contribuiu com um quarto desse valor. Quando venderam a fábrica, nenhum outro investimento havia sido feito. Os sócios decidiram então dividir o montante de R$ 1 800 000,00 obtido com a venda, de modo proporcional à quantia total investida por cada sócio.

Quais os valores mais próximos, em porcentagens, correspondentes às parcelas financeiras que cada um dos três sócios iniciais e o quarto sócio, respectivamente, receberam?

(A) 29,60 e 11,11.
(B) 28,70 e 13,89.
(C) 25,00 e 25,00.
(D) 18,52 e 11,11.
(E) 12,96 e 13,89.

Alternativa **A**.

11 (Enem) Para construir uma piscina, cuja área total da superfície interna é igual a 40 m^2 uma construtora apresentou o seguinte orçamento:

- R$ 10 000,00 pela elaboração do projeto;
- R$ 40 000,00 pelos custos fixos;
- R$ 2 500,00 por metro quadrado para construção da área interna da piscina.

Após a apresentação do orçamento, essa empresa decidiu reduzir o valor de elaboração do projeto em 50%, mas recalculou o valor do metro quadrado para a construção da área interna da piscina, concluindo haver a necessidade de aumentá-lo em 25%. Além disso, a construtora pretende dar um desconto nos custos fixos, de maneira que o novo valor do orçamento seja reduzido em 10% em relação ao total inicial.

O percentual de desconto que a construtora deverá conceder nos custos fixos é de

(A) 23,3%
(B) 25,0%
(C) 50,0%
(D) 87,5%
(E) 100,0%

Alternativa **D**.

12 (Enem) Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente.

O mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado é

(A) 29,8.
(B) 71,0.
(C) 74,5.
(D) 75,5.
(E) 84,0.

Alternativa **C**.

13 (Fuvest-SP) Um comerciante compra calças, camisas e saias e as revende com lucro de 20%, 40% e 30% respectivamente. O preço x que o comerciante paga por uma calça é três vezes o que ele paga por uma camisa e duas vezes o que ele paga por uma saia.

Um certo dia, um cliente comprou duas calças, duas camisas e duas saias e obteve um desconto de 10% sobre o preço total.

a) Quanto esse cliente pagou por sua compra, em função de x?

b) Qual o lucro aproximado, em porcentagem, obtido pelo comerciante nessa venda?

a) $4,17x$
b) 13,72%

JORNADA

4

Juros simples e compostos


photobyphotoboy/Shutterstock

Você já comprou algo parcelado no cartão de crédito? Boa parte das vezes, os consumidores pagam juros quando parcelam uma compra. Você sabe o que são os juros?

Juro pode ser compreendido como um "aluguel" que deve ser pago ao tomar dinheiro emprestado. Há muitas maneiras de pegar dinheiro emprestado, umas mais sutis do que outras. A maneira mais evidente é quando o dinheiro é depositado na conta corrente de quem o solicita. Outra maneira é utilizando o cartão de crédito. Considere que um *smartphone* custa R$ 1.000,00, mas pode ser pago em 12 parcelas iguais de R$ 100,00. Ao comprar parcelado, o consumidor adquire o produto da loja e "aluga" o dinheiro de alguma instituição bancária ou financeira para pagar por esse produto.

Em alguns casos, essas soluções financeiras podem ser úteis na gestão do dinheiro e do orçamento. Um empréstimo pode ajudar em um momento familiar difícil, e o cartão de crédito pode gerar benefícios, por exemplo pontos, promoções exclusivas, *cashback* ou milhas para a aquisição de passagens aéreas.

Entretanto, elas também podem se tornar um problema. Quando não se paga a fatura do cartão, a dívida cresce muito rapidamente, pois as taxas de juros do **rotativo do cartão de crédito** estão entre as mais altas taxas do Brasil. Em casos de empréstimo como o cheque especial, por exemplo, para cada R$ 1.000,00 emprestados, a pessoa vai pagar em torno de R$ 80,00 por mês.

rotativo do cartão de crédito: é um tipo de empréstimo, com alta taxa de juro, oferecido quando não é realizado o pagamento total da fatura do cartão até a data do vencimento.

1. Você sabe o que são juro simples e juro composto? Explique com suas palavras o que você entende desses dois tipos de juro e em quais situações você ouviu falar deles.

2. Apresente dois impactos que uma queda de taxa na modalidade de juro composto pode causar no orçamento de uma família.

3. Pesquise os tipos de taxa de juros cobradas em diferentes modalidades de empréstimo, como financiamento de imóveis ou veículos, cheque especial e cartão de crédito. Depois, compartilhe com os colegas o que você descobriu.

Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Um *tablet*, cujo preço à vista foi inicialmente anunciado por R$ 4.000,00, pode ser adquirido de duas maneiras: à vista com 5% de desconto ou em 8 prestações de R$ 500,00. Paula tem os R$ 4.000,00 para o pagamento à vista, mas decidiu avaliar uma segunda estratégia. Ela considerou aplicar o valor do *tablet* a 1% ao mês e, todo mês, sacar o necessário para pagar cada prestação do equipamento, conforme o vencimento.

Ao aplicar o dinheiro e parcelar a compra, o saldo inicial do mês é igual ao saldo final do mês anterior mais 1% desse saldo. Assim, todo mês, Paula receberia 1% do saldo do mês anterior, adicionando esse valor ao que já tinha, e só depois ela pagaria a prestação do mês.

a) Determine quantos reais Paula pode receber, ao final dos 8 meses, aplicando o dinheiro a 1% ao mês. Complete o quadro a seguir para simular essa estratégia.

Mês	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Saldo inicial (em R$)	4.000,00								
Pagamento da parcela (em R$)		500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00
Saldo final (em R$)	4.000,00								

b) Se ela adquirir o *tablet* à vista, qual será o valor do desconto em reais?

c) Qual é a estratégia mais vantajosa do ponto de vista financeiro: comprar o produto à vista ou investir o dinheiro e fazer retiradas mensais para pagar parcelado?

_resolvendo a questão

a) No primeiro momento (mês zero), Paula investiu os R$ 4.000,00, e o saldo final é igual ao inicial, pois não há nenhum pagamento a ser feito.

No mês 1, ela recebe 1% de R$ 4.000,00, que equivale a R$ 40,00. O total é de R$ 4.000,00 + R$ 40,00 = R$ 4.040,00.

Ao pagar a 1ª parcela, o saldo é:

R$ 4.040,00 − R$ 500,00 = R$ 3.540,00.

Acompanhe o cálculo para os saldos inicial e final do mês 2:

1% de R$ 3.540,00 = R$ 35,40

R$ 3.540,00 + R$ 35,40 = R$ 3.575,40 (saldo inicial)

R$ 3.575,40 − R$ 500,00 = R$ 3.075,40 (saldo final)

Seguindo o mesmo procedimento para os demais meses, observe como fica o quadro completo:

Mês	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Saldo inicial (em R$)	4.000,00	4.040,00	3.575,40	3.106,15	2.632,22	2.153,54	1.670,07	1.181,77	688,59
Pagamento da parcela (em R$)	0,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00	500,00
Saldo final (em R$)	4.000,00	3.540,00	3.075,40	2.606,15	2.132,22	1.653,54	1.170,07	681,77	188,59

Como o processo se repete até o 8º mês, pode-se concluir que, ao pagar todas as parcelas, Paula obteve um ganho, em relação ao dinheiro investido, de R$ 188,59.

b) Se adquirir o *tablet* à vista, ela vai obter um desconto de 5% de R$ 4.000,00 = = R$ 200,00.

c) Do ponto de vista financeiro, é mais vantajoso pagar à vista, já que o valor do desconto é maior do que seriam os ganhos com o investimento.

_agora é com você

1 Um produto anunciado por R$ 680,00 no pagamento com cartão pode ser adquirido à vista, por meio do Pix, com 10% de desconto.

Qual é o valor do produto pagando à vista?

(A) R$ 68,00

(B) R$ 606,80

(C) R$ 612,00

(D) R$ 618,00

(E) R$ 668,00

Alternativa **C**.

2 Mariana cobrou 400 reais por um serviço de edição de vídeos, mas só recebeu 2 meses depois. O contratante decidiu, voluntariamente, pagar juros de 8% sobre o período.

Quanto Mariana recebeu pelo serviço?

(A) R$ 308,00

(B) R$ 320,00

(C) R$ 408,00

(D) R$ 432,00

(E) R$ 482,00

Alternativa **D**.

3 Natália é engenheira e vai prestar um serviço, em uma obra, por um período de 2 meses. Como foi combinado que só receberia o pagamento um mês após a conclusão do trabalho, ela cobrou R$ 2.500,00. Contudo, a empresa contratante ofereceu como pagamento R$ 2.000,00 a serem pagos assim que o serviço for finalizado.

Natália está avaliando se a proposta é interessante do ponto de vista financeiro. Para isso, ela deseja saber se há algum investimento que resulte em um montante de R$ 2.500,00, tendo R$ 2.000,00 como capital inicial.

Qual deve ser a taxa de juro do investimento procurado por Natália?

(A) 5%

(B) 20%

(C) 25%

(D) 30%

(E) 50%

Alternativa **C.**

4 Roberto tinha de pagar um boleto no valor de R$ 2.392,29, com vencimento para 2 de agosto. Entretanto, ele só conseguiu pagar essa conta no dia 22 de agosto.

Considere as instruções a seguir apresentadas no boleto.

> Após o vencimento, pagável em qualquer rede bancária, acrescido de multa fixa de 2%, mais atualização monetária de R$ 0,79 por dia de atraso.
>
> SR. CAIXA, NÃO CONCEDER DESCONTOS.

O valor total pago por Roberto foi de, aproximadamente:

(A) R$ 2.455,94.

(B) R$ 2.457,94.

(C) R$ 2.459,94.

(D) R$ 2.461,94.

(E) R$ 2.463,94.

Alternativa **A.**

5 Marcelo alugou um apartamento por R$ 3.000,00 mensais, com vencimento do aluguel para o dia 10 de cada mês. Se pagar até o dia 5, ele ganha 5% de desconto no valor do aluguel.

Se Marcelo pagar até o dia 5 todos os aluguéis durante um ano, quantos reais economizará?

(A) R$ 1.800,00

(B) R$ 1.700,00

(C) R$ 1.600,00

(D) R$ 1.500,00

(E) R$ 1.400,00

Alternativa **A.**

6 Ester alugou um apartamento, em fevereiro de 2019, por R$ 2.400,00. Por meio do contrato de locação, ficou acordado que, a cada 12 meses, o valor seria reajustado pelo Índice Geral de Preços do Mercado (IGP-M) acumulado nos últimos 12 meses. Veja, na tabela, os valores desse índice nos primeiros 6 meses de 2020.

IGP-M – 1º semestre 2020			
Mês	Mensal (em %)	Acumulado nos últimos 12 meses (em %)	Acumulado no ano (em %)
Janeiro	0,48	7,81	0,48
Fevereiro	−0,04	6,82	0,44
Março	1,24	6,81	1,69
Abril	0,80	6,68	2,50
Maio	0,28	6,51	2,79
Junho	1,56	7,31	4,39

Fonte dos dados: IGP-M: resultados 2020. *FGV Notícias*, 31 jan. 2021. Disponível em: https://portal.fgv.br/noticias/igp-m-resultados-2020. Acesso em: 20 out. 2023.

Em março de 2020, o aluguel será reajustado. Qual é o valor, em reais, que mais se aproxima do novo aluguel conforme o índice de reajuste acertado?

(A) 2 480

(B) 2 563

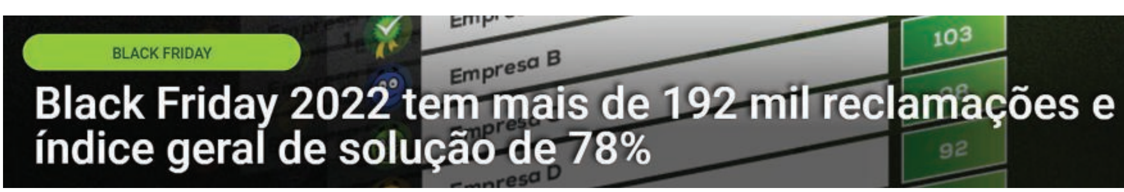
(C) 2 596

(D) 2 632

(E) 2 684

Alternativa **B**.

7 Leia a manchete a seguir.



Reprodução/https://blog.reclameaqui.com.br

CARDOSO, Ana Paula. *Black Friday* 2022 tem mais de 192 mil reclamações e índice geral de solução de 78%. *Blog Reclame Aqui*, 9 fev. 2023. Disponível em: https://blog.reclameaqui.com.br/black-friday-2022-mais-de-192-mil-reclamacoes-no-reclame-aqui/. Acesso em: 20 out. 2023.

Considere que um consumidor registrou uma reclamação sobre o preço de um produto ter aumentado em 30% duas semanas antes de a Black Friday começar e, no primeiro dia de promoção, a loja ter anunciado um desconto de 20%.

Comparando as situações imediatamente antes e depois do aumento e do subsequente desconto, é possível afirmar que a empresa, de fato, aumentou os preços em:

(A) 1%.

(B) 2%.

(C) 3%.

(D) 4%.

(E) 6%.

Alternativa **D**.

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Taxa de variação percentual

A taxa de variação percentual é dada pelo quociente $\frac{V_F - V_I}{V_I}$, em que V_F é o valor final (ou capital final, ou valor futuro, ou montante) e V_I é o valor inicial (ou capital inicial).

Juro simples

Um capital inicial C, aplicado a uma taxa de juro i ao período, transforma-se após t períodos em um montante M, calculado pela fórmula: $M = C + J = C + C \cdot i \cdot t = C\,(1 + it)$, em que J é o juro e t é o intervalo de tempo de aplicação.

O crescimento do montante M é do tipo linear porque o juro em cada período é constante e incide sempre sobre o capital inicial. Assim, os juros acumulados são diretamente proporcionais ao intervalo de tempo e à taxa de juro.

Juro composto

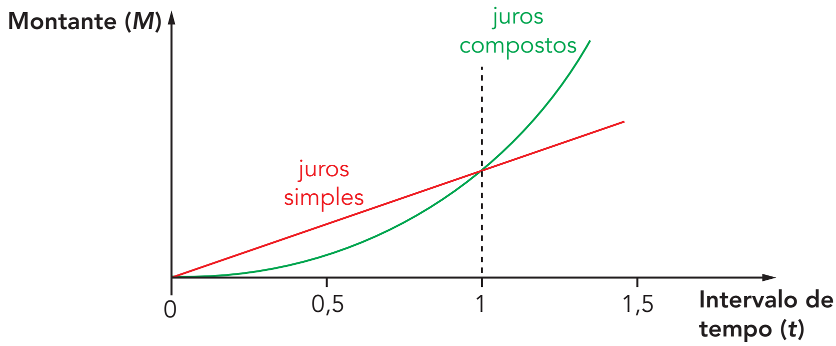
Um capital inicial C, a uma taxa de juro i ao período, transforma-se após t períodos em um montante M, calculado pela fórmula:

$$M = C\,(1 + i)^t$$

Nesse caso, o crescimento do montante M é do tipo exponencial porque, a cada período, o capital acumulado é multiplicado por $(1 + i)$. Então, após t períodos, o capital inicial será multiplicado pelo produto $(1 + i) \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) \cdot \ldots \cdot (1 + i)$, de t fatores iguais a $(1 + i)$.

Gráficos

Quando o tempo de um empréstimo fica situado entre 0 e 1 período (transações a curto prazo), as instituições bancárias geralmente cobram juro simples. Isso ocorre também quando alguém paga uma conta atrasada, com até 30 dias de atraso. Nesses casos, os juros cobrados são simples, pois eles geram um montante maior do que o calculado no sistema de juro composto. O crescimento do montante de aplicações a juros simples é linear; já o crescimento de aplicações a juros compostos é exponencial. O gráfico a seguir compara os dois casos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O impacto dos juros compostos na vida das pessoas é marcado por um efeito chamado popularmente de "bola de neve", pois enquanto os juros se acumulam, o montante total cresce exponencialmente. Isso pode ser benéfico em investimentos de longo prazo, nos quais a quantia aplicada pode resultar em pagamentos futuros significativamente mais altos.

ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Márcio solicitou um empréstimo no valor de R$ 2.000,00 (valor inicial) a uma instituição bancária. Após 2 meses, ele pagou R$ 2.400,00 (valor final) e quitou a dívida com o banco.

A que taxa de juro Márcio ficou submetido nesse período de 2 meses?

(A) 10%

(B) 20%

(C) 24%

(D) 40%

(E) 44%

Alternativa **B**.

2 Murilo investiu R$ 20.000,00 e, após 1 ano, resgatou R$ 23.000,00. Considere que esse investimento é isento de cobrança de imposto de renda.

A taxa de juro desse investimento foi de:

(A) 3%.

(B) 10%.

(C) 13%.

(D) 15%.

(E) 30%.

Alternativa **D**.

3 Joana pagou um boleto de R$ 4.000,00 com atraso de 20 dias. A empresa que vai receber o dinheiro com atraso cobra juros simples de 6% ao mês.

gpointstudio/Shutterstock

Uma das maneiras de pagar um boleto bancário é apontar a câmera do celular para o QR code que aparece na tela do computador e prosseguir com o pagamento pelo aplicativo do banco.

O valor dos juros pagos, considerando um mês de 30 dias, foi:

(A) R$ 120,00.

(B) R$ 140,00.

(C) R$ 160,00.

(D) R$ 180,00.

(E) R$ 200,00.

Alternativa **C**.

4 Um investimento rendeu, em 2023, 10% ao trimestre, por 2 trimestres seguidos. Qual foi a taxa de juro proporcionada pelo investimento em 1 semestre?

(A) 2%

(B) 20%

(C) 21%

(D) 30%

(E) 33%

Alternativa **C**.

5 Quanto tempo leva, aproximadamente, para uma pessoa que investiu R$ 10.000,00 em uma aplicação com rendimento de 1% ao mês atingir o montante de R$ 20.000,00 no regime de juro composto? Use o quadro a seguir.

n	36	48	60	66	70	72	78	84
$1{,}01^n$	1,430769	1,612226	1,816697	1,92846	2,006763	2,047099	2,173037	2,306723

(A) 36 meses

(B) 48 meses

(C) 60 meses

(D) 70 meses

(E) 84 meses

Alternativa **D**.

6 Vânia investiu R$ 5.000,00 em uma aplicação que paga uma taxa de juro composto de 4% ao ano. Qual será o saldo de Vânia após 3 anos?

(A) R$ 5.424,32

(B) R$ 5.524,32

(C) R$ 5.624,32

(D) R$ 5.724,32

(E) R$ 5.824,32

Alternativa **C**.

7 Se você investir R$ 1.000,00 a uma taxa de juros compostos de 6% ao ano, quanto terá após 2 anos?

(A) R$ 1.123,00

(B) R$ 1.123,60

(C) R$ 1.220,00

(D) R$ 1.220,60

(E) R$ 1.260,00

Alternativa **B**.

8 Uma pessoa quer acumular R$ 100.000,00 em 10 anos por meio de um investimento regido por juro composto. Se a taxa de juro composto é de 8% ao ano, qual é, aproximadamente, o valor que essa pessoa precisa investir hoje?

Considere que $1{,}08^{10} \simeq 2{,}208040$.

(A) R$ 45.289,03

(B) R$ 46.289,03

(C) R$ 47.289,03

(D) R$ 48.289,03

(E) R$ 49.289,03

Alternativa **A.**

9 O patrimônio dos irmãos Arthur e Bruno, no período de 2015 a 2020, cresceu de maneira aproximadamente linear, ano após ano, conforme o quadro a seguir.

Ano	Patrimônio de Arthur	Patrimônio de Bruno
2015	R$ 600.000,00	R$ 665.000,00
2016	R$ 635.000,00	R$ 680.000,00
2017	R$ 670.000,00	R$ 695.000,00
2018	R$ 705.000,00	R$ 710.000,00
2019	R$ 740.000,00	R$ 725.000,00
2020	R$ 775.000,00	R$ 740.000,00

Dados elaborados para fins didáticos.

Se essa evolução patrimonial fosse comparada a um investimento a juro simples, tomando como valores iniciais os de 2015, cada irmão receberia, aproximadamente, taxas anuais de juros equivalentes a:

(A) 5,8% e 2,8%.

(B) 5,8% e 2,3%.

(C) 7,2% e 2,9%.

(D) 7,2% e 2,8%.

(E) 6,4% e 2,9%.

Alternativa **B.**

10 Leia o texto a seguir.

Em setembro de 2023, a taxa Selic está em 12,75% ao ano. Assim, o rendimento da poupança é de 0,5% ao mês + Taxa Referencial. Ou seja, o rendimento anual é de 7,76% ao ano ou cerca de 0,6248% ao mês.

GALHARDO, André. Rendimento da poupança hoje e acumulado em 2023. *Remessa Online*, 20 set. 2023. Disponível em: https://www.remessaonline.com.br/blog/rendimento-da-poupanca-saiba-quanto-rende-de-juros-hoje. Acesso em: 23 out. 2023.

Considere os casos de Bianca e de Gabriel:

- Bianca investiu 10 000 reais na poupança, em janeiro de 2021, a uma taxa de 0,6% ao mês. Suponha que essa taxa seja fixa pelos próximos anos.
- Na mesma data e na mesma instituição bancária que Bianca fez seu investimento, Gabriel contraiu uma dívida de 10 000 reais a uma taxa de juros de 10% ao mês. Ele pagou a dívida, de uma única vez, ao final de exatos 4 meses.

Quantos meses serão necessários, no mínimo, para que o montante do investimento de Bianca seja maior ou igual ao valor que Gabriel pagou para quitar a dívida dele?

(A) 46 meses

(B) 64 meses

(C) 67 meses

(D) 70 meses

(E) 77 meses

Alternativa **B**.

_AMPLIANDO

O Serasa (Serviços de Assessoria S.A.) é uma empresa que monitora a saúde financeira das pessoas. Nesse monitoramento, as empresas comunicam ao Serasa quando parcelas, faturas, prestações são pagas em atraso ou quando não são pagas.

Para o consumidor, o Serasa estabelece um *score*, entre 0 e 1000, de acordo com os compromissos financeiros firmados e com o cumprimento de acordos de dívida. Um consumidor cujo *score* é próximo de 1000 é um cliente que honra todos os seus compromissos.

Acesse o QR code para descobrir algumas ações que ajudam a aumentar o *score*.

11 Empresas financeiras disponibilizam a seus clientes várias opções de crédito além do empréstimo tradicional. Uma dessas opções é o financiamento estudantil, que é oferecido para estudantes matriculados em curso superior de universidades particulares.

Geralmente, o financiamento estudantil tem um prazo maior para ser quitado, além de taxas de juros menores do que a modalidade tradicional de empréstimo.

Em parceria com uma universidade, um banco oferece um financiamento estudantil para o curso de Direito. O valor total do curso é R$ 48.000,00 e o financiamento deve ser pago em 84 meses, com taxa de juros compostos de 0,61% ao mês.

Qual é o valor aproximando do financiamento desse curso?

Considere $1{,}0061^{84} \simeq 1{,}67$.

(A) R$ 50.000,00

(B) R$ 60.500,00

(C) R$ 70.090,00

(D) R$ 75.200,00

(E) R$ 80.160,00

Alternativa **E**.

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Uece) Uma loja vende um aparelho de TV, com a seguintes condições de pagamento: entrada no valor de R$ 800,00 e um pagamento de R$ 450,00 dois meses depois. Se o preço do televisor à vista é de R$ 1.200,00, então, a taxa de juros simples mensal embutida no pagamento é

(A) 6,25%.

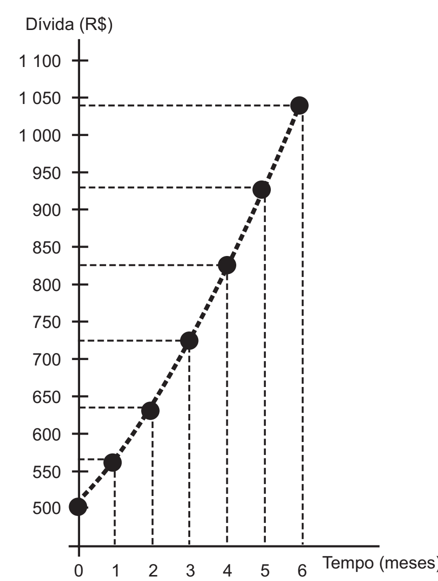
(B) 7,05%.

(C) 6,40%.

(D) 6,90%.

Alternativa **A**.

2 (Enem) Um trabalhador possui um cartão de crédito que, em determinado mês, apresenta o saldo devedor a pagar no vencimento do cartão, mas não contém parcelamentos a acrescentar em futuras faturas. Nesse mesmo mês, o trabalhador é demitido. Durante o período de desemprego, o trabalhador deixa de utilizar o cartão de crédito e também não tem como pagar as faturas, nem a atual nem as próximas, mesmo sabendo que, a cada mês, incidirão taxas de juros e encargos por conta do não pagamento da dívida. Ao conseguir um novo emprego, já completados 6 meses de não pagamento das faturas, o trabalhador procura renegociar sua dívida. O gráfico mostra a evolução do saldo devedor.



Com base no gráfico, podemos constatar que o saldo devedor inicial, a parcela mensal de juros e a taxa de juros são

(A) R$ 500,00; constante e inferior a 10% ao mês.

(B) R$ 560,00; variável e inferior a 10% ao mês.

(C) R$ 500,00; variável e superior a 10% ao mês.

(D) R$ 560,00; constante e superior a 10% ao mês.

(E) R$ 500,00; variável e inferior a 10% ao mês.

Alternativa **C**.

3 (UERJ) Na compra de um fogão, os clientes podem optar por uma das seguintes formas de pagamento:

- à vista, no valor de R$ 860,00;
- em duas parcelas fixas de R$ 460,00, sendo a primeira paga no ato da compra e a segunda 30 dias depois.

A taxa de juros mensal para pagamentos não efetuados no ato da compra é de:

(A) 10%

(B) 12%

(C) 15%

(D) 18%

Alternativa **C.**

_DICA

A taxa administrativa bancária é o valor cobrado pelo banco para gerenciar e administrar o capital investido em uma aplicação. Portanto, é um valor descontado do rendimento gerado pela aplicação.

4 (Enem) Um investidor deseja aplicar R$ 10.000,00 durante um mês em um dos fundos de investimento de um banco. O agente de investimentos desse banco apresentou dois tipos de aplicações financeiras: a aplicação Básica e a aplicação Pessoal, cujas informações de rendimentos e descontos de taxas administrativas mensais são apresentadas no quadro.

Aplicação	Taxa de rendimento mensal	Taxa administrativa mensal
Básica	0,542%	R$ 0,30
Pessoal	0,560%	3,8% sobre o rendimento mensal

Reprodução/ENEM, 2020.

Consideradas as taxas de rendimento e administrativa, qual aplicação fornecerá maior valor de rendimento líquido a esse investidor e qual será esse valor?

(A) Básica, com rendimento líquido de R$ 53,90.

(B) Básica, com rendimento líquido de R$ 54,50.

(C) Pessoal, com rendimento líquido de R$ 56,00.

(D) Pessoal, com rendimento líquido de R$ 58,12.

(E) Pessoal, com rendimento líquido de R$ 59,80.

Alternativa **A.**

5 (Enem)

O Conselho Monetário Nacional (CMN) determinou novas regras sobre o pagamento mínimo da fatura do cartão de crédito, a partir do mês de agosto de 2011. A partir de então, o pagamento mensal não poderá ser inferior a 15% do valor total da fatura. Em dezembro daquele ano, outra alteração foi efetuada: daí em diante, o valor mínimo a ser pago seria de 20% da fatura.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 29 fev. 2012.

Um determinado consumidor possuía no dia do vencimento, 01/03/2012, uma dívida de R$ 1.000,00 na fatura de seu cartão de crédito. Se não houver pagamento do valor total da fatura, são cobrados juros de 10% sobre o saldo devedor para a próxima fatura. Para quitar sua dívida, optou por pagar sempre o mínimo da fatura a cada mês e não efetuar mais nenhuma compra.

A dívida desse consumidor em 01/05/2012 será de

(A) R$ 600,00.
(B) R$ 640,00.
(C) R$ 722,50.
(D) R$ 774,40.
(E) R$ 874,22.

Alternativa **D**.

6 (UERJ) Em uma revendedora, uma motocicleta custa à vista R$ 10.404,00. Esse valor também pode ser pago a prazo, sem juros, em duas parcelas de R$ 5.202,00, sendo a primeira um mês após a compra e a segunda dois meses após a compra.

Um comprador tem o valor de R$ 10.404,00 em uma aplicação que rende juros de 2% ao mês. Ele decide manter esse valor aplicado e, ao final do primeiro mês, retira apenas R$ 5.202,00 para pagar a primeira parcela. Um mês depois retira R$ 5.202,00 e faz o pagamento da segunda parcela. Isso equivale a ter um desconto no ato da compra.

Esse desconto, em percentual, está mais próximo de:

(A) 3,0%
(B) 3,5%
(C) 4,0%
(D) 4,5%

Alternativa **A**.

7 (Enem) Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1 + i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00 a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para $\ell n\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para $\ell n\,(1{,}0132)$.

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

(A) 56ª
(B) 55ª
(C) 52ª
(D) 51ª
(E) 45ª

Alternativa **C**.

DICA

O **logaritmo natural**, também conhecido como logaritmo neperiano, é o logaritmo cuja base é o número ***e*** (número de Euler), que vale aproximadamente 2,718. A notação mais usada para o logaritmo natural é $\ell n\,(x)$.

Assim, tem-se que: $\boldsymbol{\ell n\,(x) = \log_e(x)}$.

Lembre-se também que pela definição de logaritmos, $\log_e(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$.

8 (UERJ) Os clientes de um banco podem realizar apenas duas operações financeiras:

- fazer investimentos que rendem juros compostos a uma taxa mensal de 1%; ou
- pegar empréstimos com juros compostos a uma taxa mensal de 5%.

O banco usa o dinheiro dos investimentos para conceder os empréstimos, obtendo lucro nessas transações.

Considere que um cliente X investiu R$ 1.000,00 e que o banco emprestou esse valor a um cliente Y. Após 12 meses, o cliente X recebeu o montante pela aplicação nesse período e Y quitou o empréstimo.

Admitindo $(1{,}01)^{12} = 1{,}13$ e $(1{,}05)^{12} = 1{,}80$, o lucro, em reais, obtido pelo banco com essas duas operações financeiras é igual a:

(A) 470

(B) 520

(C) 670

(D) 820

Alternativa **C**.

9 (Enem) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de

(A) 398,02.

(B) 400,00.

(C) 401,94.

(D) 404,00.

(E) 406,02.

Alternativa **B**.

10 (UERJ) Ao se aposentar aos 65 anos, um trabalhador recebeu seu Fundo de Garantia por Tempo de Serviço (FGTS) no valor de R$ 50.000,00 e resolveu deixá-lo em uma aplicação bancária, rendendo juros compostos de 4% ao ano, até obter um saldo de R$ 100.000,00. Se esse rendimento de 4% ao ano não mudar ao longo de todos os anos, o trabalhador atingirá seu objetivo após x anos.

Considerando $\log(1{,}04) = 0{,}017$ e $\log 2 = 0{,}301$, o valor mais próximo de x é:

(A) 10

(B) 14

(C) 18

(D) 22

Alternativa **C**.

11 (Enem) Um rapaz possui um carro usado e deseja utilizá-lo como parte do pagamento na compra de um carro novo. Ele sabe que, mesmo assim, terá que financiar parte do valor da compra.

Depois de escolher o modelo desejado, o rapaz faz uma pesquisa sobre as condições de compra em três lojas diferentes. Em cada uma, é informado sobre o valor que a loja pagaria por seu carro usado, no caso de a compra ser feita na própria loja. Nas três lojas são cobrados juros simples sobre o valor a ser financiado, e a duração do financiamento é de um ano. O rapaz escolherá a loja em que o total, em real, a ser desembolsado será menor. O quadro resume o resultado da pesquisa.

Loja	Valor oferecido pelo carro usado (R$)	Valor do carro novo (R$)	Percentual de juros (%)
A	13 500,00	28 500,00	18 ao ano
B	13 000,00	27 000,00	20 ao ano
C	12 000,00	26 500,00	19 ao ano

A quantia a ser desembolsada pelo rapaz, em real, será

(A) 14 000.

(B) 15 000.

(C) 16 800.

(D) 17 255.

(E) 17 700.

Alternativa **C**.

12 (UERJ) Um capital de C reais foi investido a juros compostos de 10% ao mês e gerou, em três meses, um montante de R$ 53.240,00.

Calcule o valor, em reais, do capital inicial C.

R$ 40.000,00

13 (Uece) Renato contratou um empréstimo de R$ 1.400,00, para pagar um mês depois, com juros de 15% ao mês. Ao final do mês, não podendo pagar o total, deu por conta apenas R$ 750,00 e, para o restante, firmou um novo contrato nas mesmas bases do anterior, o qual foi pago integralmente um mês depois. O valor do último pagamento foi

(A) R$ 889,00.

(B) R$ 939,00.

(C) R$ 989,00.

(D) R$ 1.009,00.

Alternativa **C**.

JORNADA 5

Equações e funções de 1º grau

mrmohock/Shutterstock

Você já ouviu falar de ***cashback***? Alguma vez você fez uso de algum tipo de *cashback*? Esse termo vem se tornando cada dia mais comum. Mas o que significa *cashback*?

Resumidamente, *cashback* é a prática de devolver ao cliente, direta ou indiretamente, parte do dinheiro que ele pagou por um serviço ou produto. Diversas lojas o utilizam como uma maneira de atrair e fidelizar os clientes. Afinal, quem não quer ter um desconto ao realizar uma compra?

Existem 2 tipos principais de *cashback*. O primeiro tipo, de menor adesão, permite que o cliente realmente receba uma porcentagem do dinheiro investido no produto ou serviço de volta em sua conta. Porém, a modalidade de *cashback* que tem predominado é a que gera essa porcentagem de dinheiro em um tipo de carteira digital, que pode ser usada para abater no valor de futuras compras na mesma loja ou rede.

A segunda opção geralmente oferta ao cliente essa vantagem desde que o valor depositado na carteira digital seja usado até determinada data, ou seja, há validade para o uso desse **crédito** em compras posteriores.

Além do retorno ao cliente, muitos programas de *cashback* oferecem promoções sazonais ou bônus especiais, tornando a prática ainda mais atraente.

***cashback*:** "dinheiro de volta", em tradução livre.

crédito: nesse contexto, é o valor disponibilizado para que o cliente abata em outras compras.

1. Você acha que o oferecimento de *cashback* é vantajoso? Em caso afirmativo, cite uma vantagem para quem compra e uma para quem está vendendo.

2. Como você faria para construir uma expressão matemática que calcule o valor de *cashback* a ser recebido em uma compra?

3. De que maneira você calcularia um *cashback* de 2% do valor de uma compra?

Respostas pessoais.

Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Uma loja criou uma tabela que informa o valor em reais do *cashback* conforme o valor gasto na compra. O valor do *cashback* pode ser utilizado pelo cliente na próxima compra como desconto.

***Cashback* da loja**	
Valor da compra	Valor do *cashback*
R$ 50,00	R$ 2,50
R$ 100,00	R$ 5,00
R$ 200,00	R$ 10,00
R$ 1.000,00	R$ 50,00

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Qual expressão matemática se pode construir para representar o valor do *cashback* sendo x o valor gasto em reais na compra?

b) Analisando a tabela, percebemos o padrão usado para calcular o *cashback* de determinada compra. Com base nessa análise, o que podemos dizer que ocorre com o *cashback* quando se dobra o valor de uma compra? E o que ocorre se o valor da compra for reduzido à terça parte?

c) Qual é o valor, em reais, de uma compra que gerou um *cashback* de 28 reais para um cliente?

d) Qual é a porcentagem que o valor do *cashback* representa em relação ao valor gasto?

Visual Generation/Shutterstock

_resolvendo a questão

a) De acordo com os dados da tabela, é possível perceber que há um padrão de retorno: o valor do *cashback* é obtido ao dividirmos o valor gasto por 20.

Assim, sendo x o valor gasto, o valor do *cashback* pode ser calculado por $\frac{x}{20}$. Logo, se o valor gasto for 50 reais, o valor do *cashback* será $\frac{50}{20} = 2{,}5$, ou seja, 2,50 reais, conforme apresentado na tabela.

Note que o valor a receber depende do valor gasto: quanto maior o valor da compra, maior será a quantia a receber.

Uma **expressão algébrica**, como o próprio nome sugere, é uma expressão matemática que contém termos algébricos, mas não possui uma igualdade explícita. Por exemplo, $\frac{x}{20}$ é uma expressão algébrica.

Porém, ao igualar essa expressão a algum número, como $\frac{x}{20} = 5$, obtém-se uma **equação de 1º grau**, visto que uma equação é caracterizada por ter o sinal de igualdade. Repare que, nesse caso, é possível determinar o valor do termo desconhecido x.

b) Sendo x o valor da compra, se o valor da compra dobrar ($2x$), então o valor a receber de *cashback* será:

$$\frac{2x}{20} = 2 \cdot \left(\frac{x}{20}\right)$$

Logo, o valor do *cashback* também será o dobro. De modo análogo, ao reduzir o valor da compra à terça parte, o *cashback* também será reduzido à terça parte da compra inicial.

c) Para calcular o valor de uma compra que teve um *cashback* de 28 reais, basta igualar o valor de 28 à expressão e resolver a equação de 1º grau:

$$\frac{x}{20} = 28 \Rightarrow x = 28 \cdot 20 = 560$$

Logo, a compra foi de 560 reais.

d) Para calcular a porcentagem do valor de *cashback* em relação ao valor gasto, pode-se dividir um dos valores que aparecem na tabela de *cashback* recebido pelo respectivo valor gasto. Escolhendo o valor de *cashback* de 10 reais, em relação ao valor gasto de 200 reais, tem-se:

$$\frac{10}{200} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$$

Note que o valor obtido de 5% será o mesmo para qualquer linha da tabela que se escolha, uma vez que há uma proporção linear entre todos os valores. Se fosse escolhido o valor de *cashback* de 50 reais em relação ao valor gasto de 1000 reais, obter-se-ia:

$$\frac{50}{1000} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0{,}05 = 5\%$$

_agora é com você

1 A informação detalhada nas bulas de medicamentos desempenha um papel crucial na segurança e na eficácia dos tratamentos médicos. Na descrição da bula de um medicamento está escrito que, em cada dosagem, deve ser administrada uma quantidade mínima de 15 mg desse medicamento e mais 10 mg para cada quilograma do paciente.

Considerando que um paciente tem massa corporal de 58 kg, qual é a quantidade total, em miligramas, desse medicamento que ele deve receber como dose adequada para garantir a eficácia e a segurança do tratamento?

(A) 208

(B) 580

(C) 595

(D) 870

(E) 880

Alternativa **C.**

2 Em uma empresa, o custo total C, em reais, para produzir x unidades de um produto é dado por $C = 200 + 10x$.

Sabendo que em um determinado mês foram produzidos 700 produtos, qual foi o custo da empresa nesse mês?

(A) 200

(B) 700

(C) 5 000

(D) 6 000

(E) 7200

Alternativa **E.**

3 Um objeto movimenta-se em velocidade constante, e sua posição em metros é calculada por meio da expressão algébrica: $10 + 5t$, em que t representa o intervalo de tempo em segundos. Para percorrer certa distância, o objeto gastou 50 segundos.

Sua posição, em metros, depois de percorrer essa distância em 50 segundos é igual a:

(A) 15.

(B) 60.

(C) 250.

(D) 260.

(E) 750.

Alternativa **D.**

4 Um produto custava x reais e sofreu um desconto de 5% no pagamento à vista. O preço desse produto, em reais, após o desconto, pode ser calculado por qual expressão algébrica?

(A) $x - 5$

(B) $0{,}5x$

(C) $0{,}05x$

(D) $0{,}95x$

(E) $1{,}05x$

Alternativa **D.**

5 Uma equipe de revisão trabalha em uma coleção de livros. Dois revisores recebem, cada um, R$ 2.000,00 por semana para revisar livros inteiros. Cada um dos demais revisores revisa 3 capítulos por semana e recebe R$ 100,00 por capítulo revisado.

Se o número total de revisores da equipe é x, qual expressão representa, em reais, o valor pago semanalmente a todos os revisores?

(A) $100x + 1900$

(B) $100x + 2000$

(C) $100x + 2100$

(D) $300x + 2300$

(E) $300x + 3400$

Alternativa **E.**

6 A média das idades de três irmãs é de 22 anos. Sabendo que as idades são consecutivas, qual é a idade da irmã mais velha?

(A) 21 anos

(B) 22 anos

(C) 23 anos

(D) 24 anos

(E) 25 anos

Alternativa **C.**

7 A soma de dois números é igual a 52. Se um dos números tem 7 unidades a mais que a metade do outro número, qual é o valor do menor número?

(A) 8

(B) 15

(C) 22

(D) 30

(E) 37

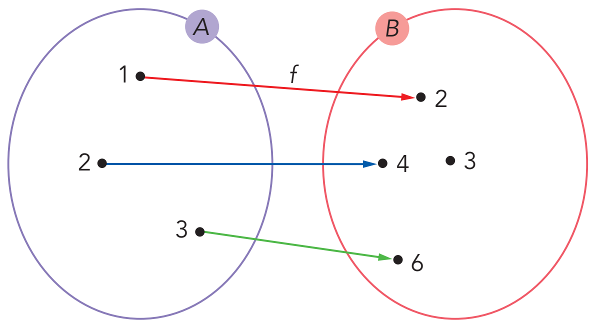
Alternativa **C.**

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Definição de função

Considere os conjuntos *A* e *B* representados pelos diagramas a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Observe que todos os elementos de *A* estão ligados a algum elemento de *B*. Para toda relação entre 2 conjuntos em que essa condição é satisfeita, diz-se que é uma **função** de *A* em *B*, cuja representação é: $f: A \rightarrow B$.

- **Domínio** da função: o conjunto *A*.
- **Contradomínio** da função: o conjunto *B*.
- **Imagem** da função: subconjunto com todos os elementos de *B* que estão relacionados a algum elemento de *A*.
- **Lei de formação da função**: regra que relaciona os elementos do domínio com os elementos do contradomínio.

Nesse exemplo:

- Domínio da função: o conjunto $\{1, 2, 3\}$;
- Contradomínio da função: o conjunto $\{2, 3, 4, 6\}$;
- Imagem da função: o conjunto $\{2, 4, 6\}$.
- Lei de formação da função: pode ser expressa por $f(x) = 2x$, sendo x a representação para os elementos do conjunto domínio *A*.

Em alguns casos, pode existir uma função em que todos os elementos do contradomínio estejam associados a algum elemento do domínio, assim o conjunto imagem passa a ser igual ao conjunto contradomínio.

Função polinomial de 1º grau

Uma função $f: A \rightarrow B$ é denominada **polinomial de 1º grau** ou simplesmente **função afim** quando for possível escrever a lei dessa função da seguinte maneira: $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ ou $\boldsymbol{y = ax + b}$, com a e b reais e $a \neq 0$.

- **Taxa de variação** da função f: o coeficiente a.
- **Termo independente** ou o valor fixo da função (que não varia): o coeficiente b.

Além disso, costuma-se escrever $y = f(x)$, ou seja, y está em **função** de x, e x e y são **variáveis**. Quando se informa um valor numérico fixo de y e se pretende encontrar o valor de x associado a ele, x é a **incógnita** da **equação** $y = f(x)$.

_ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Considere a função f: $A \rightarrow B$, tal que $f = 2x + 1$, e $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Qual das alternativas a seguir representa o conjunto imagem I dessa função?

(A) $I = \{2, 4, 6, 8, 12\}$

(B) $I = \{3, 5, 7, 9, 13\}$

(C) $I = \{3, 4, 6, 9, 11\}$

(D) $I = \{2, 5, 7, 9, 13\}$

(E) $I = \{2, 3, 4, 9, 11\}$

Alternativa **B**.

2 Sejam os conjuntos $A = \{4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Considerando cada elemento do conjunto A como x, qual das relações a seguir pode representar uma função f: $A \rightarrow B$?

(A) $f(x) = \frac{x}{2} + 2$

(B) $f(x) = 2x - 1$

(C) $f(x) = \frac{x}{2} - 1$

(D) $f(x) = 2x + 1$

(E) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$

Alternativa **E**.

3 Em uma padaria, o preço de cada pão é R$ 0,66. Fabiana quer comprar 5 pães, mas acha que essa quantidade pode não ser suficiente, e precisa decidir se comprará mais 2 ou 3 pães.

Chamando a quantidade de pães de p e o preço em reais a ser pago de R, qual é a função que pode ser usada para calcular o preço total a ser pago pelos pães por Fabiana?

(A) $R(p) = 0{,}66 \cdot p$

(B) $R(p) = p + 0{,}66$

(C) $R(p) = 0{,}66 \cdot p + 5$

(D) $R(p) = 6{,}6 \cdot p$

(E) $R(p) = \frac{p}{0,66}$

Alternativa **A**.

4 Ao adquirir uma moto esportiva, o proprietário coletou os dados de consumo de gasolina do veículo descritos na tabela a seguir.

Consumo de gasolina da moto	
Distância percorrida (em km)	Quantidade média de gasolina consumida (em L)
50	2
100	4
150	6
200	8
250	10
300	12

Dados elaborados para fins didáticos.

Qual destas alternativas representa a função que associa os valores $y = f(x)$ de distância percorrida à quantidade média x de gasolina consumida?

(A) $f(x) = 50x + 2$

(B) $f(x) = 2x + 50$

(C) $f(x) = \frac{1}{25}x$

(D) $f(x) = 25x + 50$

(E) $f(x) = 25x$

Alternativa **E.**

5 Uma banheira contém 30 litros de água em seu interior. Em determinado momento, foi aberta uma torneira com vazão constante de 20 litros de água por minuto.

Observe na tabela a seguir a relação entre a medida de volume de água despejada pela torneira e o intervalo de tempo gasto.

Enchimento de água na banheira	
Medida de intervalo de tempo (em min)	Medida de volume de água (em L)
0	30
1	50
2	70
3	90
4	110
5	130

Dados elaborados para fins didáticos.

Considerando esses dados, qual é a função que associa o intervalo de tempo t ao volume V de água despejada pela torneira?

(A) $V(t) = 20t$

(B) $V(t) = 20t + 30$

(C) $V(t) = 30t - 20$

(D) $V(t) = 30t$

(E) $V(t) = 30t + 20$

Alternativa **B.**

6 Para pintar uma parede, um pintor cobra a quantia de R$ 5,50 por metro quadrado mais uma taxa fixa de R$ 45,00.

Qual é a função que representa o valor V cobrado por esse pintor em função de x metros quadrados pintados?

(A) $V(x) = 5{,}5x$

(B) $V(x) = 5{,}5x + 45$

(C) $V(x) = 45x$

(D) $V(x) = 45x + 5{,}5$

(E) $V(x) = 50x$

Alternativa **B.**

7 André e Arthur trabalham como produtores culturais. André cobra uma taxa fixa de R$ 900,00 mais R$ 150,00 por hora de evento. Já Arthur cobra uma taxa fixa de R$ 750,00 mais R$ 200,00 por hora de evento.

Qual é a duração mínima, em horas, de evento que torna o valor do serviço de André mais barato do que o de Arthur?

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

(E) 5

Alternativa **D.**

_DICA

Lembre-se de que, para resolver uma equação de 1º grau, basta isolar a incógnita. Em uma equação representada por $y = a \cdot x + b$, o valor de x pode ser calculado por:

$$x = \frac{y - b}{a}, \text{ com } a \neq 0.$$

8 Patrícia é uma revendedora de perfumes. Ela percebeu que seu lucro mensal (L), em reais, varia em função do número (n) de perfumes vendidos, conforme representado a seguir.

$$L(n) = 10n - 2\,100$$

Para obter um lucro mensal de 1900 reais, Patrícia deverá vender, ao mês, um total de perfumes igual a:

(A) 180.

(B) 190.

(C) 200.

(D) 210.

(E) 400.

Alternativa **E.**

9 Muitas substâncias sólidas se dilatam com o aumento da temperatura e se contraem quando a temperatura é diminuída. Esse fenômeno tem muitas implicações no cotidiano, e a função que o descreve para casos em que a variação ocorre em apenas uma dimensão é dado por $\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$, em que ΔL é a variação da medida de comprimento; L_0 é a medida de comprimento inicial; α é o coeficiente de dilatação inicial; e ΔT é a variação da medida de temperatura. A dilatação linear pode ocorrer, por exemplo, em uma serpentina de alumínio, cujo coeficiente de dilatação linear (α) é $22 \cdot 10^{-6}$ °C^{-1} e que mede 6,5 m de comprimento, muito usada em equipamento de aquecimento e refrigeração. Considerando-se que a medida de temperatura teve uma variação de 20 °C a 40 °C, conclui-se que a dilatação sofrida pela serpentina, em mm, é igual a:

(A) 2,22.

(B) 2,86.

(C) 3,14.

(D) 4,08.

(E) 5,66.

Alternativa **B.**

_AMPLIANDO

Você pode desenvolver um pouco mais seus conhecimentos sobre função assistindo ao vídeo *Carro Flex*, do projeto M3 Matemática Multimídia, da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

10 Um curso preparatório com duração de 12 semanas tem uma taxa de R$ 600,00 que corresponde à inscrição mais o material didático. Se uma pessoa realizar a inscrição após o início do curso, essa taxa é reduzida de acordo com o número de semanas do curso que foram perdidas.

Qual é a quantia paga por uma pessoa que se inscrever 3 semanas após o início do curso?

(A) R$ 50,00

(B) R$ 150,00

(C) R$ 200,00

(D) R$ 400,00

(E) R$ 450,00

Alternativa **E.**

11 Para uma empresa produzir x peças, deve-se investir R$ 8.000,00 em equipamentos e mais um custo de R$ 2,00 na produção de cada peça.

I. Qual é a função que representa o custo total de produção C, em reais, em relação ao número x de peças produzidas?

(A) $C(x) = 8\,002$

(B) $C(x) = \dfrac{8\,000 + x}{2}$

(C) $C(x) = 8\,000 + 2x$

(D) $C(x) = 8\,000x$

(E) $C(x) = 8\,002x$

Alternativa **C.**

II. Qual é o custo total associado à produção de 960 peças?

(A) R$ 6.080,00

(B) R$ 7.040,00

(C) R$ 8.960,00

(D) R$ 9.920,00

(E) R$ 10.000,00

Alternativa **D.**

III. Quantas peças precisam ser vendidas para que o custo total de produção seja 4 vezes maior que o investimento em equipamentos?

(A) 4 000

(B) 6 000

(C) 8 000

(D) 10 000

(E) 12 000

Alternativa **E.**

_ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) Uma pessoa chega ao hotel no qual fez uma pré-reserva com diária no valor de R$ 210,00. Como a confirmação da reserva não foi feita, quando chegou ao hotel não havia quarto disponível. Dessa forma, o recepcionista apresentou-lhe algumas opções de hotéis com diárias mais baratas, mas localizados a certa distância desse hotel, conforme apresentado.

- H1: diária de R$ 180,00 e distância de 7 km;
- H2: diária de R$ 200,00 e distância de 1,6 km;
- H3: diária de R$ 199,00 e distância de 4,5 km;
- H4: diária de R$ 190,00 e distância de 1,5 km;
- H5: diária de R$ 205,00 e distância de 1,2 km.

Para se locomover até um outro hotel, essa pessoa utiliza um táxi que cobra R$ 2,50 por quilômetro rodado mais taxa fixa de R$ 6,00.

Sua escolha será em função do menor custo, composto pelo valor da diária mais a locomoção de táxi.

O hotel escolhido foi o

(A) H1.

(B) H2.

(C) H3.

(D) H4.

(E) H5.

Alternativa **D**.

2 (Enem) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1.200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Disponível em: www.cnpso.embrapa.br. Acesso em: 27 fev. 2012 (adaptado).

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

(A) $L(x) = 50x - 1200$

(B) $L(x) = 50x - 12\,000$

(C) $L(x) = 50x + 12\,000$

(D) $L(x) = 500x - 1200$

(E) $L(x) = 1200x - 500$

Alternativa **B**.

3 (UFSM-RS) De acordo com dados da UNEP – Programa das Nações Unidas para o Meio Ambiente, a emissão de gases do efeito estufa foi de 45 bilhões de toneladas de CO_2 em 2005 e de 49 bilhões de toneladas em 2010. Se as emissões continuarem crescendo no mesmo ritmo atual, a emissão projetada para 2020 é de 58 bilhões de toneladas. Porém, para garantir que a temperatura do planeta não suba mais que 2 °C até 2020, a meta é reduzir as emissões para 44 bilhões de toneladas.

Suponha que a meta estabelecida para 2020 seja atingida e considere que Q e t representam, respectivamente, a quantidade de gases do efeito estufa (em bilhões de toneladas) e o tempo (em anos), com t = 0 correspondendo a 2010, com t = 1 correspondendo a 2011 e assim por diante, sendo Q uma função afim de t.

A expressão algébrica que relaciona essas quantidades é

(A) $Q = -\frac{9}{10}t + 45.$

(B) $Q = -\frac{1}{2}t + 49.$

(C) $Q = -5t + 49.$

(D) $Q = \frac{1}{2}t + 45.$

(E) $Q = \frac{9}{10}t + 49.$

Alternativa **B.**

4 (Enem) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R$ 1000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R$ 80,00 por dia trabalhado.

Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

(A) $Y = 80X + 920.$

(B) $Y = 80X + 1\,000.$

(C) $Y = 80X + 1\,080.$

(D) $Y = 160X + 840.$

(E) $Y = 160X + 1\,000.$

Alternativa **D.**

5 (Enem) Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Revista Exame. 21 abr. 2010.

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período, é

(A) $f(x) = 3x$

(B) $f(x) = 24$

(C) $f(x) = 27$

(D) $f(x) = 3x + 24$

(E) $f(x) = 24x + 3$

Alternativa **D.**

6 (Enem) Lucas precisa estacionar o carro pelo período de 40 minutos, e sua irmã Clara também precisa estacionar o carro pelo período de 6 horas.
O estacionamento Verde cobra R$ 5,00 por hora de permanência. O estacionamento Amarelo cobra R$ 6,00 por 4 horas de permanência e mais R$ 2,50 por hora ou fração de hora ultrapassada. O estacionamento Preto cobra R$ 7,00 por 3 horas de permanência e mais R$ 1,00 por hora ou fração de hora ultrapassada.

Os estacionamentos mais econômicos para Lucas e Clara, respectivamente, são

(A) Verde e Preto.

(B) Verde e Amarelo.

(C) Amarelo e Amarelo.

(D) Preto e Preto.

(E) Verde e Verde.

Alternativa **A**.

7 (Uece) Em uma corrida de táxi, é cobrado um valor inicial fixo, chamado de bandeirada, mais uma quantia proporcional aos quilômetros percorridos. Se por uma corrida de 8 km paga-se R$ 28,50 e por uma corrida de 5 km paga-se R$ 19,50, então o valor da bandeirada é

(A) R$ 7,50.

(B) R$ 6,50.

(C) R$ 5,50.

(D) R$ 4,50.

Alternativa **D**.

8 (Enem) Em um município foi realizado um levantamento relativo ao número de médicos, obtendo-se os dados:

Ano	Médicos
1980	137
1985	162
1995	212
2010	287

Tendo em vista a crescente demanda por atendimento médico na rede de saúde pública, pretende-se promover a expansão, a longo prazo, do número de médicos desse município, seguindo o comportamento de crescimento linear no período observado no quadro.

Qual a previsão do número de médicos nesse município para o ano 2040?

(A) 387

(B) 424

(C) 437

(D) 574

(E) 711

Alternativa **C.**

9 (Enem) Uma operadora de telefonia oferece cinco planos de serviços. Em cada plano, para cada mês, o cliente paga um valor V que lhe dá direito a telefonar por M minutos para clientes da mesma operadora. Quando a duração total das chamadas para clientes da mesma operadora excede M minutos, é cobrada uma tarifa T1 por cada minuto excedente nesse tipo de chamada. Além disso, é cobrado um valor T2, por minuto, nas chamadas para clientes de outras operadoras, independentemente do fato de os M minutos terem ou não sido usados. A tabela apresenta o valor de V, M, T1 e T2 para cada um dos cinco planos.

Se um cliente dessa operadora planeja telefonar durante 75 minutos para amigos da mesma operadora e 50 minutos para amigos de outras operadoras, o plano que ele deverá escolher, a fim de pagar menos, é o

	V	M	T1	T2
Plano A	R$ 25,00	20 min	R$ 1,50/min	R$ 2,00/min
Plano B	R$ 60,00	65 min	R$ 1,00/min	R$ 1,20/min
Plano C	R$ 60,00	75 min	R$ 1,00/min	R$ 1,50/min
Plano D	R$ 120,00	160 min	R$ 0,80/min	R$ 0,90/min
Plano E	R$ 120,00	180 min	R$ 0,80/min	R$ 1,20/min

(A) Plano A.
(B) Plano B.
(C) Plano C.
(D) Plano D.
(E) Plano E.

Alternativa **B.**

10 (UERJ) A caixa-d'água de uma residência continha, às 8 horas da manhã de um determinado dia, 600 litros de água. Ela foi abastecida durante 2 horas, recebendo um volume de água na razão constante de 20 litros por minuto. Às 10 horas, ficou completamente cheia; a partir desse momento, começou a perder água na razão constante de 15 litros por minuto, sem reposição alguma, até esvaziar.

Considerando esse processo, calcule o horário em que a caixa ficou totalmente vazia.

13 h 20 m

11 (Fuvest-SP) Duas empresas de entrega de mercadorias, *A* e *B*, são concorrentes. A empresa *A* cobra R$ 4,00 por quilo da encomenda e mais R$ 30,00 de taxa fixa. Já a tarifa da empresa *B* é de R$ 6,00 por quilo, sem taxa fixa, para encomendas de até 30 quilos; para encomendas de mais de 30 quilos, a empresa *B* cobra R$ 2,00 por quilo, mais uma taxa fixa de R$ 120,00.

a) Dê a expressão da função que descreve a tarifa cobrada pela empresa *A* em termos do peso *x* da encomenda.

b) Para qual intervalo de pesos é mais barato pedir uma entrega pela empresa *A* do que pela empresa *B*?

c) Um cliente solicitou duas encomendas: uma entregue pela empresa *A*, e outra, pela empresa *B*, com peso total de 200 quilos. Quais são as possíveis maneiras de distribuir esse peso entre as duas empresas, sabendo que a tarifa de entrega total foi de R$ 850,00?

a) $y_A = 4x + 30$
b) $x \in (15, 45]$
c) 1ª maneira: *A* transporta 190 kg; *B*, 10 kg; 2ª maneira: *A* transporta 150 kg; *B*, 50 kg.

JORNADA 6

Gráficos de funções de 1º grau

Escadas rolantes de uma estação subterrânea no distrito financeiro de Docklands, em Londres, Reino Unido. Foto de 2016.

Vittorio Caramazza/Shutterstock

As escadas rolantes que vemos em diversos lugares foram pensadas com o objetivo de facilitar o deslocamento das pessoas. Mas existe uma discussão sobre o uso dessas escadas: Será que é mais vantajoso caminhar ou permanecer parados enquanto estamos nelas? Para responder a essa pergunta, é preciso levar em conta a dinâmica de cada pessoa e a situação em que ela se encontra. Nas escadas fixas nos deslocamos de um andar para o outro gastando energia. Na escada rolante, se alguém optar por caminhar no mesmo sentido da escada em vez de ficar parado, gastará mais energia do que ficar parado. No entanto, o aumento na velocidade pode compensar esse gasto energético, resultando em um deslocamento mais rápido.

As escadas rolantes realizam um movimento com a mesma velocidade em todos os momentos em que está ligada, sem variação; assim, dizemos que ela tem uma **velocidade constante** e desloca-se em linha reta seguindo determinada direção. Portanto, esse movimento é classificado na Física como **Movimento Retilíneo Uniforme** (ou **MRU**). E o modelo matemático que descreve esse tipo de movimento é conhecido como **função polinomial de 1º grau**, considerando que ele pode fornecer a distância percorrida por um corpo em função do intervalo de tempo. Além disso, a representação gráfica dessa função é uma **reta** que relaciona o espaço que um ponto posicionado na escada percorre em determinado intervalo de tempo.

1. Quais grandezas estão envolvidas no cálculo da medida de velocidade de uma escada rolante?

2. Como é possível calcular a medida de velocidade da escada rolante usando a resposta da atividade anterior?

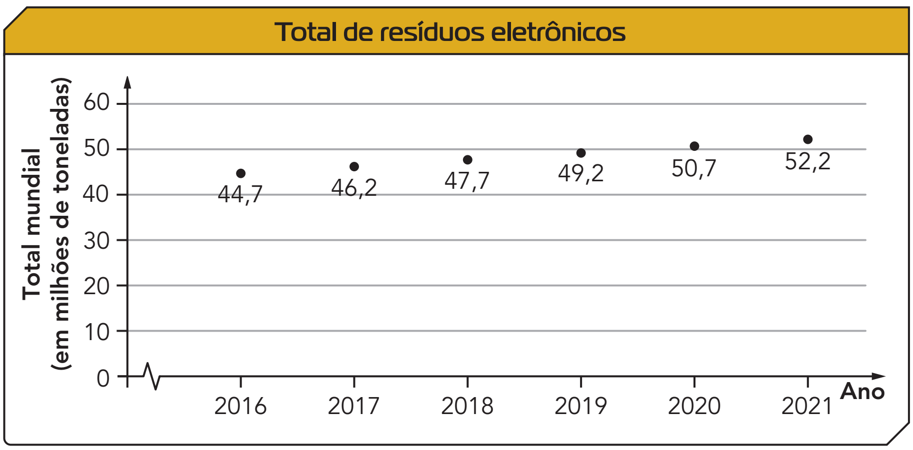
3. Pesquise brevemente na internet a representação gráfica do espaço × tempo no MRU e associe as características dos gráficos encontrados com 2 situações, uma em que a escada esteja subindo e outra em que a escada esteja descendo, considerando um observador fixo posicionado ao pé da escada.

Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor.**

_ETAPA 1

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

A *Global E-waste Monitor*, vinculada às Nações Unidas, produz relatórios sobre os resíduos eletrônicos gerados no mundo. O gráfico a seguir mostra o total de resíduos eletrônicos em milhões de toneladas produzidos no mundo em 2016 e algumas previsões para os demais anos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: BALDÉ, C. P.; FORTI, V.; GRAY, V.; KUEHR, R.; STEGMANN, P. *The Global E-waste Monitor 2017: Quantities, Flows, and Resources*. UNU/ITU/ISWA, 2017. Disponível em: https://ewastemonitor.info/wp-content/uploads/2020/11/Global-E-waste-Monitor-2017-electronic-spreads.pdf. Acesso em: 7 nov. 2023.

Observe atentamente os dados dos anos de 2016 a 2021. Depois, responda às questões a seguir.

a) Entre 2016 e 2017, qual foi o aumento, em milhões de toneladas, do total de resíduos eletrônicos produzidos? E entre 2017 e 2018?

b) O que é possível afirmar a respeito do gráfico que pode ser gerado se unirmos os respectivos pontos mostrados? Justifique sua resposta.

c) Com base nos dados mostrados no gráfico, qual seria a previsão para 2030 do total de resíduos eletrônicos produzidos?

d) Considerando o eixo vertical do total mundial de resíduos eletrônicos em milhares de toneladas como o eixo y do plano cartesiano e o eixo horizontal dos anos como o eixo x, pode-se afirmar que a função gerada quando se unem os pontos mostrados do gráfico é crescente ou decrescente? Justifique.

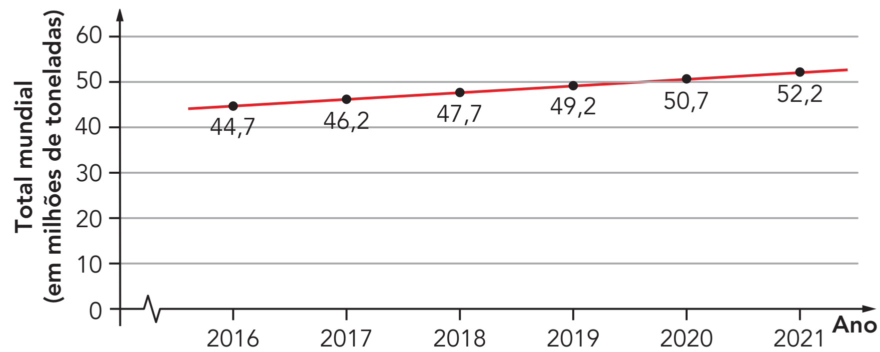
_resolvendo a questão

a) Observando o gráfico, tem-se que a produção de 44,7 milhões de toneladas de resíduos eletrônicos corresponde ao ano de 2016 e que 46,2 milhões correspondem ao ano de 2017. Assim, a diferença em milhões de toneladas entre esses 2 anos é de $46{,}2 - 44{,}7 = 1{,}5$.

Pode-se também observar no gráfico que, entre os anos de 2017 e 2018, a diferença em milhões de toneladas é de $47{,}7 - 46{,}2 = 1{,}5$.

O mesmo ocorre nos demais anos, sendo a diferença de produção uma taxa constante de 1,5 milhão de toneladas até 2021.

b) O gráfico gerado pela ligação dos pontos é uma **reta**, porque, para quaisquer pontos indicados no gráfico, a taxa de variação entre eles é **constante** e igual a 1,5 milhão de toneladas por ano, o que pode ser caracterizado também como uma **função afim**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Levando-se em conta que a taxa de variação entre o total de resíduos produzidos e o ano respectivo é um valor constante, vamos primeiro considerar que, entre 2021 e 2030, se passaram 9 anos. Dessa maneira, o total de 2021 terá aumentado, em milhões de toneladas, de: $9 \cdot 1{,}5 = 13{,}5$.

Como o total foi calculado em relação a 2021, devemos somá-lo com o total de 2021, obtendo assim: $52{,}2 + 13{,}5 = 65{,}7$.

Assim, uma previsão para 2030 é que sejam produzidos 65,7 milhões de toneladas de resíduos eletrônicos.

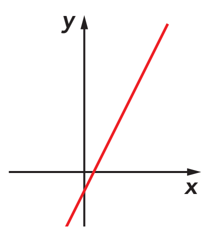
d) Considerando que função é a reta que passa pelos pontos, tem-se que essa função será crescente, uma vez que, ao aumentarem os anos, aumenta-se também o total de toneladas de resíduos produzidos.

_agora é com você

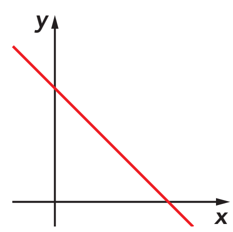
1 Qual dos gráficos a seguir melhor representa o conjunto de pontos (x, y) da tabela?

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8	10	12

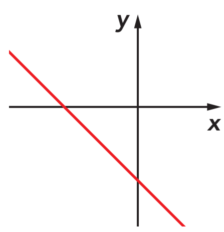
(A)



(C)

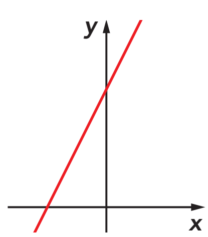


(E)

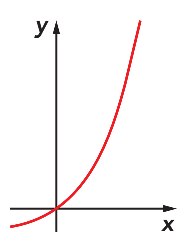


Alternativa **B**.

(B)



(D)



Banco de imagens/Arquivo da editora

2 Qual é a tabela cujo conjunto de pontos (x, y) melhor representa o gráfico a seguir?

(A)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	3	2	1	0	−1	−2	−3

(B)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−2	−1	0	1	2	3	4

(C)

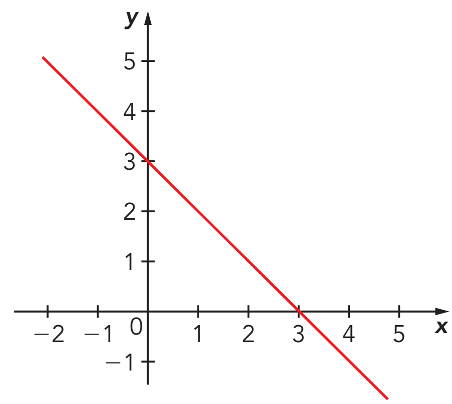
x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−4	−1	0	1	4	9	16

(D)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	5	4	3	2	1	0	−1

(E)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	3	3	3	3	3	3	3

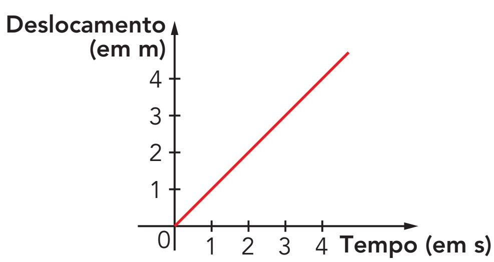


Banco de imagens/Arquivo da editora

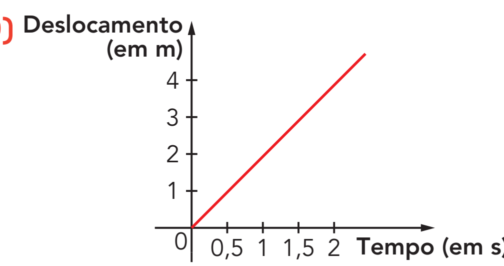
Alternativa **D**.

3 Em uma escada rolante, a medida de velocidade marcada é constante e igual a 0,5 m/s, ou seja, a cada segundo, a escada rolante se desloca 0,5 metro, ou 50 centímetros. Qual das alternativas a seguir representa o gráfico da medida de deslocamento, em metros, pela medida de intervalo de tempo, em segundos?

(A)

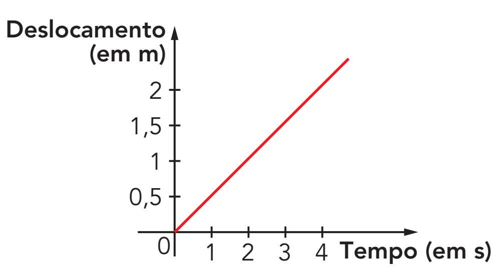


(D)

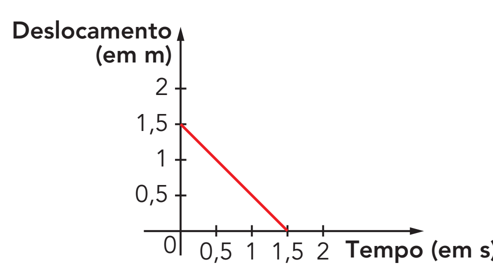


Banco de imagens/Arquivo da editora

(B)

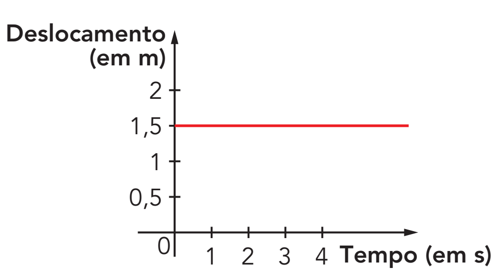


(E)



Alternativa **B**.

(C)



_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Gráfico de uma função de 1º grau

O gráfico de uma função de 1º grau, ou função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, sempre será uma **reta** não vertical, ou seja, não paralela ao eixo das ordenadas. A posição dessa reta em relação aos eixos coordenados dependerá dos valores de seus coeficientes ***a*** (que também pode ser chamado de taxa de variação) e ***b*** (que é o número que indica a intersecção com o eixo *y*).

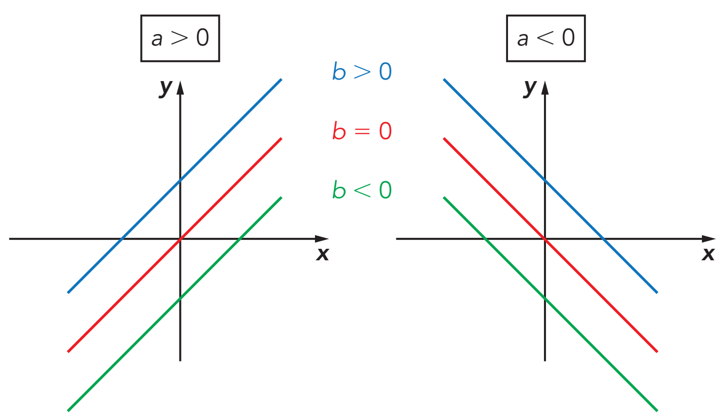
Taxa de variação

Para todos os valores $x_1 < x_2$ do domínio da função, a taxa de variação *a* pode ser calculada por:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Se $a > 0$, a função é crescente.
- Se $a < 0$, a função é decrescente.
- Se $a = 0$, a função é constante.

Observe a seguir os diferentes comportamentos das retas que definem uma função de 1º grau, quando os parâmetros dela variam.

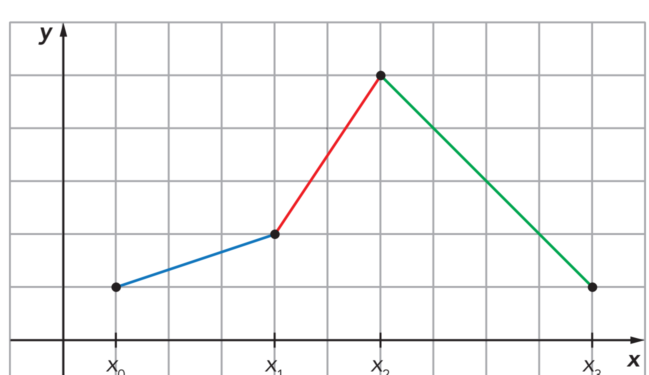


Banco de imagens/Arquivo da editora

Função definida por partes

A função definida por partes é uma função definida por diferentes sentenças que dependem do **intervalo do domínio** a que se referem. No exemplo a seguir, a função foi definida em três diferentes intervalos, e em cada um deles ela se comporta como uma reta diferente.

$$f(x) = \begin{cases} a_1x + b_1 & \text{para } x \in [x_0, x_1] \\ a_2x + b_2 & \text{para } x \in [x_1, x_2] \\ a_3x + b_3 & \text{para } x \in [x_2, x_3] \end{cases}$$



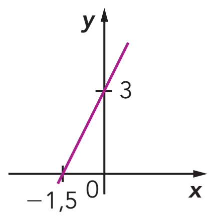
Banco de imagens/Arquivo da editora

_ETAPA 2

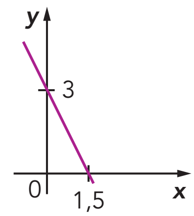
Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Qual destes gráficos representa melhor a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x + 3$? Verifique se essa função é crescente ou decrescente.

(A)

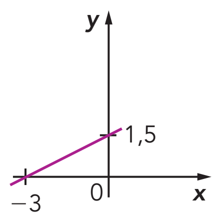


(D)

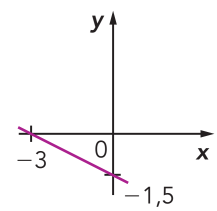


Banco de imagens/Arquivo da editora

(B)

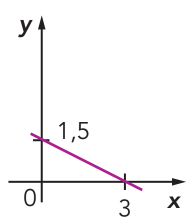


(E)



Alternativa **D**. Decrescente.

(C)



2 Em que ponto a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -4x + 12$ intersecta o eixo x das abscissas?

(A) $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$

(B) $(3, 0)$

(C) $\left(0, \frac{1}{3}\right)$

(D) $(-3, 0)$

(E) $(0, 12)$

Alternativa **B**.

3 A função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que melhor representa o gráfico a seguir é definida por:

(A) $f(x) = 3x - 3$.

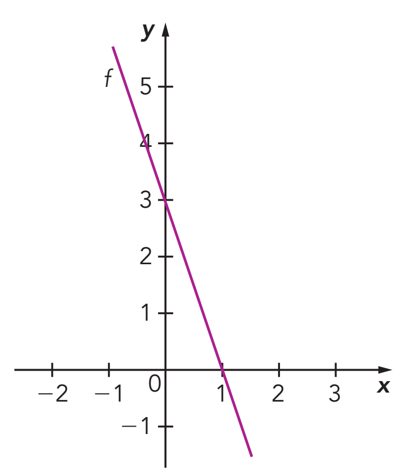
(B) $f(x) = x + 3$.

(C) $f(x) = 3x + 3$.

(D) $f(x) = -3x + 1$.

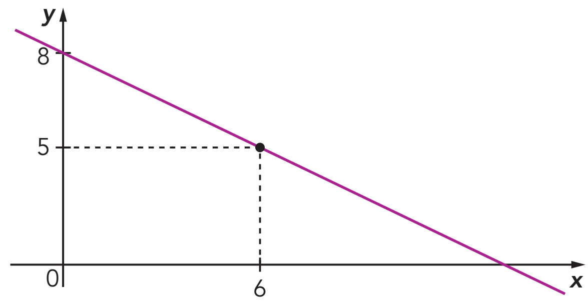
(E) $f(x) = -3x + 3$.

Alternativa **E**.



Banco de imagens/Arquivo da editora

4 O gráfico a seguir é de uma função f de domínio real.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Analisando esse gráfico, tem-se que o valor de $f(20)$ é igual a:

(A) -2.

(B) -3.

(C) -4.

(D) -5.

(E) -6.

Alternativa **A**.

5 Em um experimento realizado em um laboratório de Física, registrou-se a variação da temperatura $T(x)$, em graus Celsius, de determinado composto químico em estado líquido, em função da concentração x, em mg, de determinada substância do composto. A tabela a seguir apresenta o registro dos dados dessa temperatura, para x variando no intervalo $[10, 60]$, com valores em mg.

x	10	20	30	40	50	60
$T(x)$	19,2	27,6	36,0	44,4	52,8	61,2

Qual é a função que melhor expressa os dados no intervalo apresentado?

(A) $T(x) = 0{,}84x + 10{,}8$

(B) $T(x) = 8{,}4x - 19{,}2$

(C) $T(x) = -8{,}4x + 61{,}2$

(D) $T(x) = 8{,}4x + 216$

(E) $T(x) = -0{,}84x + 36$

Alternativa **A**.

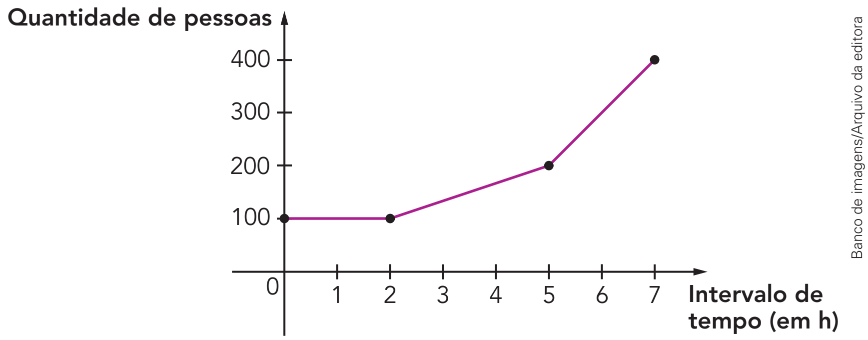
_DICA

Como em uma função de 1º grau a taxa de variação é constante, o valor médio da coordenada x é associado ao valor mediano da coordenada y, ou seja, na atividade a seguir observa-se que o valor médio do intervalo $[6, 7] = 6{,}5$ corresponde ao valor médio do intervalo $[300, 400]$.

E isso vale para qualquer proporção dentro do intervalo. Por exemplo, 80% do intervalo $[100, 200] = 180$ corresponde a 80% do intervalo $[2, 5]$.

6 Uma pequena casa de espetáculo comporta no máximo 400 pessoas, entre artistas, colaboradores e espectadores. Um *show* estava marcado para iniciar às 20 h 30 min. Às 14 h, todos os 100 colaboradores e artistas entraram juntos no recinto e, pontualmente, às 16 h, a casa de espetáculo abriu as portas para os espectadores. Às 19 h já haviam entrado 100 espectadores. A informação é que ninguém saiu da casa antes do término do *show* e que o *show* começou pontualmente no horário marcado.

O gráfico a seguir representa a relação aproximada da quantidade de pessoas presentes na sala em função do intervalo de tempo em horas decorridas após a entrada dos colaboradores e artistas.



Sendo p a quantidade exata de pessoas na casa de espetáculo no início do *show*, e h o horário em que a casa estava com 80 espectadores, tem-se que os valores de p e h são, respectivamente:

(A) $p = 300$ pessoas e $h = 18$ h 40 min.

(B) $p = 350$ pessoas e $h = 18$ h 24 min.

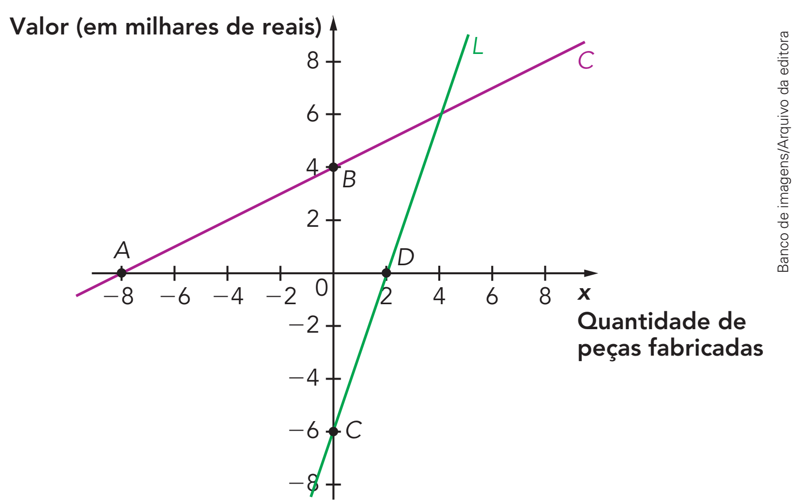
(C) $p = 300$ pessoas e $h = 18$ h 24 min.

(D) $p = 350$ pessoas e $h = 18$ h 40 min.

(E) $p = 375$ pessoas e $h = 18$ h 50 min.

Alternativa **B.**

7 Uma empresa representou em um plano cartesiano os gráficos das funções do lucro bruto $L(x)$ e do custo $C(x)$ que apresentam os valores, em milhares de reais, respectivamente, em função da quantidade x de peças fabricadas e vendidas.



As leis das funções L e C são, respectivamente:

(A) $L(x) = 3x + 4$ e $C(x) = \frac{1}{2}x - 6$

(B) $L(x) = \frac{1}{3}x - 6$ e $C(x) = 2x + 4$

(C) $L(x) = 3x - 6$ e $C(x) = \frac{1}{2}x + 4$

(D) $L(x) = -3x + 6$ e $C(x) = -2x - 4$

(E) $L(x) = -\frac{1}{3}x - 6$ e $C(x) = \frac{1}{2}x + 4$

Alternativa **C.**

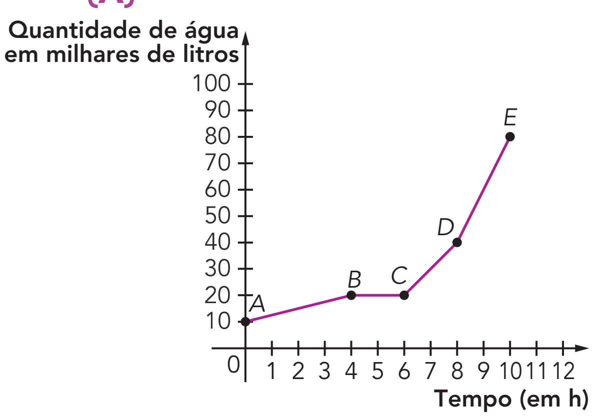
8 Uma piscina com capacidade máxima de 80 000 L é enchida por 3 torneiras de vazões V_1, V_2 e V_3 tais que $V_1 < V_2 = V_3$ da seguinte maneira:

- Inicialmente, a piscina tem 10 000 L de água e durante 4 h é abastecida pela torneira de **vazão** V_1.
- Após essas 4 h, todas as 3 torneiras ficaram fechadas durante 2 h.
- Depois, a torneira de vazão V_2 é aberta e abastece a piscina durante 2 h.
- Após o momento anterior, é aberta também a torneira de vazão V_3.

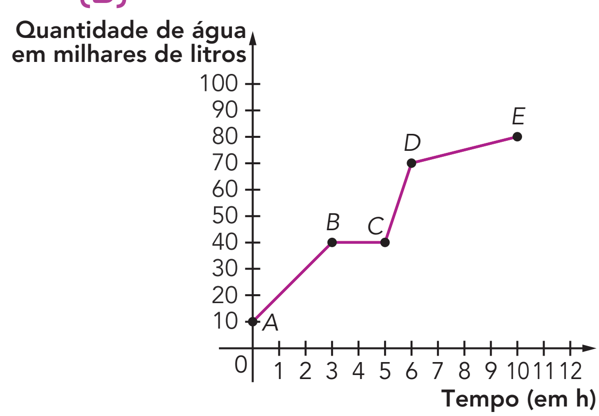
vazão: é a razão entre a medida de volume e a medida de intervalo de tempo em que um fluido passa por uma seção transversal de um conduto. Ou seja, vazão é a rapidez (velocidade) em que o volume ou a massa de algo escoa.

Qual dos gráficos a seguir melhor representa a situação descrita?

(A)

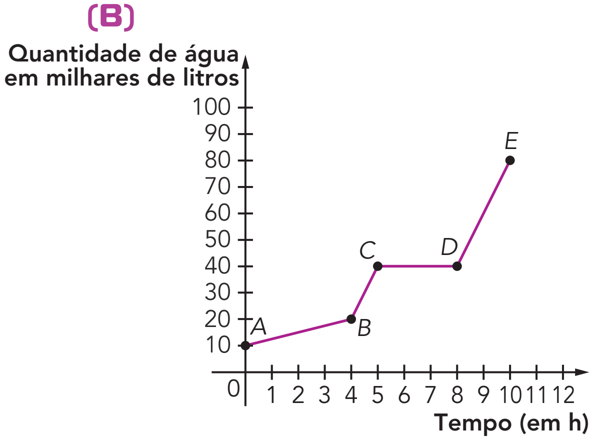


(D)

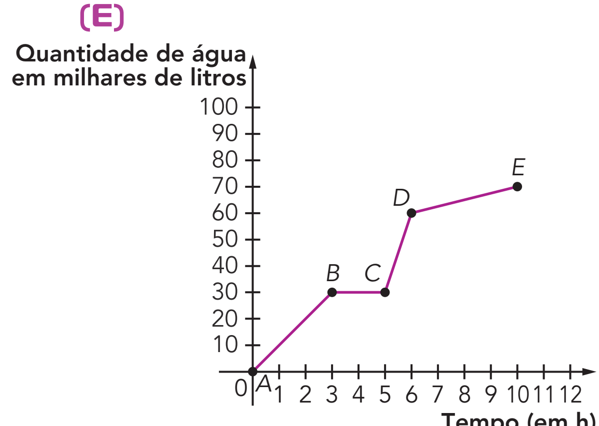


Banco de imagens/Arquivo da editora

(B)

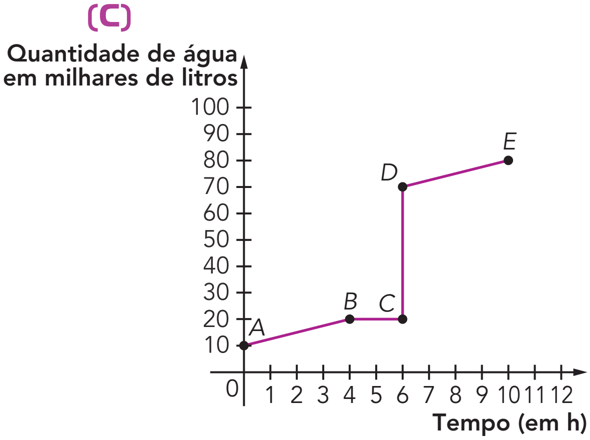


(E)



Alternativa **A**.

(C)



AMPLIANDO

A lei de Hooke, proposta por Robert Hooke (1635-1703) e presente nesta simulação interativa, enuncia que a força elástica aplicada a uma mola é diretamente proporcional à deformação dessa mola, ou seja, pode ser representada pela função linear $F_{EL}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

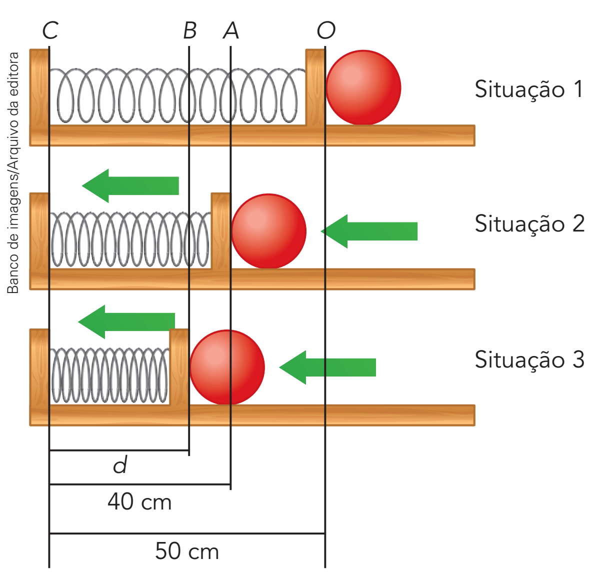
$$F_{EL} = k \cdot d$$

em que:

- F_{EL} é a força elástica medida em Newton (N);
- d é a deformação medida em metros (m);
- k é a constante elástica medida em Newton por metro (N/m).

9 Ao analisar a imagem a seguir, percebe-se que:

- na situação 1, uma mola e uma esfera estão em repouso; assim, não há F_{EL} exercendo nenhuma deformação d na mola ($F_{EL} = 0$ N e $d = 0$ m);
- na situação 2, é aplicada uma força elástica na mola, de 90 N, que promove uma deformação de 0,1 m (50 cm − 40 cm = 10 cm = 0,1 m);
- na situação 3, é aplicada uma força de 135 N, que promove uma nova deformação na mola.



Assim, pode-se afirmar que os valores da constante elástica (k) e da deformação (d) são, respectivamente:

(A) $k = 900$ N/m e $d = 15$ cm.

(B) $k = 900$ N/m e $d = 25$ cm.

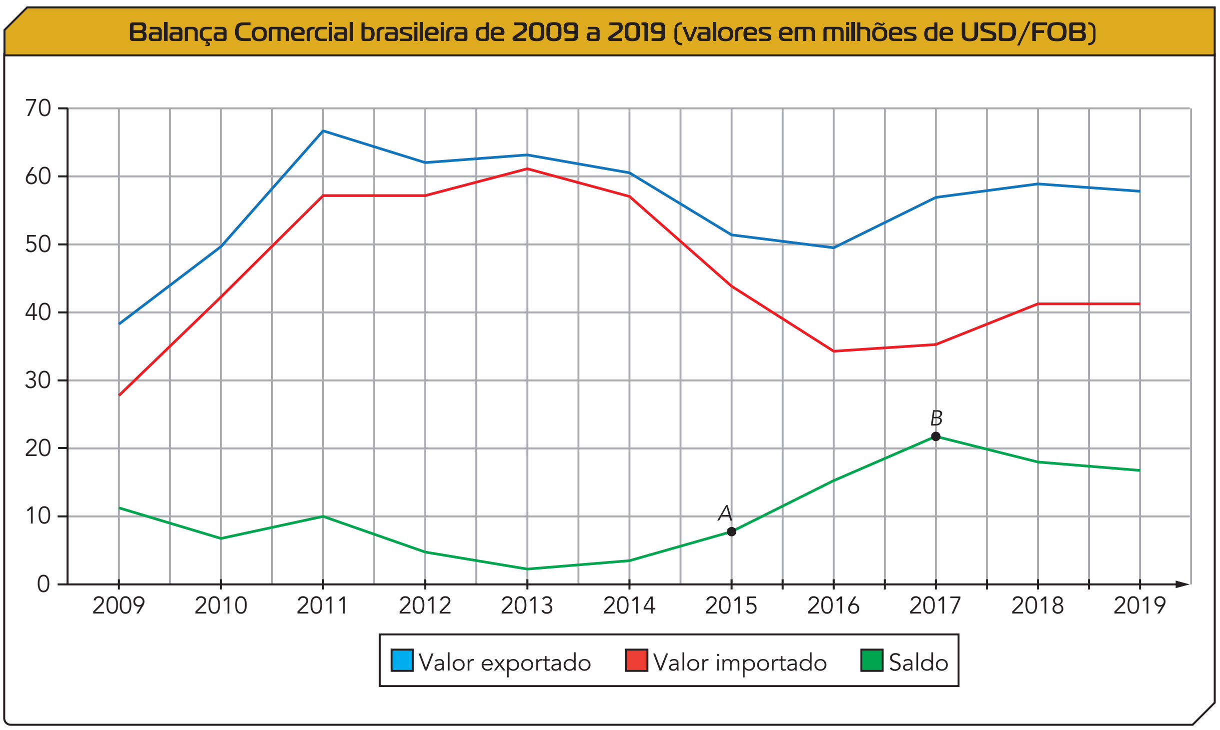
(C) $k = 90$ N/m e $d = 15$ cm.

(D) $k = 90$ N/m e $d = 25$ cm.

(E) $k = 900$ N/m e $d = 30$ cm.

Alternativa **B**.

10 As linhas representadas no gráfico a seguir mostram a evolução da Balança Comercial brasileira em 10 anos, em particular entre o 2º trimestre de 2009 e o 2º trimestre de 2019. A linha inferior é a que informa o saldo da balança (diferença entre o volume em bilhões de reais exportados e importados).



Fonte: OLIVEIRA, Paulo R. S. *Informativos periódicos – produção e comércio*: Balança Comercial Brasileira. Campinas: Observatório Puccamp, 23 set. 2019. Disponível em: https://observatorio.puc-campinas.edu.br/informativo-trimestral/. Acesso em: 7 nov. 2023.

I. Considerando o segmento de reta de extremos nos pontos $A = (2015, 8)$ e $B = (2017, 21)$, pode-se afirmar que o saldo do 2º trimestre de 2016 foi de:

(A) R$ 12.500.000.000,00.

(B) R$ 13.000.000.000,00.

(C) R$ 14.000.000.000,00.

(D) R$ 14.500.000.000,00.

(E) R$ 15.000.000.000,00.

Alternativa **D**.

II. Considerando o eixo vertical como eixo y do plano cartesiano e o eixo horizontal como o eixo x, qual é a lei da função de 1º grau que passa pelos pontos A e B no intervalo [2015, 2017]?

(A) $f(x) = 6{,}5x + 13$

(B) $f(x) = 6x + 13\,090$

(C) $f(x) = 6{,}5x - 13\,089{,}5$

(D) $f(x) = 6x - 13{,}5$

(E) $f(x) = 6{,}5x - 14{,}5$

Alternativa **C**.

_ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Uece) Uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = mx + n$, onde m e n são números reais não nulos, é comumente denominada de função linear afim. Quando $n = 0$ e $m \neq 0$, a função será chamada de função linear não nula. O gráfico de tais funções, quando desenhado em um plano munido de um sistema de coordenadas cartesiano ortogonal, é uma reta. Sejam $f_1(x) = m_1x + p_1$ e $f_2(x) = m_2x + p_2$ duas funções lineares afins distintas tais que a medida do ângulo que seus gráficos formam com o eixo das abscissas (eixo dos x) são múltiplos de 45°. Se os gráficos de f_1 e f_2 se cortam no ponto $P = (5, 10)$, então, é correto afirmar que $p_1 + p_2$ é igual a

(A) 20.

(B) 5.

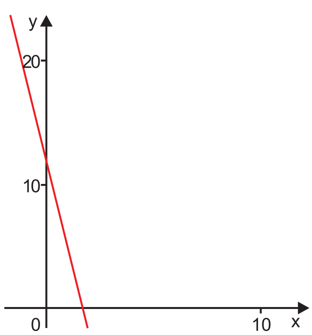
(C) 15.

(D) 10.

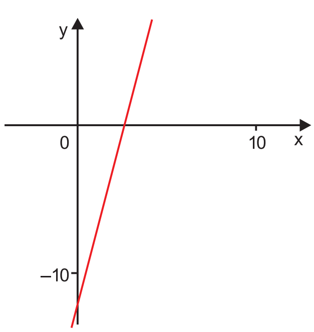
Alternativa **A**.

2 (UEA-AM) Considere a função definida por $f(x) = -4x + 12$. Um esboço do gráfico de f está representado por:

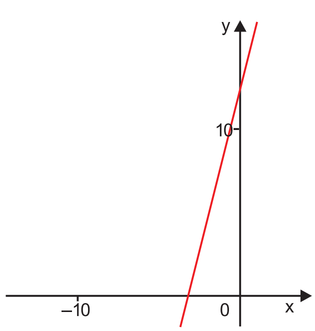
(A)



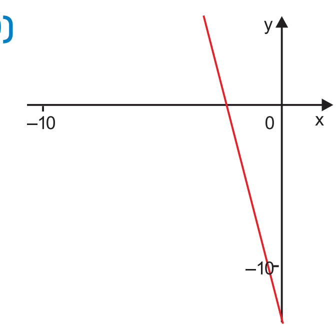
(B)



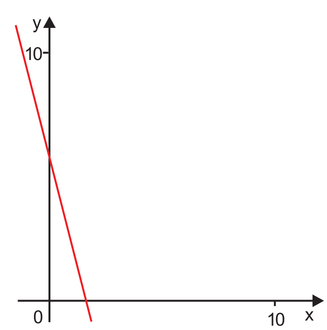
(C)



(D)

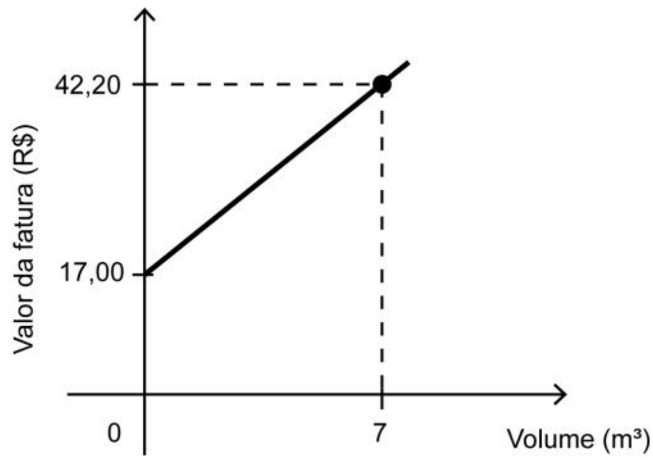


(E)



Alternativa **A**.

3 (Enem) Uma fatura mensal de água é composta por uma taxa fixa, independentemente do gasto, mais uma parte relativa ao consumo de água, em metro cúbico. O gráfico relaciona o valor da fatura com o volume de água gasto em uma residência no mês de novembro, representando uma semirreta.



Observa-se que, nesse mês, houve um consumo de 7 m^3 de água. Sabe-se que, em dezembro, o consumo de água nessa residência, em metro cúbico, dobrou em relação ao mês anterior.

O valor da fatura referente ao consumo no mês de dezembro nessa residência foi

(A) superior a R$ 65,00 e inferior a R$ 70,00.

(B) superior a R$ 80,00 e inferior a R$ 85,00.

(C) superior a R$ 90,00 e inferior a R$ 95,00.

(D) superior a R$ 95,00.

(E) inferior a R$ 55,00.

Alternativa **A**.

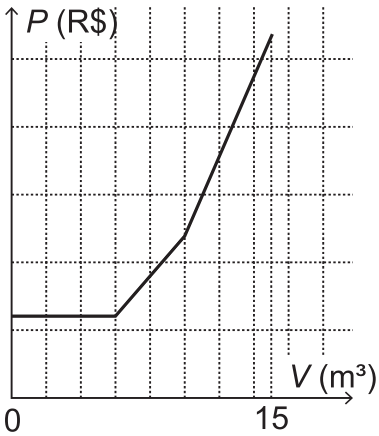
4 (Enem) Uma empresa presta serviço de abastecimento de água em uma cidade. O valor mensal a pagar por esse serviço é determinado pela aplicação de tarifas, por faixas de consumo de água, sendo obtido pela adição dos valores correspondentes a cada faixa.

- Faixa 1: para consumo de até 6 m^3, valor fixo de R$ 12,00;
- Faixa 2: para consumo superior a 6 m^3 e até 10 m^3, tarifa de R$ 3,00 por metro cúbico ao que exceder a 6 m^3;
- Faixa 3: para consumo superior a 10 m^3, tarifa de R$ 6,00 por metro cúbico ao que exceder a 10 m^3.

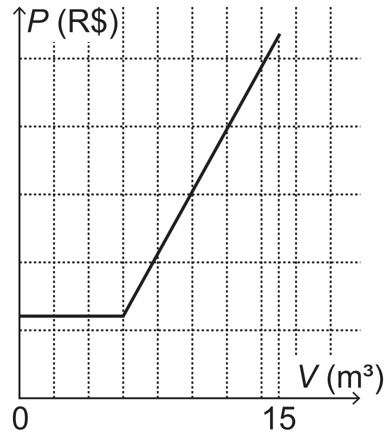
Sabe-se que nessa cidade o consumo máximo de água por residência é de 15 m^3 por mês.

O gráfico que melhor descreve o valor *P*, em real, a ser pago por mês, em função do volume *V* de água consumido, em metro cúbico, é

(A)

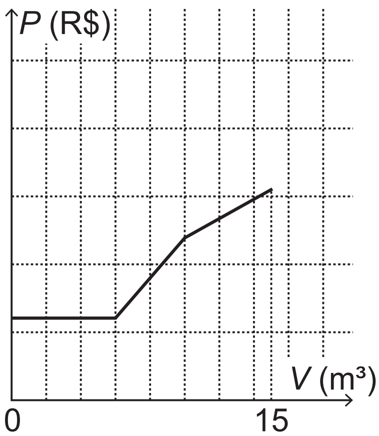


(D)

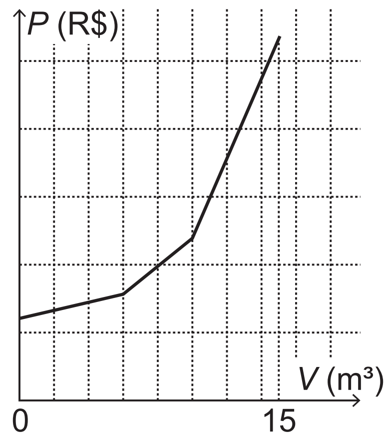


Reprodução/ENEM, 2019

(B)

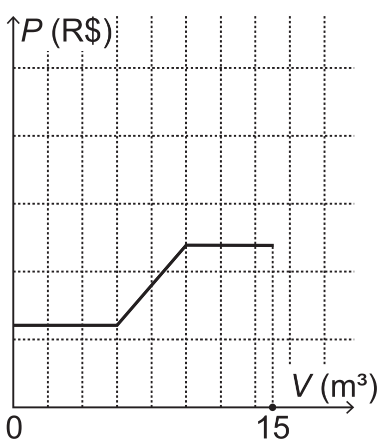


(E)



Alternativa **A**.

(C)



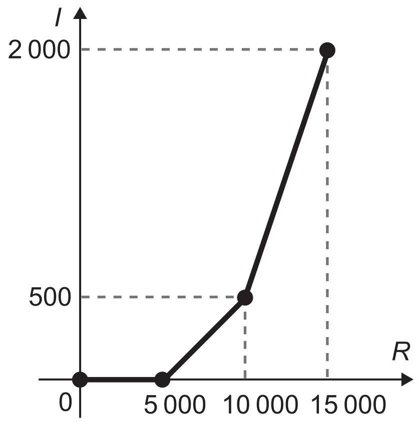
5 (Enem) O quadro representa a relação entre o preço de um produto (R) e seu respectivo imposto devido (I).

Preço do produto (R)	Imposto devido (I)
$R \leq 5\,000$	isento
$5\,000 < R \leq 10\,000$	10% de ($R - 5\,000$)
$10\,000 < R \leq 15\,000$	500 + 30% de ($R - 10\,000$)

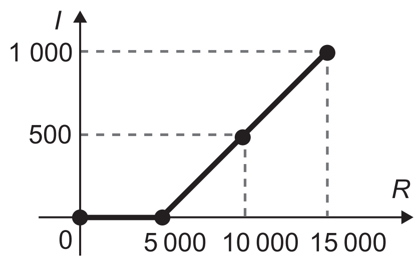
Reprodução/ENEM, 2021

O gráfico que melhor representa essa relação é

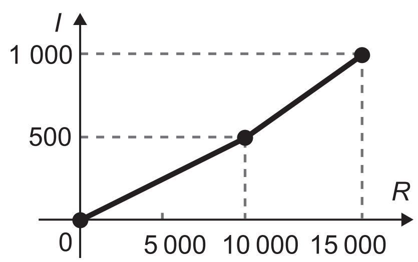
(A)



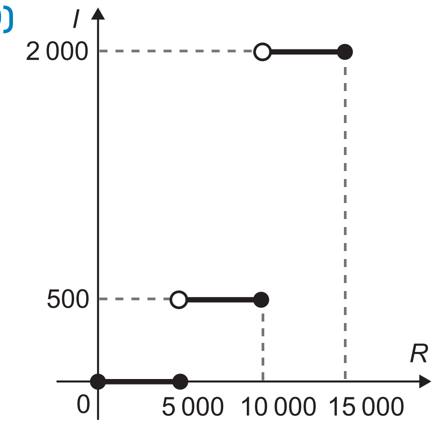
(B)



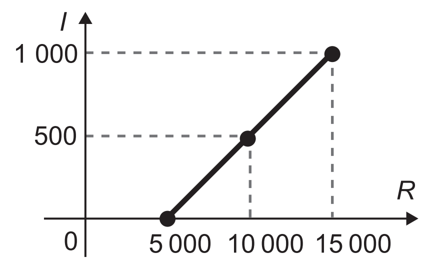
(C)



(D)



(E)



Alternativa **A**.

6 (UFJF/Pism-MG) Um tanque é abastecido por uma torneira e o volume de água, em milhares de litros, em seu interior é dado por $V_1(t) = 3t + 13$, com t contado em horas a partir do instante $t = 0$ em que a torneira é aberta. No instante t_1 em que o volume de água atinge a capacidade máxima do tanque, a torneira é automaticamente fechada e, imediatamente, um registro é aberto permitindo que a água acumulada nesse tanque abasteça caixas-d'água menores. A partir do momento em que esse registro é aberto, o volume d'água no tanque passa a ser descrito pela função $V_2(t) = -2t + 58$, para $t \geqslant t_1$, até que o tanque esteja completamente vazio.

a) Calcule a capacidade máxima do tanque.

b) Em quanto tempo o tanque estará vazio depois de fechada a torneira e aberto o registro?

a) 40 L
b) 20 h

JORNADA 7

Equações e funções de 2º grau

Fernando Branco - AeroCam/Shutterstock

Ponte pênsil Affonso Penna, na divisa dos estados de Minas Gerais e Goiás, Brasil. Foto de 2019.

As pontes se caracterizam como estruturas essenciais na conectividade, na mobilidade e no desenvolvimento econômico de regiões. Há diversos tipos de ponte, cada um deles com especificidades que o torna adequado para diferentes situações. A ponte pênsil, por exemplo, é um tipo de ponte com cabos de aço principais em formato parabólico, ou seja: que ficam entre as torres de apoio, e cabos pendurais verticais que ligam os cabos principais à base da pista perpendicularmente.

A ponte pênsil Affonso Penna, fundada em 1909, considerada a ponte pênsil mais antiga do Brasil, fica sobre o rio Paranaíba e liga o município de Araporã (MG) ao município de Itumbiara (GO).

O *design* elegante e simétrico desse tipo de ponte é baseado nas propriedades da função quadrática: os cabos suspensos que a sustentam formam uma curva parabólica quando estão tensionados. Sua construção suspensa também deixa um espaço livre notável abaixo da estrutura, possibilitando a passagem de grandes embarcações.

Além de essa geometria ser esteticamente agradável, ela é altamente funcional e eficaz do ponto de vista da Engenharia. A curva parabólica permite distribuir uniformemente as forças exercidas sobre a ponte, garantindo uma divisão equilibrada do peso. Isso é fundamental para manter a integridade da ponte, sobretudo sob condições adversas, como ventos fortes e tráfego intenso.

1. Desenhe em uma folha avulsa a vista frontal de uma ponte pênsil. Em seguida, dobre a folha de maneira que os dois lados de sua ponte pênsil se sobreponham e verifique se a simetria axial foi respeitada no desenho. Identifique o eixo de simetria e o vértice da curva parabólica principal formada.

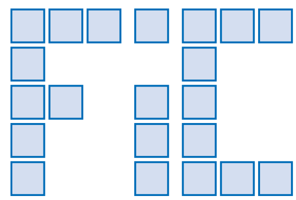
2. A curva parabólica principal associada à vista frontal de uma ponte pênsil apresenta concavidade para cima ou para baixo? Qual coeficiente de uma função de 2º grau define a direção dessa concavidade? Ele é maior ou menor que zero para essa curva?

3. Pesquise na internet e identifique três outras diferentes aplicações da função quadrática em situações do mundo real.

1 e 3. Respostas pessoais.
2. Para cima. Coeficiente *a*. Maior do que zero.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

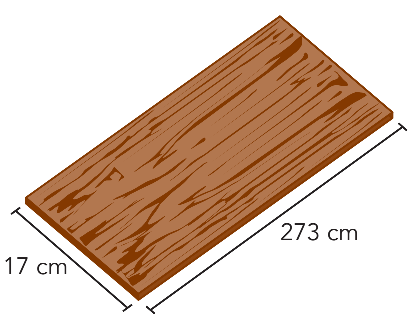
Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Para a sua festa de aniversário, Fernando convenceu os pais a colocar um painel com as iniciais de seu nome no *hall* de entrada, como na imagem a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Inspirado pelos jogos dos anos 1980, a fonte das letras será pixelizada. Mas, para que o painel de fato exista, o pai de Fernando determinou que ele cortasse os quadrados que formam as letras. Assim, deu a Fernando uma chapa de MDF com 273 cm de medida de comprimento e 117 cm de medida de largura e a informação de que a medida de área dessa chapa era suficiente para cortar a quantidade de quadrados que ele precisava sem nenhum desperdício. Logo, Fernando precisa determinar qual será a medida do lado do quadrado que deve ser considerada para cortar a chapa de MDF de modo que se aproveite toda a área da chapa.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Fernando ainda quer iluminar os quadrados do painel utilizando fita de *LED*. Essas fitas ficariam fixadas na parte de trás de cada quadrado de MDF, a 3 cm de distância da borda.

Ele encontrou uma loja que vende uma fita de *LED* por metro que inclui controle remoto para efeitos no painel e instalação. Se Fernando comprar x metros de *LED*, sendo essa quantidade menor do que 50 metros, tal loja vende cada metro a um preço $p = 18 - 0{,}25x$. E se ele comprar 50 metros ou mais pagará apenas R$ 5,50 por metro.

Fernando ficou curioso com o preço e logo se perguntou se haveria uma maneira de comprar menos de 50 metros e a compra sair de graça.

a) Qual será a medida do lado de cada quadrado de MDF a ser utilizado no painel de modo que não haja desperdício de material?

b) Qual é a equação associada que Fernando deve encontrar para determinar o valor pago para uma compra de x metros, sendo x uma medida de comprimento menor do que 50 metros?

c) Seria possível a compra de Fernando sair de graça?

_resolvendo a questão

a) Para determinar qual será a medida do lado de cada quadrado que deve ser considerada para cortar a chapa de MDF sem que haja desperdício de material, Fernando precisa considerar que as letras F, I e C, iniciais do seu nome, conforme ele mesmo planejou, são formadas por 21 quadrados.

Considerando cada quadrado com lado medindo L centímetros, a soma das medidas de área desses 21 quadrados deve coincidir com a medida de área da chapa de MDF. Então:

$$21L^2 = 117 \cdot 273 \Rightarrow L^2 = \frac{117 \cdot 273}{21} = \frac{31\,941}{21} = 1521 \Rightarrow L = \pm\sqrt{1521}$$

Como L é a medida do lado de um quadrado, L deve ser positivo. Logo, $L = 39$, ou seja, Fernando deve cortar os quadrados com lados medindo 39 cm.

b) Para Fernando determinar o valor a ser pago por uma quantidade de x metros menor do que 50 metros, basta multiplicar a quantidade de metros pelo preço, então, nesse caso, o valor da compra (C) será:

$$C = x \cdot (18 - 0{,}25x)$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, a equação também pode ser escrita como $C = -0{,}25x^2 + 18x$, evidenciando que o termo de maior grau está elevado ao quadrado, ou seja, trata-se de uma equação de 2º grau.

c) Utilizando a equação do item anterior, é necessário determinar se existe um valor de x, ou seja, uma quantidade de metros a ser comprada nessa promoção, que resulte em $C = 0$. Logo, a resposta à pergunta pode ser dada pela solução da equação quadrática $x \cdot (18 - 0{,}25x) = 0$. Assim:

$$\underbrace{x}_{1^{\text{a}}\text{ parcela}} \cdot \underbrace{(18 - 0{,}25x)}_{2^{\text{a}}\text{ parcela}} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 18 - 0{,}25x = 0$$

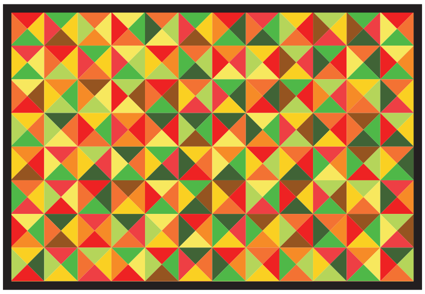
Perceba que $x = 0$ é uma possibilidade de a compra sair de graça, mas que, obviamente, não interessa a Fernando, então queremos saber se há uma quantidade $x > 0$ que satisfaça:

$$18 - 0{,}25x = 0 \Rightarrow 0{,}25x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{0{,}25} \Rightarrow x = 72$$

Como $72 > 50$, Fernando não conseguiria realizar a compra de maneira gratuita, uma vez que a partir de 50 metros é cobrado um valor de R$ 5,50 por metro.

_agora é com você

1 Este quadro decorativo é constituído de um mosaico em que cada triângulo retângulo isósceles tem área medindo 6,25 cm². A moldura desse quadro tem 3 cm de medida de largura.



Monika Adelfang/Shutterstock

A medida da altura e a de comprimento do quadro com a moldura são, respectivamente:

(A) 26 cm e 36 cm.

(B) 46 cm e 66 cm.

(C) 38 cm e 54 cm.

(D) 40 cm e 60 cm.

(E) 20 cm e 20 cm.

Alternativa **B**.

2 Ao rever as anotações da aula de Matemática, Isac verificou que só anotou como solução de uma equação quadrática os números 0 e 7. Lembrando que a aula foi sobre as equações quadráticas na forma $ax^2 + bx = 0$, Isac concluiu que a equação que não havia anotado era equivalente à equação:

(A) $7x^2 + x = 0$.

(B) $x^2 + 14x = 0$.

(C) $x^2 - 7x = 0$.

(D) $(x - 7)^2 = 0$.

(E) $x^2 - 7 = 0$.

Alternativa **C**.

3 Os resistores são dispositivos elétricos que, ao serem percorridos por uma corrente elétrica, transformam energia elétrica em energia térmica, processo denominado efeito Joule.

Considere que a corrente elétrica (i), medida em ampere, que passa por determinado resistor é igual à solução positiva da seguinte equação polinomial de 2º grau:

$$20i^2 - 4\,500 = 0$$

O valor da corrente elétrica, em ampere, é igual a:

(A) 10.

(B) 15.

(C) 20.

(D) 25.

(E) 30.

Alternativa **B**.

4 Neste quadro estão os valores de referência para o índice de massa corporal (IMC).

IMC	Classificação
$< 16{,}9$	Muito abaixo do peso
$< 18{,}5$	Abaixo do peso
$18{,}5 < \text{IMC} < 24{,}9$	Peso normal
$25{,}0 < \text{IMC} < 29{,}9$	Acima do peso
$30{,}0 < \text{IMC} < 34{,}9$	Obesidade Grau 1
$35{,}0 < \text{IMC} < 39{,}9$	Obesidade Grau 2
> 40	Obesidade Grau 3

Sabe-se que a relação que determina o IMC é:

$$H^2 \cdot I - M = 0$$

em que:

- H é a medida de altura, em m, da pessoa;
- I é o índice de massa corporal;
- M é a medida de massa, em kg, da pessoa.

A medida de altura máxima para uma pessoa de 100 kg ter uma classificação acima do peso é:

(A) 1,6.

(B) 1,7.

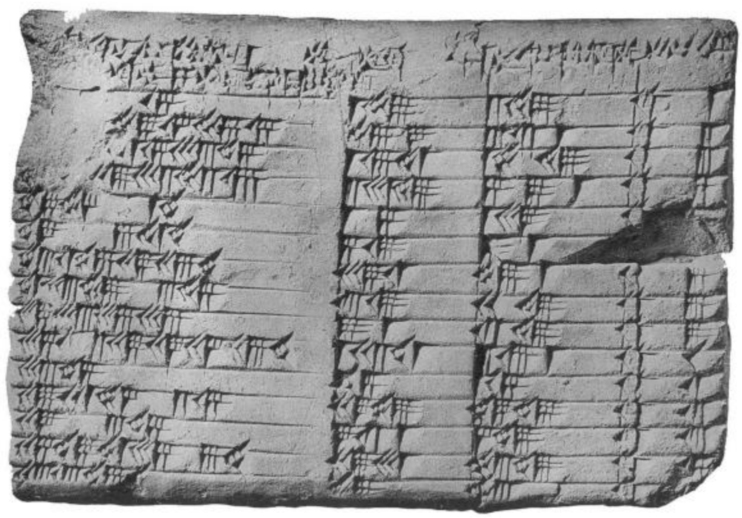
(C) 1,8.

(D) 1,9.

(E) 2,0.

Alternativa **E**.

5 A descoberta da tabuleta Plimpton 322, feita de argila e escavada em Bagdá, no Iraque, em 1984, tem uma datação aproximada entre 1900 a.C. e 1600 a.C. Trata-se de um dos mais famosos artigos matemáticos antigos, revelando um conhecimento geométrico que se acreditava ter sido alcançado apenas na Grécia pelos pitagóricos. No entanto, remonta a mais de mil anos antes de Pitágoras. Essa tabuleta revela profundo entendimento dos chamados ternos pitagóricos.


Wikipedia/Universidade Columbia, Nova York, EUA.

Um terno pitagórico (a, b, c) é formado por três números naturais e representa as medidas do cateto menor (a), do cateto maior (b) e da hipotenusa (c) de um triângulo retângulo.

Para encontrar um terno pitagórico com base na medida de um cateto menor ímpar (a) de um triângulo retângulo, sendo $a \geqslant 3$, é possível utilizar a seguinte fórmula:

$$\left(a, \frac{a^2 - 1}{2}, \frac{a^2 + 1}{2}\right)$$

Considerando um triângulo retângulo, cuja hipotenusa mede 145 cm, a medida do menor cateto será igual a:

(A) 17.

(B) 19.

(C) 23.

(D) 31.

(E) 43.

Alternativa **A**.

6 A menor solução da equação $x^2 - 10x + 100 = 5x(x - 2)$ é:

(A) -10.

(B) -5.

(C) 0.

(D) 5.

(E) 8.

Alternativa **B**.

7 Para a equação $x^2 + 2x = 0$, os valores possíveis de x são:

(A) 0 e -2.

(B) 0 e 2.

(C) 2 e 4.

(D) 1 e 2.

(E) 0 e 1.

Alternativa **A**.

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

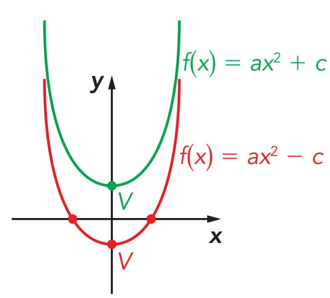
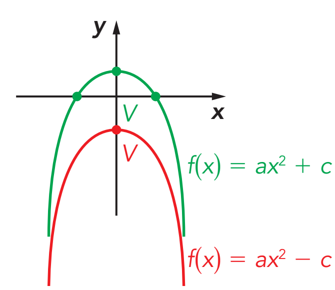
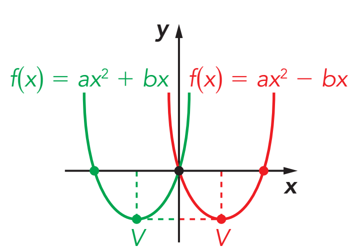
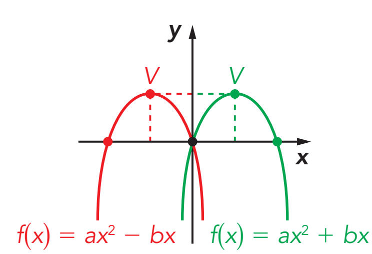
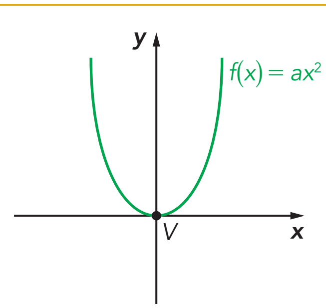
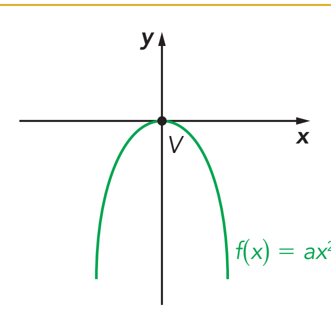
Função polinomial de 2º grau com coeficientes $b = 0$ ou $c = 0$

É representada por uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ com $a \neq 0$; $b = 0$ ou $c = 0$ pertencentes ao conjunto dos números reais. São exemplos de funções desse tipo:

- $f(x) = 2x^2 - 10$ (nesse caso, apenas $b = 0$);
- $f(x) = 2x^2 + 8x$ (nesse caso, apenas $c = 0$);
- $f(x) = 2x^2$ (nesse caso, $b = c = 0$).

Gráfico

O gráfico de uma função de 2º grau é representado por uma curva parabólica que pode ter concavidade para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$). O valor de c representa o ponto em que a curva corta o eixo das ordenadas, e os zeros da função são os valores de x que fazem com que $f(x) = 0$. O vértice representa o ponto em que a curva atinge seu ponto mais alto ou seu ponto mais baixo na direção vertical, sendo o eixo de simetria uma reta vertical que passa pelo vértice e que divide a curva em duas metades simétricas.

	$a > 0$	$a < 0$
$c > 0$ e $\boldsymbol{b = 0}$ Se a e c tiverem sinais contrários, então: ▪ $x' = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ e $x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ▪ $V(0, c)$		
$b > 0$ e $\boldsymbol{c = 0}$ ▪ $x' = 0$ e $x'' = -\frac{b}{a}$ ▪ $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$		
$\boldsymbol{b = c = 0}$ ▪ $x' = x'' = 0$ ▪ $V(0, 0)$		

Banco de imagens/Arquivo da editora

ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Ao modelar o lançamento oblíquo de um objeto em um experimento, considerou-se que no momento do lançamento — no chão — a altura era igual a zero. Após o experimento, obteve-se que a altura *H* do objeto em função da distância horizontal *x* percorrida, em metros, era dada por:

$$h(x) = -x^2 + 25x$$

Então, esse objeto retornou para a altura zero quando havia percorrido horizontalmente:

(A) 5 metros.
(B) 10 metros.
(C) 15 metros.
(D) 20 metros.
(E) 25 metros.

Alternativa **E**.

2 Um **funileiro** vende suas sobras de chapas de aço sempre em pedaços quadrados com a mesma espessura. Para obter lucro, ele as vende considerando a proporcionalidade entre o preço e a área residual. Como um pedaço de chapa de 1 m × 1 m × 1 mm é vendido por R$ 32,00, para facilitar a cobrança, o funileiro elaborou uma tabela e começou a preenchê-la com alguns valores para descobrir o preço associado às medidas de comprimento do lado e de área de 1 pedaço de chapa.

Preços das chapas

Medida de lado (em m)	Medida de área (em m^2)	Preço cobrado
0,10	0,01	R$ 0,32
0,20	0,04	
		R$ 2,88
0,40	0,16	R$ 5,12

Dados elaborados para fins didáticos.

funileiro: profissional metalúrgico que trabalha com a confecção de peças em material laminado composto de ferro e aço de baixo teor de carbono revestido com estanho.

I. Qual é o preço cobrado por um pedaço de chapa que tem lado medindo 0,20 m?

(A) R$ 0,48
(B) R$ 0,64
(C) R$ 1,28
(D) R$ 1,92
(E) R$ 2,56

Alternativa **C**.

II. Qual é a medida de comprimento do lado do pedaço de chapa que é vendido por R$ 2,88?

(A) 0,22 m
(B) 0,24 m
(C) 0,26 m
(D) 0,28 m
(E) 0,30 m

Alternativa **E**.

III. Qual é a lei da função que possibilita calcular o preço a ser pago, em real, por 1 pedaço de chapa quadrada com x de medida de lado?

(A) $f(x) = \frac{32}{x}$

(B) $f(x) = 32x$

(C) $f(x) = 32x^2$

(D) $f(x) = 0{,}32x^2$

(E) $f(x) = x^2$

Alternativa **C**.

IV. Qual é o preço de 1 pedaço de chapa quadrada com 0,60 m de lado?

(A) R$ 19,20

(B) R$ 115,20

(C) R$ 11,52

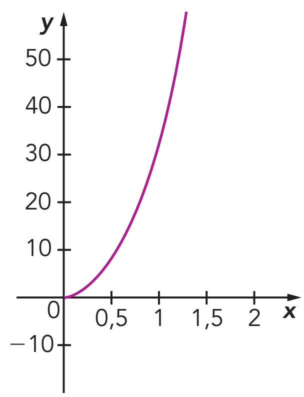
(D) R$ 36,00

(E) R$ 0,53

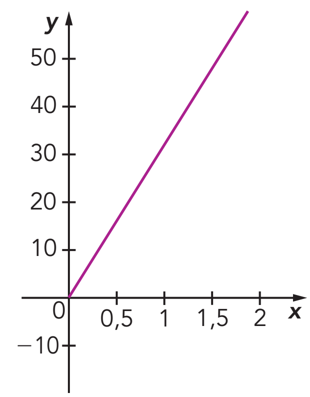
Alternativa **C**.

V. Assinale qual dos gráficos a seguir corresponde à função encontrada no item **III**.

(A)

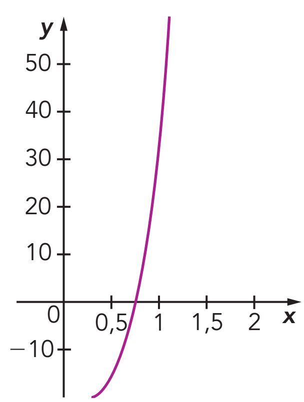


(D)

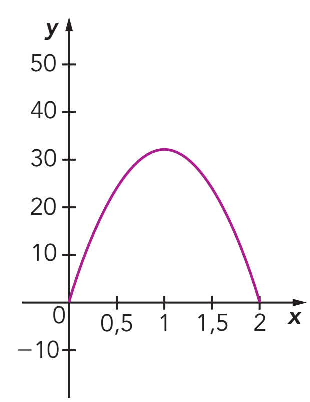


Banco de imagens/Arquivo da editora

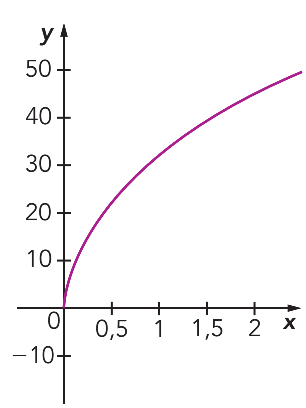
(B)



(E)

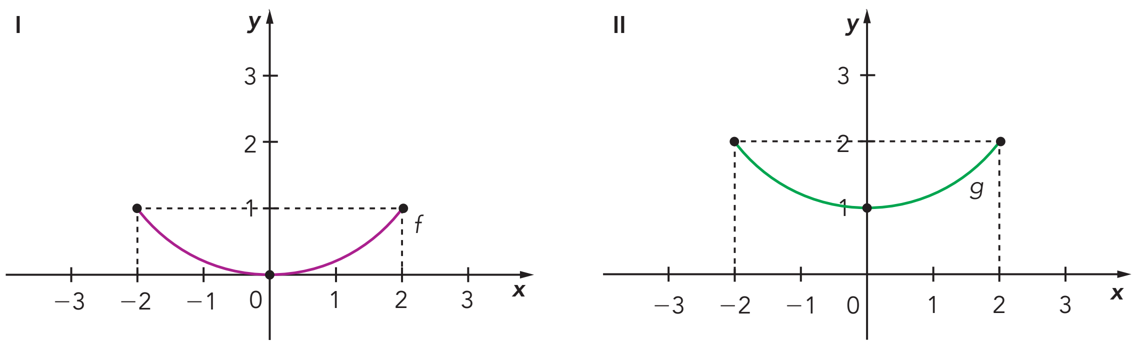


(C)



Alternativa **A**.

3 Para representar o cabo de uma ponte pênsil, um professor pensou inicialmente em utilizar o gráfico (I) da função $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, restrita ao intervalo $[-2, 2]$, mas percebeu que essa teria seu vértice no ponto (0, 0).



Banco de imagens/Arquivo da editora

Ao visualizar o gráfico, o professor decidiu que a representação pretendida deveria ser de outro gráfico (II) tal que todos os seus pontos equivalessem aos pontos de *f* transladados verticalmente de uma unidade.

Por isso, o professor obteve tal representação com o gráfico da função $g(x)$ definida por:

(A) $g(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^2$

(B) $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

(C) $g(x) = x^2 + 1$

(D) $g(x) = \frac{1}{4}(x - 1)^2$

(E) $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

Alternativa **B.**

4 Para adequar um simulador de movimento que considera a energia potencial elástica de uma mola (E_{Pel}), um *software* exige que o usuário informe a constante elástica *k* própria da mola que se quer simular. Um estudante pegou os dados de um experimento real, apresentados na tabela a seguir, deduziu e informou o valor de *k* no *software*.

Energia da mola	
Deslocamento horizontal x (em m)	Energia potencial E_{Pel} (em J)
0,40	8,8
0,50	13,75
0,60	19,8

Dados elaborados para fins didáticos.

Sabendo que $E_{Pel} = \frac{1}{2}kx^2$, em que *x* é o deslocamento em metros da mola, e que $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$, o valor de *k* encontrado pelo estudante é:

(A) 55 N/m.

(B) 70 N/m.

(C) 110 N/m.

(D) 140 N/m.

(E) 220 N/m.

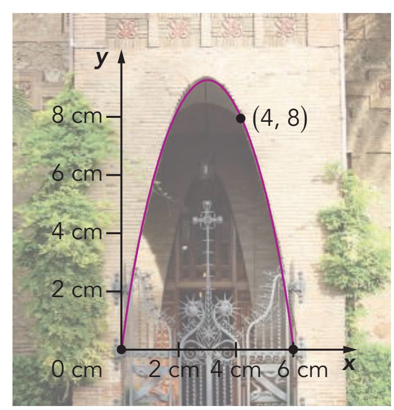
Alternativa **C.**

5 O arquiteto espanhol Antoni Gaudí (1852-1926) foi pioneiro no modernismo catalão e se destacou por seu estilo inovador, incorporando formas orgânicas inspiradas na natureza, incluindo a icônica utilização de arcos parabólicos em suas obras. No Colégio Teresiano de Barcelona, é possível observar arcos parabólicos no corredor do colégio e no pórtico de entrada.

Javier Lopez Bravo/Wikimedia Commons/Foto licenciada sob a licença Creative Commons 2.0: https://creativecommons.org/licenses/by/2.0/deed.pt-br

Enfo/Wikimedia Commons/Foto licenciada sob a licença Creative Commons 3.0: https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.pt-br

Ao estudar a obra de Gaudí, uma estudante de Arquitetura reproduziu a vista frontal do Colégio Teresiano de Barcelona por meio de um desenho arquitetônico. Para compor o arco parabólico associado ao pórtico de entrada, ela utilizou a representação gráfica de uma função $f: [0, 6] \to \mathbb{R}$ que passa pelos pontos $(0, 0)$, $(4, 8)$ e $(6, 0)$.



Enfo/Wikimedia Commons/Foto licenciada sob a licença Creative Commons 3.0: https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.pt-br

Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual é a altura do arco parabólico no desenho?

(A) 8,2 m

(B) 8,4 m

(C) 8,8 m

(D) 9 m

(E) 9,2 m

Alternativa **D**.

_AMPLIANDO

Para conhecer um pouco mais a vida e a obra do arquiteto espanhol Antoni Gaudí, acesse o *QR code* e leia o livro digital Gaudí Barcelona 1900, disponibilizado pelo Bradesco Cultural e associado à exposição de mesmo nome ocorrida em 2016 e 2017 no Instituto Tomie Ohtake, em São Paulo (SP).

6 A lei da função f definida no intervalo $[0, 5]$ que tem como gráfico esta curva é:

(A) $f(x) = 2x^2$.

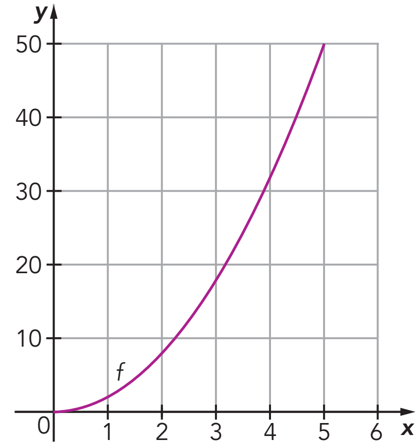
(B) $f(x) = -x^2$.

(C) $f(x) = 3x^2$.

(D) $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

(E) $f(x) = -4x^2$.

Alternativa **A.**

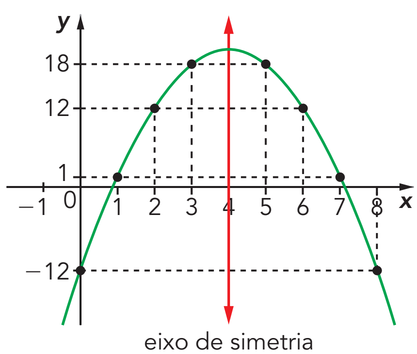


Banco de imagens/Arquivo da editora

_DICA

A função quadrática tem um gráfico que apresenta simetria em relação à reta vertical que passa pelo ponto de máximo ou mínimo (chamado de vértice da parábola, que representa a função quadrática). Se dois valores de x, pertencentes ao domínio de f, são equidistantes do x_v, então suas imagens serão iguais.

Veja essa propriedade neste gráfico, em que $f(3) = f(5) = 18$ e $f(2) = f(6) = 12$, por exemplo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

7 Seja $f(x) = 40x^2 + 200$ a lei de uma função f de domínio x real. Se $f(x_1) = f(x_2)$ e $x_2 - x_1 = 10$, qual é o valor de $f(x_1)$?

(A) 1200

(B) 1300

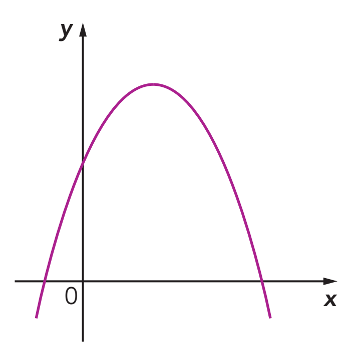
(C) 1400

(D) 1600

(E) 1800

Alternativa **A.**

8 A curva associada ao gráfico de uma função $f(x) = -ax^2 + bx$ foi deslocada para a esquerda de forma que o valor de c passou a ser diferente de 0, resultando em uma nova curva cuja função é representada por $f(x) = -ax^2 + bx + c$. Observe o gráfico.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Os sinais dos coeficientes a, b e c que representam a nova curva são:

(A) $+$, $+$ e $+$.

(B) $-$, $-$ e $-$.

(C) $-$, $-$ e $+$.

(D) $-$, $+$ e $+$.

(E) $+$, $-$ e $+$.

Alternativa **D.**

ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) O chocolate é um dos alimentos mais apreciados e desejados do mundo. Uma loja especializada nesse produto oferece uma promoção para os bombons, que custam R$ 2,00 cada. Cada cliente tem x% de desconto na compra de x bombons. A promoção é válida para a compra de até 40 bombons, ou seja, 40% é o desconto máximo possível. Queremos escrever uma expressão para V em função de x, com $x \leqslant 40$.

Qual é a expressão do valor V, em reais, na compra de x bombons da promoção, por cliente?

(A) $V = \frac{1}{50}x^2$

(B) $V = 2 - \frac{1}{50}x$

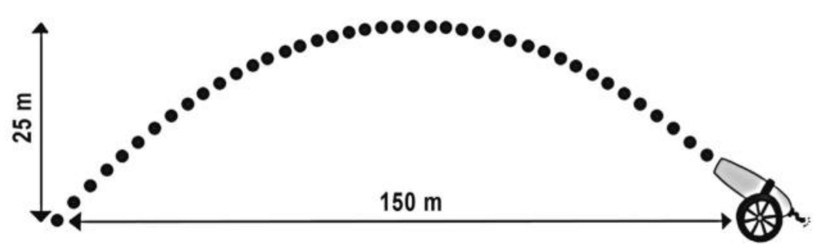
(C) $V = 2x - \frac{1}{50}x^2$

(D) $V = x - \frac{1}{100}x^2$

(E) $V = 2x - \frac{1}{100}x^2$

Alternativa **C**.

2 (Enem) Um projétil é lançado por um canhão e atinge o solo a uma distância de 150 metros do ponto de partida. Ele percorre uma trajetória parabólica, e a altura máxima que atinge em relação ao solo é de 25 metros.



Reprodução/ENEM, 2018.

Admita um sistema de coordenadas xy em que no eixo vertical y está representada a altura e no eixo horizontal x está representada a distância, ambas em metro. Considere que o canhão está no ponto (150, 0) e que o projétil atinge o solo no ponto (0, 0) do plano xy.

A equação da parábola que representa a trajetória descrita pelo projétil é

(A) $y = 150x - x^2$

(B) $y = 3750x - 25x^2$

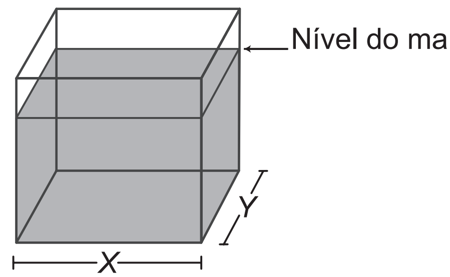
(C) $75y = 300x - 2x^2$

(D) $125y = 450x - 3x^2$

(E) $225y = 150x - x^2$

Alternativa **E**.

3 (Enem) Viveiros de lagostas são construídos, por cooperativas locais de pescadores, em formato de prismas reto-retangulares, fixados ao solo e com telas flexíveis de mesma altura, capazes de suportar a corrosão marinha. Para cada viveiro a ser construído, a cooperativa utiliza integralmente 100 metros lineares dessa tela, que é usada apenas nas laterais.



Quais devem ser os valores de *X* e de *Y*, em metro, para que a área da base do viveiro seja máxima?

(A) 1 e 49

(B) 1 e 99

(C) 10 e 10

(D) 25 e 25

(E) 50 e 50

Alternativa **D**.

4 (Enem) A Igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na Figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A Figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

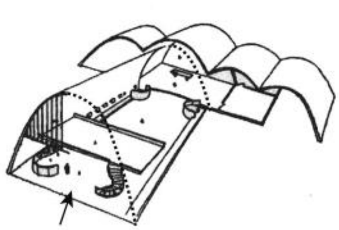


Figura 1

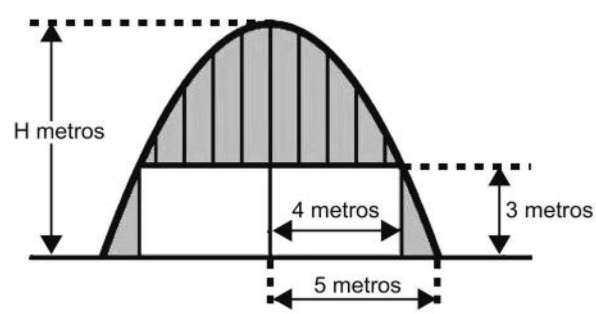


Figura 2

Qual a medida da altura H, em metro, indicada na Figura 2?

(A) $\frac{16}{3}$

(B) $\frac{31}{5}$

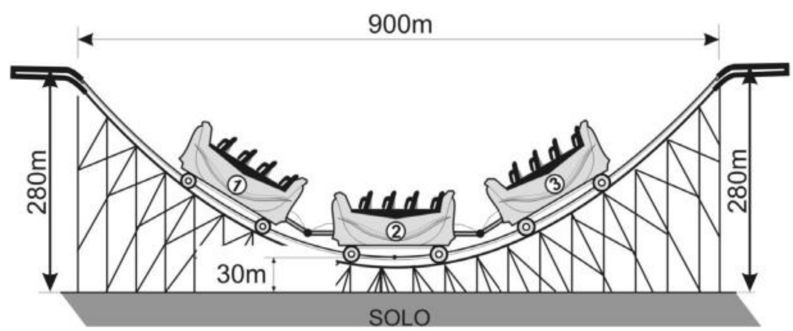
(C) $\frac{25}{4}$

(D) $\frac{25}{3}$

(E) $\frac{75}{2}$

Alternativa **D**.

5 (EPCAR-MG) Uma das curvas radicais de uma montanha-russa terá a forma de uma parábola, gráfico de uma função quadrática, como mostra a figura. Será possível alcançar a maior altura, 280 m do solo, em dois pontos dessa curva, distantes 900 m um do outro, e a descida atingirá o ponto mais baixo da curva a 30 metros do solo, como se vê na figura.



Reprodução/ EPCAR-MG, 2016.

A distância horizontal entre o centro da roda dianteira do carrinho 1 e o centro da roda traseira do carrinho 3 quando esses centros estiverem a 70 m do solo, são

(A) 200 metros.

(B) 250 metros.

(C) 360 metros.

(D) 400 metros.

Alternativa **C**.

6 (Ifal) A quantidade x de pessoas que assistem a um espetáculo teatral varia de acordo com o preço p, em reais, cobrado na entrada, conforme a expressão 100 − x. Nessas condições, qual preço deve-se cobrar no espetáculo para que a renda seja máxima?

(A) 30.

(B) 40.

(C) 50.

(D) 60.

(E) 70.

Alternativa **C**.

7 (Enem) Para evitar uma epidemia, a Secretaria de Saúde de uma cidade dedetizou todos os bairros, de modo a evitar a proliferação do mosquito da dengue. Sabe-se que o número f de infectados é dado por $f(t) = -2t^2 + 120t$, em que t é expresso em dia e $t = 0$ é o dia anterior à primeira infecção. Essa função é válida para os 60 primeiros dias da epidemia. Sabe-se que, pela propriedade de simetria, o número máximo de infectados ocorre para o valor t equidistante das raízes, ou seja, equidistantes dos valores de t tais que $f(t) = 0$.

Qual o dia em que o número de infectados, nessas condições, atingirá o máximo?

(A) 19º dia.

(B) 20º dia.

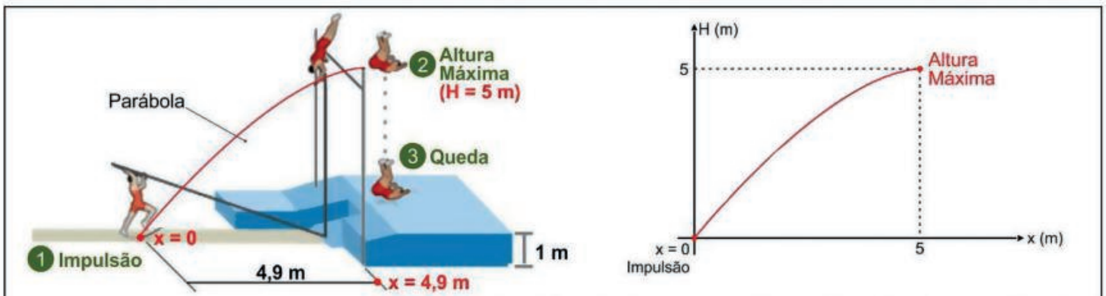
(C) 29º dia.

(D) 30º dia.

(E) 60º dia.

Alternativa **D**.

8 (Fepar-PR) No salto com vara, o atleta deve ultrapassar o sarrafo, colocado em determinada altura, tomando impulso suficiente e se elevando com a utilização de uma vara flexível.



(Adaptado do disponível em:<http://www.terra.com.br/esportes/infograficos>. Acesso em: 8 set. 2016)

Reprodução/ Fepar-PR, 2017.

Desde o momento da impulsão até o momento de altura máxima, o atleta desenvolve um deslocamento vertical (H) e horizontal (x) em forma de parábola: $H = ax^2 + bx + c$. O ponto $x = 0$ corresponde ao momento da impulsão; após atingir a altura máxima, o atleta cai verticalmente. O sarrafo está a 4,9 metros de altura; a altura máxima atingida pelo atleta é de 5 metros ($H = 5$: o ponto máximo da parábola) e está horizontalmente a 5 metros do ponto de impulsão. Sabendo que a altura H foi medida considerando a parte mais baixa do corpo do atleta, avalie as afirmativas, julgando cada uma verdadeira ou falsa, justificando seu julgamento, em cada caso.

[F] O valor do coeficiente a da parábola é 0,2.

[F] A relação entre o deslocamento vertical (H) e horizontal (x) é dada por $H = 0{,}2x^2 + 2x$.

[V] O valor do coeficiente b da parábola é 2.

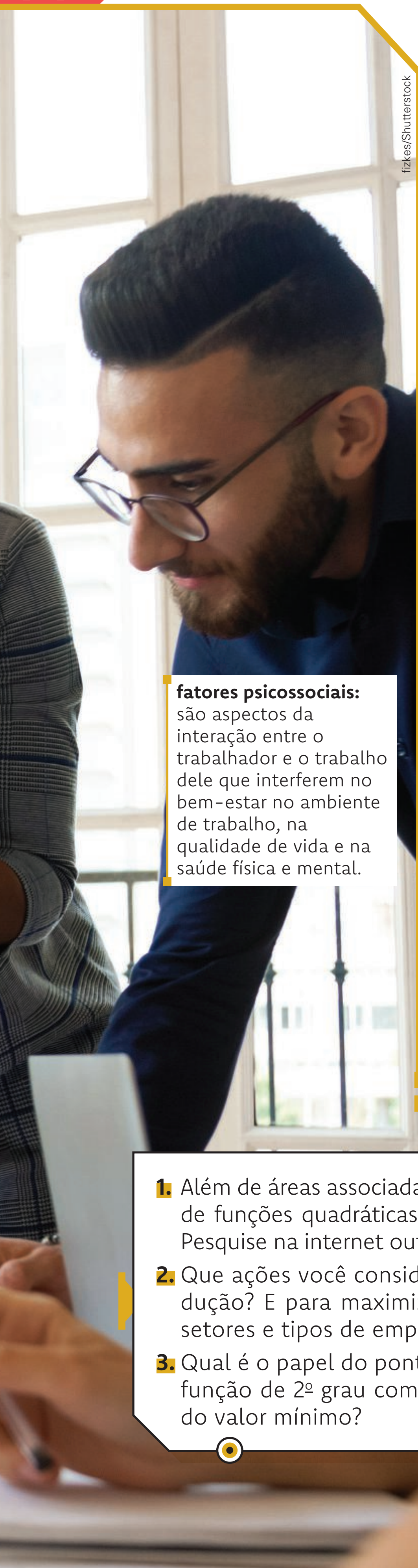
[F] Após se deslocar horizontalmente 1 m do ponto de impulsão, o atleta irá atingir uma altura de 2 m.

[V] O atleta conseguiu ultrapassar o sarrafo.

_JORNADA

8

Gráficos de funções de 2º grau



fizkes/Shutterstock

fatores psicossociais: são aspectos da interação entre o trabalhador e o trabalho dele que interferem no bem-estar no ambiente de trabalho, na qualidade de vida e na saúde física e mental.

O gestor de uma empresa precisa tomar decisões a todo momento para garantir o crescimento, a eficiência e a rentabilidade de seu negócio. Tais decisões não podem estar pautadas apenas em certos tipos de informação ou em algum viés científico; elas devem ser tomadas levando em consideração inúmeros fatores de várias ciências, tanto de exatas quanto de humanas.

É por isso que carreiras como Economia e Administração muitas vezes se baseiam nessas duas áreas. Não há como pensar em minimizar custos e maximizar lucros sem levar em consideração as consequências das decisões que tomamos para atingir esses objetivos. Todo gestor deve estar ciente dos **fatores psicossociais** que influenciam positivamente o ambiente organizacional de seu negócio, além de avaliar o futuro levando em conta vitórias e percalços do passado.

Por outro lado, os conceitos estudados pela Matemática financeira, pela Estatística e pela Probabilidade oferecem subsídios analíticos para a tomada de decisões eficazes no ambiente laboral. O estudo das funções também desempenha um papel crucial na análise de dados financeiros, na modelagem de decisões de negócios e na otimização de recursos.

Por meio da simetria da curva parabólica associada a uma função quadrática, por exemplo, é possível identificar o nível de produção ou de vendas que gera o lucro mais alto para um negócio (valor máximo), como também a quantidade ideal de recursos a ser alocada para obter um nível de produção desejado ao menor custo possível (valor mínimo).

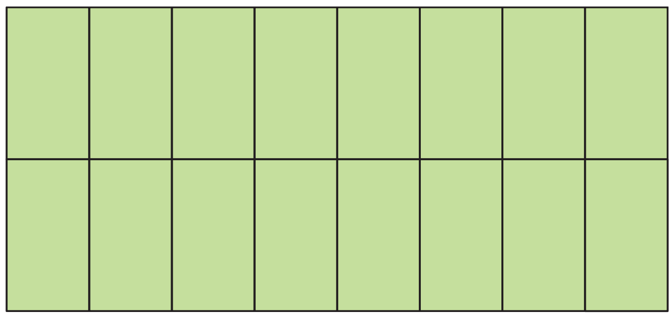
1. Além de áreas associadas a finanças, o conceito de valor máximo e o de valor mínimo de funções quadráticas podem ser utilizados em inúmeras áreas do conhecimento. Pesquise na internet outros exemplos em que tais conceitos podem ser aplicados.
2. Que ações você considera essenciais para uma empresa minimizar custos de produção? E para maximizar lucros? (Leve em conta a aplicabilidade em diferentes setores e tipos de empresa, tanto reais quanto fictícias.)
3. Qual é o papel do ponto de intersecção de uma curva parabólica associada a uma função de 2º grau com seu eixo de simetria na identificação do valor máximo ou do valor mínimo?

Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

_ETAPA 1

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Uma imobiliária abriu a venda de 16 lotes retangulares com tamanhos iguais em um terreno também retangular de 6 000 m² dispostos da seguinte maneira:



Banco de imagens/Arquivo da editora

I. Sabendo que o terreno tem $(3x - 4)$ de medida de comprimento e $(x + 5)$ de medida de largura, determine:

a) a equação polinomial de 2º grau na forma algébrica que possibilita o cálculo de x.

b) as medidas de largura e de comprimento de cada lote.

c) a equação polinomial de 2º grau na forma fatorada equivalente à equação do item **a**.

II. O lucro esperado com a venda dos lotes pode ser representado por meio de uma função de 2º grau $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $L(q) = q^2 + 8q - 48$, sendo q a quantidade de lotes vendidos. Cada unidade de L corresponde a R$ 10.000,00 em lucro.

a) Represente graficamente a função $L(q)$ para o intervalo $1 \leqslant q \leqslant 16$.

b) Qual é o número de lotes que a imobiliária precisa vender para obter um rendimento maior do que zero?

c) Qual é a função de 2º grau na forma fatorada equivalente à função $L(q)$?

_resolvendo a questão

I.

a) A medida de área de um retângulo é dada pelo produto da medida de comprimento pela medida de largura. Logo:

$$(3x - 4) \cdot (x + 5) = 6000$$

Como uma equação polinomial de 2º grau em sua forma algébrica é definida por $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$$3x^2 + 15x - 4x - 20 = 6000 \Rightarrow 3x^2 + 11x - 6020 = 0$$

b) Para calcular o valor de x, é necessário utilizar a fórmula de Bhaskara definida por $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$. Logo:

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6\,020) = 72\,361$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{72\,361}}{2 \cdot 3} = \frac{-11 \pm 269}{6} \Rightarrow x' = 43 \text{ e } x'' = -\frac{140}{3}$$

Sendo x a medida de comprimento, é necessário que $x > 0$. Logo, $x = -\dfrac{140}{3}$ não convém. Portanto, o valor de x deve ser 43 m.

Calculando as medidas de comprimento e de largura do terreno, respectivamente, temos:

$$(3x - 4) = (3 \cdot 43 - 4) = 125$$

$$(x + 5) = (43 + 5) = 48$$

Para encontrar as medidas de largura e de comprimento de cada lote, é necessário dividir 125 por 8 e 48 por 2, respectivamente. Portanto, a medida de largura de cada lote é 15,625 m e a de comprimento é 24 m.

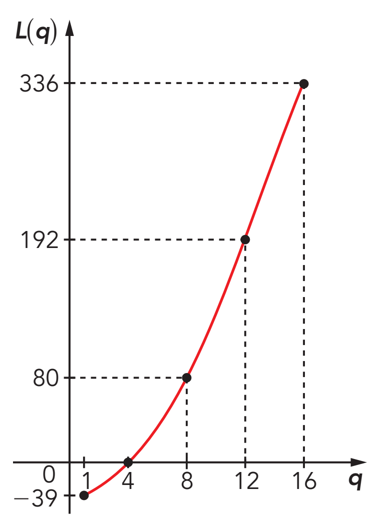
c) Uma equação polinomial de 2º grau na forma fatorada pode ser definida como $a \cdot (x - x') \cdot (x - x'') = 0$, com $a \neq 0$. Substituindo os valores das raízes x' e x'', temos:

$$3 \cdot (x - 43) \cdot \left(x + \frac{140}{3}\right) = 0$$

II.

a) Considere a função L definida por $L(q) = q^2 + 8q - 48$. Observe a tabela a seguir, na qual são apresentados alguns pontos que pertencem à representação gráfica dessa função. Ao marcar esses pontos em um plano cartesiano, é possível traçar a curva que passa por eles.

q	$L(q)$
1	−39
4	0
8	80
12	192
16	336



Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Como a curva associada à função corta o eixo q quando $q = 4$, é possível afirmar que o lucro será maior do que zero quando $q > 4$, ou seja, a imobiliária precisa vender mais do que 4 lotes.

c) Para encontrar a função de 2º grau fatorada equivalente à função $L(q)$ é necessário encontrar os zeros da função. A partir do item **a**, descobrimos que (4, 0) representa um dos zeros da função.

Para determinar os zeros da função, consideramos $L(q) = 0$ e, por meio da fórmula de Bhaskara, é possível encontrar os valores associados a q.

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 256$$

$$q = \frac{28 \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1} = \frac{28 \pm 16}{2} \Rightarrow q' = 4 \text{ e } q'' = -12$$

Logo, o outro ponto em que a curva associada à função $L(q)$ cortaria o eixo q seria em $(-12, 0)$. Uma função de 2º grau na forma fatorada pode ser definida como $f(x) = a \cdot (x - x') \cdot (x - x'')$, com $a \neq 0$. Substituindo os valores dos zeros q' e q'', temos:

$$L(q) = (x - 4) \cdot (x + 12)$$

_agora é com você

1 As raízes da equação polinomial de 2º grau $x^2 - 3x - 10 = 0$ são:

(A) 0 e −10.

(B) 2 e −5.

(C) 5 e −2.

(D) 3 e −10.

(E) 10 e −3.

Alternativa **C**.

2 A equação polinomial de 2º grau $x^2 - 2x - 24 = 0$ pode ser reescrita em sua forma fatorada por:

(A) $2(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$.

(B) $(x + 4) \cdot (x - 6) = 0$.

(C) $(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$.

(D) $-2(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$.

(E) $-(x - 4) \cdot (x - 6) = 0$.

Alternativa **B**.

3 Considere uma função de 2º grau $t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e alguns valores assumidos por essa função apresentados na tabela a seguir.

x	$t(x)$
−2	5
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5

A lei que define a função t e passa pelos pontos da tabela anterior é:

(A) $t(x) = x^2 - 3x - 3$.

(B) $t(x) = -x^2 + 2x + 3$.

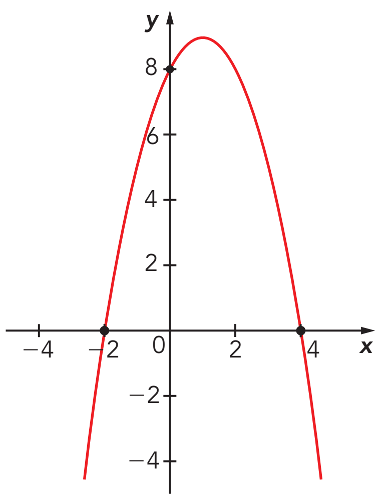
(C) $t(x) = x^2 - 2x + 3$.

(D) $t(x) = -x^2 + 2x - 3$.

(E) $t(x) = x^2 - 2x - 3$.

Alternativa **E**.

4 A seguir, temos o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A lei que melhor define a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por:

(A) $f(x) = -(x + 2) \cdot (x - 4)$.

(B) $f(x) = -(x - 2) \cdot (x + 4)$.

(C) $f(x) = (x - 2) \cdot (x + 4)$.

(D) $f(x) = (x + 2) \cdot (x - 4)$.

(E) $f(x) = -(x + 8)^2$.

Alternativa **A**.

5 Considerando a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3x^2 + 18x + 54$, determine os valores de x que zeram $f(x)$.

(A) $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$

(B) $2 + \sqrt{3}$ e $2 - \sqrt{3}$

(C) $5 + 4\sqrt{3}$ e $5 - 4\sqrt{3}$

(D) $3 + 3\sqrt{3}$ e $3 - 3\sqrt{3}$

(E) $3\sqrt{3}$ e $-3\sqrt{3}$

Alternativa **D**.

6 Considerando a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2(x + 2) \cdot (x - 12)$, sabemos que os pontos de intersecção de f com o eixo das abscissas são:

(A) $(0, 2)$ e $(0, 12)$.

(B) $(0, -2)$ e $(0, 12)$.

(C) $(2, 0)$ e $(-12, 0)$.

(D) $(-2, 0)$ e $(-12, 0)$.

(E) $(-2, 0)$ e $(12, 0)$.

Alternativa **E**.

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Função polinomial de 2º grau

Também é conhecida como **função quadrática**. É representada por uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, com $a \neq 0$.

Gráfico

O **gráfico** de uma função de 2º grau é representado por uma curva parabólica. Essa curva pode ter concavidade para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$). O valor de c representa a ordenada do ponto em que a curva corta o eixo das ordenadas, enquanto os zeros da função são os valores de x que fazem $f(x) = 0$. De acordo com o valor de Δ, a função não terá nenhuma raiz ou terá 1 ou 2 raízes.

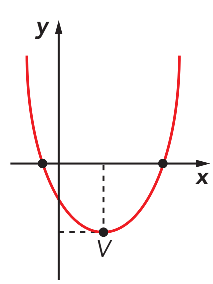
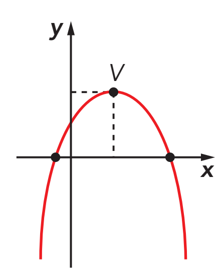
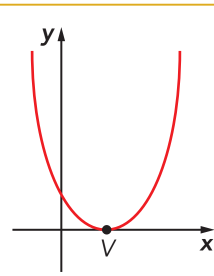
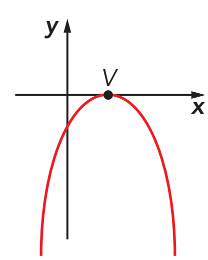
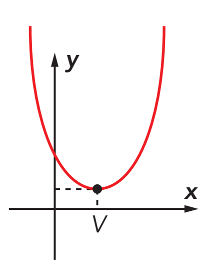
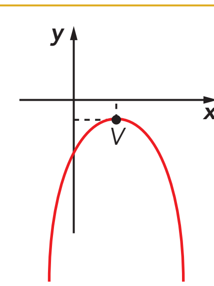
Vértice e eixo de simetria

O **vértice** de uma curva parabólica pode ser representado pelo ponto $V(x_v, y_v)$.

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

- Se $a > 0$, então y_V é valor mínimo de f.
- Se $a < 0$, então y_V é valor máximo de f.

A reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa pelo vértice define o **eixo de simetria** da curva parabólica.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

Banco de imagens/Arquivo da editora

ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Qual é o valor máximo da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela lei de formação $f(x) = -2x^2 - 4x + 7$?

(A) -10

(B) -9

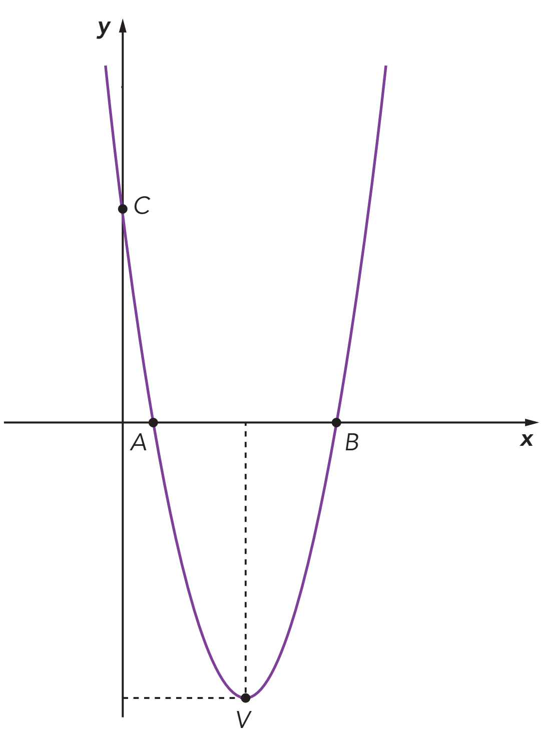
(C) -5

(D) 5

(E) 9

Alternativa **E**.

2 Um engenheiro está projetando um jardim em formato parabólico. Para calcular o espaço disponível, ele utiliza uma função que descreve a curva do canteiro no plano cartesiano. A função escolhida foi $g(x) = x^2 - 8x + 7$. O gráfico dessa função está representado a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

A alternativa que melhor descreve as coordenadas dos pontos A, B, C e V do gráfico é:

(A) $A(-1, 0)$, $B(7, 0)$, $C(0, 7)$ e $V(4, -9)$.

(B) $A(0, -1)$, $B(0, 5)$, $C(0, 8)$ e $V(2, -9)$.

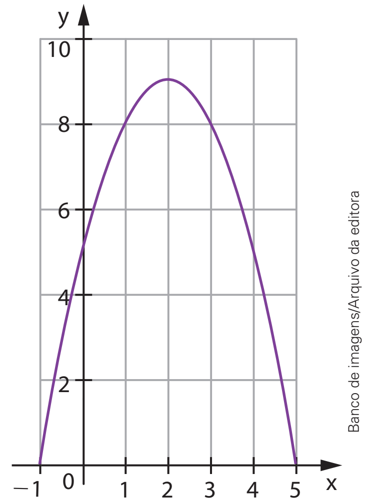
(C) $A(0, -1)$, $B(0, 5)$, $C(0, 8)$ e $V(9, 2)$.

(D) $A(1, 0)$, $B(7, 0)$, $C(0, 7)$ e $V(0, 4)$.

(E) $A(1, 0)$, $B(7, 0)$, $C(0, 7)$ e $V(4, -9)$.

Alternativa **E**.

3 Observe o gráfico abaixo que representa uma função quadrática:



A partir do gráfico, pode-se afirmar que o valor máximo da função é:

(A) 2.

(B) 5.

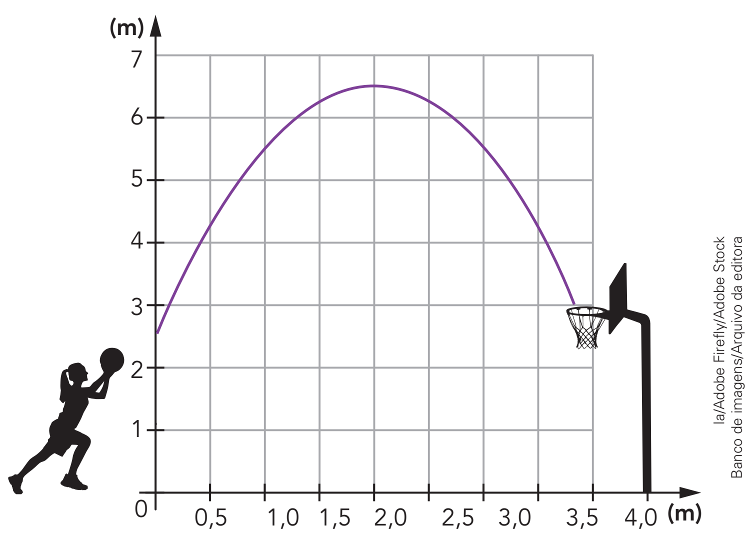
(C) 9.

(D) 0.

(E) −1.

Alternativa **C**.

4 Uma jogadora de basquete lança a bola em direção à cesta. A trajetória da bola pode ser representada pelo gráfico abaixo:



De acordo com o gráfico, a altura máxima atingida pela bola durante o lançamento corresponde a um valor entre:

(A) 0 m e 2 m.

(B) 2 m e 3 m.

(C) 2 m e 4 m.

(D) 3 m e 6 m.

(E) 6 m e 7 m.

Alternativa **E**.

5 As funções C, V e L, definidas para todos os números reais, representam, respectivamente: o custo, a venda e o lucro, em milhares de reais, de uma empresa que fabrica uma quantidade x (em milhões de peças) de determinado produto. Considere:

- $C(x) = 4x^2 - 20x + 37$
- $V(x) = 3x^2 + 4x$
- $L(x) = V(x) - C(x)$

Qual é o número de peças que deve ser produzido para que o lucro $L(x)$ seja maximizado?

(A) 4 milhões de peças
(B) 9 milhões de peças
(C) 12 milhões de peças
(D) 18 milhões de peças
(E) 24 milhões de peças

Alternativa **C**.

6 Em determinado dia, um frigorífico liga sua principal câmara frigorífica à 0 h, em temperatura ambiente de 32 °C. Após algumas horas de funcionamento, a câmara atinge medida de temperatura mínima e, nesse momento, tem sua potência reduzida até que a medida de temperatura volte a atingir 0 °C, quando então ela é novamente desligada. A função $T: [0, 23] \rightarrow \mathbb{R}$ nos informa a temperatura no interior da câmara após h horas de ligada e é definida por $T(h) = h^2 - 18h + 32$. Sabendo que h_1 e h_2 representam, respectivamente, a primeira e a segunda hora em que a temperatura da câmara atingiu a medida 0 °C e que $T_{mín}$ é a medida de temperatura mínima que a câmara atingiu, os valores de h_1, h_2 e $T_{mín}$ são, respectivamente:

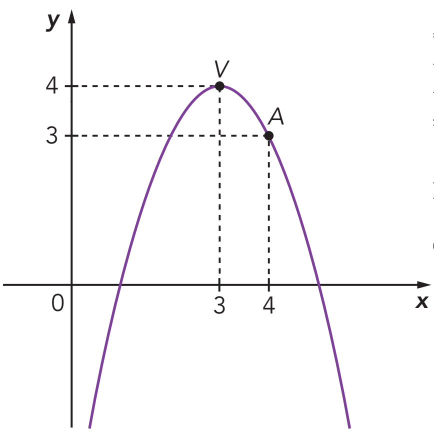
(A) 5 h; 20 h e −30 °C.
(B) 2 h; 16 h e −49 °C.
(C) 3 h; 18 h e −37 °C.
(D) 9 h; 21 h e −32 °C.
(E) 7 h; 22 h e −52 °C.

Alternativa **B**.

DICA

Para descobrir a lei que define uma função quadrática quando são informadas apenas as coordenadas de seu vértice e de outro ponto, podemos usar a forma canônica ou fórmula do vértice: $\boldsymbol{f(x) = a \cdot (x - x_V)^2 + y_V}$. Basta substituir na fórmula as coordenadas $V(x_V, y_V)$ e depois utilizar as coordenadas do outro ponto dado para descobrir o valor de a.

7 Um arquiteto está projetando a estrutura de um arco parabólico para a entrada de uma praça. O formato desse arco pode ser representado pelo gráfico de uma função quadrática f cujo domínio é o conjunto dos números reais.



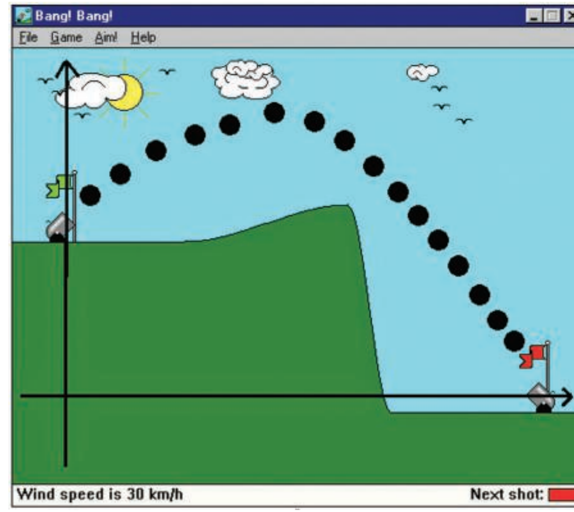
Banco de imagens/Arquivo da editora

A lei que define a função f é dada por:

(A) $f(x) = x^2 - 3x + 4$.
(B) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$.
(C) $f(x) = x^2 - 6x + 5$.
(D) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.
(E) $f(x) = -x^2 + 6x$.

Alternativa **D**.

8 Jogos digitais costumam utilizar coordenadas cartesianas para a movimentação de objetos. A imagem ao lado apresenta a tela do jogo *Bang! Bang!*, em que dois canhões tentam se atingir mutuamente. O lançamento oblíquo do projétil faz um ângulo com a horizontal e a trajetória do projétil é descrita por uma curva parabólica.



Na situação descrita, o canhão com bandeira vermelha (à direta da tela) está sobre o eixo das abscissas, enquanto o canhão com bandeira verde (à esquerda da tela) está sobre o eixo das ordenadas a uma altura de 12 cm do eixo das abscissas. Sabe-se que a medida de altura máxima que o projétil disparado pelo canhão verde atingiu foi 16 cm, percorrendo uma distância horizontal medindo 4 cm.

Com base nas informações anteriores, é possível afirmar que o canhão vermelho foi destruído quando o projétil estava sobre o ponto:

(A) (8, 0).
(B) (0, 8).
(C) (12, 0).
(D) (0, 12).
(E) (16, 0).

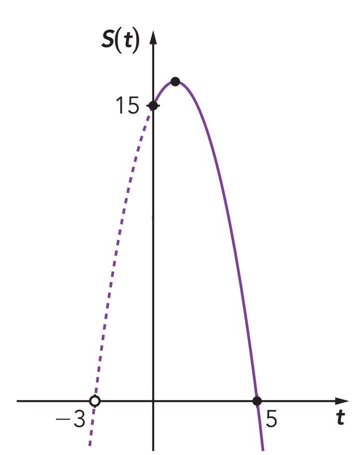
Alternativa **C**.

_DICA

A posição de um móvel em função do intervalo de tempo, em um Movimento Uniformemente Variado (MUV), é expressa pela função quadrática *S*, definida por $S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$, em que:

- S_0 é a posição inicial do móvel em relação à origem referencial do movimento;
- v_0 é a velocidade do móvel no instante inicial;
- a é a aceleração escalar do móvel;
- t é o intervalo de tempo decorrido desde o instante inicial.

9 O gráfico a seguir representa o movimento de uma partícula ao longo do tempo. A curva parabólica indica a relação entre a posição (*s*) e o tempo (*t*).



I. Qual é a função horária do movimento?

(A) $S(t) = 15 + 2t - t^2$
(B) $S(t) = 15 + 2t + t^2$
(C) $S(t) = 15 - t + t^2$
(D) $S(t) = 15 - 2t - t^2$
(E) $S(t) = 15 + 2t - \frac{1}{2}t^2$

Alternativa **A**.

II. As medidas de velocidade inicial e de aceleração do móvel são, respectivamente:

(A) 15 m/s e 2 m/s².

(B) 2 m/s e −2 m/s².

(C) 15 m/s e −2 m/s².

(D) 2 m/s e 2 m/s².

(E) 1 m/s e $-\frac{1}{2}$ m/s².

Alternativa **B.**

10 Uma vinícola vende 40 000 litros de vinho por mês a R$ 36,00 cada litro. Os proprietários perceberam que, para cada centavo de desconto concedido por litro, eram vendidos 50 litros a mais por mês. Por exemplo, no mês em que o preço do litro era de R$ 35,40, foram vendidos 43 000 litros.

Considere x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro de vinho e V o valor, em reais, arrecadado por mês com a venda de vinho.

I. Que função polinomial de 2º grau nos informa o valor de V em função de x?

(A) $V(x) = -x^2 + 1400x + 1440000$

(B) $V(x) = -2x^2 + 1400x + 288000$

(C) $V(x) = 2x^2 + 700x + 1440000$

(D) $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 700x + 2880000$

(E) $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 1400x + 1440000$

Alternativa **E.**

II. Qual é o melhor desconto a ser dado para maximizar a arrecadação total em reais?

(A) R$ 0,28

(B) R$ 1,40

(C) R$ 2,80

(D) R$ 14,00

(E) R$ 28,00

Alternativa **D.**

III. Qual é o maior valor de V?

(A) R$ 242.000,00

(B) R$ 512.000,00

(C) R$ 1.210.000,00

(D) R$ 2.420.000,00

(E) R$ 4.840.000,00

Alternativa **D.**

_AMPLIANDO

Com esta calculadora gráfica *on-line* e gratuita desenvolvida pela Desmos é possível não apenas representar graficamente funções polinomiais de 2º grau na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ como também identificar os pontos associados ao coeficiente c, ao(s) zero(s) e ao vértice da função.

ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo x e y medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel.

Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

(A) 18

(B) 20

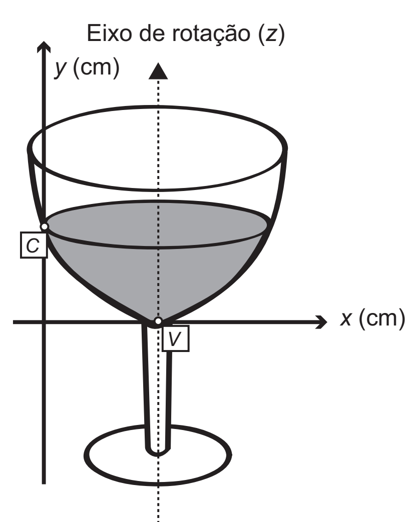
(C) 36

(D) 45

(E) 54

Alternativa **C**.

2 (Enem) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

(A) 1.

(B) 2.

(C) 4.

(D) 5.

(E) 6.

Alternativa **E**.

3 (Enem) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que h representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \leq T \leq 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \leq T \leq 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

(A) muito baixa.

(B) baixa.

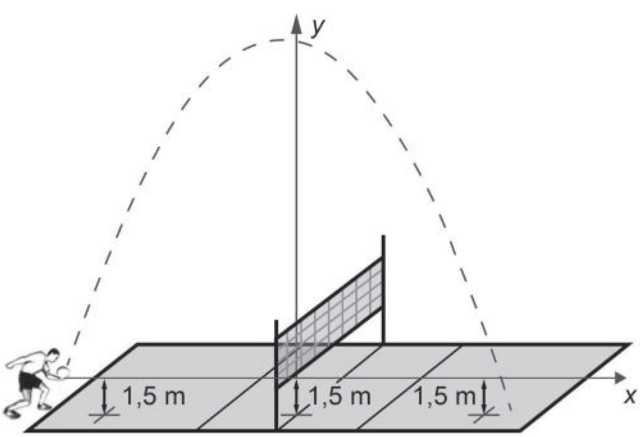
(C) média.

(D) alta.

(E) muito alta.

Alternativa **D**.

4 (Enem) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{13} + 12$ em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.



A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m.

O saque desse atleta foi invalidado

(A) apenas no ginásio I.

(B) apenas nos ginásios I e II.

(C) apenas nos ginásios I, II e III.

(D) apenas nos ginásios I, II, III e IV.

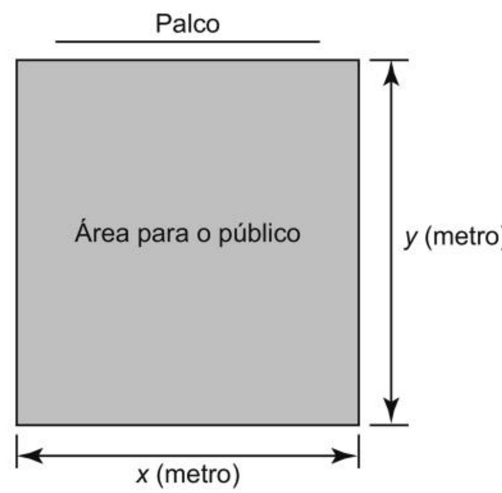
(E) em todos os ginásios.

Alternativa **D.**

5 (Enem) Dispondo de um grande terreno, uma empresa de entretenimento pretende construir um espaço retangular para *shows* e eventos, conforme a figura.

A área para o público será cercada com dois tipos de materiais:

- nos lados paralelos ao palco será usada uma tela do tipo A, mais resistente, cujo valor do metro linear é R$ 20,00
- nos outros dois lados será usada uma tela do tipo B, comum, cujo metro linear custa R$ 5,00



A empresa dispõe de R$ 5.000,00 para comprar todas as telas, mas quer fazer de tal maneira que obtenha a maior área possível para o público. A quantidade de cada tipo de tela que a empresa deve comprar é

(A) 50,0 m da tela tipo A e 800,0 m da tela tipo B.

(B) 62,5 m da tela tipo A e 250,0 m da tela tipo B.

(C) 100,0 m da tela tipo A e 600,0 m da tela tipo B.

(D) 125,0 m da tela tipo A e 500,0 m da tela tipo B.

(E) 200,0 m da tela tipo A e 200,0 m da tela tipo B.

Alternativa **D.**

6 (Fuvest-SP) A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um *combo* a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 *combos* a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse *combo*?

(A) R$ 2.000,00

(B) R$ 3.200,00

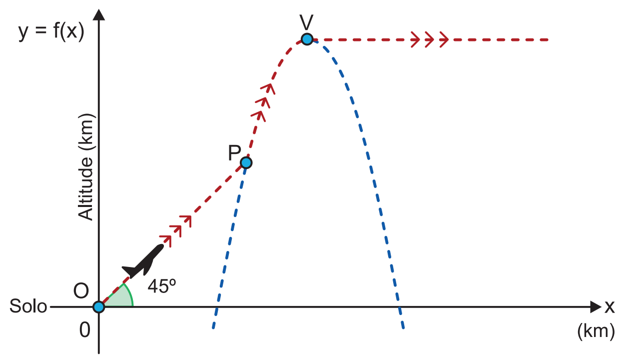
(C) R$ 3.600,00

(D) R$ 4.000,00

(E) R$ 4.800,00

Alternativa **C.**

7 (Unesp-SP) Em relação a um sistema cartesiano de eixos ortogonais com origem em O (0, 0) um avião se desloca, em linha reta, de O até o ponto P, mantendo sempre um ângulo de inclinação de 45° com a horizontal. A partir de P, o avião inicia trajetória parabólica, dada pela função $f(x) = -x^2 + 14x - 40$, com x e $f(x)$ em quilômetros. Ao atingir o ponto mais alto da trajetória parabólica, no ponto V, o avião passa a se deslocar com altitude constante em relação ao solo, representado na figura pelo eixo x.

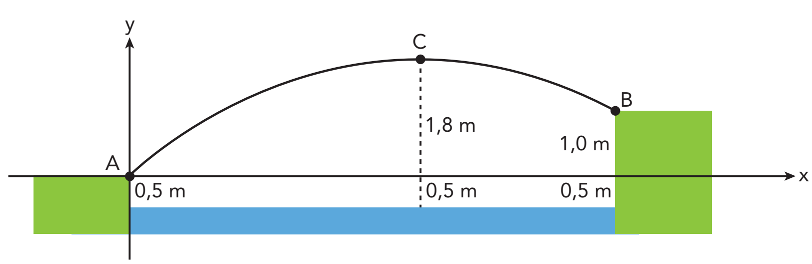


Em relação ao solo, do ponto P para o ponto V, a altitude do avião aumentou

(A) 2,5 km.
(B) 3 km.
(C) 3,5 km.
(D) 4 km.
(E) 4,5 km.

Alternativa **D**.

8 (UERJ) Uma ponte com a forma de um arco de parábola foi construída para servir de travessia sobre um rio. O esquema abaixo representa essa ponte em um sistema de coordenadas cartesianas xy. Nele, os pontos A, B e C correspondem, respectivamente, à margem esquerda, à margem direita e ao ponto mais alto da ponte.



As distâncias dos pontos A, B e C até a superfície do rio são iguais, respectivamente, a 0,5 m, 1,5 m e 2,3 m.

Sabendo que o ponto C tem, nesse sistema, abscissa igual a 6 m, calcule, em metros, a largura do rio.

10 m

JORNADA

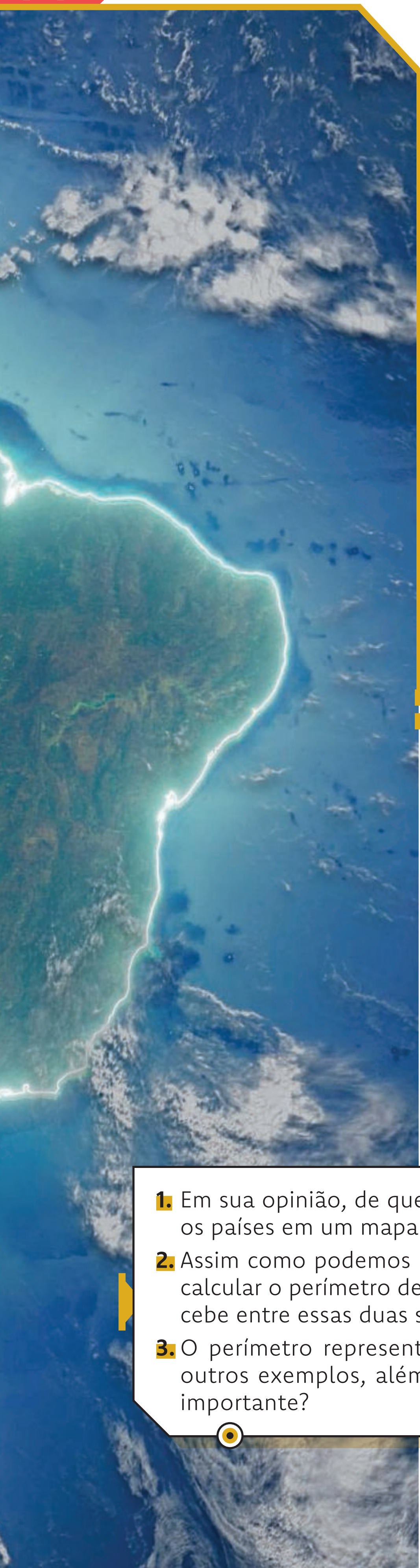
9

Perímetro e semelhança

Rolaks/Shutterstock

cinecycle/Adobe Stock

O Brasil é um dos países com a maior extensão de fronteira terrestre do mundo.



Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a extensão total da fronteira terrestre do Brasil é de 16 885,7 km, uma das maiores do mundo, fazendo divisa com 10 países da América do Sul. Essa ampla fronteira define os limites do território brasileiro, separando-o de seus vizinhos e delimitando sua extensão geográfica.

Assim como a linha que contorna o país no mapa, podemos observar que todas as fronteiras formam trajetórias contínuas que podem ser medidas, permitindo-nos calcular o comprimento total que separa um país do outro. Esse conceito de contorno e medida está diretamente ligado ao perímetro, que é a soma das medidas de todos os lados ou limites de uma forma. Da mesma maneira que podemos medir as fronteiras de um país, também podemos medir os perímetros de figuras geométricas, estabelecendo uma conexão entre a Geografia e a Matemática de forma prática e visual.

1. Em sua opinião, de que maneira é possível representar e medir as fronteiras entre os países em um mapa como esse da imagem?

2. Assim como podemos medir o comprimento de uma fronteira, como poderíamos calcular o perímetro de uma figura geométrica plana? Que semelhanças você percebe entre essas duas situações?

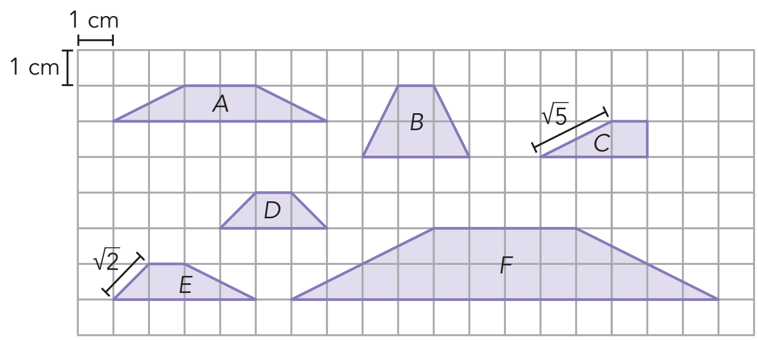
3. O perímetro representa o contorno de uma forma. Você consegue pensar em outros exemplos, além das fronteiras de países, em que medir o contorno seja importante?

Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

_ETAPA 7

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Nesta malha quadriculada estão representados 6 trapézios.



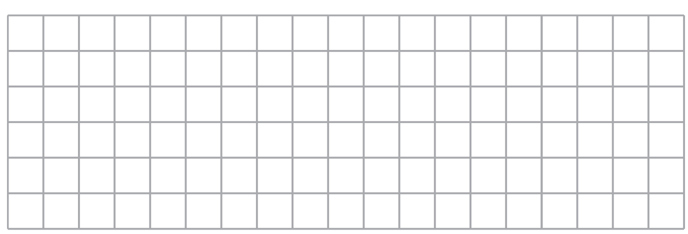
Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é a medida de perímetro, em centímetros, de cada polígono na malha?

b) Os polígonos *A* e *B* são semelhantes? Se sim, por quê?

c) Os polígonos *A* e *F* são semelhantes? Se sim, por quê?

d) Represente, na malha quadriculada a seguir, um polígono *G* que tenha a mesma medida de perímetro que o polígono *F*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

_resolvendo a questão

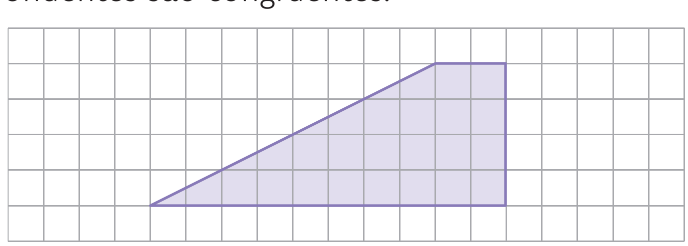
a) Chamando de *P* a medida de perímetro, temos:

$P_A = 8 + 2\sqrt{5}$; $P_B = 4 + 2\sqrt{5}$; $P_C = 5 + \sqrt{5}$; $P_D = 4 + 2\sqrt{2}$; $P_E = 5 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$; $P_F =$ $= 16 + 4\sqrt{5}$.

b) Os polígonos *A* e *B* não são semelhantes porque as medidas dos ângulos correspondentes desses polígonos são diferentes.

c) Os polígonos *A* e *F* são semelhantes porque o polígono *F* tem todos os lados correspondentes medindo o dobro dos lados do polígono *A*, e todos os ângulos correspondentes são congruentes.

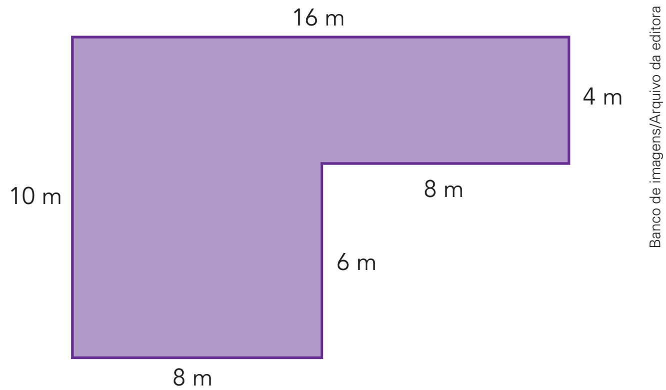
d)



Banco de imagens/Arquivo da editora

_agora é com você

1 Fernando foi ajudar o filho na tarefa de casa, que solicitava a medida do perímetro da casa onde moram. Para não dar a resposta ao filho, Fernando realizou as medições com ele e esboçou o seguinte desenho.



Tomando como base o esboço, qual é a medida de perímetro dessa residência?

(A) 96 m

(B) 52 m

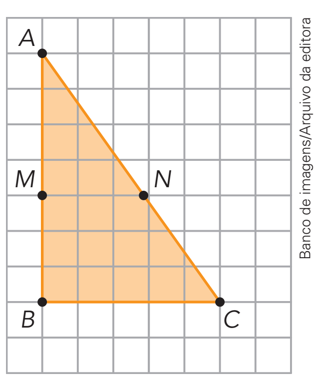
(C) 44 m

(D) 42 m

(E) 26 m

Alternativa **B**.

2 Observe este triângulo *ABC*, construído em uma malha quadriculada. Considere que cada lado de cada quadrado da malha representa uma unidade de comprimento.



Sabendo que $\overline{MN}$ é paralelo a $\overline{BC}$, o valor de $\frac{AN}{AC}$ é:

(A) $\frac{4}{7}$.

(B) $\frac{7}{4}$.

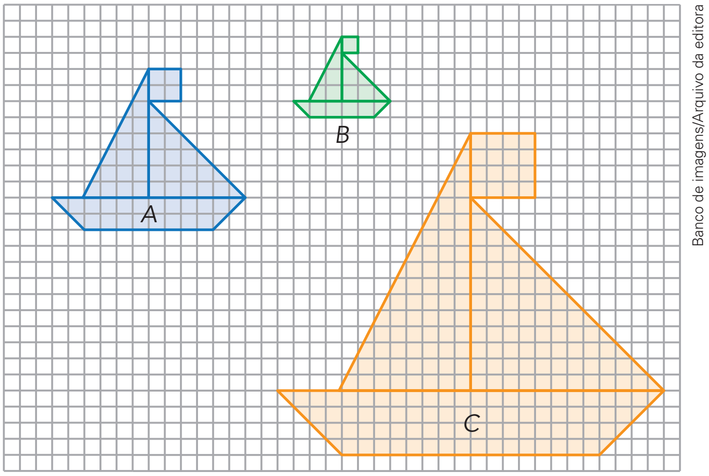
(C) $\frac{8}{3}$.

(D) $\frac{3}{8}$.

(E) $\frac{3}{7}$.

Alternativa **A**.

3 Observe as figuras *A*, *B* e *C* representadas nesta malha quadriculada.



Assinale a alternativa correta.

(A) O perímetro da figura *A* é 3 vezes maior do que o da figura *B*.

(B) O perímetro da figura *C* é 4 vezes maior do que o da figura *A*.

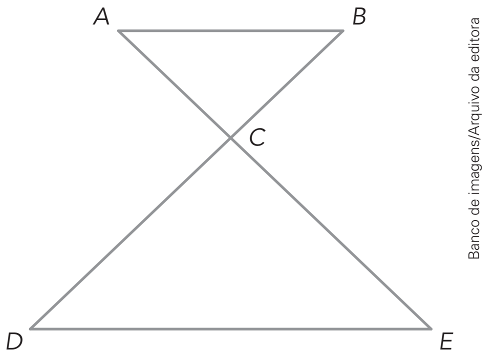
(C) O perímetro da figura *B* é 4 vezes maior do que o da figura *C*.

(D) O perímetro da figura *A* é 2 vezes maior do que o da figura *C*.

(E) O perímetro da figura *C* é 4 vezes maior do que o da figura *B*.

Alternativa **E**.

4 Esta figura representa uma estrutura metálica. Nela, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são paralelos. São conhecidas as seguintes medidas: $AB = 20$ cm, $BC = 24$ cm, $AC = 24$ cm e $DE = 40$ cm.



A medida do segmento de reta $\overline{CE}$, em cm, é:

(A) 56.

(B) 48.

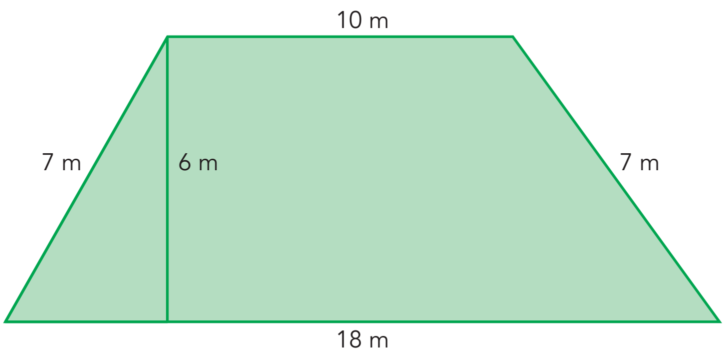
(C) 40.

(D) 32.

(E) 24.

Alternativa **B**.

5 A prefeitura da cidade decidiu construir uma nova área de lazer na praia, em formato de trapézio, para instalar quiosques e mesas de descanso. O espaço será delimitado por uma cerca, e o projeto indica as seguintes medidas:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual é o comprimento total da cerca (que é igual ao perímetro do trapézio), em metro, que será colocada ao redor do espaço?

(A) 14 m
(B) 28 m
(C) 30 m
(D) 42 m
(E) 54 m

Alternativa **D**.

6 No novo parque da cidade, foi instalada uma roda-gigante circular. Os engenheiros informaram que o diâmetro da roda-gigante é de 65 metros. A equipe responsável quer colocar luzes de LED ao redor de toda a borda da roda, acompanhando o formato da circunferência.

Nexa/Adobe Stock

Fotografia de Balneário Camboriú, em Santa Catarina, com destaque para a roda-gigante FG Big Wheel. Foto de 2022.

Qual será o comprimento total do fio de luzes (que é igual ao perímetro da roda-gigante), em metro, necessário para contornar toda a estrutura?

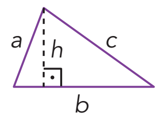
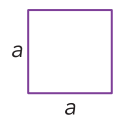
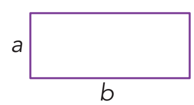
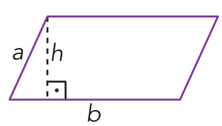
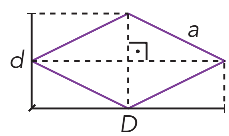
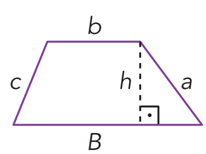
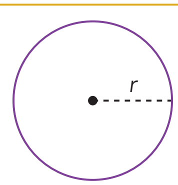
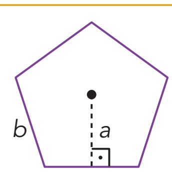
(A) 408,20 m
(B) 204,10 m
(C) 130,00 m
(D) 102,05 m
(E) 97,50 m

Alternativa **B**.

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Cálculo da medida de perímetro de figuras planas

Figura		Perímetro
Triângulo	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$P = a + b + c$
Quadrado	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$P = 4a$
Retângulo	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$P = 2a + 2b$
Paralelogramo	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$P = 2a + 2b$
Losango	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$P = 4a$
Trapézio	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$P = a + b + c + B$
Círculo	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$P = 2 \cdot \pi \cdot r$ (circunferência)
Polígono regular	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$P =$ nº de lados $\cdot\, b$

Figuras semelhantes

- Duas figuras são semelhantes se têm a mesma forma, ou seja, se uma delas for uma ampliação ou redução da outra.
- Dois polígonos são semelhantes quando têm ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais.

_ETAPA

2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 A turma de Artes foi desafiada a criar um logotipo para a escola. O desenho escolhido tem formato de um losango e cada lado mede 2,3 metros. O artista responsável quer colocar uma faixa metálica dourada ao redor de todo o contorno do losango.

Qual é o comprimento total da faixa metálica necessária para contornar o logotipo?

(A) 8 metros

(B) 8,2 metros

(C) 9 metros

(D) 9,2 metros

(E) 10 metros

Alternativa **D**.

2 Uma empresa de energia está projetando painéis solares em formato de paralelogramo para serem instalados em telhados inclinados de prédios futuristas. Cada painel tem base medindo 3,2 metros e o lado inclinado medindo 2 metros.

Charlie's/Adobe Stock

O time quer colocar uma moldura protetora ao redor de cada painel, acompanhando todo o contorno. Qual será o comprimento total da moldura necessária para cercar cada painel solar?

(A) 12,4 metros

(B) 10,4 metros

(C) 6,4 metros

(D) 5,4 metros

(E) 4 metros

Alternativa **B**.

3 Henrique coleciona figurinhas que vêm em chocolates-surpresa. Cada figurinha tem o formato de um pentágono regular (5 lados iguais). Cada lado da figurinha mede 3 centímetros.

Qual é o perímetro de cada figurinha que Henrique coleciona?

(A) 3 metros

(B) 5 metros

(C) 9 metros

(D) 12 metros

(E) 15 metros

Alternativa **E**.

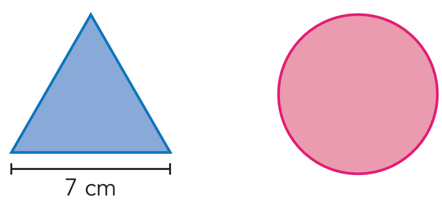
4 Após a conclusão de três modalidades de jogos esportivos, os atletas se reunirão para uma cerimônia de premiação que será realizada em um palco ao ar livre. O palco é composto de três pistas, cada uma com o formato de um triângulo equilátero que é destinada a uma das modalidades, e essas pistas triangulares se conectam por um dos vértices. Os coordenadores do evento precisam saber o perímetro da região ocupada pelas pistas para distribuir as medalhas e os troféus de maneira organizada.

Sabendo que cada lado do triângulo mede 60 metros, qual é o perímetro do palco em centímetros?

(A) 180 cm
(B) 1200 cm
(C) 1800 cm
(D) 2400 cm
(E) 5400 cm

Alternativa **E**.

5 O triângulo equilátero e o círculo representados a seguir têm o mesmo perímetro.



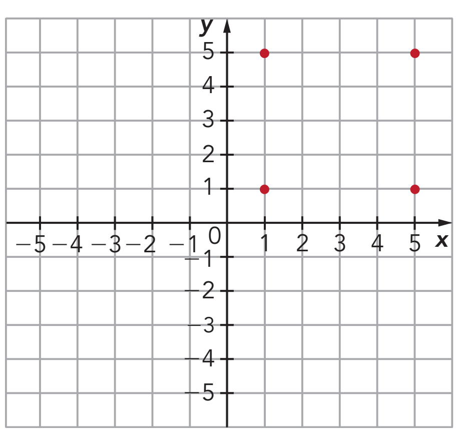
Banco de imagens/Arquivo da editora

Considerando o dado apresentado na figura, e assumindo $\pi = 3$, o raio da circunferência é:

(A) 3 cm
(B) 3,5 cm
(C) 7 cm
(D) 21 cm
(E) 63 cm

Alternativa **B**.

6 Observe a malha quadriculada abaixo.



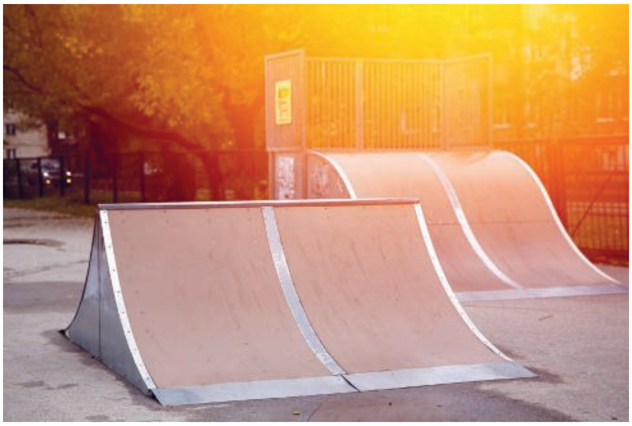
Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que cada quadradinho mede 0,5 centímetro de lado, conecte os pontos e calcule o perímetro do polígono formado.

(A) 5 cm
(B) 10 cm
(C) 16 cm
(D) 20 cm
(E) 32 cm

Alternativa **C**.

7 Uma empresa de parques radicais está projetando rampas de *skate* cujas laterais têm formato parecido com o triangular. Para testar a segurança, eles construíram uma rampa pequena antes de fazer uma rampa maior, ambas semelhantes. A rampa pequena tem altura de 0,8 m e comprimento da base de 1,2 m. A rampa maior terá comprimento da base medindo 6 m.



Parilov/Shutterstock

Qual será a altura da rampa gigante?

(A) 4 cm

(B) 6 cm

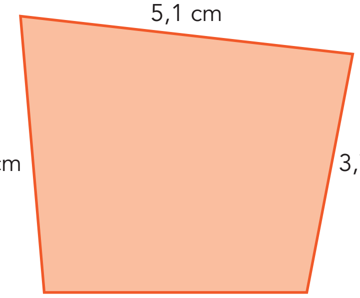
(C) 8 cm

(D) 12 cm

(E) 16 cm

Alternativa **A**.

8 Gabriel decidiu cercar o pátio de sua escola com uma fita colorida para a comemoração da semana do esporte. Ele comprou uma quantidade de fita equivalente ao dobro da medida do perímetro do pátio em uma loja de materiais de decoração. A seguir está o esboço do pátio e as medidas indicadas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Quantos metros de fita Gabriel comprou para realizar essa decoração?

(A) 8,5 m

(B) 17 m

(C) 25 m

(D) 34 m

(E) 69 m

Alternativa **D**.

9 Lorenzo enrolou uma corda em volta de uma bola. Em seguida, mediu o comprimento do pedaço de corda que usou para enrolá-la na bola. Se o pedaço de corda tem 94,20 cm de comprimento, qual é o raio da bola?

(A) 15,00 cm

(B) 31,00 cm

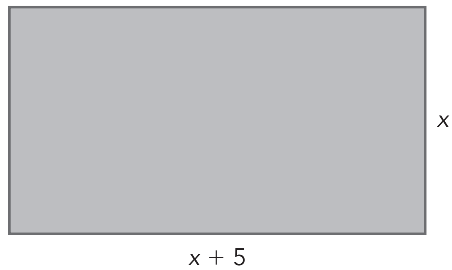
(C) 45,90 cm

(D) 47,10 cm

(E) 50,00 cm

Alternativa **A**.

10 Um estacionamento retangular será asfaltado para receber mais veículos. O lado menor do estacionamento é representado por x metros, enquanto o lado maior mede $(x + 5)$ metros, como mostra a figura abaixo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que o perímetro desse estacionamento é igual a 92 metros, quanto mede cada lado do estacionamento?

(A) 20,5 m e 25,5 m.

(B) 23 m e 28 m.

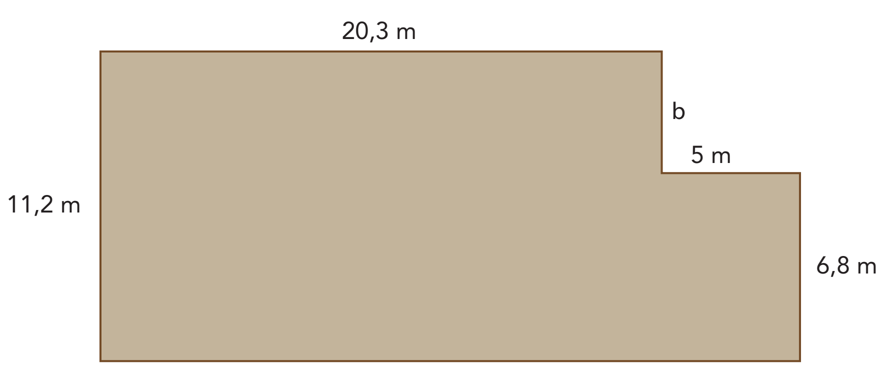
(C) 43,5 m e 48,5 m.

(D) 46 m e 51 m.

(E) 92 m e 97 m.

Alternativa **A**.

11 Felipe está planejando construir um muro ao redor de seu terreno, cujo formato está representado na figura a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

As medidas indicadas correspondem aos lados do terreno. Para construir o muro, Felipe precisa do perímetro, que corresponde a:

(A) 43,4 m.

(B) 68,6 m.

(C) 70,4 m.

(D) 73,0 m.

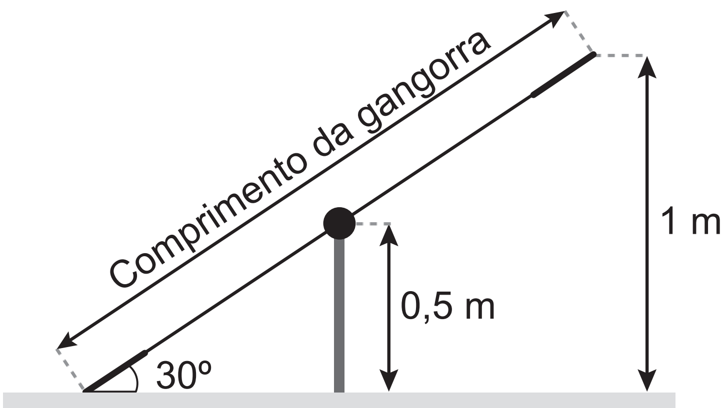
(E) 73,6 m.

Alternativa **D**.

_ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (ENCCEJA) Uma gangorra deve ser construída apoiando-a pelo ponto médio num suporte central de 0,5 metro de altura. Seus assentos, situados em suas extremidades, devem atingir no máximo 1 metro de altura e, ao tocar o solo, formar com este um ângulo de 30°, qualquer que seja o lado da gangorra a tocar o solo.



Reprodução/ENCCEJA, 2020.

Para que os assentos não ultrapassem a altura máxima estabelecida, o comprimento da gangorra, em metro, deve ser

(A) 0,50.

(B) 1,00.

(C) 1,15.

(D) 2,00.

Alternativa **D**.

2 (Enem) Uma associação desportiva contratou uma empresa especializada para construir um campo de futebol, em formato retangular, com 250 metros de perímetro. Foi elaborada uma planta para esse campo na escala 1 : 2000.

Na planta, a medida do perímetro do campo de futebol, em metro, é

(A) 0,0005.

(B) 0,125.

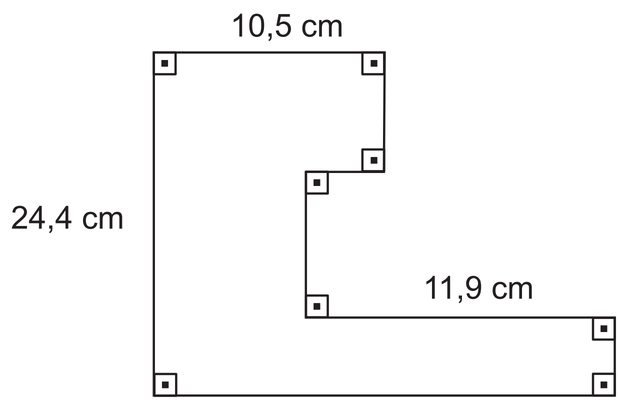
(C) 8.

(D) 250.

(E) 500 000.

Alternativa **B**.

3 (Fatec-SP) Um estudante de Construção Civil da Fatec está executando um desenho técnico, para um projeto de uma fazenda vertical. Na planta baixa, apresentada na imagem, estão especificadas algumas medidas na escala 1 : 500 – em que 1 m na medida real corresponde a 0,2 cm na planta baixa.



Logo, o perímetro da construção será, em metros, igual a

(A) 18,7.

(B) 46,8.

(C) 93,6.

(D) 187,2.

(E) 468,0.

Alternativa **E.**

4 (Enem) Um túnel viário de uma única via possui a entrada na forma de um triângulo equilátero de lado 6 m. O motorista de um caminhão com 3 m de largura deve decidir se passa por esse túnel ou se toma um caminho mais longo. Para decidir, o motorista calcula a altura que esse caminhão deveria ter para tangenciar a entrada do túnel. Considere o caminhão como um paralelepípedo reto.

Essa altura, em metro, é

a) 3

b) $3\sqrt{2}$

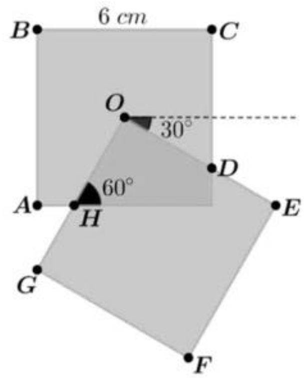
c) $3\sqrt{3}$

d) $\frac{3\sqrt{2}}{3}$

e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Alternativa **E.**

5 (UPE) Um arquiteto está projetando uma piscina em formato octogonal. Em sua planta, ele desenha um octógono de lados AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HA e AB construído a partir de dois quadrados congruentes com lados medindo 6 cm. Ele posicionou o vértice de um desses quadrados sobre o centro **O** do outro, de tal forma que o segmento OD formasse um ângulo de 30° com a paralela ao lado BC passando por **O**, conforme a figura a seguir.



Reprodução/UPE, 2021.

Ele precisa da medida do perímetro desta figura, a fim de encomendar lajotas para contornar a piscina. Qual a medida do perímetro do octógono na planta do arquiteto, em centímetros?

(A) $30 + 8\sqrt{3}$

(B) $45 + 8\sqrt{3}$

(C) $39 - 4\sqrt{3}$

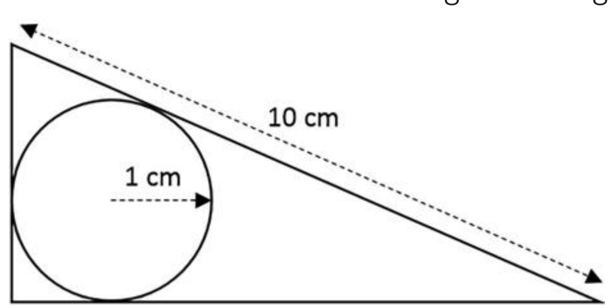
(D) $45 - 4\sqrt{3}$

(E) $42 - 4\sqrt{3}$

Alternativa **E**.

6 (IMT-SP) Considere o círculo inscrito no triângulo retângulo da figura.

Reprodução/IMT-SP, 2020.



O perímetro do triângulo, em cm, é

(A) $4(3 + \sqrt{6})$

(B) $2\pi + 10$

(C) 22

(D) $10(1 + \sqrt{2})$

(E) $\pi(30 + \sqrt{3})$

Alternativa **C**.

7 (Unesp-SP) Uma bola de tênis é sacada de uma altura de 21 dm, com alta velocidade inicial e passa rente à rede, a uma altura de 9 dm.

Desprezando-se os efeitos do atrito da bola com o ar e do seu movimento parabólico, considere a trajetória descrita pela bola como sendo retilínea e contida num plano ortogonal à rede. Se a bola foi sacada a uma distância de 120 dm da rede, a que distância da mesma, em metros, ela atingirá o outro lado da quadra?

9 m

_DICA

O lugar geométrico dos pontos equidistantes de *A* e de *B* é a reta mediatriz do segmento que une *A* e *B*.

8 (Unesp-SP) Um grupo de cientistas estuda os hábitos de uma espécie animal em uma área de preservação. Inicialmente, delimitou-se uma área plana (ABCD, figura 1), na qual deverão ser estabelecidos dois pontos de observação. A figura 2 apresenta um modelo matemático da área delimitada, com dois setores retangulares nos quais serão estabelecidos os pontos de observação, sendo que cada ponto de observação deverá pertencer a apenas um dos setores. Parte do grupo de cientistas ocupar-se-á exclusivamente com os hábitos de reprodução dessa espécie e atuará na região em forma de paralelogramo, indicada na figura 3.

FIGURA 1

FIGURA 2

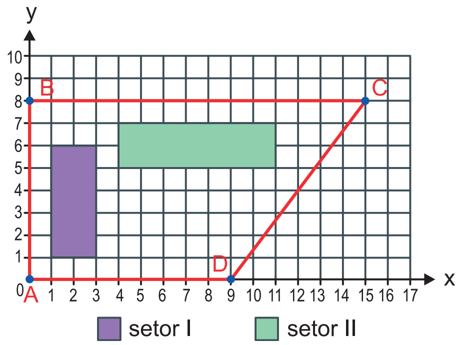
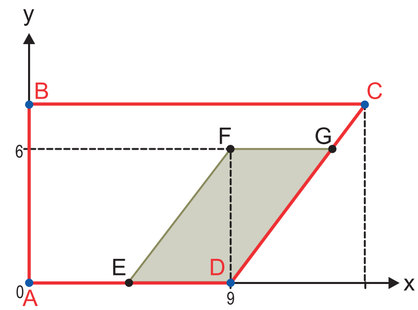


FIGURA 3



a) Para a construção dos dois pontos de observação, considere que a localização do ponto do setor I deverá ser equidistante dos pontos A e B e que a localização do ponto do setor II deverá ser equidistante dos pontos B e C. Utilizando as coordenadas do plano cartesiano da figura 2, determine uma possível localização do ponto de observação para cada um dos setores.

b) Dado que 1 unidade de distância dos planos cartesianos equivale a 200 metros de distância real, determine o perímetro da região em que serão estudados os hábitos de reprodução da espécie (figura 3).

a) Possíveis localizações: No setor I: (1, 4). No setor II: $\left(\frac{15}{2}, 7\right)$.
b) 4800 m

JORNADA 10

Área

MONOPOLY919/Shutterstock

Drones podem ser usados para o levantamento topográfico de uma região.

Alguns instrumentos criados com o avanço da tecnologia, como *drones* e satélites, apresentam diversas aplicações. Uma delas é o levantamento topográfico ou, de maneira geral, o **georreferenciamento**. Esse processo aumentou a produtividade, o detalhamento e a velocidade da aquisição de dados. Também reduziu os custos de projetos com equipamentos.

Outro ponto positivo dos *drones* é a possibilidade de analisar regiões de alto risco, antes inacessíveis. Com isso, o uso de *drones* tem sido fundamental para o monitoramento e o combate ao desmatamento ilegal e à destruição e exploração criminosa de rios e florestas.

Com base nisso, o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) desenvolveu alguns projetos que permitem o monitoramento de áreas devastadas no Brasil; um deles é o portal *TerraBrasilis*, sistema que permite o acesso e o uso de informações produzidas pelo monitoramento da vegetação nativa.

georreferenciamento: é o processo de determinação de perímetros, áreas de imóveis, agrupamento de terrenos ou grandes extensões de terra, com base na localização geográfica, utilizando vértices da região e associando os dados coletados ao sistema geodésico brasileiro.

1. Os *drones* têm sido cada vez mais utilizados em mapeamentos topográficos. Cite outras aplicações com *drones* na atualidade.

2. Qual é a relação da Matemática com a medição de terrenos e a proteção do meio ambiente?

3. Como é possível determinar a medida de área de um terreno delimitado por uma linha poligonal?

4. Faça uma pesquisa na internet sobre monitoramento ambiental. Procure identificar que aspectos matemáticos estão envolvidos nesse monitoramento.

Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

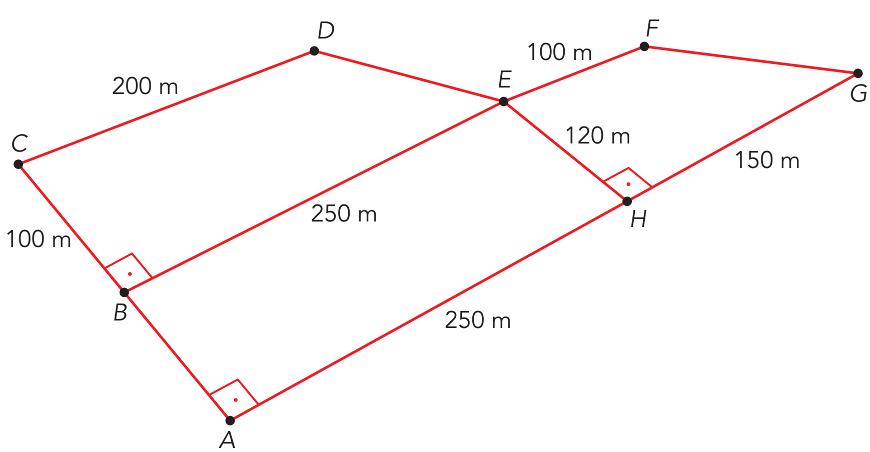
Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

A tecnologia associada ao uso de *drones* tem sido cada vez mais aplicada no monitoramento ambiental, até mesmo na medição de áreas desmatadas.

Andre Dib/Pulsar Imagens

Vista aérea do bioma amazônico desmatado no município de Cacaulândia (RO). Foto de 2019.

Agora, considere a figura a seguir. Ela representa a extensão de uma região desmatada. O terreno foi monitorado com auxílio de *drones* e decomposto em 2 trapézios retângulos e 1 retângulo.



Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é a medida aproximada do perímetro do terreno delimitado pela linha poligonal *ABCDEFGHA*?

b) Qual é a medida de área limitada pelo trapézio maior?

c) Qual é a medida de área da região limitada pela linha poligonal *ABCDEFGHA*?

_resolvendo a questão

a) A medida de perímetro P é a soma das medidas de todos os segmentos de reta que compõem a linha poligonal $ABCDEFGHA$:

$$P = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA$$

Observando a imagem, é possível afirmar que os segmentos de reta $\overline{DE}$ e $\overline{FG}$ são as hipotenusas dos triângulos DEI e FGJ.

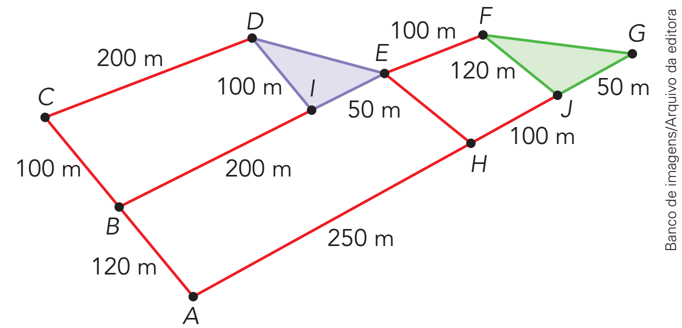
Dessa forma:

$$DE^2 = 50^2 \cdot (2^2 + 1^2) = 12500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DE = 50\sqrt{5}\ \text{m} \simeq 111{,}8\ \text{m}$$

$$FG^2 = 10^2 \cdot (12^2 + 5^2) = 16900 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow FG = 130\ \text{m}$$



Tem-se:

$$P \simeq 120 + 100 + 200 + 111{,}8 + 100 + 130 + 50 + 100 + 250 \Rightarrow$$

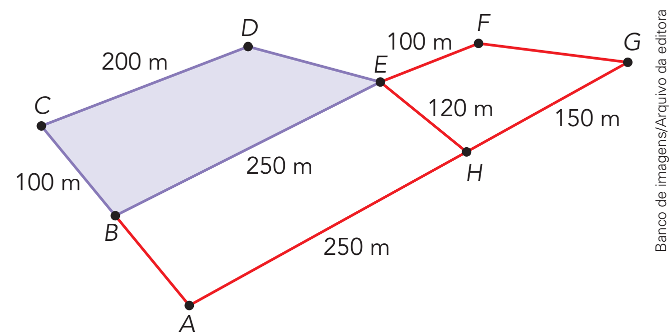
$$\Rightarrow P \simeq 1161{,}8\ \text{m}$$

b) O trapézio maior tem bases com medidas iguais a 200 m e 250 m, e altura com medida igual a 100 m.

A área limitada pelo trapézio maior está identificada na figura a seguir.

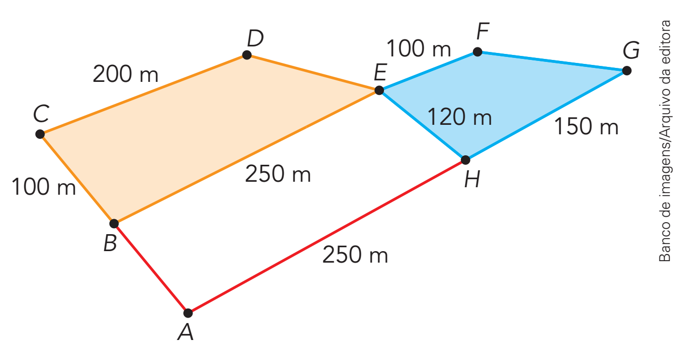
$$A = \frac{(250 + 200) \cdot 100}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 22500\ \text{m}^2$$



c) Para o cálculo da medida de área, essa região pode ser dividida em 3 regiões, limitadas por 2 trapézios e 1 retângulo, cujas medidas estão indicadas na figura ao lado.

Logo, a medida de área total é igual a:



$$A = \frac{(250 + 200) \cdot 100}{2} + \frac{(100 + 150) \cdot 120}{2} + 250 \cdot 120 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 22500 + 15000 + 30000 = 67500 \Rightarrow A = 67500\ \text{m}^2$$

_agora é com você

1 Uma região retangular, de 20 m × 10 m, será recoberta com quadrados, todos congruentes entre si e medindo 20 cm de lado.

O número mínimo de quadrados necessários para recobrir toda a região retangular é:

(A) 200.

(B) 400.

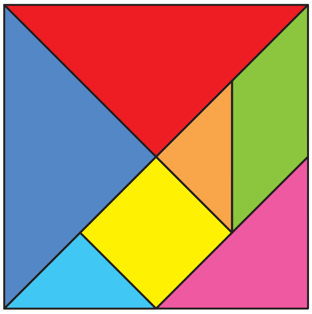
(C) 500.

(D) 4 000.

(E) 5 000.

Alternativa **E.**

2 Este é o famoso jogo matemático chamado *Tangram*. As 7 peças do jogo, quando justapostas da maneira como se vê na figura, formam um quadrado maior.


Banco de imagens/Arquivo da editora

O percentual da área do quadrado ocupada por uma das peças triangulares de maior medida de área do *Tangram* é igual a:

(A) 15%.

(B) 20%.

(C) 25%.

(D) 30%.

(E) 35%.

Alternativa **C.**

3 A medida de área em cm^2 de um círculo inscrito em um quadrado, cujo lado mede 10 cm, é igual a:

(A) 50π.

(B) 25π.

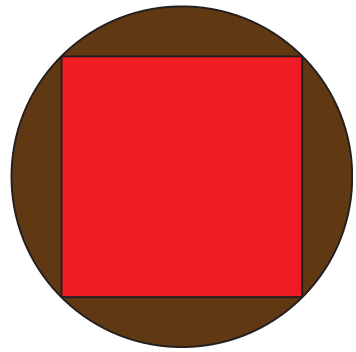
(C) 10π.

(D) 35π.

(E) 40π.

Alternativa **B.**

4 Sobre uma mesa circular, cujo diâmetro mede 70 cm, há uma toalha de formato quadrado, cujos vértices tangenciam a borda da mesa.



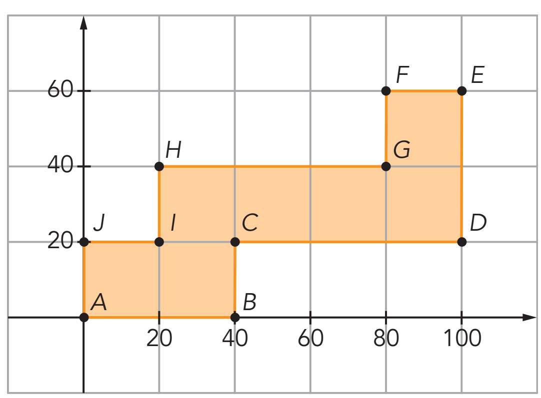
Banco de imagens/Arquivo da editora

Considerando $\sqrt{2} = 1{,}4$, qual é, em m^2, a melhor aproximação para a medida de área dessa toalha?

(A) 0,20.
(B) 0,25.
(C) 0,50.
(D) 0,60.
(E) 0,75.

Alternativa **B**.

5 Um entregador de *pizza* parte em sua bicicleta da pizzaria situada no ponto *A* e faz o seguinte percurso: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J* e volta para o ponto *A*. O percurso está representado na figura a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Se a malha quadrangular é formada por quadrados menores com 20 metros de medida de lado, qual ponto indica a posição do entregador após percorrer 260 metros?

(A) B.
(B) D.
(C) F.
(D) H.
(E) J.

Alternativa **D**.

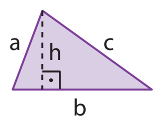
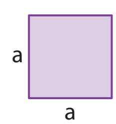
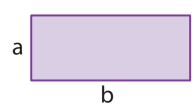
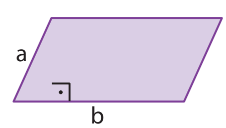
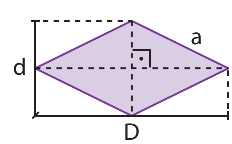
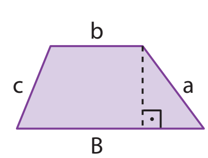
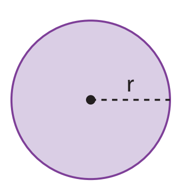
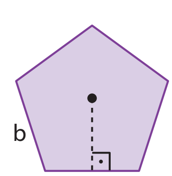
6 Ainda com base na situação da atividade anterior, suponha que o entregador de *pizza* realize entregas apenas na parte pintada representada no plano cartesiano. Qual é a medida de área total que o entregador cobre?

(A) 400 m^2
(B) 6 000 m^2
(C) 2 800 m^2
(D) 2 400 m^2
(E) 800 m^2

Alternativa **C**.

fique ligado

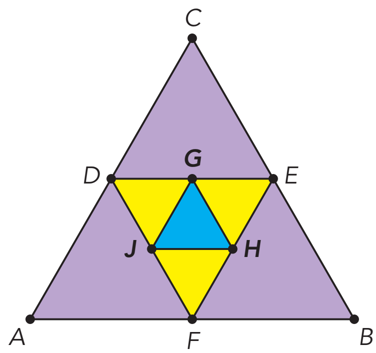
Cálculo da medida de área de figuras planas

Figura		Área
Triângulo	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$A = \frac{b \cdot h}{2}$
Quadrado	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$A = a^2$
Retângulo	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$A = a \cdot b$
Paralelogramo	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$A = b \cdot h$
Losango	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$A = \frac{d \cdot D}{2}$
Trapézio	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$
Círculo	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$A = \pi \cdot r^2$
Polígono regular	 Banco de imagens/Arquivo da editora	$A = \frac{P \cdot a}{2}$

ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Observe o triângulo equilátero *ABC* a seguir. Sabe-se que *D*, *E* e *F* são pontos médios dos respectivos lados *AC*, *CB* e *BA*, assim como *G*, *J* e *H* são pontos médios dos respectivos lados do triângulo *DEF*.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Se a área da região triangular limitada por *GHJ* mede 2 m², então a área da região limitada pelo triângulo *ABC* mede:

(A) 8 m².

(B) 12 m².

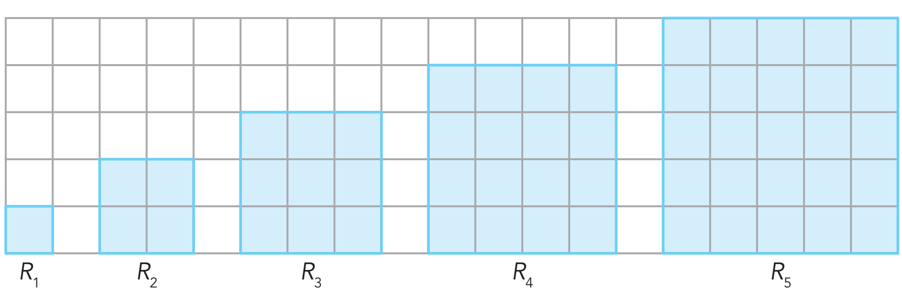
(C) 16 m².

(D) 24 m².

(E) 32 m².

Alternativa **E**.

2 Cinco diferentes superfícies foram cobertas por um piso laminado. Na região R_3, o custo para colocar esse piso laminado foi de R$ 1.350,00.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere que todos os quadrados menores da malha sejam congruentes.

O custo, em reais, para todas as 5 regiões serem cobertas com esse piso laminado é igual a:

(A) R$ 8.250,00.

(B) R$ 6.750,00.

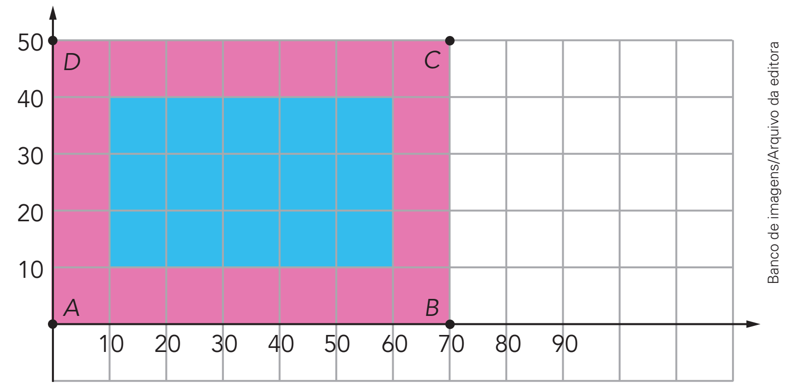
(C) R$ 5.765,00.

(D) R$ 4.800,00.

(E) R$ 2.250,00.

Alternativa **A**.

3 O diretor de um clube irá construir uma piscina e contratou um arquiteto para fazer o projeto. O rascunho da construção da piscina está representado na figura abaixo, sendo a borda representada pela região rosa e o espaço que será ocupado pela água pela região azul.



Se a malha quadrangular é formada por quadrados menores com 10 metros de medida de lado, a área da região que corresponde à borda da piscina é:

(A) 800 m^2.

(B) 1000 m^2.

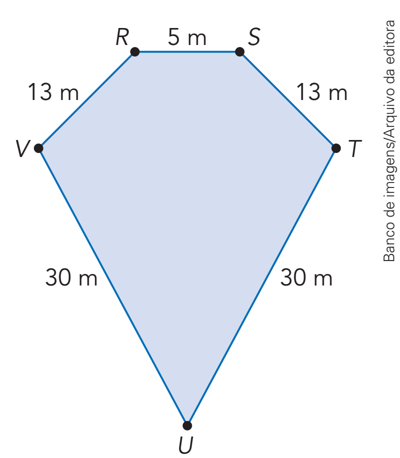
(C) 1560 m^2.

(D) 1750 m^2.

(E) 2000 m^2.

Alternativa **E**.

4 Amarildo comprou um terreno para construir uma casa de campo. De acordo com imagens de um *drone*, o terreno foi mapeado, e observou-se que ele tem o formato de um triângulo justaposto a um trapézio, conforme a figura a seguir.



Considerando que as medidas de comprimento tenham uma precisão aceitável, que $VT = 15$ m e que $\sqrt{15} = 3{,}9$, a melhor aproximação para a medida de área desse terreno é igual a:

(A) 340 m^2.

(B) 400 m^2.

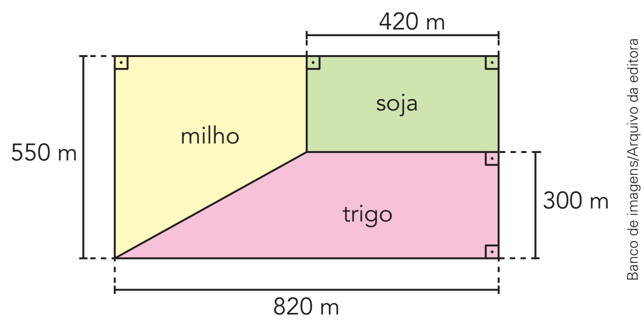
(C) 460 m^2.

(D) 480 m^2.

(E) 520 m^2.

Alternativa **A**.

5 Um agricultor familiar iniciou um processo de remanejamento com o objetivo de aumentar a produtividade, diminuir os custos e evitar que uma quantidade maior de área seja devastada. Nele, a área destinada ao plantio deve ser subdividida conforme o esquema a seguir.



Essa área está representada por 2 trapézios retângulos e 1 retângulo, compondo uma região retangular de dimensões 820 m × 550 m.

Se o plantio de soja ocupa 10,5 hectares, a área destinada ao plantio de milho, em hectares, mede:

(A) 10.

(B) 12.

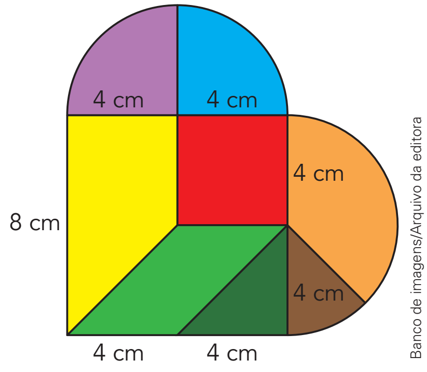
(C) 14.

(D) 16.

(E) 18.

Alternativa **D.**

6 Observe o mosaico com 8 peças que não se sobrepõem, mas formam um coração. Entre as peças, há um quadrado de 4 cm de medida de lado.



Considerando $\pi = 3,14$, a medida de área do mosaico, em cm^2, é igual a:

(A) 114,24.

(B) 124,24.

(C) 134,24.

(D) 144,24.

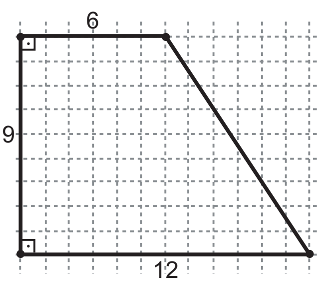
(E) 154,24.

Alternativa **A.**

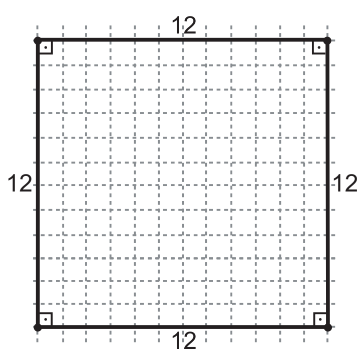
Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) Um suporte será instalado no *box* de um banheiro para serem colocados recipientes de xampu, condicionador e sabonete líquido, sendo que o recipiente de cada produto tem a forma de um cilindro circular reto de medida do raio igual a 3 cm. Para maior conforto no interior do *box*, a proprietária do apartamento decidiu comprar o suporte que tiver a base de menor área, desde que a base de cada recipiente ficasse inteiramente sobre o suporte. Nas figuras, vemos as bases desses suportes, nas quais todas as medidas indicadas estão em centímetro.

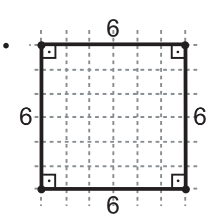
I.



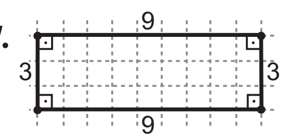
II.



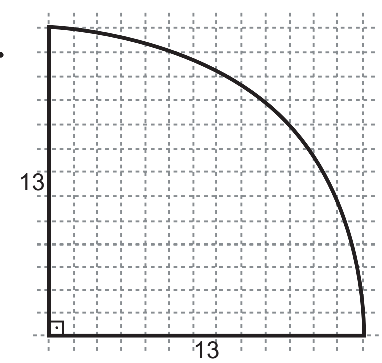
III.



IV.



V.



Utilize 3,14 como aproximação para π.

Para atender à sua decisão, qual tipo de suporte a proprietária comprou?

(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

(E) V

Alternativa **E**.

2 (Enem) O dono de uma loja pretende usar cartões imantados para a divulgação de sua loja. A empresa que fornecerá o serviço lhe informa que o custo de fabricação do cartão é de R$ 0,01 por centímetro quadrado e que disponibiliza modelos tendo como faces úteis para impressão:

- um triângulo equilátero de lado 12 cm;
- um quadrado de lado 8 cm;
- um retângulo de lados 11 cm e 8 cm;
- um hexágono regular de lado 6 cm;
- um círculo de diâmetro 10 cm.

O dono da loja está disposto a pagar, no máximo, R$ 0,80 por cartão. Ele escolherá, dentro desse limite de preço, o modelo que tiver maior área de impressão.

Use 3 como aproximação para π e use 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Nessas condições, o modelo que deverá ser escolhido tem como face útil para impressão um:

(A) triângulo.

(B) quadrado.

(C) retângulo.

(D) hexágono.

(E) círculo.

Alternativa **E**.

3 (Enem) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento.

O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40$ cm, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60$ cm, conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para π.

Reprodução/ENEM, 2019.

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

(A) 16 628

(B) 22 280

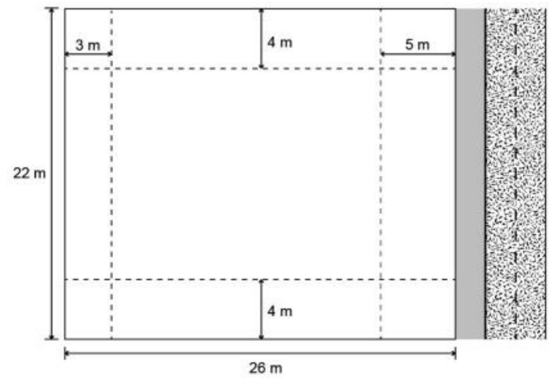
(C) 28 560

(D) 41 120

(E) 66 240

Alternativa **B**.

4 (Enem) Uma empresa deseja construir um edifício residencial de 12 pavimentos, num lote retangular de lados medindo 22 e 26 m. Em 3 dos lados do lote serão construídos muros. A frente do prédio será sobre o lado do lote de menor comprimento. Sabe-se que em cada pavimento 32 m² serão destinados à área comum (*hall* de entrada, elevadores e escada), e o restante da área será destinado às unidades habitacionais. A legislação vigente exige que prédios sejam construídos mantendo distâncias mínimas dos limites dos lotes onde se encontram. Em obediência à legislação, o prédio ficará 5 m afastado da rua onde terá sua entrada, 3 m de distância do muro no fundo do lote e 4 m de distância dos muros nas laterais do lote, como mostra a figura.



Reprodução/ENEM, 2020.

A área total, em metro quadrado, destinada às unidades habitacionais desse edifício será de

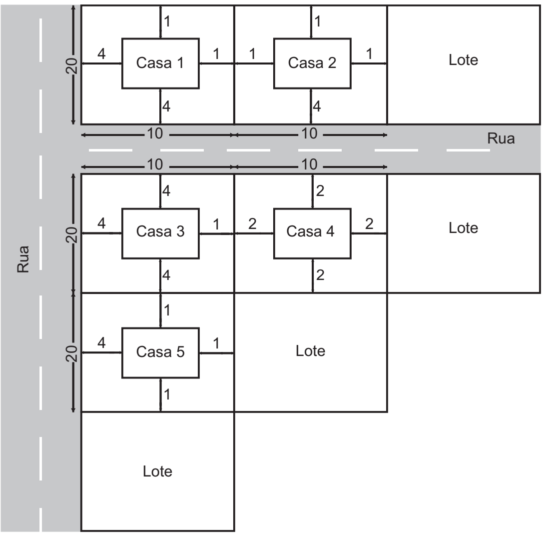
(A) 2640
(B) 3024
(C) 3840
(D) 6480
(E) 6864

Alternativa **A**.

5 (Enem) A lei municipal para a edificação de casas em lotes de uma cidade determina que sejam obedecidos os seguintes critérios:

- afastamento mínimo de 4 m da rua;
- afastamento mínimo de 1 m da divisa com outro lote;
- área total construída da casa entre 40% e 50% da área total do lote.

Um construtor submeteu para aprovação na prefeitura dessa cidade uma planta com propostas para a construção de casas em seus 5 lotes. Cada lote tem área medindo 200 m².



Reprodução/ENEM, 2020.

A imagem apresenta um esquema, sem escala, no qual estão representados os lotes, as ruas e os afastamentos considerados nos projetos entre as casas e as divisas dos lotes. As medidas indicadas no esquema estão expressas em metro.

A prefeitura aprovará apenas a planta da casa

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 5

Alternativa **E**.

6 (Enem) Um cliente vai a uma loja de materiais de revestimento cerâmico para adquirir porcelanato para a substituição do piso de uma sala com formato retangular, com área total de 36 m². O vendedor dessa loja lhe oferece dois projetos.

- Projeto A: porcelanato quadrado, com 0,60 m de lado, para ser disposto de maneira que a diagonal do quadrado seja paralela ao contorno da sala. Custo da caixa com 10 peças: R$ 60,00.
- Projeto B: porcelanato quadrado, com 0,40 m de lado, para ser disposto de maneira que os lados do quadrado sejam paralelos ao contorno da sala. Custo da caixa com 12 peças: R$ 40,00.

O vendedor informa que a fábrica recomenda a compra de uma quantidade adicional do número de peças para eventual necessidade de cortes e para reserva. No caso do projeto A, devem ser adquiridos 25% a mais, e no caso do projeto B, uma quantidade 10% maior do que o valor exato da área de recobrimento.

O cliente decide, então, que irá adotar o projeto de menor custo.

O custo mínimo que o cliente deverá ter, em conformidade com seu objetivo e com as informações apresentadas, será de

(A) R$ 600,00.

(B) R$ 660,00.

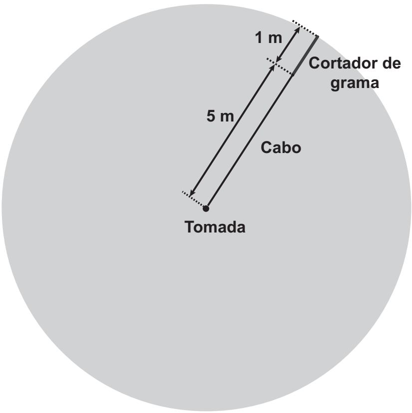
(C) R$ 720,00.

(D) R$ 780,00.

(E) R$ 840,00.

Alternativa **D**.

7 (Enem) Um cortador de grama elétrico tem o cabo plugado em uma tomada fixa rente ao solo plano de um gramado. O cabo de energia mede 5 metros, e o cortador tem uma lâmina que corta 1 metro de largura. Atualmente ele corta, portanto, uma região no formato de círculo de raio 6 m, como ilustra a figura. Pretende-se usar adicionalmente um cabo extensor, de modo que seja possível cortar uma região com o dobro da área que corta atualmente.



Reprodução/ENEM, 2022.

Qual a medida aproximada, em metro, do comprimento do cabo extensor?

(A) 12,0

(B) 8,5

(C) 6,0

(D) 3,0

(E) 2,5

Alternativa **E**.

8 (Enem) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na Figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

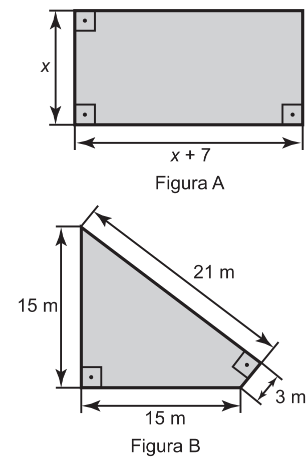


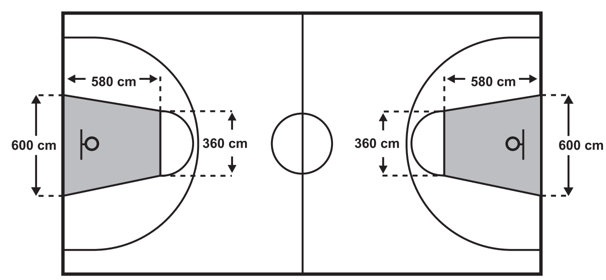
Figura A
Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metro, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

(A) 7,5 e 14,5.
(B) 9,0 e 16,0.
(C) 9,3 e 16,3.
(D) 10,0 e 17,0.
(E) 13,5 e 20,5.

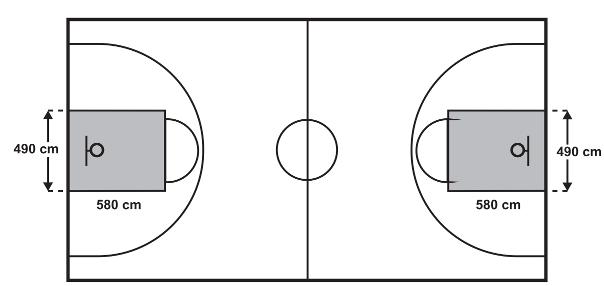
Alternativa **B**.

9 (Enem) O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando a atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



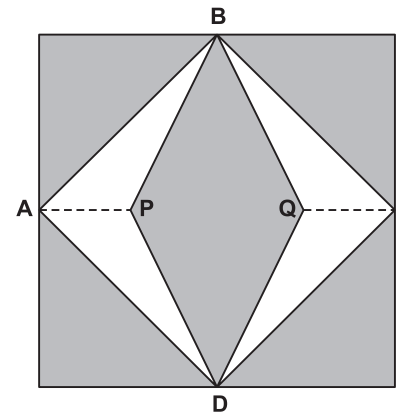
Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

(A) aumento de 5 800 cm^2.
(B) aumento de 75 400 cm^2.
(C) aumento de 214 600 cm^2.
(D) diminuição de 63 800 cm^2.
(E) diminuição de 272 600 cm^2.

Alternativa **A**.

10 (Enem) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura ao lado.



Reprodução/ENEM, 2012.

Nesta figura, os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos *AP* e *QC* medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões *ABPDA* e *BCDQB*), que custa R$ 50,00 o m². De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

(A) R$ 22,50

(B) R$ 35,00

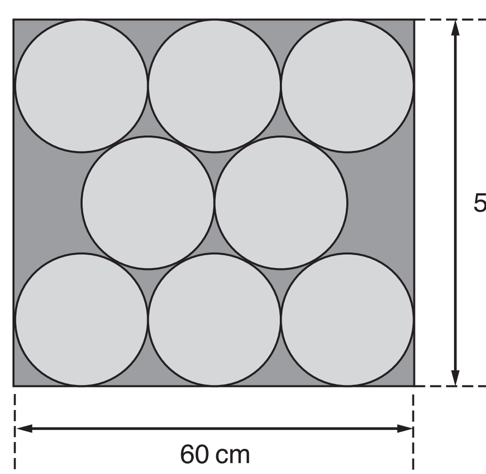
(C) R$ 40,00

(D) R$ 42,50

(E) R$ 45,00

Alternativa **B.**

11 (CPII-RJ) Para fazer um trabalho de Artes, Daniela está recortando círculos de uma folha de cartolina, conforme o modelo de corte da figura ao lado. A cartolina tem dimensões 60 cm × 54 cm e todos os círculos têm o mesmo raio.



Reprodução/CPII-RJ, 2015.

a) Quanto mede o raio de cada círculo recortado?

b) Qual a medida da área desperdiçada de cartolina, representada pelo sombreado na figura acima? (Considere $\pi \simeq 3{,}14$)

a) 10 cm
b) 728 cm²

JORNADA 11

Razão e proporção

Eixo Monumental, avenida em Brasília, Distrito Federal. Foto de 2022.

Evaristo Sá/AFP

A população mundial está crescendo em ritmo acelerado, e as cidades têm enfrentado desafios cada vez mais complexos e preocupantes relacionados à mobilidade urbana. Um deles é a demanda crescente por transporte público e particular, que tem impacto direto na vida dos cidadãos e no meio ambiente. O aumento constante do número de veículos nas vias é um fator significativo para mais emissão de gases poluentes, como dióxido de carbono (CO_2), e a presença de partículas finas no ar, prejudicando sua qualidade, o que resulta em impacto ambiental nocivo.

Além disso, a rotina diária das pessoas, principalmente nos grandes centros urbanos, é afetada de modo negativo pelos congestionamentos e pelo tempo gasto no deslocamento. Isso levanta questões importantes, por exemplo, “Quanto tempo adicional de descanso poderia ser obtido se conseguíssemos reduzir o tempo de deslocamento até o trabalho?” e “Qual será meu gasto mensal com transporte levando em consideração os dias de trabalho no mês?”.

Essas questões e outras reflexões semelhantes muitas vezes exigem uma avaliação quantitativa que envolve números, planilhas e cálculos, sobretudo quando se trata de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Compreender e equilibrar essas grandezas, utilizando todos os recursos matemáticos necessários, é fundamental para encontrar soluções aos desafios complexos de mobilidade urbana sustentável e redução da poluição do ar nas cidades. A aplicação eficaz da Matemática desempenha papel crucial na busca por soluções que melhorem a qualidade de vida nas áreas urbanas e ajudem a preservar o meio ambiente.

1. Quanto tempo você gasta em seus deslocamentos diários?

2. Pesquise quais ações podem reduzir a degradação ambiental causada pela poluição do ar. Verifique as relações entre as soluções que você encontrou e a Matemática.

Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

ETAPA 1

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Apesar de os ônibus emitirem mais gases poluentes na atmosfera que os automóveis, ao optar pelo primeiro, uma pessoa acaba lançando menos dióxido de carbono (CO_2) na atmosfera. A tabela a seguir apresenta a emissão de CO_2 em kg por quilômetro percorrido para cinco diferentes modalidades de transporte, assim como a emissão por passageiro considerando a ocupação média veicular.

Emissões de CO_2 por tipo de transporte (por passageiro e km)

Modalidade de transporte	kg CO_2/km	Ocupação média veicular	kg CO_2/km por passageiro
Metrô	3,16	900	0,0035
Ônibus	1,28	80	0,0160
Automóvel	0,19	1,5	0,1268
Motocicleta	0,07	1	0,0711
Veículos pesados	1,28	1,5	0,8533

Fonte dos dados: POLUIÇÃO veicular atmosférica. *Comunicados do Ipea*, n. 113, 22 set. 2011. Disponível em: https://repositorio.ipea.gov.br/bitstream/11058/5281/1/Comunicados_n113_Polui%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em: 19 out. 2023.

Gerson Gerloff/Pulsar Imagens

Passageiros embarcando em ônibus urbano em Santa Maria, RS. Foto de 2023.

Se, em um ônibus com 80 passageiros, cada passageiro emite, em média, 16 mg de CO_2 por quilômetro percorrido e, em um automóvel com ocupação média veicular de 1,5 passageiro, cada passageiro emite, em média 126,8 mg de CO_2, por quilômetro percorrido, determine:

a) a razão entre as quantidades de CO_2 emitidas pelo ônibus e pelo automóvel no trajeto de 1 quilômetro;

b) a quantidade aproximada de automóveis necessária para transportar a mesma quantidade de passageiros de um único ônibus;

c) a quantidade de CO_2, em kg, que deixaria de ser emitida no ar, em um trajeto de 100 km, caso a quantidade de automóveis necessária para transportar a mesma quantidade de passageiros de um único ônibus fosse substituída por um ônibus.

_resolvendo a questão

a) Para determinar a razão (k), é preciso dividir as quantidades de CO_2 emitidas pelo automóvel e pelo ônibus, respectivamente, em um trajeto de 1 km. Assim:

$$k = \frac{126,8}{16} = 7,925$$

Observe que essa razão indica que um automóvel polui aproximadamente 8 vezes mais que um ônibus.

b) Para encontrar a quantidade de automóveis necessária para transportar a mesma quantidade de passageiros de um único ônibus, é necessário determinar a razão entre as quantidades de passageiros que os veículos transportam.

Sendo p_o a quantidade média de passageiros que um ônibus transporta e p_c a quantidade média de passageiros que um automóvel transporta, tem-se:

$$\frac{p_o}{p_c} = \frac{80}{1,5} \Rightarrow \frac{p_o}{p_c} \simeq 53,33 \Rightarrow p_o \simeq 53,33p_c$$

Logo, 1 ônibus transporta a mesma quantidade de passageiros que aproximadamente 53,33 automóveis.

c) Para calcular a quantidade de CO_2, em kg, que deixaria de ser lançada na atmosfera, é preciso determinar a quantidade (q) desse gás que é emitida por cada veículo no trajeto estipulado de 100 km.

Assim:

$$q_{\text{carro}} = 0,19 \cdot 100 = 19$$

$$q_{\text{ônibus}} = 1,28 \cdot 100 = 128$$

Sabendo que cada ônibus equivale aproximadamente a 53,33 automóveis, a quantidade total de CO_2, em kg, emitida por estes corresponde a:

$$q_{\text{total de carro}} = 19 \cdot 53,33 = 1013,27$$

Para chegar à quantidade solicitada, deve-se subtrair a quantidade de CO_2 emitida por 53,33 automóveis em um trajeto de 100 km pela quantidade de CO_2 emitida por um ônibus em um trajeto de 100 km:

$$q_{\text{total de carro}} - q_{\text{ônibus}} = 1013,27 - 128 = 885,27$$

Logo, 885,27 kg de CO_2 deixariam de ser lançados na atmosfera.

_agora é com você

1 Um fazendeiro tem milhares de bois adultos de 3 raças diferentes. Da raça BovX, há 800 animais adultos, que são alimentados com uma ração especialmente desenvolvida em parceria com pesquisadores de universidades e o Ministério da Agricultura. A quantidade atual disponível de ração é suficiente para alimentar os 800 bois BovX por 21 dias, considerando que cada animal consuma a mesma quantidade de alimento por dia.

Se o fazendeiro optar por alimentar mais 400 bois de outra raça com essa ração especial de maneira que cada animal continue consumindo a mesma quantidade de alimento por dia, e nenhum morra nos próximos 30 dias, a quantidade de ração será suficiente para alimentar todos esses bois por quanto tempo?

(A) 10 dias

(B) 12 dias

(C) 14 dias

(D) 18 dias

(E) 20 dias

Alternativa **C**.

2 Um sistema de irrigação de plantas é composto de algumas torneiras que gotejam água. As torneiras foram programadas para gotejar 15 vezes a cada meio minuto. Considerando que a medida de volume de uma gota corresponde a 0,05 mL, a medida de volume total gotejado de cada torneira, em 1 hora, é:

(A) 20 mL.

(B) 60 mL.

(C) 90 mL.

(D) 240 mL.

(E) 360 mL.

Alternativa **C**.

3 Ao contratar o serviço de uma gráfica, o cliente optou pelo modelo de 30 linhas por página para uma revista com 80 páginas. No entanto, a gráfica fez um ajuste de última hora e diminuiu a quantidade de texto por página, retirando 6 linhas de cada uma.

Após a mudança, o número de páginas dessa revista será de:

(A) 64.

(B) 74.

(C) 96.

(D) 100.

(E) 120.

Alternativa **D**.

4 Um pote de 150 gramas de um produto enzimático é capaz de limpar uma tubulação de esgoto caseiro em 6 horas. Uma pessoa utilizou 3 potes, de uma única vez, para limpar a tubulação de sua casa. Após quantas horas o esgoto estará totalmente limpo?

(A) 18

(B) 12

(C) 6

(D) 3

(E) 2

Alternativa **E**.

5 Uma dívida aumenta R$ 500,00, de maneira constante, a cada 4 meses. Mantendo a constância de aumento, em quantos reais a dívida aumentará em um ano?

(A) R$ 250,00

(B) R$ 750,00

(C) R$ 1.000,00

(D) R$ 1.250,00

(E) R$ 1.500,00

Alternativa **E**.

6 Uma montadora de automóveis indica que um de seus veículos *flex*, de modelo popular, percorre, em média, 12 km por litro quando abastecido apenas com gasolina e 9 km por litro quando abastecido apenas com etanol. Sabe-se que o litro de gasolina custa R$ 6,00. Qual deve ser o preço do litro do etanol para que os custos financeiros com os dois tipos de combustível sejam equivalentes?

(A) R$ 3,50
(B) R$ 4,00
(C) R$ 4,50
(D) R$ 5,00
(E) R$ 5,50

Alternativa **C.**

7 Uma fábrica de cimento é abastecida diariamente por 50 caminhões que carregam carvão mineral. Juntos, esses caminhões têm capacidade total de transportar 4000 m^3 desse produto por dia. Após uma ampliação, a fábrica passou a receber 6000 m^3 de carvão diariamente. Assim, é possível afirmar que a fábrica passou a ser abastecida diariamente por:

(A) 25 caminhões.
(B) 40 caminhões.
(C) 60 caminhões.
(D) 75 caminhões.
(E) 90 caminhões.

Alternativa **D.**

8 Uma equipe de profissionais da construção civil fez um orçamento para uma varanda, cuja construção deve ocorrer em 30 dias e utilizar 10 trabalhadores. Contudo, em uma reunião foi feita uma contraproposta que mantém o valor orçamentário, mas utiliza 12 trabalhadores. Considerando que o ritmo de cada trabalhador é o mesmo, a varanda seria construída em:

(A) 20 dias.
(B) 25 dias.
(C) 30 dias.
(D) 35 dias.
(E) 40 dias.

Alternativa **B.**

9 Uma empresa de TV por assinatura, ao entrar em contato com um cliente antigo, sugeriu a ele que migrasse de um pacote com 150 canais no valor de R$ 90,00 mensais para um novo pacote com 210 canais. A atendente informou que os valores da assinatura são proporcionais à quantidade de canais. Nessas condições, o valor do novo plano ofertado é de:

(A) R$ 126,00.
(B) R$ 180,00.
(C) R$ 200,00.
(D) R$ 255,00.
(E) R$ 278,00.

Alternativa **A.**

10 Valéria e Eduardo firmaram uma sociedade para abrir uma cafeteria. Valéria investiu R$ 80.000,00, enquanto Eduardo investiu R$ 40.000,00. Ao final do primeiro ano, o lucro obtido foi de R$ 60.000,00.

De acordo com os valores investidos, qual é o lucro proporcional que cada um deve receber?

(A) Valéria receberá R$ 20.000,00 e Eduardo R$ 40.000,00.
(B) Valéria receberá R$ 25.000,00 e Eduardo R$ 35.000,00.
(C) Ambos receberão R$ 30.000,00.
(D) Valéria receberá R$ 35.000,00 e Eduardo R$ 25.000,00.
(E) Valéria receberá R$ 40.000,00 e Eduardo R$ 20.000,00

Alternativa **E.**

11 Leia, a seguir, a informação nutricional que consta em um pacote com 150 g de amendoim temperado.

Informação nutricional	
Porção de 25 g	
Quantidade por porção	
Valor energético	143 kcal
Carboidratos	3,3 g
Proteínas	7,2 g
Gorduras totais	11 g
Gorduras saturadas	2,4 g
Fibra alimentar	2,1 g
Sódio	158 mg

Elaborada para fins didáticos.

Uma pessoa que consumiu todo o pacote ingeriu ao todo quantos gramas de carboidratos e gorduras totais?

(A) 20,4
(B) 34,2
(C) 63
(D) 66
(E) 85,8

Alternativa **E**.

12 Uma gráfica rápida tem uma impressora industrial que imprime 300 páginas em 5 minutos. Em uma propaganda, é necessário indicar o número de páginas produzidas em 1 hora, considerando apenas essa impressora.

Sendo o ritmo da impressora constante, a quantidade divulgada será de:

(A) 1000 páginas.
(B) 1800 páginas.
(C) 3000 páginas.
(D) 3600 páginas.
(E) 4000 páginas.

Alternativa **D**.

13 Quando uma pessoa deseja aumentar sua massa muscular, ela deve ingerir, em média, cerca de 1,8 g de proteína por quilograma de massa ao dia.

Dessa maneira, uma pessoa que tem 85 kg de medida de massa deverá ingerir, diariamente:

(A) 83,2 g de proteína.
(B) 86,8 g de proteína.
(C) 153 g de proteína.
(D) 170 g de proteína.
(E) 186,8 g de proteína.

Alternativa **C**.

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Grandezas diretamente e inversamente proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** se, ao multiplicar o valor de uma delas por um número real diferente de zero, o valor da outra é multiplicado pelo mesmo número real, ou seja, quando o valor de uma dobra, o valor da outra dobra; quando o valor de uma triplica, o valor da outra triplica; e assim por diante.

Considerando $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $(a_1, a_2, ..., a_n)$ duas sequências de números não nulos e k a constante de proporcionalidade, é possível afirmar que as sequências são diretamente proporcionais se existe um número k tal que:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_n}{a_n} = k$$

Por sua vez, duas grandezas são **inversamente proporcionais** se, ao multiplicar o valor de uma delas por um número real diferente de zero, o valor da outra grandeza é dividido pelo mesmo número real, ou seja, quando o valor de uma dobra, o valor da outra se reduz à metade; quando o valor de uma triplica, o valor da outra se reduz à terça parte; e assim por diante.

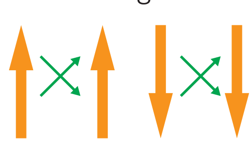
Considerando $(x_1, x_2, ..., x_n)$ e $(a_1, a_2, ..., a_n)$ duas sequências de números não nulos e k a constante de proporcionalidade, é possível afirmar que as sequências são inversamente proporcionais se existe um número k tal que:

$$\frac{x_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{a_2}} = \ldots = \frac{x_n}{\frac{1}{a_n}} = k$$

Regra de três simples

Na regra de três simples para grandezas **diretamente** proporcionais:

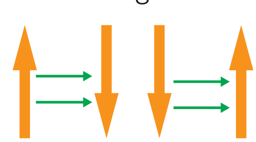
- quando o valor de uma grandeza aumenta, o valor da outra também aumenta;
- quando o valor de uma grandeza diminui, o valor da outra também diminui;
- multiplicamos as grandezas em "cruz".



Banco de imagens/Arquivo da editora

Na regra de três simples para grandezas **inversamente** proporcionais:

- quando o valor de uma grandeza aumenta, o valor da outra diminui;
- quando o valor de uma grandeza diminui, o valor da outra aumenta;
- multiplicamos as grandezas em "linha".



Banco de imagens/Arquivo da editora

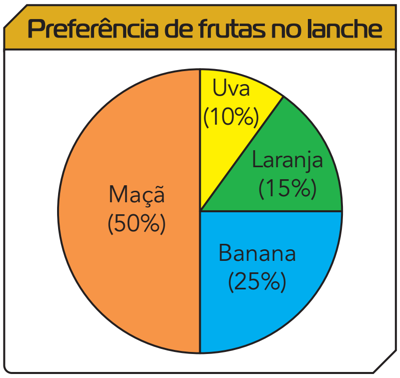
Regra de três composta

- **1º passo:** identificar as grandezas e construir um quadro.
- **2º passo:** analisar a proporção existente entre a grandeza que contém a incógnita e a outra.
- **3º passo:** inverter a razão, caso exista alguma grandeza inversamente proporcional à grandeza que contém a incógnita; se não houver, passar direto para o 4º passo.
- **4º passo:** montar a equação, deixando a grandeza que contém a incógnita no primeiro membro da igualdade e calculando o produto entre as razões das demais grandezas que ficarão no segundo membro.

_ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Em uma escola, foi feita uma pesquisa com 200 estudantes do Ensino Médio sobre qual fruta preferem no lanche. Um gráfico de setores foi construído para representar esses dados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Elaborado para fins didáticos.

Com base nessas informações, assinale a alternativa correta.

(A) O número de estudantes que escolheram banana está na razão de 1 para 2 em relação aos que escolheram maçã.

(B) O número de estudantes que escolheram laranja está na razão de 3 para 10 em relação ao total de entrevistados.

(C) O número de estudantes que escolheram uva representa $\frac{1}{4}$ do total.

(D) O número de estudantes que escolheram maçã está na razão de 1 para 1 em relação ao total de entrevistados.

(E) O número de estudantes que escolheram banana está na razão de 2 para 1 em relação aos que escolheram maçã.

Alternativa **A**.

2 Sabe-se que a intensidade luminosa de uma lâmpada é inversamente proporcional ao quadrado da distância dessa lâmpada. Considerando que uma lâmpada a 2 m de medida de distância apresenta intensidade luminosa que mede 400 lux, qual é a medida de intensidade luminosa dessa mesma lâmpada a 4 m de medida de distância?

(A) 100 lux
(B) 200 lux
(C) 800 lux
(D) 1600 lux
(E) 3200 lux

Alternativa **A**.

_DICA

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando o ato de multiplicar o valor de uma por um número implica dividir o valor da outra pelo mesmo número. Ou seja, enquanto o valor de uma aumenta, o valor da outra diminui.

Entretanto, isso **não** quer dizer que sempre que o valor de uma grandeza aumentar e o da outra diminuir elas serão inversamente proporcionais.

Considere o saldo de sua conta bancária. Se você tiver 100 reais e comprar 4 sucos que custam 5 reais cada um, restarão 80 reais. Contudo, se você comprasse o dobro de sucos, não ficaria com a metade – ou seja, com 40 reais –, mas com 60 reais.

É importante notar que, embora comprar mais suco signifique restar menos dinheiro, as grandezas quantidade de dinheiro e quantidade de sucos comprados não são inversamente proporcionais.

3 No início de uma campanha de combate ao mosquito da dengue, era necessário utilizar 20 agentes de saúde, igualmente eficientes, para visitar 3000 residências em 10 dias, trabalhando 8 horas diárias. No entanto, decidiu-se ampliar a quantidade de residências para 4500 e reduzir o número de agentes para 16, trabalhando 10 horas por dia.

jcomp/Freepik

Agente de saúde aplicando inseticida para controlar a proliferação do mosquito *Aedes aegypti*. Esse tipo de inseticida não causa danos à saúde humana nem ao meio ambiente.

Após o ajuste, a campanha terá a duração de:

(A) 12 dias.
(B) 15 dias.
(C) 20 dias.
(D) 30 dias.
(E) 45 dias.

Alternativa **B**.

4 Uma empreiteira fechou contrato para a construção de uma obra de 800 m^2 a ser concluída em 10 dias, para a qual contratou 20 operários. Após o quarto dia de construção, a empreiteira foi informada de que o trabalho corresponderia a 1000 m^2 e de que era preciso terminar a obra um dia antes do prazo estabelecido. Quantos operários, com mesma capacidade de produção, devem ser contratados para que seja possível realizar o serviço sob as novas condições propostas?

(A) 6
(B) 9
(C) 12
(D) 14
(E) 18

Alternativa **D**.

5 Duas motocicletas **A** e **B**, ambas com velocidade constante, percorrem a mesma estrada em sentidos opostos. Elas passam por uma ponte no mesmo instante. As motocicletas se cruzam após **A** percorrer $\frac{2}{5}$ do comprimento da ponte.
Nessa situação, é correto afirmar que a velocidade de:

(A) **A** é o dobro da velocidade de **B**.
(B) **A** é $\frac{1}{3}$ da velocidade de **B**.
(C) **B** é 2,5 vezes a velocidade de **A**.
(D) **B** é 1,5 vez a velocidade de **A**.
(E) **B** é $\frac{2}{5}$ da velocidade de **A**.

Alternativa **D**.

6 Um ônibus faz um percurso entre duas cidades em 9 horas. Sabe-se que a distância entre essas duas cidades mede 540 km e que o ônibus deve manter a velocidade média medindo 60 km por hora. Porém, após 3 horas de viagem, o ônibus precisou parar por uma hora para reparos mecânicos.
Depois do conserto, quantos quilômetros, em média, o ônibus deve fazer por hora para cumprir o horário estipulado?

(A) 65

(B) 72

(C) 75

(D) 78

(E) 80

Alternativa **B**.

7 Para produzir água sanitária, mistura-se hipoclorito de sódio com água. A água sanitária forte é produzida na razão 3 : 1, ou seja, 3 partes de água para 1 parte de hipoclorito de sódio. Já a água sanitária fraca é produzida na razão 5 : 1, ou seja, 5 partes de água para 1 parte de hipoclorito de sódio.

I. Em um dia de produção, foram usados 30 litros de hipoclorito de sódio, sendo cada metade para produzir cada tipo de água sanitária. Quantos litros de água sanitária, ao todo, foram produzidos?

(A) 60

(B) 120

(C) 150

(D) 180

(E) 200

Alternativa **C**.

II. A densidade de um material é dada pelo quociente de sua massa pelo volume que ele ocupa. Considerando as quantidades de água sanitária forte e fraca produzidas no item anterior e que a densidade da água sanitária forte mede 1,2 g/mL e a da água sanitária fraca mede 1,1 g/mL, qual é a medida de massa total de água sanitária produzida em gramas?

(A) 0,066

(B) 0,072

(C) 0,099

(D) 0,108

(E) 0,171

Alternativa **E**.

8 Para envasar 100 garrafas de suco de uva, um produtor usou 6 máquinas de envase, de mesma autonomia, em um processo que durou 40 minutos. Para obter 250 garrafas de suco de uva, usando 4 dessas máquinas e trabalhando no mesmo ritmo e na mesma velocidade que antes, será necessário um intervalo de tempo mínimo de:

(A) 1 hora e 30 minutos.

(B) 1 hora e 45 minutos.

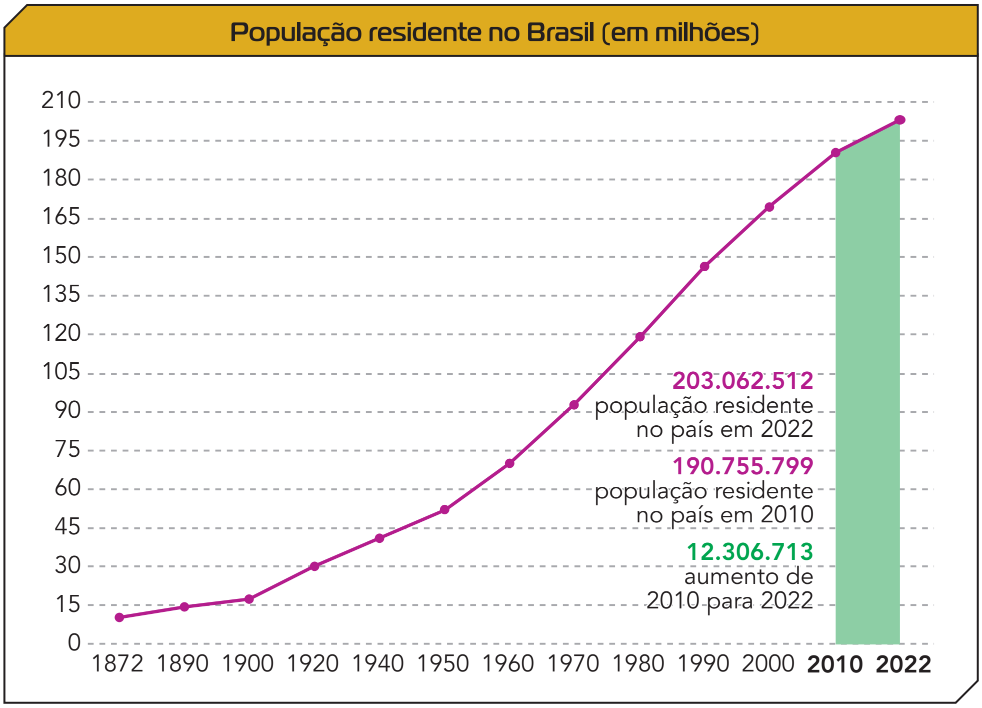
(C) 2 horas e 15 minutos.

(D) 2 horas e 30 minutos.

(E) 2 horas e 45 minutos.

Alternativa **D**.

9 O gráfico destaca o crescimento populacional do Brasil de 2010 a 2022.



Fonte dos dados: CABRAL, Umberlândia; GIL, Brisa (arte). De 2010 a 2022, população brasileira cresce 6,5% e chega a 203,1 milhões. *Agência IBGE Notícias*, Rio de Janeiro, 28 jun. 2023. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/37237-de-2010-a-2022-populacao-brasileira-cresce-6-5-e-chega-a-203-1-milhoes. Acesso em: 10 out. 2023.

I. A área total do Brasil mede, aproximadamente, 8 510 000 km^2. Considerando a população brasileira em 2010, sua **densidade demográfica** correspondia a, aproximadamente:

densidade demográfica: razão entre a população de uma região e a área dessa região.

(A) 22,42 pessoas por km^2.

(B) 22,86 pessoas por km^2.

(C) 23,42 pessoas por km^2.

(D) 23,86 pessoas por km^2.

(E) 24,57 pessoas por km^2.

Alternativa **A.**

_DICA

Para determinar a porcentagem comparando dois valores, utilize a fórmula:

$$\left(\frac{\text{valor final}}{\text{valor inicial}} - 1\right) \cdot 100$$

II. Considerando a população brasileira em 2010 e em 2022, o aumento percentual entre as densidades demográficas corresponde a:

(A) 6,00%.

(B) 6,42%.

(C) 6,50%.

(D) 6,84%.

(E) 6,92%.

Alternativa **B.**

_AMPLIANDO

Por meio do simulador interativo Parque da proporção – PhET, é possível estudar os conceitos de razão e de proporção.

ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) Um borrifador de atuação automática libera, a cada acionamento, uma mesma quantidade de inseticida. O recipiente desse produto, quando cheio, contém 360 mL de inseticida, que duram 60 dias se o borrifador permanecer ligado ininterruptamente e for acionado a cada 48 minutos.

A quantidade de inseticida que é liberada a cada acionamento do borrifador, em mililitro, é

(A) 0,125.

(B) 0,200.

(C) 4,800.

(D) 6,000.

(E) 12,000.

Alternativa **B**.

2 (Enem) Definem-se o dia e o ano de um planeta de um sistema solar como sendo, respectivamente, o tempo que o planeta leva para dar 1 volta completa em torno de seu próprio eixo de rotação e o tempo para dar 1 volta completa em torno de seu Sol.

Suponha que exista um planeta Z, em algum sistema solar, onde um dia corresponda a 73 dias terrestres e que 2 de seus anos correspondam a 1 ano terrestre. Considere que 1 ano terrestre tem 365 de seus dias.

No planeta Z, seu ano corresponderia a quantos de seus dias?

(A) 2,5

(B) 10,0

(C) 730,0

(D) 13 322,5

(E) 53 290,0

Alternativa **A**.

3 (Enem) Em uma corrida automobilística, os carros podem fazer paradas nos boxes para efetuar trocas de pneus. Nessas trocas, o trabalho é feito por um grupo de três pessoas em cada pneu. Considere que os grupos iniciam o trabalho no mesmo instante, trabalham à mesma velocidade e cada grupo trabalha em um único pneu. Com os quatro grupos completos, são necessários 4 segundos para que a troca seja efetuada. O tempo gasto por um grupo para trocar um pneu é inversamente proporcional ao número de pessoas trabalhando nele. Em uma dessas paradas, um dos trabalhadores passou mal, não pôde participar da troca e nem foi substituído, de forma que um dos quatro grupos de troca ficou reduzido.

Nessa parada específica, com um dos grupos reduzido, qual foi o tempo gasto, em segundo, para trocar os quatro pneus?

(A) 6,0

(B) 5,7

(C) 5,0

(D) 4,5

(E) 4,4

Alternativa **A**.

4 (Enem) Um nutricionista verificou, na dieta diária do seu cliente, a falta de 800 mg do mineral A, de 1000 mg do mineral B e de 1200 mg do mineral C. Por isso, recomendou a compra de suplementos alimentares que forneçam os minerais faltantes e informou que não haveria problema se consumisse mais desses minerais do que o recomendado.

O cliente encontrou cinco suplementos, vendidos em sachês unitários, cujos preços e as quantidades dos minerais estão apresentados a seguir:

- Suplemento I: contém 50 mg do mineral A, 100 mg do mineral B e 200 mg do mineral C e custa R$ 2,00;
- Suplemento II: contém 800 mg do mineral A, 250 mg do mineral B e 200 mg do mineral C e custa R$ 3,00;
- Suplemento III: contém 250 mg do mineral A, 1000 mg do mineral B e 300 mg do mineral C e custa R$ 5,00;
- Suplemento IV: contém 600 mg do mineral A, 500 mg do mineral B e 1000 mg do mineral C e custa R$ 6,00;
- Suplemento V: contém 400 mg do mineral A, 800 mg do mineral B e 1200 mg do mineral C e custa R$ 8,00.

O cliente decidiu comprar sachês de um único suplemento no qual gastasse menos dinheiro e ainda suprisse a falta de minerais indicada pelo nutricionista, mesmo que consumisse alguns deles além de sua necessidade.

Nessas condições, o cliente deverá comprar sachês do suplemento

(A) I.

(B) II.

(C) III.

(D) IV.

(E) V.

Alternativa **D**.

5 (Enem) A relação de Newton-Laplace estabelece que o módulo volumétrico de um fluido é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade do som (em metro por segundo) no fluido e à sua densidade (em quilograma por metro cúbico), com uma constante de proporcionalidade adimensional.

Nessa relação, a unidade de medida adequada para o módulo volumétrico é

(A) $kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$.

(B) $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$.

(C) $kg \cdot m^{-5} \cdot s^{2}$.

(D) $kg^{-1} \cdot m^{1} \cdot s^{2}$.

(E) $kg^{-1} \cdot m^{5} \cdot s^{-2}$.

Alternativa **B**.

6 (Enem) Um automóvel apresenta um desempenho médio de 16 km/L. Um engenheiro desenvolveu um novo motor a combustão que economiza, em relação ao consumo do motor anterior, 0,1 L de combustível a cada 20 km percorridos.

O valor do desempenho médio do automóvel com o novo motor, em quilômetro por litro, expresso com uma casa decimal, é

(A) 15,9.

(B) 16,1.

(C) 16,4.

(D) 17,4.

(E) 18,0.

Alternativa **D**.

7 (Enem) Demografia médica é o estudo da população de médicos sob vários aspectos quantitativos e qualitativos. Um dos componentes desse estudo é a densidade médica, a qual é obtida dividindo-se o número de médicos registrados no Conselho Federal de Medicina (CFM) em uma região pela respectiva quantidade de pessoas da Unidade Federativa (UF) correspondente à região em estudo. A tabela apresenta informações sobre cinco unidades federativas, relativamente ao total de médicos registrados no CFM e à população existente.

UF	Total de médicos	População (em milhar)
Distrito Federal	10 800	2 650
Minas Gerais	40 400	19 900
São Paulo	110 450	41 900
Sergipe	3 000	2 120
Piauí	3 300	3 140

Disponível em: www.cremesp.org.br. Acesso em: jun. 2015 (adaptado).

Dentre as unidades federativas indicadas, qual apresenta a maior densidade médica?

(A) Distrito Federal.

(B) Minas Gerais.

(C) São Paulo.

(D) Sergipe.

(E) Piauí.

Alternativa **A.**

8 (Enem)

Um pé de eucalipto em idade adequada para o corte rende, em média, 20 mil folhas de papel A4. A densidade superficial do papel A4, medida pela razão da massa de uma folha desse papel por sua área, é de 75 gramas por metro quadrado, e a área de uma folha de A4 é 0,062 metro quadrado.

Disponível em: http://revistagalileu.globo.com. Acesso em: 28 fev. 2013 (adaptado).

Nessas condições, quantos quilogramas de papel rende, em média, um pé de eucalipto?

(A) 4301

(B) 1500

(C) 930

(D) 267

(E) 93

Alternativa **E.**

9 (Enem) Toda a iluminação de um escritório é feita utilizando-se 40 lâmpadas incandescentes que produzem 600 lúmens (lúmen = unidade de energia luminosa) cada. O gerente planeja reestruturar o sistema de iluminação desse escritório, utilizando somente lâmpadas fluorescentes que produzem 1600 lúmens, para aumentar a quantidade de energia luminosa em 50%.

Para alcançar seu objetivo, a quantidade mínima de lâmpadas fluorescentes que o gerente desse escritório deverá instalar é

(A) 10.

(B) 14.

(C) 15.

(D) 16.

(E) 23.

Alternativa **E.**

10 (UERJ) A caixa-d'água de uma residência continha, às 8 horas da manhã de um determinado dia, 600 litros de água. Ela foi abastecida durante 2 horas, recebendo um volume de água na razão constante de 20 litros por minuto. Às 10 horas, ficou completamente cheia; a partir desse momento, começou a perder água na razão constante de 15 litros por minuto, sem reposição alguma, até esvaziar. Considerando esse processo, calcule o horário em que a caixa ficou totalmente vazia.

13 h 20 min.

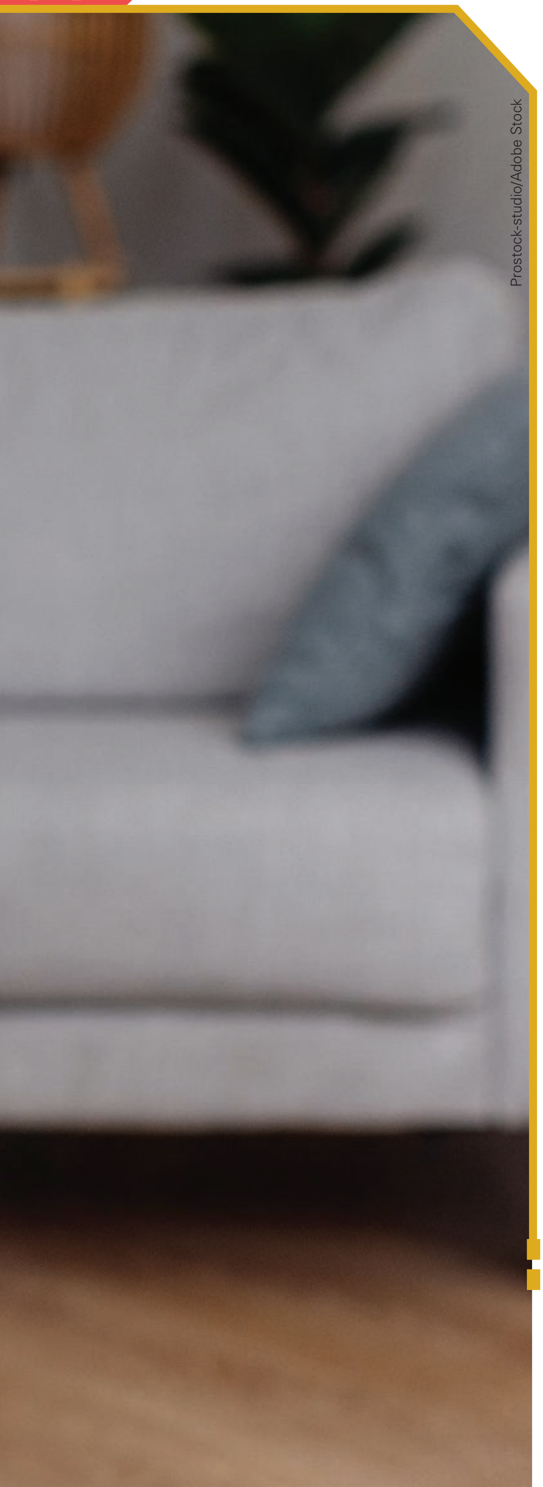
11 (UERJ) Duas latas contêm 250 mL e 350 mL de um mesmo suco e são vendidas, respectivamente, por R$ 3,00 e R$ 4,90.

Tomando por base o preço por mililitro do suco, calcule quantos por cento a lata maior é mais cara do que a lata menor.

Aproximadamente 16,7%.

JORNADA 12

Sistemas de equações lineares



Prostock-studio/Adobe Stock

Existem evidências científicas que indicam que a prática de atividades físicas desempenha papel fundamental na promoção de uma vida saudável e equilibrada, possibilitando uma vivência significativa e longeva. Rotinas como caminhar diariamente, jogar futebol ou vôlei, nadar, pedalar ou se dedicar a treinos de musculação na academia são exemplos dessas atividades.

Para desfrutar dessas práticas é imprescindível que o corpo disponha da quantidade adequada de energia, que é derivada das calorias ingeridas, ou seja, da alimentação. Pesquisas apontam que, em determinados contextos, sensação de cansaço, falta de disposição para atividades físicas ou desempenho abaixo do esperado podem ser indícios de alimentação inadequada. Nutricionistas utilizam conhecimentos de Biologia, Química e Matemática para calcular precisamente o que e quanto cada indivíduo deve consumir diariamente.

Os sistemas lineares também desempenham papel fundamental, por exemplo, em problemas envolvendo cálculos nutricionais, sobretudo quando se trata de quantificação da ingestão calórica e planejamento de dietas saudáveis. Como cada indivíduo tem necessidades calóricas diferentes, com base em fatores como idade, sexo, “peso”, altura e nível de atividade física, usando essas ferramentas matemáticas é possível criar modelos personalizados para calcular as quantidades de calorias necessárias para atingir metas específicas, como perda, manutenção ou ganho de massa.

1. Nas embalagens de produtos alimentícios existem tabelas nutricionais que indicam, entre outras informações, a quantidade de calorias de uma porção do alimento. Observe a tabela nutricional de algum produto que você consuma e calcule a quantidade de calorias ingeridas diariamente por meio dele.

2. Considere uma refeição de 600 calorias em que você vai consumir 3 alimentos: frango, arroz e salada. Sabendo que 100 g de frango têm 240 calorias, 100 g de arroz têm 120 calorias e 100 g de salada têm 90 calorias, escreva uma possibilidade relativa à quantidade de cada alimento para atingir as 600 calorias.

Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

_ETAPA 7

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Para compor uma refeição, uma nutricionista dispõe das seguintes informações nutricionais referentes a 100 g de frango e 100 g de arroz, conforme especificado na tabela a seguir.

Informações nutricionais			
Alimento (100 g)	Quantidade de calorias (em cal)	Quantidade de proteínas (em g)	Quantidade de lipídios (em g)
Arroz	128	2,5	0,2
Frango	160	32	2,5

Dados elaborados para fins didáticos.

Considere que uma porção de qualquer um desses alimentos tenha 100 g.

a) Quantas calorias uma pessoa vai ingerir se comer 1 porção de arroz e 2 porções de frango?

b) Determine uma expressão algébrica que represente quantas calorias uma pessoa vai ingerir se comer x porções de arroz e y porções de frango.

c) Quantos gramas de proteína uma pessoa vai ingerir se comer 2 porções de arroz e 3 porções de frango?

d) Determine uma expressão algébrica que represente quantos gramas de proteína uma pessoa vai ingerir se comer x porções de arroz e y porções de frango.

e) Quantas porções de frango e quantas porções de arroz uma pessoa deve comer para ingerir 896 kcal e 133 g de proteína?

f) Representando as quantidades x e y no plano cartesiano, descreva graficamente as equações do sistema linear do item anterior e identifique no gráfico a solução para o sistema.

_resolvendo a questão

a) Para determinar quantas calorias uma pessoa vai ingerir se comer 1 porção de arroz e 2 porções de frango, basta efetuar o seguinte cálculo, conforme as informações apresentadas na tabela:

$$128 \text{ cal} \cdot 1 + 160 \text{ cal} \cdot 2 = 448 \text{ cal}$$

b) Para determinar quantas calorias uma pessoa vai ingerir se comer x porções de arroz e y porções de frango, pode-se utilizar a seguinte expressão algébrica:

$$x \cdot (\text{calorias do arroz}) + y \cdot (\text{calorias do frango})$$

Substituindo as informações apresentadas na tabela:

$$128x + 160y$$

c) Para determinar quantos gramas de proteína uma pessoa vai ingerir se comer 2 porções de arroz e 3 porções de frango, basta calcular:

$$2{,}5\text{ g} \cdot 2 + 32\text{ g} \cdot 3 = 101\text{ g}$$

d) Para escrever uma expressão algébrica que permita calcular quantos gramas de proteína uma pessoa vai ingerir se comer *x* porções de arroz e *y* porções de frango, basta substituir 2 por *x* e 3 por *y* na expressão do item anterior:

$$2{,}5x + 32y$$

e) Para determinar quantas porções de frango e quantas porções de arroz uma pessoa deve comer para ingerir 896 kcal e 133 g de proteína, podemos escrever equações usando as expressões algébricas encontradas nos itens **b** e **d**.

Equação das calorias: $128x + 160y = 896$

Equação das proteínas: $2{,}5x + 32y = 133$

Chamamos de **equação linear com 2 incógnitas** uma equação que tenha a forma $ax + by = c$, em que *x* e *y* são as incógnitas, e os parâmetros *a*, *b* e *c* são números reais conhecidos. Nesse caso, para cada valor de *x*, existe um valor de *y* que satisfaz a equação. Esse par (x, y) é chamado de **solução da equação**.

Por exemplo, na equação $2x + 3y = 50$, temos que o par $(10, 10)$ satisfaz a equação, pois $2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 50$. O par $(13, 8)$ e o par $(25, 0)$ também satisfazem, pois:

$$2 \cdot 13 + 3 \cdot 8 = 50$$

$$2 \cdot 25 + 3 \cdot 0 = 50$$

Retomando o problema, precisamos encontrar um valor para *x* e outro para *y* que satisfaçam as 2 equações ao mesmo tempo. Temos aqui um sistema linear, ou seja, um conjunto de equações lineares.

Um **sistema linear com 2 equações e 2 incógnitas**, também chamado de sistema 2×2, pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Uma solução desse sistema 2×2 é o par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que satisfaz a ambas as equações, simultaneamente.

No problema, o sistema linear pode ser representado da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 128x + 160y = 896 \\ 2{,}5x + 32y = 133 \end{cases}$$

Para resolver um sistema linear com 2 equações e 2 incógnitas, há vários métodos. Um deles é o **método da adição**, em que, para viabilizar a eliminação de uma incógnita, uma das equações é multiplicada por uma constante de modo que pelo menos uma de suas incógnitas se torne o inverso aditivo de uma das incógnitas da outra equação. Na sequência, as duas equações são somadas e, por fim, depois de o valor de uma das incógnitas ser encontrado, com a substituição dele em qualquer uma das equações originais, é possível encontrar o valor da outra incógnita.

Escolhendo, por exemplo, a incógnita y para ser eliminada no sistema anterior, se multiplicarmos a segunda equação por -5, tem-se o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} 128x + 160y = 896 \\ -12,5x - 160y = -665 \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos:

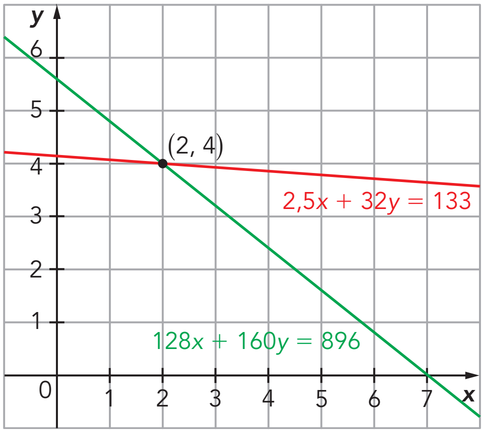
$$115,5x = 231 \Rightarrow x = \frac{231}{115,5} = 2$$

Substituindo x na equação $2,5x + 32y = 133$ (poderia ser na outra equação também), temos que:

$$2,5 \cdot 2 + 32y = 133 \Rightarrow 32y = 133 - 5 \Rightarrow y = \frac{128}{32} = 4$$

Assim, 2 porções de arroz e 4 porções de frango atendem às necessidades de calorias e proteínas apresentadas.

f) No gráfico das retas associadas às equações do sistema 2×2 do item anterior, notamos que a solução do sistema é representada pelo ponto de intersecção das duas retas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Além disso, um sistema linear também pode ter mais de uma solução ou até não ter nenhuma solução.

O sistema linear se diz **indeterminado**, **impossível** ou **determinado** quando admite **mais de uma solução**, **nenhuma solução** ou **uma única solução**, respectivamente. Assim, se o sistema linear 2×2 for indeterminado, as retas que o representam coincidem; se ele for determinado, são concorrentes; e, se for impossível, são paralelas.

_agora é com você

1 Uma pessoa tem 60 reais e precisa comprar passagens de ônibus que custam 6 reais e passagens de metrô que custam 7 reais. Na equação linear $6x + 7y = 60$, cada solução (x, y) representa a compra de x passagens de ônibus e y passagens de metrô, gastando-se exatamente os 60 reais.

Assinale a alternativa que representa todas as possibilidades que essa pessoa tem de comprar as passagens usando exatamente os 60 reais.

(A) (10, 0) e (3, 6)
(B) (6, 0) e (7, 6)
(C) (10, 0) e (7, 3)
(D) (10, 0) e (6, 3)
(E) (6, 0) e (7, 3)

Alternativa **A**.

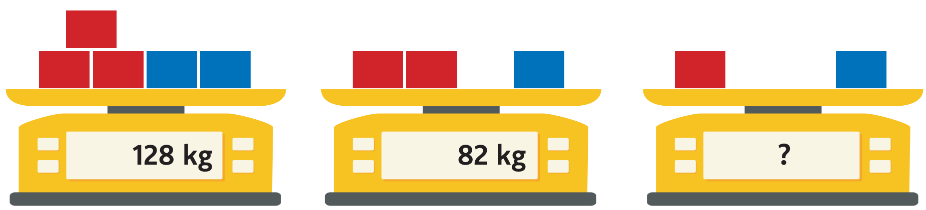
2 No intervalo de um jogo de futebol, Ana comprou 1 copo de refrigerante e 2 salgados, pagando por tudo R$ 17,00. Carol comprou 2 copos de refrigerante e 3 salgados, pagando por eles R$ 28,00. Considere que todos os salgados têm o mesmo preço e que só há um tipo de copo de refrigerante.

O valor pago por Miriam, que comprou 4 copos de refrigerante e 6 salgados, foi de:

(A) R$ 54,00.
(B) R$ 56,00.
(C) R$ 58,00.
(D) R$ 60,00.
(E) R$ 62,00.

Alternativa **B.**

3 Em uma balança de carga são colocados blocos vermelhos de mesma massa e blocos azuis também de mesma massa.



Menara Grafis/Shutterstock

Quanto deve marcar a última balança?

(A) 42 kg
(B) 46 kg
(C) 48 kg
(D) 54 kg
(E) 56 kg

Alternativa **B.**

4 Ester e Laura trabalham como produtoras culturais. Ester cobra uma taxa fixa de R$ 900,00 mais R$ 150,00 por hora de evento, enquanto Laura cobra uma taxa fixa de R$ 750,00 mais R$ 200,00 por hora de evento.

Qual é o intervalo de tempo de festa em que os valores cobrados serão iguais?

(A) 1 h
(B) 2 h
(C) 3 h
(D) 4 h
(E) 5 h

Alternativa **C.**

5 Mariana e Lucas compraram cartas de um jogo que eles costumam jogar com os amigos. Na última compra, eles estabeleceram a seguinte relação:

- Mariana comprou o triplo mais 5 cartas que Lucas.
- A soma da quantidade de cartas comprada por Mariana com o dobro da quantidade comprada por Lucas totaliza 120 cartas.

Sendo M e L as quantidades de cartas de Mariana e de Lucas, respectivamente, qual é o sistema linear que representa essa situação?

(A) $\begin{cases} L - 3M = 5 \\ M + 2L = 120 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} M + 3L = 120 \\ 2M - L = 5 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} 3M + L = 5 \\ M + 2L = 120 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} M - 3L = 5 \\ M + 2L = 120 \end{cases}$

(E) $\begin{cases} 2M - 3L = 120 \\ 3M + 2L = 5 \end{cases}$

Alternativa **D.**

6 Analise o desafio proposto.

- Um número x é igual ao quádruplo de um número y.
- O número x mais 20 é igual ao sêxtuplo da diferença entre y e 20.

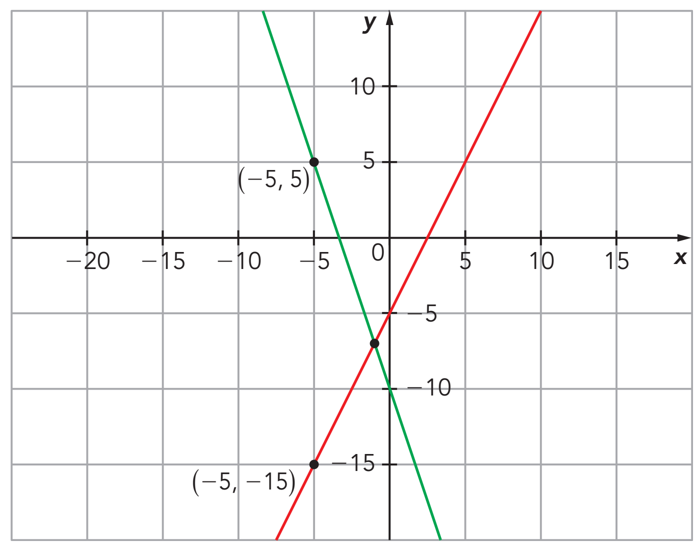
O valor de $x + y$ é:

(A) 70.
(B) 140.
(C) 210.
(D) 280.
(E) 350.

Alternativa **E.**

7 Duas retas estão representadas graficamente neste plano cartesiano. As coordenadas do ponto de intersecção das duas retas fornecem os valores de x e y que satisfazem, simultaneamente, às equações dessas retas.

Quais são as coordenadas do ponto de intersecção das duas retas?



Banco de imagens/Arquivo da editora

(A) $(-2, -6)$
(B) $(-2, -7)$
(C) $(-2, -8)$
(D) $(-1, -7)$
(E) $(-1, -8)$

Alternativa **D.**

8 Em um teste com 45 questões em um processo seletivo para uma vaga em uma empresa de TI, uma questão é considerada certa ou errada. Para cada questão correta o candidato ganha 5 pontos e para cada questão errada perde 2. Considere que Vanessa resolveu todas as questões, totalizando 134 pontos. O número de questões que ela acertou é:

(A) 28.
(B) 30.
(C) 32.
(D) 34.
(E) 36.

Alternativa **C.**

9 Marcos precisa pedir a reposição de capacitores usados para reparo de placas de *notebook*. Os últimos pedidos feitos por ele podem ser resumidos no sistema linear a seguir.

$$\begin{cases} 4x + 7y = 22 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

Sabendo que x e y são os valores de capacitores diferentes e que ele precisa encomendar 10 capacitores de cada tipo, o valor que a empresa em que Marcos trabalha pagará por essa compra é de:

(A) R$ 520,00.
(B) R$ 52,00.
(C) R$ 48,00.
(D) R$ 4,00.
(E) R$ 0,40.

Alternativa **B.**

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Sistemas lineares 3 × 3

Há situações que podem ser modeladas por sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas. Acompanhe os seguintes métodos de resolução.

Método da eliminação: eliminar as incógnitas, passo a passo, transformando o sistema original em um mais simples, efetuando as seguintes ações:

1. Multiplicação de uma equação por um número real diferente de zero.
2. Adição de equações lineares para eliminar uma das incógnitas.
3. Troca de posição das equações.

Se o sistema ainda não estiver suficientemente simples para fornecer as soluções, repete-se o processo. Exemplo:

$$1^{\circ}\text{ sistema: }\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x + 2y - 2z = 7 \end{cases} \Rightarrow 2^{\circ}\text{ sistema: }\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x + 2y = 17 \\ 3x + 2y - 2z = 7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^{\circ}\text{ sistema: }\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x + 2y = 17 \\ 5x + 4y = 31 \end{cases} \Rightarrow 4^{\circ}\text{ sistema: }\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 3x + 2y = 17 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ao realizar equação 1 + equação 2 e trocar a equação 2 do 1º sistema por esse resultado, obtém-se o 2º sistema. Ao realizar 2 · equação 1 + equação 3 e substituir a equação 3 do 2º sistema por esse resultado, obtém-se o 3º sistema. Por fim, ao realizar −2 · equação 2 + + equação 3 e substituir a equação 3 do 3º sistema pelo resultado, obtém-se o 4º sistema.

Escalonamento: padronizar a ordem de eliminação, da esquerda para a direita, eliminando-se a incógnita x da 2ª equação e as incógnitas x e y da 3ª equação. No sistema final, equivalente e escalonado, as soluções aparecem de "baixo para cima", ou seja, com a 3ª equação fornecendo o valor da 3ª incógnita, a 2ª fornecendo o da 2ª e a 1ª fornecendo o da 1ª.

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ y + 3z = 19 \\ y + 5z = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 12 \\ y + 3z = 19 \\ 2z = 10 \end{cases}$$

Por ambos os métodos, temos que $x = 3$, $y = 4$ e $z = 5$.

Sistema escalonado: quando o 1º elemento não nulo de cada uma das equações se situa à esquerda do 1º elemento não nulo da equação seguinte. Exemplos:

I. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ y + 4z = 2 \\ 2z = 2 \end{cases}$ **II.** $\begin{cases} 3x + y + 5z = 20 \\ z = 3 \end{cases}$ **III.** $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + 3z = 3 \\ 0z = 1 \end{cases}$

I. Só tem uma solução: (3, −2, 1). Esse sistema é chamado de SPD – Sistema Possível Determinado; existe apenas um conjunto solução.

II. Admite mais de uma solução, pois, substituindo a 2ª equação na 1ª, temos $3x + y = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 5 - 3x$. E a solução vai depender do valor escolhido para x. Se x for um número real qualquer, então temos infinitas soluções da forma $(x, 5 - 3x, 3)$. Esse sistema é chamado de SPI – Sistema Possível Indeterminado; existem inúmeros conjuntos solução.

III. Não tem solução, pois não existe número z, tal que $0z = 1$. Esse sistema é chamado de SI – Sistema Impossível; não é possível determinar um conjunto solução.

_ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 10 \\ y + 2z = 2 \\ 5z = 10 \end{cases}$$

A solução desse sistema é o terno ordenado:

(A) (4, 2, 0).
(B) (4, 1, 2).
(C) (5, −2, 2).
(D) (5, 2, −2).
(E) (5, 2, 2).

Alternativa **C**.

2 Resolvendo o sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = 14 \\ 5x + 7y + 11z = 23 \end{cases}$ pelo método que você achar melhor, assinale a alternativa com a solução do sistema.

(A) (6, 3, −2)
(B) (9, 6, −5)
(C) (1, 1, 1)
(D) (1, −1, 2)
(E) (2, 1, 1)

Alternativa **C**.

_DICA

Quando o sistema não for fornecido, é necessário construí-lo. Para isso, identifique cada incógnita do problema. Depois, com base na pergunta, busque os dados para construir cada equação linear separadamente. Em seguida, monte o sistema e o resolva buscando eliminar as incógnitas, usando o método do escalonamento, ou fique atento caso haja alguma eliminação que simplifique a resolução do sistema.

3 Uma família de 3 pessoas comemorou o aniversário de uma delas em um restaurante. Observe as seguintes informações sobre os valores dos pratos:

- O gasto com os pratos das 3 pessoas somados foi de R$ 105,00.
- A pessoa X comeu um prato que equivale, em custo, a 2 vezes o prato da pessoa Y mais o prato da pessoa Z.
- O prato da pessoa Y mais 2 vezes o prato da pessoa Z equivale a R$ 75,00.

Então, é possível afirmar que o prato da pessoa:

(A) X custou R$ 15,00.
(B) Y custou R$ 30,00.
(C) Z custou R$ 60,00.
(D) X custou R$ 60,00.
(E) Z custou R$ 15,00.

Alternativa **D**.

4 Bruna participa de um campeonato de jogos *on-line* em que são disputados 3 jogos diferentes durante 3 dias e segue esta regra de pontuação por dia:

$P = J_1 \cdot x + J_2 \cdot y + J_3 \cdot z$, em que:

- P: número total de pontos por dia;
- J_1, J_2 e J_3: número de partidas nos jogos dos tipos 1, 2 e 3, respectivamente;
- x, y e z: número de pontos pelos jogos 1, 2 e 3, respectivamente.

Bruna teve as seguintes sequências durante 3 dias de jogos:

- Dia 1: jogou 3 vezes no J_1 e 3 vezes no J_2, somando 30 pontos.
- Dia 2: jogou 2 vezes no J_2 e 4 vezes no J_3, somando 72 pontos.
- Dia 3: jogou 1 vez no J_1, 1 vez no J_2 e 5 vezes no J_3, somando 90 pontos.

Então, é possível dizer que:

(A) x vale 6 pontos, y vale 16 pontos e z vale 4 pontos.

(B) x vale 6 pontos, y vale 4 pontos e z vale 16 pontos.

(C) x vale 16 pontos, y vale 6 pontos e z vale 4 pontos.

(D) x vale 16 pontos, y vale 4 pontos e z vale 6 pontos.

(E) x vale 4 pontos, y vale 16 pontos e z vale 6 pontos.

Alternativa **B**.

5 Para dado número real a, considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -7 \\ -x + 3y - 2z = 5 \\ x + 2y + az = -2 \end{cases}$$

Esse sistema terá solução única quando o número a for diferente de:

(A) -1.

(B) -2.

(C) 1.

(D) 2.

(E) 0.

Alternativa **A**.

6 Uma fábrica tem 3 linhas de produção de peças. Sabe-se que na linha 1 são produzidas 32 peças, na linha 2 são produzidas 18 peças e, na linha 3, 24 peças. Essas peças são divididas nos tipos *A*, *B* e *C* e produzidas conforme este quadro.

Produção de peças

Linha \ Tipo	*A*	*B*	*C*
1	1	2	3
2	1	1	1
3	2	0	2

Dados elaborados para fins didáticos.

Consideradas essas informações, pode-se afirmar que a produção de peças do tipo *A* é igual a:

(A) 2.

(B) 4.

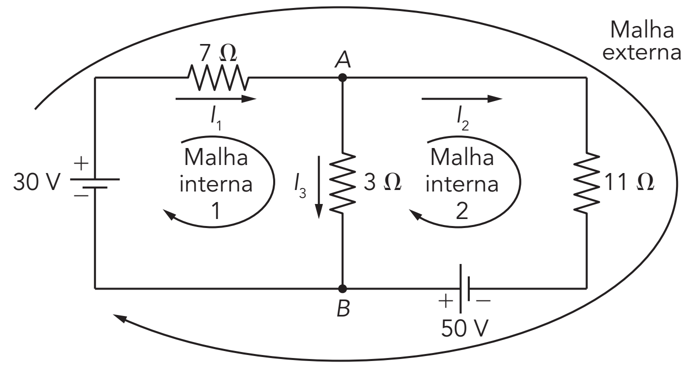
(C) 6.

(D) 8.

(E) 10.

Alternativa **D**.

7 Em projetos de circuitos elétricos, pode ser necessário resolver sistemas lineares. Esta imagem ilustra um circuito elétrico, com baterias de 30 V e 50 V, 3 resistores e 3 correntes elétricas cujas intensidades medem respectivamente I_1, I_2 e I_3 ampères.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Para calcular a medida da intensidade das 3 correntes, em ampère (A), um técnico aplicou algumas leis da eletricidade, modelando o problema por meio do seguinte sistema linear de equações:

$$S: \begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 7I_1 + 3I_3 = 30 \\ 11I_2 - 3I_3 = 50 \end{cases}$$

A melhor aproximação para o valor da medida da intensidade da corrente, em A, que passa pelo resistor de 11 Ω, é:

(A) 2,5.
(B) 3,5.
(C) 4,5.
(D) 5,5.
(E) 6,5.

Alternativa **C**.

8 Três amigos, João, Júlia e Roberto, fizeram os seguintes pedidos em uma lanchonete:

- João: 2 lanches, 1 maçã e 1 suco.
- Júlia: 1 lanche, 1 maçã e 3 sucos.
- Roberto: 1 lanche, 2 maçãs e 2 sucos.

Sabendo que todos consumiram produtos iguais e que a quantidade de calorias ingeridas por João, Júlia e Roberto foi, respectivamente, 510 calorias, 430 calorias e 420 calorias, então pode-se dizer que um suco tem:

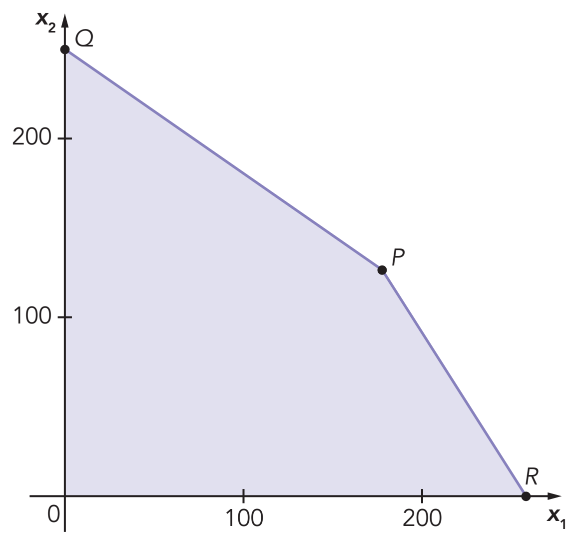
(A) 50 cal.
(B) 60 cal.
(C) 100 cal.
(D) 120 cal.
(E) 200 cal.

Alternativa **B**.

9 O gerente de uma fábrica de salgados tem empadas estocadas, sendo 130 kg com recheio de queijo e 170 kg com recheio de frango. Ele decidiu vender esse estoque em 2 pacotes sortidos diferentes. Um pacote conterá uma mistura *A* com metade do "peso" em empadas de queijo e metade de frango. Esse pacote será vendido por R$ 20,00 o kg. O outro pacote contém uma mistura *B* de um terço de empadas de queijo e dois terços de frango e será vendido por R$ 12,50 o kg. O gerente quer saber quantos quilogramas de cada mistura deve preparar a fim de maximizar sua receita.

O modelo matemático que resolve o problema, considerando x_1 a quantidade da mistura *A* e x_2 a quantidade da mistura *B*, é formado por uma região determinada por 2 equações lineares simultâneas, e a solução está representada por um dos 3 pontos (P, Q e R) deste gráfico.

Considerando que o ponto P é a intersecção das retas de equações $3x_1 + 4x_2 = 1020$ e $3x_1 + 2x_2 = 780$, o valor máximo da receita com essas vendas, nessas condições, é igual a:



Banco de imagens/Arquivo da editora

(A) R$ 3.200,00.

(B) R$ 5.100,00.

(C) R$ 5.200,00.

(D) R$ 5.350,00.

(E) R$ 5.480,00.

Alternativa **C**.

10 Observe o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ y + z + w = 5 \\ -z - 2w = 1 \\ -w = 3 \end{cases}$$

A solução $S = \{x, y, z, w\}$ para esse sistema é:

(A) $S = \{-5, 3, 5, -3\}$.

(B) $S = \{5, 3, -3, -5\}$.

(C) $S = \{3, -5, 5, -3\}$.

(D) $S = \{5, -3, -5, -3\}$.

(E) $S = \{3, -5, -3, 5\}$.

Alternativa **A**.

_AMPLIANDO

Você sabia que podemos ter sistemas lineares com mais de 3 equações e 3 incógnitas? Costuma-se apresentar apenas uma parte do estudo de sistemas lineares no Ensino Médio.

Um sistema de equações lineares de n equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Nele, os coeficientes a_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, assim como as constantes b_i, são números reais.

Dizemos que a sequência ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é solução do sistema linear acima quando ela é solução de cada uma das equações do sistema.

Você pode ainda ampliar seus conhecimentos sobre sistemas lineares assistindo ao vídeo “Comendo números”, do canal *M3 Matemática Multimídia*.

ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor.**

1 (Unicamp-SP) Certo país adquiriu 5.000.000 de doses das vacinas Alfa, Beta e Gama, pagando um preço de $ 40.000.000,00 pelo total. Cada dose das vacinas Alfa, Beta e Gama custou $ 5,00, $ 10,00 e $ 20,00, respectivamente. Sabendo que o número de doses adquiridas da vacina Beta é o triplo do número de doses adquiridas da vacina Gama, o número de doses adquiridas da vacina Alfa foi de:

(A) 1.500.000.

(B) 2.000.000.

(C) 2.500.000.

(D) 3.000.000.

Alternativa **D.**

2 (UEA-AM) Se x e y são as soluções do sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 74 \\ 3x - 2y = 20 \end{cases}$ então $x - y$ é igual a

(A) 2.

(B) 10.

(C) 4.

(D) 6.

(E) 8.

Alternativa **A.**

3 (Enem) Uma pessoa pretende viajar por uma companhia aérea que despacha gratuitamente uma mala com até 10 kg.

Em duas viagens que realizou, essa pessoa utilizou a mesma mala e conseguiu 10 kg com as seguintes combinações de itens:

Viagem	Camisetas	Calças	Sapatos
I	12	4	3
II	18	3	2

Reprodução/ ENEM, 2021.

Para ter certeza de que sua bagagem terá massa de 10 kg, ela decide levar essa mala com duas calças, um sapato e o máximo de camisetas, admitindo que itens do mesmo tipo têm a mesma massa.

Qual a quantidade máxima de camisetas que essa pessoa poderá levar?

(A) 22

(B) 24

(C) 26

(D) 33

(E) 39

Alternativa **B.**

4 (Unicamp-SP) Para qual valor de a o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} ax - y = |a| \\ (4 - 5a^2)x + ay = 1 \end{cases}$$

admite infinitas soluções?

(A) 1.

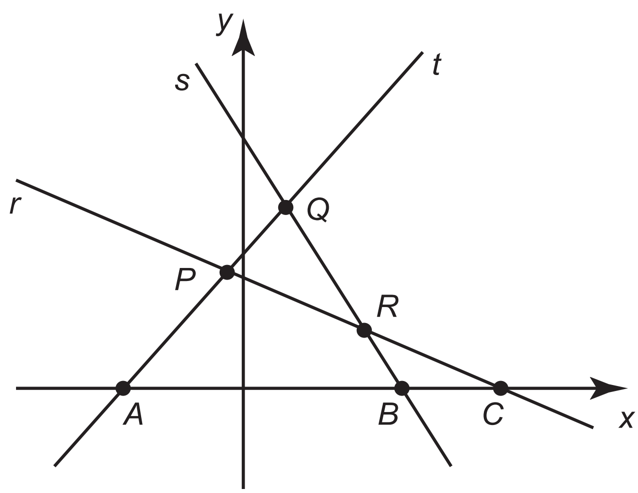
(B) 2.

(C) -1.

(D) -2.

Alternativa **C.**

5 (Enem) Na figura estão representadas três retas no plano cartesiano, sendo P, Q e R os pontos de intersecções entre as retas, e A, B e C os pontos de intersecções dessas retas com o eixo x.



Essa figura é a representação gráfica de um sistema linear de três equações e duas incógnitas que

(A) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos P, Q e R, pois eles indicam onde as retas se intersectam.

(B) possui três soluções reais e distintas, representadas pelos pontos A, B e C, pois eles indicam onde as retas intersectam o eixo das abscissas.

(C) possui infinitas soluções reais, pois as retas se intersectam em mais de um ponto.

(D) não possui solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às três retas.

(E) possui uma única solução real, pois as retas possuem pontos em que se intersectam.

Alternativa **D.**

6 (Enem) Uma pessoa encheu o cartão de memória de sua câmera duas vezes, somente com vídeos e fotos. Na primeira vez, conseguiu armazenar 10 minutos de vídeo e 190 fotos. Já na segunda, foi possível realizar 15 minutos de vídeo e tirar 150 fotos. Todos os vídeos possuem a mesma qualidade de imagem entre si, assim como todas as fotos. Agora, essa pessoa deseja armazenar nesse cartão de memória exclusivamente fotos, com a mesma qualidade das anteriores.

Disponível em: www.techlider.com.br. Acesso em: 31 jul. 2012.

O número máximo de fotos que ela poderá armazenar é

(A) 200.

(B) 209.

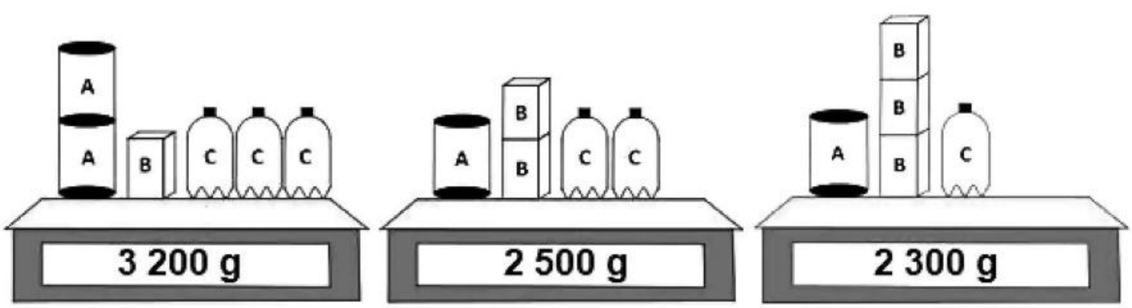
(C) 270.

(D) 340.

(E) 475.

Alternativa **C**.

7 (UPE) Um desafio lançado por um programa televisivo consiste em acertar a massa exata de um determinado conjunto de produtos. Sylvie, telespectadora assídua do programa, registrou a massa real dos três conjuntos da figura a seguir, todos formados pelos mesmos produtos A, B e C.



Reprodução/UPE, 2022.

O desafio final da temporada foi acertar a massa total de 3 unidades do produto A, 5 unidades do produto B e 2 unidades do produto C. Sylvie, após alguns cálculos, determinou **CORRETAMENTE** que o valor dessa massa, em quilogramas, é igual a

(A) 4,5

(B) 4,6

(C) 4,7

(D) 4,8

(E) 4,9

Alternativa **C**.

8 (Unicamp-SP) Considere o sistema

$$\begin{cases} x + py = q, \\ 2x - z = p, \\ x + y + z = 3. \end{cases}$$

a) Para $p = q = 1$, resolva o sistema.

b) Determine os valores de p, q para que o sistema tenha infinitas soluções.

a) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$

b) $p = \frac{1}{3}$; $q = \frac{10}{9}$

9 (UFJF-MG) Um comerciante comprou 195 calças nos tamanhos P, M e G. O custo total da compra foi de R$ 7.250,00 e as unidades por tamanho de calça (P, M e G) custaram, respectivamente R$ 30,00, R$ 35,00 e R$ 40,00. A quantidade de calças compradas do tamanho G excede em 10 unidades à soma da quantidade de calças compradas de tamanho M com o dobro da quantidade de calças compradas de tamanho P.

a) Descreva a situação acima através de um sistema de 3 equações e 3 variáveis.

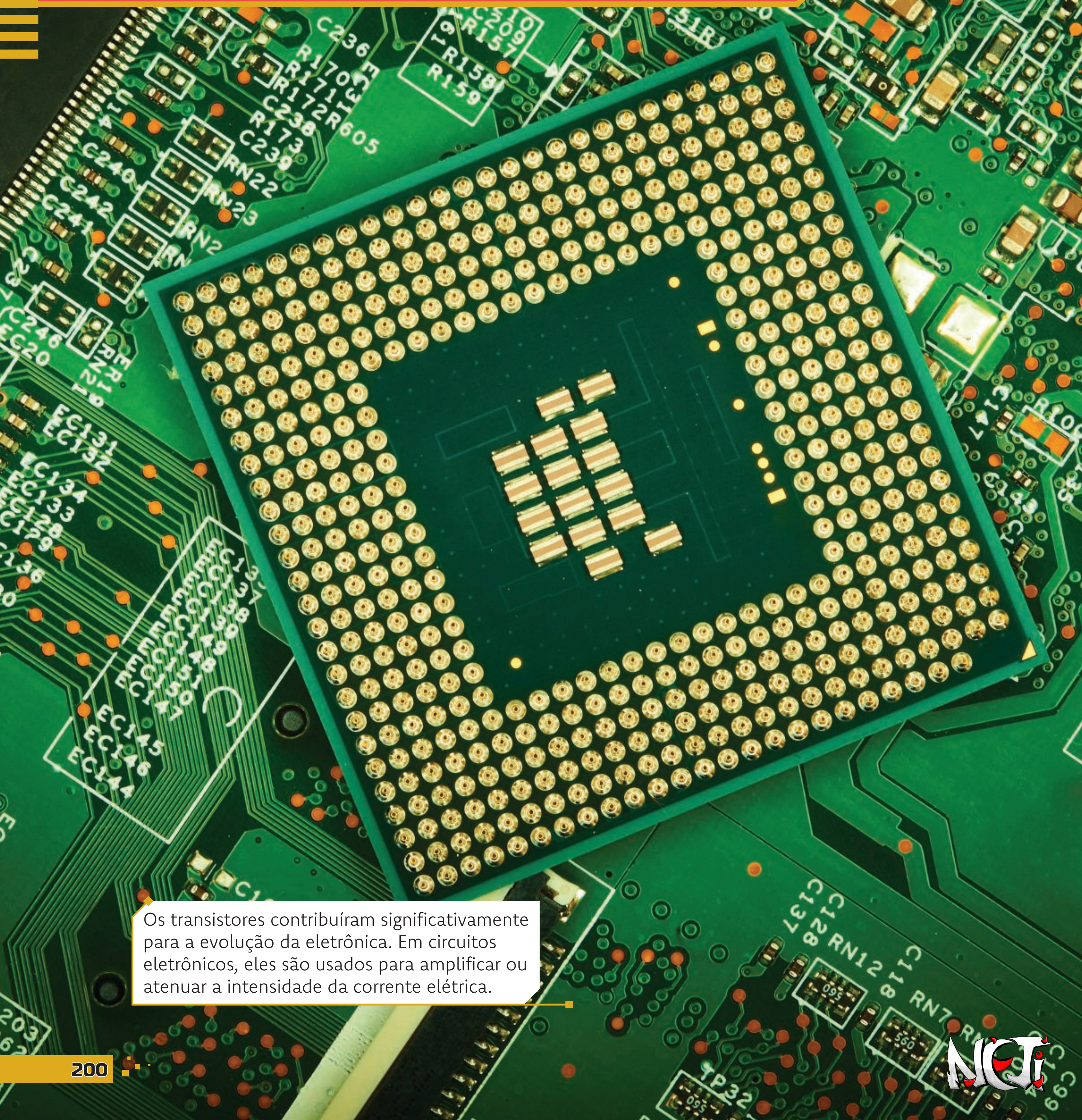
b) Quantas calças de cada tamanho o comerciante comprou?

a) $\begin{cases} x + y + z = 195 \\ 6x + 7y + 8z = 1\,450 \\ 2x + y - z = -10 \end{cases}$

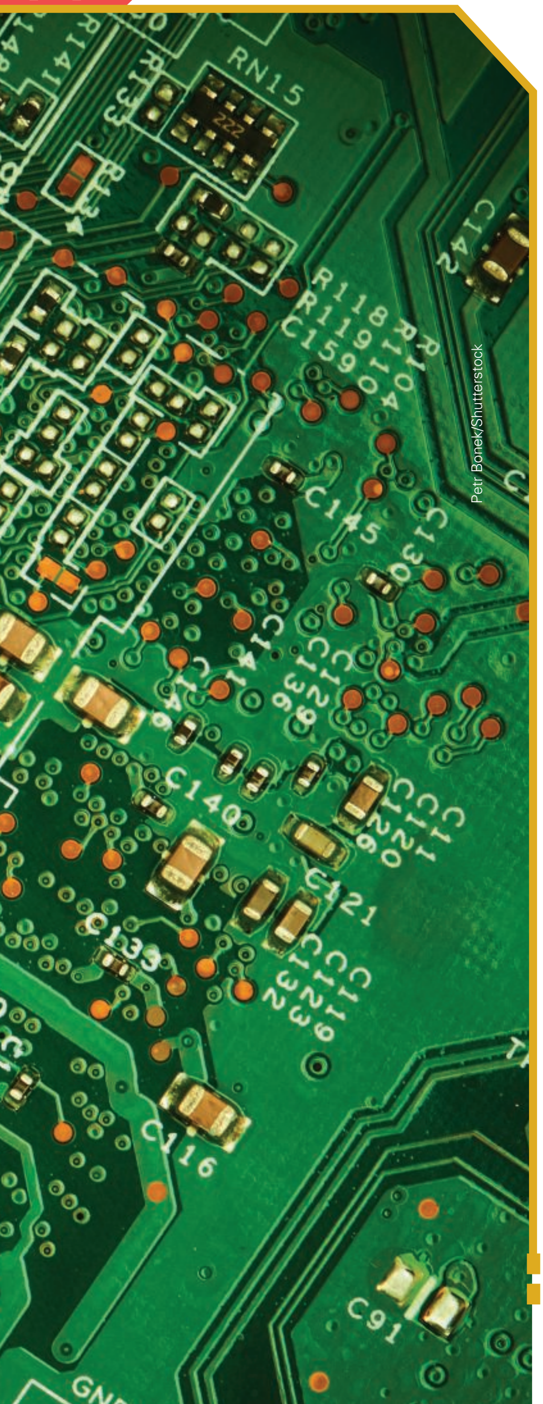
b) 35 calças P, 40 calças M e 120 calças G.

JORNADA 13

Progressão aritmética e progressão geométrica



Os transistores contribuíram significativamente para a evolução da eletrônica. Em circuitos eletrônicos, eles são usados para amplificar ou atenuar a intensidade da corrente elétrica.



Petr Bonek/Shutterstock

Vivemos em um mundo imerso em tecnologias. Os *softwares* presentes nos computadores e nos celulares permitem integrar nossa vida cotidiana a rotinas de atividade física, de movimentação financeira, entre outras. Isso ocorre em razão do desenvolvimento significativo de itens de *hardware*, o que possibilitou que as máquinas tenham processamento de informações cada vez mais veloz. Os avanços tecnológicos desses itens ocorreram associados ao incremento de pesquisas e teorias sobre o conhecimento computacional.

Uma teoria para o desenvolvimento computacional foi observada pelo engenheiro estadunidense Gordon Moore (1929-2023). A **lei de Moore**, como ficou conhecida, fez uma previsão de que a quantidade de transistores de um circuito integrado dobraria a cada intervalo de tempo. Entre 1965 e 1975, o tempo inicial observado considerava o intervalo de 1 ano; a seguir, o período foi constantemente ajustado e revisto para 18 meses e, depois, para 2 anos.

Essa previsão foi importante para que as empresas fabricantes de processadores definissem suas metas de produção e investissem para acompanhar o ritmo acelerado da inovação tecnológica. Atualmente, a lei de Moore continua válida, mas com alguns ajustes; no entanto, já há especulações de que seu fim está próximo em virtude de alguns fatores, como a otimização de sistemas operacionais, modificações das tecnologias utilizadas nos processadores e mudança do material utilizado.

Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

1. Qual é a relação entre a lei de Moore e o conceito de progressão aritmética? E com o conceito de progressão geométrica? Respostas pessoais.

2. Suponha que o número de transistores de uma empresa de computadores dobra a cada ano e você saiba a quantidade de transistores de um computador lançado no ano 2000. Como é possível fazer uma projeção do número de computadores lançados no ano 2010? Calculando $2^{10} = 1024$ vezes maior.

3. Considere que o número de transistores nos circuitos fabricados por determinada empresa dobre a cada dois anos e você saiba a quantidade de transistores de um computador lançado no ano 2015. Como é possível fazer uma projeção do número de computadores que essa empresa lançou em 2009?

3. Deve-se dividir a quantidade de transistores de 2015 por 2, 3 vezes.

_ETAPA 7

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Você já ouviu falar no desafio das 52 semanas? O desafio funciona como uma maneira divertida de juntar dinheiro de modo progressivo e planejado para realizar um projeto. Por exemplo: em determinada semana, a pessoa guarda uma quantia; na segunda semana, guarda o dobro da quantia da primeira semana; na terceira, o triplo da quantia da primeira semana; e assim por diante, até a 52ª semana.

Suponha que uma pessoa começou o desafio das 52 semanas com R$ 15,00.

a) Escreva os termos da sequência referentes às quantias guardadas por essa pessoa nas 5 primeiras semanas.

b) Qual lei de formação, que define uma função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, em que é possível calcular a quantia associada a uma semana n?

c) Qual foi a quantia guardada na 30ª semana?

d) Qual foi a quantia guardada na última semana?

e) Quanto essa pessoa juntou no total ao completar o desafio?

_resolvendo a questão

a) Os 5 primeiros termos da sequência são:

$$a_1 = 15$$
$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 15 = 30$$
$$a_3 = 3 \cdot a_1 = 3 \cdot 15 = 45$$
$$a_4 = 4 \cdot a_1 = 4 \cdot 15 = 60$$
$$a_5 = 5 \cdot a_1 = 5 \cdot 15 = 75$$

b) Observa-se que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre 15. Logo, para determinar a quantia associada a uma semana n, para $n \geqslant 1$ pode-se utilizar a seguinte lei de formação:

$$f(n) = 15n$$

c) Com a lei de formação obtida no item anterior, é possível determinar a quantia guardada na 30ª semana, quando $n = 30$.

$$f(30) = 15 \cdot 30 = 450$$

Algebricamente, também se pode calcular o total guardado na 30ª semana por meio da soma do total guardado na 29ª semana mais a quantia inicial:

$$f(29) = 15 \cdot 29 = 435$$
$$f(30) = 435 + 15 = 450$$

Logo, a quantia guardada na 30ª semana foi R$ 450,00.

d) Para descobrir a quantidade guardada na última semana, pode-se calcular, assim como no item anterior, pela lei de formação ou pela soma do total guardado na semana anterior (51ª semana mais a quantia inicial).

$$f(52) = 15 \cdot 52 = 780$$

ou

$$f(51) = 15 \cdot 51 = 765$$

$$f(52) = 765 + 15 = 780$$

Logo, a quantia guardada na 52ª semana foi R$ 780,00.

e) Para descobrir a quantia total após as 52 semanas, basta somar os 52 termos um a um. Entretanto, existe uma regularidade em sequências numéricas em que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma, que permite calcular a soma de maneira mais rápida, conforme mostrado a seguir.

$a_1 = 15$	$a_{52} = 780$	$a_1 + a_{52} = 795$
$a_2 = 30$	$a_{51} = 765$	$a_2 + a_{51} = 795$
$a_3 = 45$	$a_{50} = 750$	$a_3 + a_{50} = 795$
$a_4 = 60$	$a_{49} = 735$	$a_4 + a_{49} = 795$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{26} = 390$	$a_{27} = 405$	$a_{26} + a_{27} = 795$

Essa regularidade ocorre porque de uma linha para a seguinte há um aumento de 15 reais nas quantias da primeira coluna, e uma redução de 15 reais nas quantias da segunda coluna, o que mantém a soma constante dos termos equidistantes dos extremos. Quando uma sequência tem uma diferença entre quaisquer dois termos consecutivos constante, essa diferença recebe o nome de razão, e esse tipo de sequência é denominada **progressão aritmética** ou **PA**.

Como teremos 26 linhas, pois são 26 pares de termos, a soma dos 52 termos é igual a:

$$26 \cdot 795 = 20\,670$$

Logo, a quantia total que a pessoa juntou depois de completar o desafio é R$ 20.670,00.

_agora é com você

1 Nessa sequência infinita (1, 4, 7, 10, ...), qual é a lei de formação de uma função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que possibilita encontrar o enésimo termo dessa sequência?

(A) $f(n) = n - 3$

(B) $f(n) = n + 3$

(C) $f(n) = 3n - 1$

(D) $f(n) = 3n + 1$

(E) $f(n) = 3n - 2$

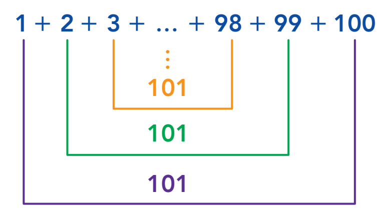
Alternativa **E**.

2 Qual é o 5º termo da sequência (2 000, 1 000, 500, ...)?

(A) 400
(B) 250
(C) 125
(D) 100
(E) 75

Alternativa **C.**

3 No final do século XVIII, Johann Carl Friedrich Gauss fez rapidamente a soma dos números naturais de 1 a 100. Ele observou que 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, ... e 50 + 51 = 101.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Com isso, obteve 50 parcelas com o mesmo resultado, 101, e encontrou o resultado da soma, 50 · 101 = 5 050.

Seguindo o mesmo raciocínio de Gauss, qual é a soma de todos os números naturais de 1 a 50?

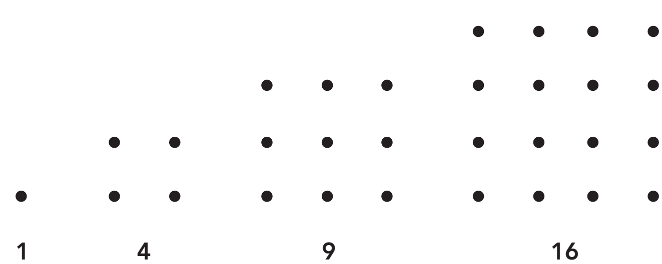
(A) 1275
(B) 1250
(C) 1225
(D) 1200
(E) 500

Alternativa **A.**

_AMPLIANDO

Com esse recurso, você pode visualizar o processo feito por Gauss de forma generalizada, explorando a soma dos termos de diversas progressões aritméticas variando o primeiro termo, o último termo e a razão.

4 Os números quadrados são números que podem ser representados por pontos organizados na forma de quadrados. Observe a figura a seguir, que apresenta os 4 primeiros números quadrados.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, os 4 primeiros números quadrados são $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$ e $a_4 = 16$.

I. A sequência dos números quadrados pode ser associada a uma função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. A lei que melhor define essa função é dada por:

(A) $f(n) = n + 1$.

(B) $f(n) = 2n$.

(C) $f(n) = 2n + 1$.

(D) $f(n) = n^2$.

(E) $f(n) = n^2 + 1$.

Alternativa **D.**

II. Qual é o 20º número quadrado?

(A) 20

(B) 40

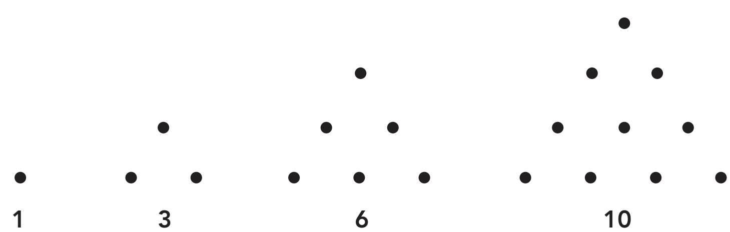
(C) 100

(D) 200

(E) 400

Alternativa **E.**

5 Os números triangulares são aqueles que podem ser representados por pontos organizados na forma de triângulos equiláteros. Observe a figura a seguir, que apresenta os 4 primeiros números triangulares.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Assim, os 4 primeiros números triangulares são $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$ e $a_4 = 10$.

I. A sequência dos números triangulares pode ser associada a uma função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$. A lei que melhor define essa função é dada por:

(A) $f(n) = \frac{n}{2}$.

(B) $f(n) = \frac{n+1}{2}$.

(C) $f(n) = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

(D) $f(n) = \frac{n^2}{2}$.

(E) $f(n) = \frac{n^2+1}{2}$.

Alternativa **C.**

II. Qual é o 30º número triangular?

(A) 465

(B) 450

(C) 435

(D) 420

(E) 405

Alternativa **A.**

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Progressão Aritmética (PA)

Uma progressão aritmética (PA) é uma sequência numérica na qual a diferença (ou resto) entre cada termo a partir do segundo, e seu antecessor é um valor constante denominado razão.

A **razão** é usualmente indicada pela letra *r*, pois é resultado da diferença ou resto de dois números.

De modo geral, em uma PA temos:

$$r = a_n - a_{n-1}, \text{ para } n \in \mathbb{N}, n > 1$$

Para descobrir o **termo geral de uma PA**, pode-se utilizar a seguinte relação:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r, \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

É importante saber a fórmula do termo geral, mas é útil escrever um termo em função dos outros, pois isso pode facilitar alguns cálculos. Por exemplo, pode-se escrever que $a_{18} = a_7 + 11r$ ou que $a_5 = a_3 + 2r$. Observe que $18 = 7 + 11$ e que $5 = 3 + 2$. Também se pode relacionar um termo que vem antes. Nesse caso, subtraímos a razão até chegar à posição desejada. Veja que $a_8 = a_{10} - 2r$ e que $a_1 = a_3 - 2r$, pois $8 = 10 - 2$ e $1 = 3 - 2$.

Para descobrir a **soma dos termos de uma PA finita**, pode-se utilizar a seguinte relação:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, \text{ para } n \in \mathbb{Z}^*$$

Uma progressão aritmética é a restrição de uma **função afim** ao conjunto dos números naturais. Observe a seguir o gráfico dos pontos de uma PA de 5 termos, cujo termo geral é $a_n = 8 - 2n$, e o gráfico da função afim definida pela lei $f(x) = 8 - 2x$. Repare que a razão da PA, no caso -2, é a taxa de variação da função afim.

Banco de imagens/Arquivo da editora

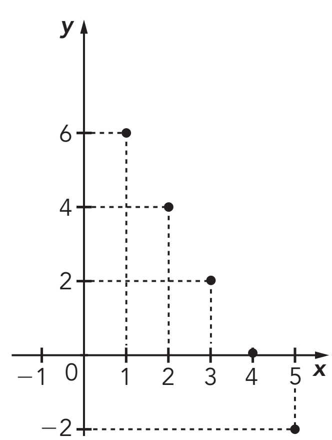


Gráfico dos pontos da PA de 5 termos, cujo termo geral é $a_n = 8 - 2n$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

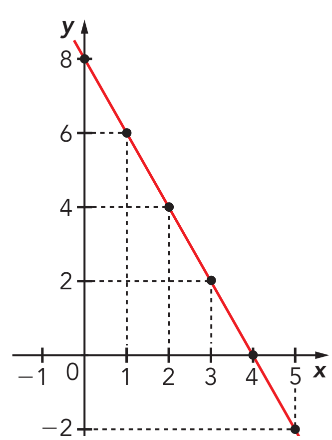


Gráfico da função afim cuja lei de formação é $f(x) = 8 - 2x$.

Progressão Geométrica (PG)

Uma progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica formada por números diferentes de 0, na qual o quociente entre cada termo, a partir do segundo, e seu antecessor é constante. Esse quociente é denominado razão e usualmente indicado pela letra *q*.

Para descobrir o **termo geral de uma PG**, pode-se utilizar a seguinte relação:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ para } n \geqslant 1$$

_ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Em uma PA, o terceiro termo é 5 e a razão é 4. Qual é o primeiro termo?

(A) -3
(B) -2
(C) 1
(D) 9
(E) 13

Alternativa **A**.

2 A sequência (7, __, 15, ...) é uma PA. Qual é a sua razão?

(A) 15
(B) 8
(C) 7
(D) 5
(E) 4

Alternativa **E**.

3 A soma dos 10 primeiros termos da PA $(-10, -6, -2, \ldots)$ é:

(A) 22.
(B) 32.
(C) 76.
(D) 80.
(E) 98.

Alternativa **D**.

4 Quantos termos tem a sequência $(-5, -1, 3, 7, \ldots, 95)$?

(A) 5
(B) 20
(C) 26
(D) 95
(E) 100

Alternativa **C**.

5 Observe esta progressão aritmética (7, 11, 15, 19, 23, ...).
Qual é a lei que descreve a soma de todos os números da sequência até a posição n?

(A) $5n + 2n^2$
(B) $5n + 4n^2$
(C) $10 + 2n^2$
(D) $7n^2$
(E) $1 + 3n + n^2$

Alternativa **A**.

6 Em uma PA, $a_{79} = 112$ e $a_{85} = 46$. Qual é a razão dessa sequência?

(A) 28
(B) 11
(C) 66
(D) -11
(E) -28

Alternativa **D**.

_DICA

Para expressar 3 números consecutivos, pode-se utilizar a representação $(x - r, x, x + r)$. Essa maneira de representar usando o termo do meio como referência favorece os cálculos, pois a razão se anula ao somar os termos. Observe: $(x - r) + x + (x + r) = 3x$.

7 Natália é a irmã do meio de três irmãs. Sabendo que a diferença de idade entre ela e a irmã mais nova é a mesma que entre ela e a irmã mais velha e que a soma das idades das três é 60, qual é a idade de Natália?

(A) 17 anos.

(B) 19 anos.

(C) 20 anos.

(D) 23 anos.

(E) 27 anos.

Alternativa **C.**

8 A sequência (4, __, 36, ...) é uma PG. Qual é o segundo termo dessa sequência?

(A) 8

(B) 10

(C) 12

(D) 14

(E) 16

Alternativa **C.**

9 Uma pessoa que estava com gripe foi trabalhar e transmitiu o vírus para os colegas. No dia seguinte, 3 pessoas foram contagiadas; no terceiro dia, 9 pessoas; e, no quarto dia, 27 pessoas. Se o contágio seguir nessa progressão, quantas pessoas serão contagiadas pela gripe no sétimo dia?

(A) 697

(B) 729

(C) 863

(D) 927

(E) 1076

Alternativa **B.**

10 Raquel vende doces para complementar sua renda. Ela recebe o valor fixo de R$ 200,00 (por mês) mais R$ 2,00 de comissão por unidade vendida.

Qual lei de formação, que define uma função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, possibilita calcular a quantidade n de doces vendidos por Raquel?

(A) $f(n) = 198 + 2n$

(B) $f(n) = 200 + 2n$

(C) $f(n) = 202 + 2n$

(D) $f(n) = 199 + 2n$

(E) $f(n) = 201 + 2n$

Alternativa **B.**

11 Paulo fez um planejamento para ler um livro em 20 dias. O livro tem muitas páginas, então ele decidiu ler 5 páginas no primeiro dia e, a cada dia, 3 páginas a mais que no dia anterior.

Quantas páginas Paulo terá lido em 20 dias?

(A) 1240

(B) 770

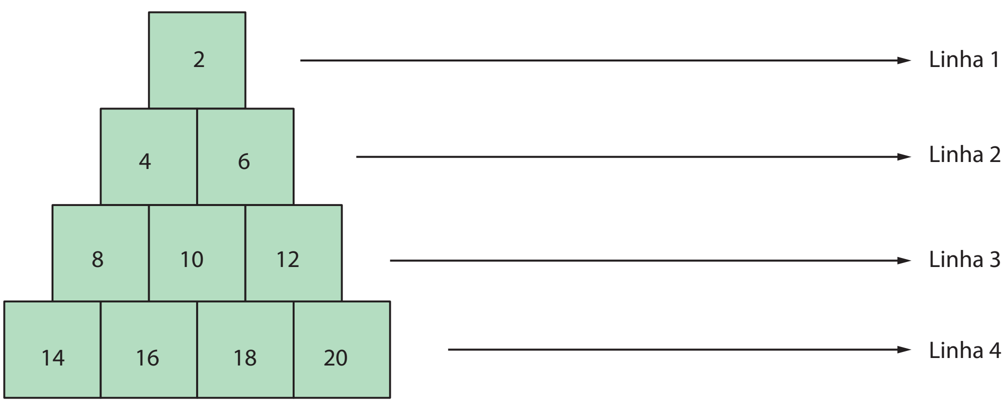
(C) 620

(D) 670

(E) 1340

Alternativa **D.**

12 Nesta figura, os números estão dispostos em 4 linhas, formando uma sequência numérica que obedece a um padrão.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabendo que as demais linhas obedecem ao mesmo padrão, a soma dos números que formam a linha 6 é:

(A) 192.

(B) 222.

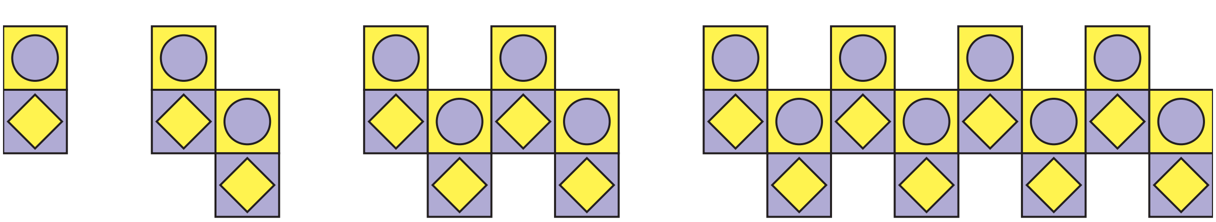
(C) 228.

(D) 252.

(E) 352.

Alternativa **B.**

13 Sandra é *designer* e está criando a estampa de uma faixa decorativa. Veja a seguir as quatro primeiras etapas dessa criação.



etapa 1 etapa 2 etapa 3 etapa 4

Banco de imagens/Arquivo da editora

Seguindo esse padrão, quantos círculos haverá na etapa 8?

(A) 70

(B) 32

(C) 64

(D) 128

(E) 512

Alternativa **D**.

14 Considere a progressão aritmética cujos primeiros termos são $a_1 = 4$, $a_2 = 14$ e $a_3 = 24$. A diferença $a_{10} - a_8$ é:

(A) 94.

(B) 74.

(C) 42.

(D) 20.

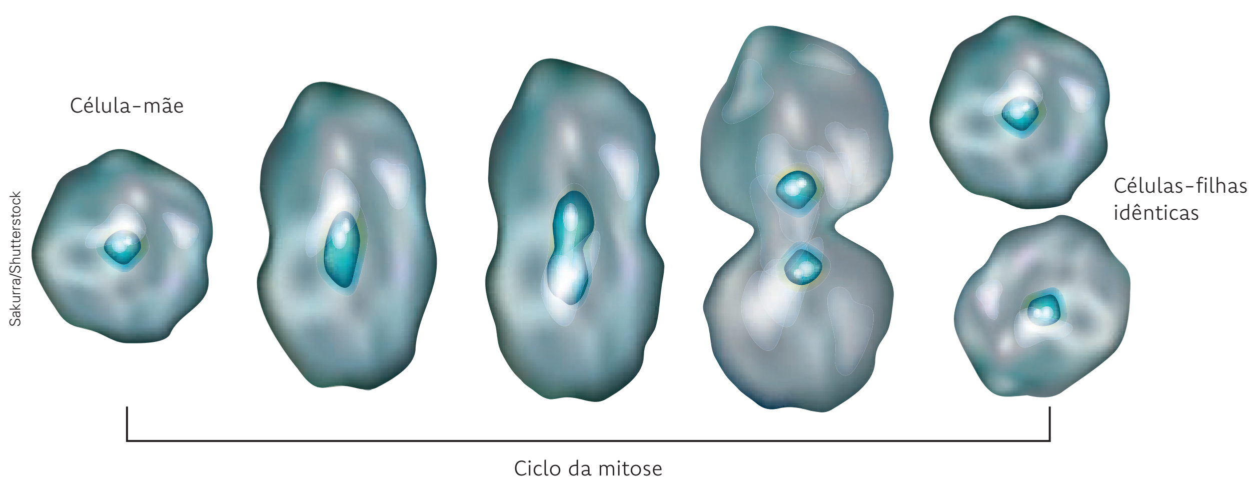
(E) 10.

Alternativa **D**.

15

> A **mitose** é um processo de divisão celular que resulta na formação de duas células-filhas com as mesmas características genéticas e o mesmo número de cromossomos. Esse processo, considerado uma divisão equitativa, promove o desenvolvimento do organismo, manutenção da homeostase, renovação dos tecidos e reprodução assexuada.
>
> BIOLOGIANET. Disponível em: https://www.biologianet.com/biologia-celular/mitose.htm. Acesso em: 9 set. 2023.

O ciclo se inicia a partir de 1 célula-mãe que se transforma em 2 células-filhas idênticas.



Por meio da mitose, cada célula se divide em 2 células novas, que, por sua vez, vão originar 4 outras, e assim sucessivamente. Com isso, ao fim de 6 ciclos de mitose, qual será o total de células?

(A) 15

(B) 16

(C) 31

(D) 32

(E) 64

Alternativa **D**.

16 Considere a PA $(-7, -4, -1, \ldots, a_n)$ cuja soma dos termos é 14150.
Qual é a quantidade de termos dessa PA?

(A) 100

(B) 16

(C) 31

(D) 32

(E) 63

Alternativa **A.**

17 Um agricultor plantou árvores enfileiradas em um terreno triangular, havendo 1 árvore na primeira fileira, 3 árvores na segunda fileira, 5 árvores na terceira fileira, e assim sucessivamente, até a vigésima fileira.
Quantas árvores o agricultor plantou?

(A) 256

(B) 289

(C) 324

(D) 361

(E) 400

Alternativa **E.**

_DICA

Em uma PA finita com número de termos ímpar, o termo central é a média aritmética entre 2 termos equidistantes a ele.

Por exemplo, em uma PA com 9 termos:

$$a_5 = \frac{a_1 + a_9}{2} = \frac{a_2 + a_8}{2} = \frac{a_3 + a_7}{2} = \frac{a_4 + a_6}{2}$$

18 Na sequência de 5 termos (54, __, __, 27, 18), para quaisquer 3 elementos consecutivos, o elemento central é sempre a média aritmética dos outros 2.

A soma dos elementos dessa sequência é:

(A) 200.

(B) 180.

(C) 162.

(D) 135.

(E) 91.

Alternativa **B.**

19 Considere uma PA, com 11 termos em que $a_1 = 9$ e $a_{11} = 109$, qual é o valor de a_6?

(A) 50

(B) 49

(C) 59

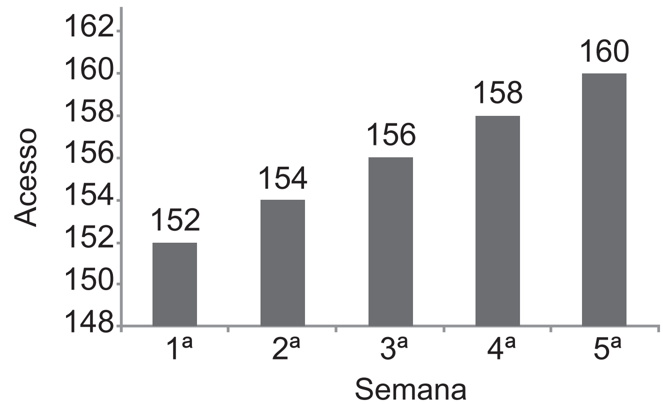
(D) 80

(E) 79

Alternativa **C.**

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) Uma confeiteira pretende divulgar em um sítio da internet os doces que produz, mas só fará isso se acreditar que o número de acessos por semana compensará seu gasto com a divulgação. Por isso, pediu que lhe enviassem dados sobre o número de acessos ao sítio nas últimas 5 semanas e recebeu o gráfico a seguir.



A confeiteira acredita que, se o número de acessos mantiver o mesmo crescimento semanal para as próximas 5 semanas, ao final desse período valerá a pena investir na divulgação.

O número de acessos que a confeiteira acredita ser suficiente para que a divulgação no sítio valha a pena é

(A) 162.
(B) 170.
(C) 172.
(D) 312.
(E) 320.

Alternativa **B**.

2 (Enem) Alguns modelos de rádios automotivos estão protegidos por um código de segurança. Para ativar o sistema de áudio, deve-se digitar o código secreto composto por quatro algarismos. No primeiro caso de erro na digitação, a pessoa deve esperar 60 segundos para digitar o código novamente. O tempo de espera duplica, em relação ao tempo de espera anterior, a cada digitação errada. Uma pessoa conseguiu ativar o rádio somente na quarta tentativa, sendo de 30 segundos o tempo gasto para digitação do código secreto a cada tentativa. Nos casos da digitação incorreta, ela iniciou a nova tentativa imediatamente após a liberação do sistema de espera.

O tempo total, em segundo, gasto por essa pessoa para ativar o rádio foi igual a

(A) 300.
(B) 420.
(C) 540.
(D) 660.
(E) 1020.

Alternativa **C**.

3 (UERJ) Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia – corrida de 6 km.
- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

(A) 414

(B) 438

(C) 456

(D) 484

Alternativa **C**.

4 (Enem) A figura ilustra uma sequência de formas geométricas formadas por palitos, segundo uma certa regra.

Reprodução/ENEM, 2017.

Continuando a sequência, segundo essa mesma regra, quantos palitos serão necessários para construir o décimo termo da sequência?

(A) 30

(B) 39

(C) 40

(D) 43

(E) 57

Alternativa **B**.

5 (Enem) Em uma corrida de regularidade, cada corredor recebe um mapa com o trajeto a ser seguido e uma tabela indicando intervalos de tempo e distâncias entre postos de averiguação. O objetivo dos competidores é passar por cada um dos postos de averiguação o mais próximo possível do tempo estabelecido na tabela. Suponha que o tempo previsto para percorrer a distância entre dois postos de verificação consecutivos seja sempre de 5 min 15 s, e que um corredor obteve os seguintes tempos nos quatro primeiros postos.

	1º posto	**2º posto**	**3º posto**
Tempo previsto	5 min 15 s	10 min 30 s	15 min 45 s
Tempo obtido pelo corredor	5 min 27 s	10 min 54 s	16 min 21 s

	4º posto	**...**	**Último posto (final do trajeto)**
Tempo previsto	21 min 00 s	...	1 h 55 min 30 s
Tempo obtido pelo corredor	21 min 48 s	...	

Reprodução/ENEM, 2019.

Caso esse corredor consiga manter o mesmo ritmo, seu tempo total de corrida será

(A) 1 h 55 min 42 s.

(B) 1 h 56 min 30 s.

(C) 1 h 59 min 54 s.

(D) 2 h 05 min 09 s.

(E) 2 h 05 min 21 s.

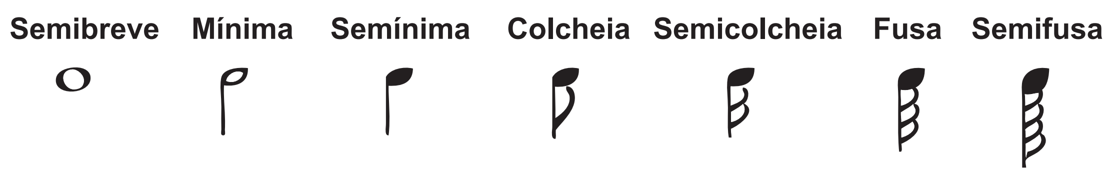
Alternativa **C**.

6 (Enem) Na música, usam-se sinais gráficos chamados figuras de duração para indicar por quanto tempo se deve emitir determinado som.

As figuras de duração usadas atualmente são: semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa.

Essas figuras não possuem um valor (tempo) fixo. Elas são proporcionais entre si. A duração de uma semibreve é equivalente a de duas mínimas, a duração de uma mínima é equivalente a de duas semínimas, a duração de uma semínima equivale a de duas colcheias e assim por diante, seguindo a ordem dada.

Considere que a semibreve tem a duração de tempo de uma unidade.



Reprodução/ENEM, 2018.

Disponível em: www.portaledumusicalcp2.mus.br. Acesso em: 11 nov. 2013 (adaptado).

A sequência que indica a duração de tempo de uma mínima, de uma semínima, de uma colcheia, de uma semicolcheia, de uma fusa e de uma semifusa é

(A) 2, 4, 8, 16, 32, 64

(B) 1, 2, 4, 8, 16, 32

(C) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

(D) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}$

(E) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

Alternativa **E.**

7 (Fuvest-SP) Uma empresa construiu um poço para armazenar água de reúso. O custo para construir o primeiro metro foi de R$ 1000,00, e cada novo metro custou R$ 200,00 a mais do que o imediatamente anterior. Se o custo total da construção foi de R$ 48600,00, a profundidade do poço é:

(A) 15 m

(B) 18 m

(C) 21 m

(D) 24 m

(E) 27 m

Alternativa **B.**

8 (Enem) Um ciclista participará de uma competição e treinará alguns dias da seguinte maneira: no primeiro dia, pedalará 60 km; no segundo dia, a mesma distância do primeiro mais *r* km; no terceiro dia, a mesma distância do segundo mais *r* km; e, assim, sucessivamente, sempre pedalando a mesma distância do dia anterior mais *r* km. No último dia, ele deverá percorrer 180 km, completando o treinamento com um total de 1560 km.

A distância *r* que o ciclista deverá pedalar a mais a cada dia, em km, é

(A) 3.

(B) 7.

(C) 10.

(D) 13.

(E) 20.

Alternativa **C.**

9 (Enem) Jogar baralho é uma atividade que estimula o raciocínio. Um jogo tradicional é a Paciência, que utiliza 52 cartas. Inicialmente são formadas sete colunas com as cartas. A primeira coluna tem uma carta, a segunda tem duas cartas, a terceira tem três cartas, a quarta tem quatro cartas, e assim sucessivamente até a sétima coluna, a qual tem sete cartas, e o que sobra forma o monte, que são as cartas não utilizadas nas colunas. A quantidade de cartas que forma o monte é

(A) 21.

(B) 24.

(C) 26.

(D) 28.

(E) 31.

Alternativa **B**.

10 (Fuvest-SP) A figura apresenta uma parte de uma tabela na qual cada linha e cada coluna seguem de acordo com o padrão representado.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	...
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	...
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	...
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Reprodução/Fuvest-SP, 2020.

Com relação a essa tabela de números:

a) Escolha um quadrado 3×3 e, exibindo a soma de seus 9 números, verifique que o resultado é múltiplo de 9.

b) Um quadrado com 16 números tem por soma de todos esses números o valor de 1.056 (mil e cinquenta e seis). Descubra o menor número desse quadrado.

c) A soma de todos os números de um quadrado $n \times n$ com menor número igual a 4 é de 108.000 (cento e oito mil). Qual é o valor de n?

a) Exemplo de resposta:

1	2	3
8	9	10
15	16	17

Em que: $1 + 2 + 3 + 8 + 9 + 10 + 15 + 16 + 17 = 81 = 9 \cdot 9$

b) O menor número é 54.

c) $n = 30$

_JORNADA 14

Análise combinatória

Joa_Souza/Getty Images

As placas de veículos automotores são uma parte essencial da identificação e da regulamentação do tráfego rodoviário em muitos países do mundo. Essas placas são formadas por um agrupamento sequencial de letras e números que serve para identificar cada veículo. No entanto, o sistema de agrupamento sequencial pode variar em cada país.

No Brasil, por exemplo, esse sistema foi alterado em 2019 para uma sequência alfanumérica mais moderna e expansível, seguindo um padrão unificado acordado entre países do Mercosul. Antes desse ano, o país utilizava um sistema que consistia em 3 letras seguidas de 4 algarismos, como "ABC-1234". Com a mudança, o sistema passou a consistir em 3 letras seguidas por 1 algarismo e, na sequência, mais 1 letra e 2 algarismos, como "ABC1D23", sendo que em ambos os casos as letras e algarismos podem se repetir.

O cálculo do número de possibilidades de registro de placas pode ser feito utilizando um conceito simples da Matemática: o princípio multiplicativo. Como há 26 letras no alfabeto (A a Z) e 10 algarismos (0 a 9), para conhecer a quantidade de possibilidades do sistema atual, basta calcular $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$, o que resulta em 456 976 000 sequências diferentes. Essa quantidade é maior do que a quantidade de placas do sistema anterior.

Atualmente, a maior parte dos países da América do Sul adota o sistema de placas do Mercosul.

1 e 2. Respostas pessoais.
3. 175 760 000 placas.
4. 12 países.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

1. Para você, que motivos tornaram necessária a mudança no modelo de placas de identificação veicular (PIV) no Brasil?

2. Pesquise na internet o modelo de PIV em cada um dos países do Mercosul e compartilhe as informações com os colegas.

3. Quantas placas no máximo podiam ser registradas no Brasil considerando o sistema anterior ao do Mercosul?

4. Quantos países da América do Sul utilizam o modelo de PIV do Mercosul?

_ETAPA 1

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Uma escola quer implementar um projeto de sustentabilidade, e uma das ações desse projeto será a realização da coleta seletiva de lixo. Inicialmente, serão instaladas no pátio da escola 4 lixeiras identificadas: a lixeira vermelha para plástico, a verde para vidro, a amarela para metal e a azul para papel/papelão. Veja, a seguir, uma possível configuração delas.


rawpixel.com/Freepik

a) De quantas maneiras diferentes é possível ordenar as 4 lixeiras, uma ao lado da outra, no pátio da escola?

b) Em quantas dessas configurações a primeira lixeira, da esquerda para a direita, será a destinada ao descarte de plástico?

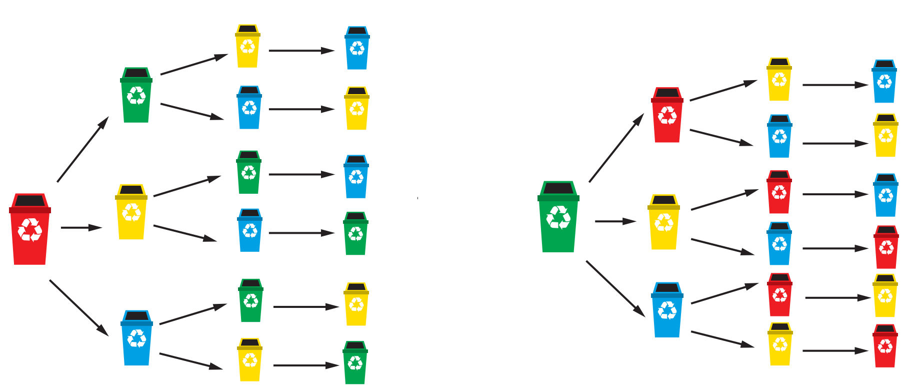
c) Em quantas dessas configurações a primeira lixeira, da esquerda para a direita, será a destinada ao descarte de vidro e a última, ao de metal?

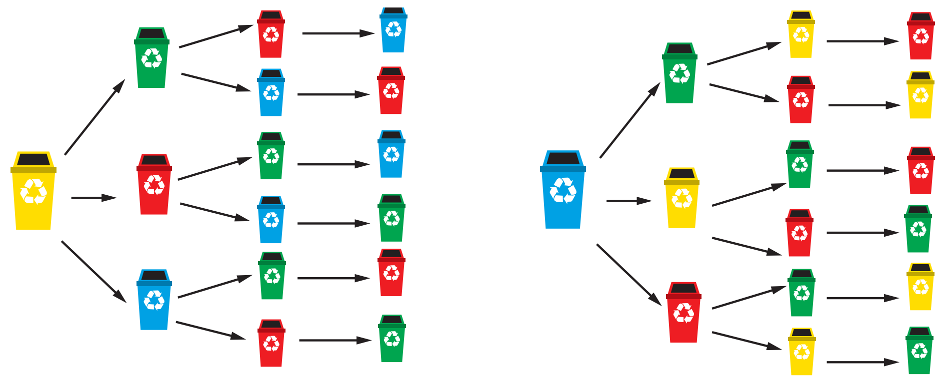
d) A escola resolveu ampliar o programa colocando em outro ponto do pátio um conjunto igual de 4 lixeiras identificadas. Quantas possibilidades existem de ordenar as 8 lixeiras, sendo 2 grupos de 4, em pontos diferentes do pátio?

_resolvendo a questão

a) É necessário tomar 4 decisões, fixando uma lixeira para ocupar a 1ª posição, depois escolher a que vai ocupar a 2ª posição, depois a 3ª e, por fim, a 4ª posição.

Primeiro, observe a seguir a **árvore de possibilidades**. Nela, apontam-se todas as possibilidades de ocorrer determinado evento.


Banco de imagens/Arquivo da editora



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pela imagem, percebe-se que há 24 possibilidades de dispor as lixeiras.

Essa maneira de resolver o problema, embora seja interessante por permitir visualizar todas as possibilidades, é menos eficiente. Por exemplo, caso fossem 5 lixeiras, seriam 120 possibilidades, o que tornaria esse método de resolução menos vantajoso.

Outra maneira de resolver essa atividade é análoga a essa primeira. Porém, em vez de exibir as possibilidades para cada decisão, coloca-se apenas a quantidade delas. Para obter o total de possibilidades, basta multiplicar essas quantidades. Esse é o chamado **princípio multiplicativo**.

$$\underbrace{4}_{\text{4 possibilidades}} \cdot \underbrace{3}_{\text{3 possibilidades}} \cdot \underbrace{2}_{\text{2 possibilidades}} \cdot \underbrace{1}_{\text{1 possibilidade}} = 24$$

Portanto, conclui-se que há 24 possibilidades de dispor as lixeiras no pátio.

b) Primeiro, analise as 4 posições e, em seguida, aplique o princípio multiplicativo.

$$\underbrace{1}_{\text{plástico}} \cdot \underbrace{3}_{\text{3 possibilidades}} \cdot \underbrace{2}_{\text{2 possibilidades}} \cdot \underbrace{1}_{\text{1 possibilidade}} = 6$$

Portanto, há 6 possibilidades de organizar as lixeiras, a primeira é destinada obrigatoriamente ao descarte de plástico.

c) De modo análogo ao item **b**, analise as 4 posições e, em seguida, aplique o princípio multiplicativo.

$$\underbrace{1}_{\text{vidro}} \cdot \underbrace{2}_{\text{2 possibilidades}} \cdot \underbrace{1}_{\text{1 possibilidade}} \cdot \underbrace{1}_{\text{metal}} = 2$$

Portanto, há 2 possibilidades de organizar as lixeiras quando obrigatoriamente a primeira é destinada ao descarte de vidro e a última, ao de metal.

d) Conforme o item **a**, o total de possibilidades de organizar as 4 lixeiras é 24.
Agora, é necessário ordenar outras 4 lixeiras em outro ponto do pátio.
Para cada uma das 24 ordenações de lixeiras no primeiro ponto, há 24 ordenações de lixeiras no segundo ponto: $24 \cdot 24 = 576$.
Então, há 576 possibilidades de ordenar os 2 grupos de lixeiras no pátio.

_agora é com você

1 Uma pessoa que mora no Rio de Janeiro (RJ) quer viajar até a cidade turística de Gramado (RS). Para isso, ela descobriu que a melhor opção era ir de avião do Rio de Janeiro até Porto Alegre (RS) e, depois, usar outro meio de transporte até Gramado. Pesquisando as opções, descobriu que há 3 empresas aéreas que fazem o percurso do Rio de Janeiro até Porto Alegre e que, de Porto Alegre até Gramado, ela poderia optar por alugar um veículo, ir de táxi, usar um serviço de transporte de aplicativo ou ir de ônibus.
O total de maneiras diferentes que essa pessoa encontrou para ir da cidade do Rio de Janeiro até Gramado é:

(A) 5.
(B) 7.
(C) 10.
(D) 12.
(E) 14.

Alternativa **D.**

2 Carlos está treinando para uma competição de triatlo. Em uma prova de triatlo, há 3 etapas: ciclismo, natação e atletismo. Seu treinamento consiste em realizar uma sequência diferente de etapas a cada dia e, depois de terminar todas as sequências possíveis, ele fica um dia sem treinar.
Carlos treina, no máximo, sem descansar, um total de dias igual a:

(A) 3.
(B) 6.
(C) 9.
(D) 12.
(E) 15.

Alternativa **B.**

3 Uma lanchonete oferece a seus clientes mesas interativas com *tablet* para a escolha de seus pedidos. Há a possibilidade de montar um lanche optando por um entre três tipos de carne, um entre quatro tipos de queijo e um entre três tipos de molho.
O total de maneiras distintas de montar esse lanche é:

(A) 10.
(B) 13.
(C) 36.
(D) 72.
(E) 80.

Alternativa **C.**

4 Um clube estudantil resolveu criar uma bandeira com 3 listras horizontais para representá-los, mas as listras não podem ter cores iguais consecutivas. Sabe-se que o clube só pode usar as seguintes cores nas listras da bandeira: azul, branca, preta, verde ou vermelha.
O total de maneiras distintas de se confeccionar essa bandeira, nas condições dadas, é:

(A) 12.
(B) 15.
(C) 27.
(D) 60.
(E) 80.

Alternativa **E.**

5 Uma vila com 5 casas, uma ao lado da outra em linha reta, vai passar por uma reforma externa. Cada casa será pintada de uma única cor, entre amarela, azul e verde. Sabe-se ainda que 2 casas vizinhas não poderão ter a mesma cor.

O número máximo de maneiras diferentes de pintar essas casas é:

(A) 8.
(B) 11.
(C) 15.
(D) 48.
(E) 243.

Alternativa **D.**

6 Bruna quer ir a Portugal. Ao pesquisar as opções de voo, encontrou 2 empresas aéreas que oferecem essa viagem partindo da cidade onde ela mora. Para o dia em que Bruna escolheu viajar, uma empresa oferece 3 opções de voo, todos com escala no Panamá. A outra empresa oferece 4 opções de voo, todos com escala em Angola.

De quantas maneiras diferentes Bruna pode viajar para Portugal na data escolhida?


RomanSlavik.com/Shutterstock

Vista aérea da cidade de Porto, em Portugal.

(A) 7
(B) 10
(C) 12
(D) 14
(E) 15

Alternativa **A.**

7 Entre 1969 e a década de 1990, no Brasil, o sistema de emplacamento de veículos era formado por 2 letras e 4 algarismos. Com base nessa informação, responda às questões a seguir.

I. Quantas placas podem ser formadas nesse sistema utilizando-se apenas as letras K, J e M e os algarismos 0, 2, 4, 5 e 8?

(A) 26
(B) 625
(C) 1250
(D) 3750
(E) 5625

Alternativa **E.**

II. Quantas placas podem ser formadas nesse sistema utilizando-se apenas as letras K, J e M e os algarismos 0, 2, 4, 5 e 8, mas começando, obrigatoriamente, pela letra K?

(A) 625
(B) 1250
(C) 1875
(D) 2500
(E) 5625

Alternativa **C.**

III. Quantas placas podem ser formadas nesse sistema utilizando-se apenas as letras K, J e M e os algarismos 0, 2, 4, 5 e 8, mas, obrigatoriamente, começando pela letra K e terminando em número par?

(A) 500
(B) 625
(C) 1250
(D) 1500
(E) 1875

Alternativa **D.**

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Fatorial

O fatorial de um número inteiro positivo é o produto desse número por todos os seus antecessores naturais maiores do que zero.

Representação: o número seguido de um ponto de exclamação: ***n*!**

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1, \text{ com } n > 0$$

Exemplo: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Por convenção, tem-se: $0! = 1$.

Arranjo simples

Dados os números inteiros positivos n e p, com $1 \leqslant p \leqslant n$, um arranjo simples de n elementos distintos, tomados p a p, é **qualquer ordenação** de p elementos diferentes, escolhidos entre esses n elementos. A quantidade de agrupamentos com essas características é dada por:

$$A_{n,\,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Permutação simples

No caso particular de arranjo simples em que $n = p$, a quantidade de maneiras de organizar n **elementos distintos** em uma fila é dada por:

$$P_n = n!$$

Como no arranjo simples, **a ordem dos elementos importa**, de modo que as diferentes ordenações em uma sequência definem as diferentes possibilidades.

Permutação com repetição

Quando ocorrem **elementos repetidos** em uma permutação, a contagem de permutação simples leva a um número maior, que pode ser corrigido dividindo-a pelo produto dos fatoriais da repetição.

$$P_n^{a,\,b,\,c,\,\ldots} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \ldots},$$

em que a, b, c, ... são os números que representam as quantidades de elementos que se repetem.

Combinação simples

O agrupamento de p elementos de determinado conjunto de n elementos que é escolhido considerando apenas a natureza deles, **sem importar a ordem** em que são escolhidos ou apresentados, é uma combinação simples. A quantidade de agrupamentos com essas características é dada por:

$$C_{n,\,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 No parque de diversão Alegria será instalado um letreiro com o nome do parque. As letras serão coloridas, de modo que letras diferentes terão cores diferentes e letras iguais terão a mesma cor. As cores disponíveis para criar o letreiro são: azul, amarela, laranja, preta, verde e vermelha.

O total de maneiras distintas de colorir esse letreiro é:

(A) 120.

(B) 240.

(C) 360.

(D) 720.

(E) 1 440.

Alternativa **D**.

2 Um torneio de xadrez será realizado no sistema todos contra todos (pontos corridos), ou seja, cada um dos competidores enfrenta todos os demais. Ao final, quem obtiver mais pontos será o campeão. Considere que, em um torneio desse tipo, haja 10 participantes e que cada rodada tenha sempre 5 partidas, contemplando os 10 participantes.

O total de partidas e o total de rodadas desse torneio são, respectivamente:

(A) 10 e 5.

(B) 50 e 5.

(C) 50 e 10.

(D) 45 e 9.

(E) 45 e 10.

Alternativa **D**.

3 Gaspar é motorista de aplicativo de transporte. O veículo dele tem 5 lugares, porém Gaspar só aceita viajar com passageiros sentados no banco de trás. As corridas podem atender a até 3 passageiros, ocupando os 3 lugares disponíveis, os quais são sempre considerados distintos entre si.

Em uma corrida com 2 passageiros, qual é o total de possibilidades de ocupação do veículo de Gaspar?

(A) 6

(B) 9

(C) 15

(D) 24

(E) 33

Alternativa **A**.

4 Adriana foi a um restaurante que oferece em seu cardápio 4 opções de entrada, 6 opções de prato principal e 3 opções de sobremesa. Na hora do almoço, há a oferta em que 1 entrada, 1 prato principal e 1 sobremesa, juntos, custam R$ 50,00.

Sabendo que Adriana vai optar pela oferta da hora do almoço, o total de possibilidades de escolha que ela tem disponível é:

(A) 24.

(B) 32.

(C) 42.

(D) 60.

(E) 72.

Alternativa **E.**

5 Na cidade em que Ivan mora, abriu uma cafeteria que, além dos tradicionais cafés, oferece bolos, tortas e empadas aos clientes. Certo dia, havia disponíveis 4 recheios diferentes de empada: frango, queijo, camarão e bacalhau.

Sabendo que Ivan vai comprar 3 empadas, qual é o total de possibilidades diferentes que ele tem disponível para fazer o pedido, podendo repetir o recheio?

(A) 72

(B) 40

(C) 20

(D) 12

(E) 7

Alternativa **C.**

6 Gisele vai contratar um bufê para o aniversário do filho dela. Serão servidos 6 tipos de salgado e 4 tipos de doce. No entanto, a empresa contratada tem no cardápio 10 tipos de salgado e 6 tipos de doce.

O total de opções diferentes de salgados e doces que Gisele pode escolher nesse bufê é:

(A) $A_{16,\,10}$.

(B) $C_{16,\,10}$.

(C) P_{16}^{10}.

(D) $C_{10,\,6} + C_{6,\,4}$.

(E) $C_{10,\,6} \cdot C_{6,\,4}$.

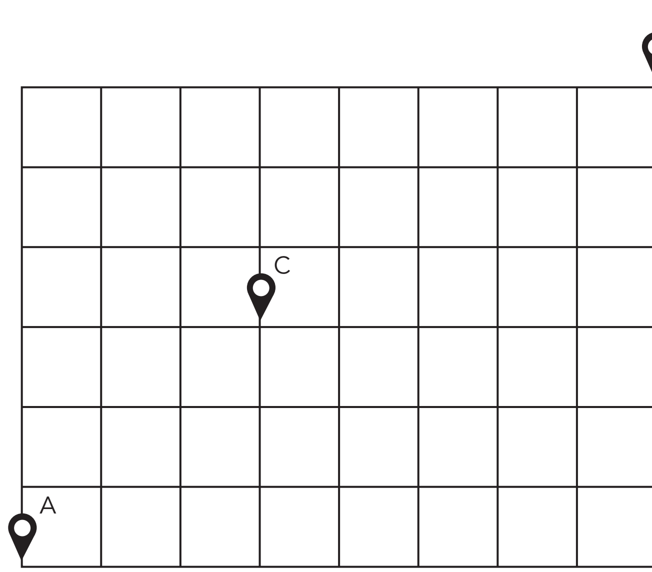
Alternativa **E.**

_DICA

Lembre-se de que, para resolver atividades de análise combinatória, primeiro deve-se decidir se a **ordem** dos elementos importa ou não.

Caso ela seja importante, então se trata de um problema de arranjo ou permutação. Caso a ordem não importe, como para calcular quantos grupos de 6 pessoas podem ser formados dispondo-se de 10 pessoas, trata-se de um problema de combinação.

7 A figura a seguir representa um mapa ligando as cidades A, B e C. Nele há 7 avenidas na direção norte-sul e 9 avenidas na direção leste-oeste, representadas, respectivamente, pelas linhas verticais e horizontais da figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Com base nessas informações, responda:

I. Qual é o total de caminhos para ir da cidade A até a cidade B?

(A) $C_{9,\,8} + C_{7,\,6}$

(B) $C_{9,\,8} \cdot C_{7,\,6}$

(C) $P_{14}^{8,\,6}$

(D) $P_{16}^{9,\,7}$

(E) $P_{6}^{3,\,3} \cdot P_{8}^{3,\,5}$

Alternativa **C**.

II. Qual é o total de caminhos para ir da cidade A até a cidade B, passando pela cidade C?

(A) $C_{6,\,3} + C_{8,\,3}$

(B) $C_{6,\,3} \cdot C_{8,\,3}$

(C) $P_{14}^{8,\,6}$

(D) $P_{16}^{9,\,7}$

(E) $P_{6}^{3,\,3} \cdot P_{8}^{3,\,5}$

Alternativa **E**.

8 Uma empresa de educação especializada em reforço escolar tem 10 professores de Matemática. É feito um rodízio entre eles diariamente, no qual 5 deles dão aula particular na própria empresa, 3 dão aula particular na casa do estudante e 2 ficam de reserva e podem ser chamados a qualquer momento.

O total de maneiras diferentes de essa empresa alocar seus 10 professores de Matemática entre os 3 grupos é:

(A) 1260.

(B) 2520.

(C) 3600.

(D) 4880.

(E) 5040.

Alternativa **B**.

9 Uma escola precisa escolher 3 estudantes para representá-la em um torneiro regional de xadrez. Sabe-que, em cada uma de suas 10 turmas, há exatamente 1 estudante que se destaca jogando xadrez.

De quantos modos diferentes é possível selecionar os estudantes, entre os que se destacam, para representar a escola no torneio?

(A) 30

(B) 60

(C) 90

(D) 120

(E) 240

Alternativa **D**.

_DICA

Anagrama é definido como a reorganização das letras de uma palavra de modo a formar outra palavra, que pode ter ou não sentido. Assim, o total de anagramas de uma palavra com n letras é obtido calculando a permutação simples de n ($n!$).

Por exemplo, ao reorganizar as letras da palavra LUA, pode-se obter ALU, que, embora não tenha significado na língua portuguesa, é caracterizada como um dos anagramas de LUA.

Além disso, caso a palavra tenha letras repetidas, o total de anagramas dela é obtido calculando a permutação com repetição.

10 Qual é o total de anagramas da palavra VITÓRIA que não tem duas letras I juntas?

(A) $6!$

(B) $\frac{7!}{2} - 6!$

(C) $\frac{7!}{2}$

(D) $2 \cdot 5! \cdot C_{6,\,2}$

(E) $7!$

Alternativa **B**.

11 Na secretaria de uma escola, trabalham 6 pessoas, denominadas A, B, C, D, E e F. A gerente precisa organizar a escala de férias dessas pessoas, de modo que saia 1 por vez de férias, um após o outro. Uma possibilidade é ABCDEF, em que A sai primeiro, depois B, depois C, e assim por diante. Outra é AEBDFC, em que A sai primeiro, E depois, B depois, e assim por diante.

Quantas possibilidades existem para compor essa escala de férias?

(A) 6

(B) 36

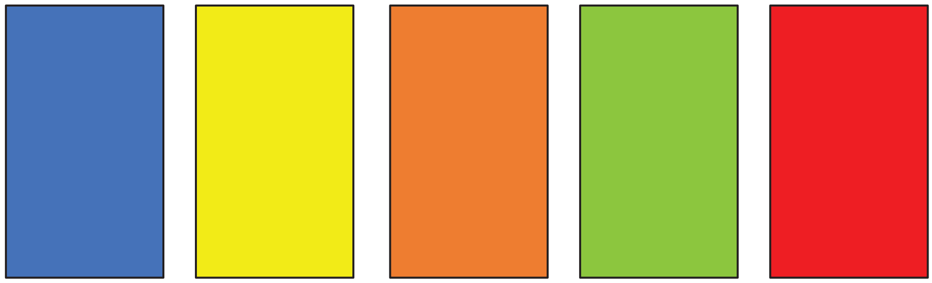
(C) 216

(D) 720

(E) 860

Alternativa **D**.

12 Um colecionador de arte resolveu colocar 5 quadros distintos um ao lado do outro em uma das paredes da sala, mas 2 deles não podem ficar juntos. A seguir, há a imagem de como os 5 quadros vão ficar dispostos na parede.



Banco de imagens/Arquivo da editora

De quantos modos diferentes o colecionador de arte poderá colocar os 5 quadros nessa parede, conforme as condições do problema?

(A) 18

(B) 24

(C) 36

(D) 72

(E) 120

Alternativa **D**.

13 Um cientista pretende montar determinado tipo de ligação de forma linear entre 8 elementos químicos, sendo 4 negativos e os demais positivos. A ligação não poderá ter elementos positivos juntos.

O número máximo de ligações com esses elementos químicos que atendem a essa restrição é igual a:

(A) 1152.

(B) 1440.

(C) 2880.

(D) 4320.

(E) 5760.

Alternativa **C**.

_AMPLIANDO

A série *Isto é Matemática*, produzida pela Sociedade Portuguesa de Matemática, aborda vários temas interessantes. No episódio 8 da 6ª temporada, o matemático Rogério Martins ensina um pouco sobre o princípio da casa dos pombos. Para assistir a esse episódio, acesse o *QR code*.

_ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) Um modelo de telefone celular oferece a opção de desbloquear a tela usando um padrão de toques como senha.

Os toques podem ser feitos livremente nas 4 regiões numeradas da tela, sendo que o usuário pode escolher entre 3, 4 ou 5 toques ao todo.

Qual expressão representa o número total de códigos existentes?

Reprodução/ENEM, 2020.

(A) $4^5 - 4^4 - 4^3$

(B) $4^5 + 4^4 + 4^3$

(C) $4^5 \cdot 4^4 \cdot 4^3$

(D) $(4!)^5$

(E) 4^5

Alternativa **B**.

2 (Enem) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @.

O e-mail terá a forma *******@site.com.br e será de tal modo que as três letras "edu" apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

(A) 59

(B) 60

(C) 118

(D) 119

(E) 120

Alternativa **D**.

3 (UERJ) Com o objetivo de melhorar o tráfego de veículos, a prefeitura de uma grande cidade propôs a construção de quatro terminais de ônibus. Para estabelecer conexão entre os terminais, foram estipuladas as seguintes quantidades de linhas de ônibus:

- do terminal A para o B, 4 linhas distintas;
- do terminal B para o C, 3 linhas distintas;
- do terminal A para o D, 5 linhas distintas;
- do terminal D para o C, 2 linhas distintas.

Não há linhas diretas entre os terminais A e C.

Supondo que um passageiro utilize exatamente duas linhas de ônibus para ir do terminal A para o terminal C, calcule a quantidade possível de trajetos distintos que ele poderá fazer.

22 trajetos possíveis.

4 (Enem) Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.

Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a

(A) 64.
(B) 74.
(C) 254.
(D) 274.
(E) 634.

Alternativa **C**.

5 (Fuvest-SP) Atualmente, no Brasil, coexistem dois sistemas de placas de identificação de automóveis: o padrão Mercosul (o mais recente) e aquele que se iniciou em 1990 (o sistema anterior, usado ainda pela maioria dos carros em circulação). No sistema anterior, utilizavam-se 3 letras (em um alfabeto de 26 letras) seguidas de 4 algarismos (de 0 a 9). No padrão Mercosul adotado no Brasil para automóveis, são usadas 4 letras e 3 algarismos, com 3 letras nas primeiras 3 posições e a quarta letra na quinta posição, podendo haver repetições de letras ou de números. A figura ilustra os dois tipos de placas.

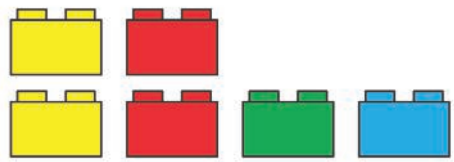
Dessa forma, o número de placas possíveis do padrão Mercosul brasileiro de automóveis é maior do que o do sistema anterior em:

Reprodução/Fuvest-SP, 2022.

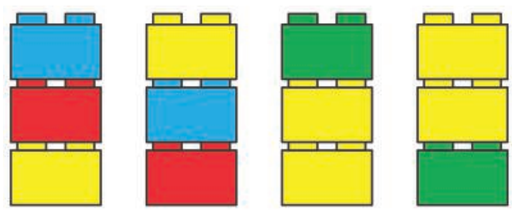
(A) 1,5 vezes.
(B) 2 vezes.
(C) 2,6 vezes.
(D) 2,8 vezes.
(E) 3 vezes.

Alternativa **C**.

6 (Unesp-SP) Uma criança possui 6 blocos de encaixe, sendo 2 amarelos, 2 vermelhos, 1 verde e 1 azul.



Usando essas peças, é possível fazer diferentes pilhas de três blocos. A seguir, são exemplificadas quatro das pilhas possíveis.



Utilizando os blocos que possui, o total de pilhas diferentes de três blocos, incluindo as exemplificadas, que a criança pode fazer é igual a

(A) 58.

(B) 20.

(C) 42.

(D) 36.

(E) 72.

Alternativa **C.**

7 (Enem) Um diretor esportivo organiza um campeonato no qual haverá disputa de times em turno e returno, isto é, cada time jogará duas vezes com todos os outros, totalizando 380 partidas a serem disputadas.

A quantidade de times (x) que faz parte desse campeonato pode ser calculada pela equação

(A) $x = 380 - x^2$

(B) $x^2 - x = 380$

(C) $x^2 = 380$

(D) $2x - x = 380$

(E) $2x = 380$

Alternativa **B.**

8 (Enem) Nos livros Harry Potter, um anagrama do nome do personagem "TOM MARVOLO RIDDLE" gerou a frase "I AM LORD VOLDEMORT".

Suponha que Harry quisesse formar todos os anagramas da frase "I AM POTTER", de tal forma que as vogais e consoantes aparecessem sempre intercaladas, e sem considerar o espaçamento entre as letras.

Nessas condições, o número de anagramas formados é dado por

(A) $9!$

(B) $4!5!$

(C) $2 \cdot 4!5!$

(D) $\frac{9!}{2}$

(E) $\frac{4!5!}{2}$

Alternativa **E.**

9 (Unicamp-SP) Em um sorteio com cartelas numeradas de 0001 a 2000, João decidiu comprar todas as cartelas em que a numeração exibisse os números 2 e 5, e nenhuma a mais. Por exemplo, João comprou as cartelas 1205 e 0025, mas não comprou as cartelas 0514 e 2000.

Considere as afirmações:

I. João comprou 108 cartelas.

II. Se ao invés das cartelas com 2 e 5, João tivesse comprado as cartelas com 1 e 5, ele teria comprado menos cartelas.

III. João comprou 18 cartelas que possuem o número 3.

Assinale a alternativa correta:

(A) Todas as afirmações são verdadeiras.

(B) Apenas a afirmação I é verdadeira.

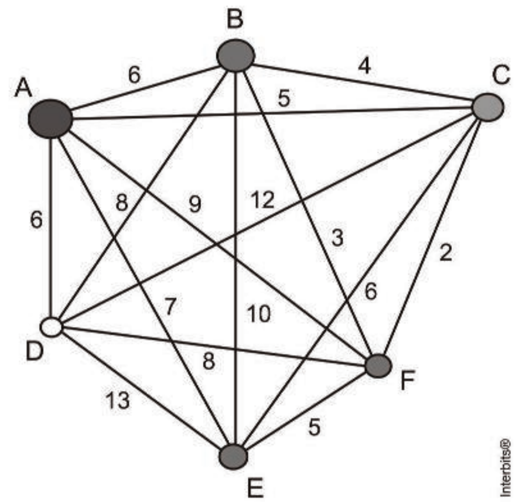
(C) Apenas a afirmação II é verdadeira.

(D) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

Alternativa **B**.

10 (Enem) João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele saíra da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.

Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1min30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.



Reprodução/ENEM, 2010.

Interbits®

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

(A) 60 min.

(B) 90 min.

(C) 120 min.

(D) 180 min.

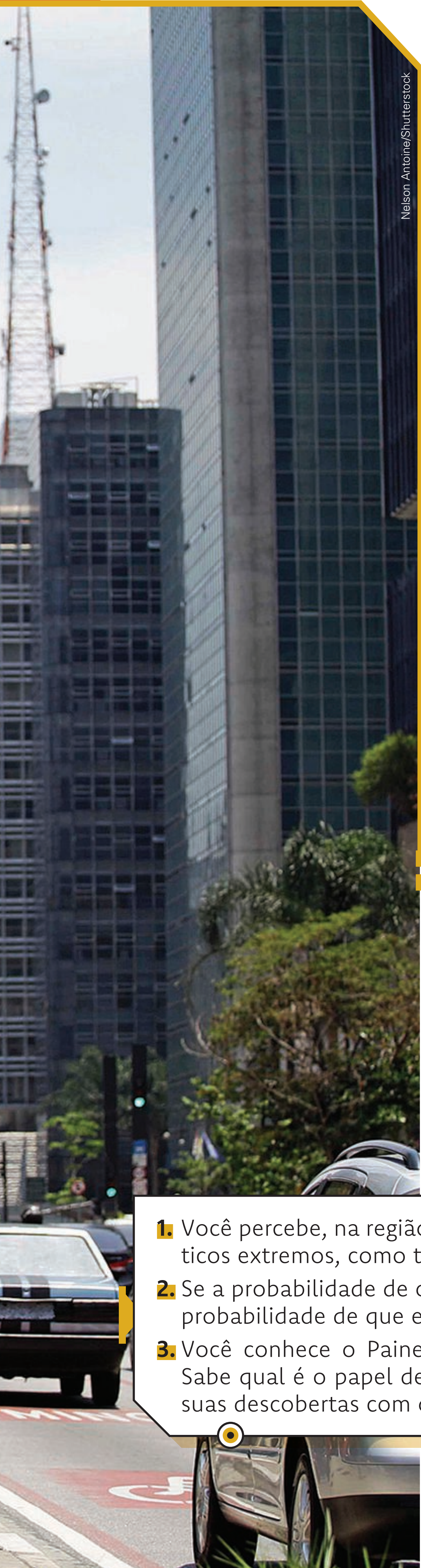
(E) 360 min.

Alternativa **B**.

JORNADA 15

Probabilidade

Termômetro marcando 41 °C em uma avenida de São Paulo (SP). Foto de 2012.



Nelson Antoine/Shutterstock

Quando pensamos em aplicações cotidianas para o conceito de probabilidade, geralmente associamos esse conteúdo às chances de ganhar na loteria ou de acertar o resultado de um jogo. Contudo, a probabilidade também é aplicada em outras áreas, como na testagem de remédios, na fabricação de componentes eletrônicos, nas pesquisas eleitorais, na previsão meteorológica, etc.

Esse conhecimento matemático desempenha papel vital, principalmente na **Meteorologia** e na consequente mitigação de desastres naturais, pois fornece bases sólidas para a tomada de decisões. A análise probabilística permite que as autoridades avaliem o risco de ocorrência de eventos extremos, por exemplo furacões e enchentes, e ajam preventivamente.

A probabilidade também auxilia na alocação eficiente de recursos. Ao quantificar incertezas, os investimentos podem ser direcionados para áreas com maior probabilidade de sofrer impactos severos e, com isso, as informações se tornam mais confiáveis para o planejamento de longo prazo.

Trata-se de uma ferramenta essencial para salvar vidas e proteger comunidades diante dos desafios climáticos crescentes.

Meteorologia: ciência que estuda o comportamento da atmosfera terrestre e dos fenômenos atmosféricos, sendo o principal instrumento de medida de previsão do tempo.

1. Você percebe, na região onde mora, um aumento na ocorrência de eventos climáticos extremos, como tempestades, geadas ou ondas de calor intenso?
2. Se a probabilidade de ocorrência de um evento meteorológico é de 20%, qual é a probabilidade de que esse evento não ocorra? 80%
3. Você conhece o Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC)? Sabe qual é o papel dele no Brasil? Faça uma pesquisa na internet e compartilhe suas descobertas com os colegas.

1 e 3. Respostas pessoais.
Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Leia atentamente o texto a seguir.

Dados comprovam aumento de eventos climáticos extremos em São Paulo

[...]

Dados de duas estações meteorológicas confirmam o que muitos paulistanos já vêm sentindo na pele há alguns anos: a ocorrência de eventos climáticos extremos na Região Metropolitana de São Paulo (RMSP) aumentou muito nas últimas duas décadas.

O fenômeno mais impactante é o aumento da intensidade das chuvas. O número de eventos de precipitação extrema, com chuva acima de 100 milímetros/dia, já é maior nos últimos 20 anos do que no acumulado das seis décadas anteriores – e olha que [a década de] 2020 está só começando. [...]

Os números não deixam dúvida sobre o aumento da ocorrência de tempestades na metrópole paulistana: foram 11 acima de 100 mm nos últimos 20 anos (período 2001-2020), comparados a 10 na somatória dos 60 anos anteriores (período 1941-2000). No caso das chuvas acima de 80 mm (também consideradas extremas), o aumento é ainda mais chocante: foram 25 eventos nas últimas duas décadas, comparados a 19 nas seis décadas anteriores.

[...]

Tempestades em alta

Dados de [...] estações meteorológicas comprovam o aumento da frequência de chuvas extremas na Região Metropolitana de São Paulo nos últimos 20 anos

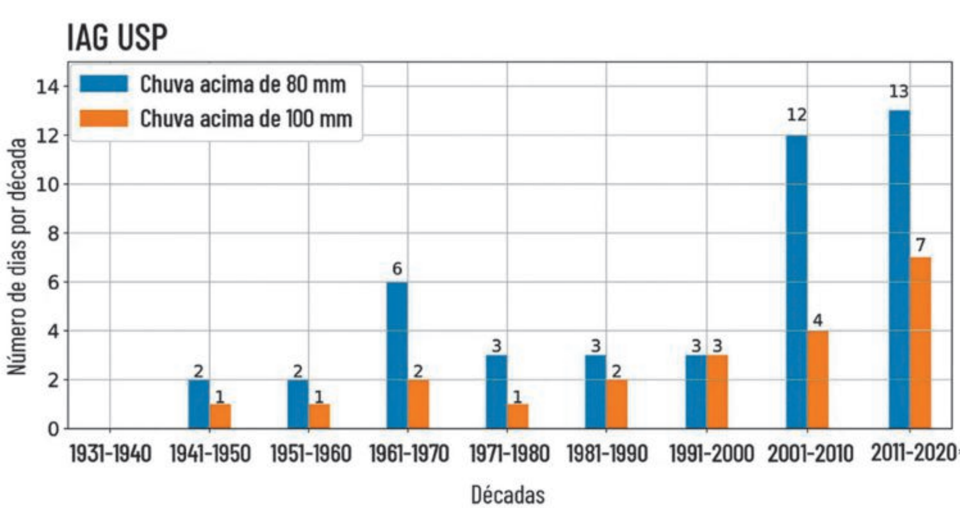


*Gráfico atualizado pela reportagem. Dados de 2020 válidos até fevereiro, podendo ainda aumentar até o fim do ano.

ESCOBAR, Herton. Dados comprovam aumento de eventos climáticos extremos em São Paulo. *Jornal da USP*, São Paulo, 28 fev. 2020. Disponível em: https://jornal.usp.br/ciencias/ciencias-ambientais/dados-comprovam-aumento-de-eventos-climaticos-extremos-em-sao-paulo/. Acesso em: 22 nov. 2023.

Considere o conjunto formado por todos os dias de tempestade extrema registrados pela estação meteorológica do Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas da Universidade de São Paulo (IAG-USP) no período apresentado no gráfico. Esse conjunto será chamado de **espaço amostral**, ou seja, o conjunto de todas as possibilidades.

a) Determine o número de dias em que houve chuvas superiores a 80 mm e o número de dias em que as chuvas ultrapassaram os 100 mm. Além disso, calcule o total de dias de tempestade que compõem o espaço amostral.

b) Escolhendo ao acaso um dos dias de tempestade extrema registrados e supondo que tenham a mesma chance de serem escolhidos, qual é a probabilidade de ter sido escolhido um dia com tempestade acima de 100 mm?

c) Escolhendo ao acaso um dos dias de tempestade extrema registrados e supondo que tenham a mesma chance de serem escolhidos, qual é a probabilidade de ter sido escolhido um dia de tempestade entre 80 mm e 100 mm?

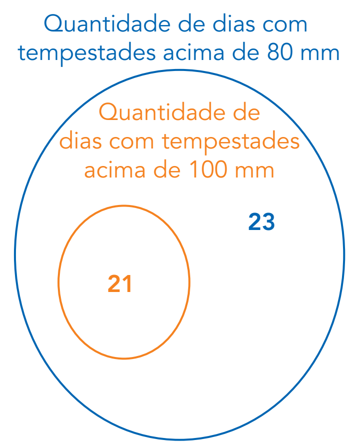
d) Escolhendo ao acaso um dos dias de tempestade registrados e sabendo que o dia escolhido foi de chuva acima de 100 mm, qual é a probabilidade de essa tempestade ter acontecido no período de 2001 a 2020?

_resolvendo a questão

a) Pelos dados fornecidos pelo gráfico, tem-se:

- 21 dias de tempestade foram acima de 100 mm;
- 44 dias de tempestade foram acima de 80 mm.

Considerando que os dias de tempestade acima de 80 mm incluem aqueles acima de 100 mm, tem-se, então, que a quantidade de dias com chuvas entre 80 mm e 100 mm foi de: $44 - 21 = 23$. Observe o diagrama ao lado.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Dessa forma, o total de dias de tempestade foi de: $23 + 21 = 44$. Assim, o espaço amostral tem 44 elementos.

b) Temos de calcular a razão entre a quantidade de eventos escolhidos (chuvas acima de 100 mm) e a quantidade total de eventos:

$$P_{x > 100\text{ mm}} = \frac{21}{44} \simeq 0{,}48 = 48\%$$

c) A probabilidade de escolher um dia de tempestade entre 80 mm e 100 mm é de:

$$P_{80\text{ mm} < x \leqslant 100\text{ mm}} = \frac{23}{44} \simeq 0{,}52 = 52\%$$

Pode-se também efetuar a diferença entre 1 e a probabilidade relativa a 100 mm:

$$P_{80\text{ mm} < x \leqslant 100\text{ mm}} = 1 - P_{x > 100\text{ mm}} = 1 - 0{,}48 = 0{,}52 = 52\%$$

d) A probabilidade, agora, está condicionada a uma nova informação; e com o espaço amostral reduzido a 21 elementos (dias de tempestade acima de 100 mm). E o evento é escolher um dia entre 2001 e 2020 com chuva acima de 100 mm, que tem 11 ocorrências.

$$P_{x > 100\text{ mm (2001-2020)}} = \frac{11}{21} \simeq 0{,}52 = 52\%$$

_agora é com você

1 Considere um experimento aleatório no qual um doador regular de sangue escolhe, ao acaso, um mês do ano para fazer sua doação.

Qual dos conjuntos a seguir representa o espaço amostral desse experimento, considerando cada número um mês do ano?

(A) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

(B) {2, 4, 6, 8, 10, 12}

(C) {1, 3, 5, 7, 9, 11}

(D) {3, 6, 9, 12}

(E) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Alternativa **A**.

2 Pedro tem 4 amigos: André, Breno, Cadu e Daniel, e vai escolher, aleatoriamente, 2 deles para fazer uma viagem.

Qual seria um espaço amostral possível para o experimento de escolher 2 dos 4 amigos, considerando que a letra inicial de cada nome representa o respectivo amigo?

(A) {ABCD}

(B) {A, B, C, D}

(C) {AB, AC, AD, BC, BD, CD}

(D) {AB}

(E) {AB, AC, AD}

Alternativa **C**.

3 Uma moeda é lançada 3 vezes. A cada final de lançamento, observa-se a face que ficou virada para cima. Um resultado foi “cara, cara, coroa” e outro resultado foi “coroa, cara, cara”. Há ainda outros resultados que formam esse espaço amostral.

Qual é o número total de elementos desse espaço amostral?

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 8

(E) 9

Alternativa **D**.

4 Ana, Bia e Carla compraram um celular cada uma. Considere o experimento aleatório “dar defeito ou não dar defeito” para cada um dos 3 aparelhos, no primeiro ano de uso. Por exemplo, BBD representa o caso “bom, bom, defeito” para os celulares de Ana, Bia e Carla, respectivamente.

Qual é o número de elementos desse espaço amostral?

(A) 3

(B) 4

(C) 6

(D) 8

(E) 9

Alternativa **D**.

5 Em determinado país, 5% dos adultos mais ricos detêm 90% da riqueza do país. Qual é a probabilidade de uma pessoa, escolhida aleatoriamente da população adulta, fazer parte do grupo que detém os outros 10% da riqueza restante do país?

(A) 5%

(B) 10%

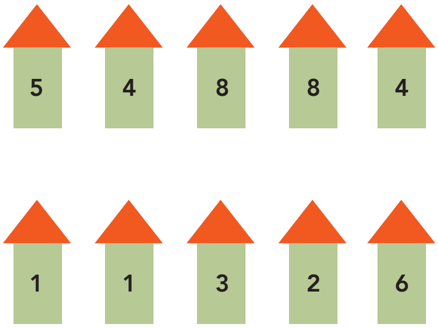
(C) 45%

(D) 90%

(E) 95%

Alternativa **E**.

6 Em um condomínio residencial, as ruas têm nome de matemáticos conhecidos. Na rua Laplace, há 10 casas. O número de moradores por casa, dessa rua, está representado nesta imagem.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Suponha que você escolherá, ao acaso, uma casa da rua Laplace. Qual é a probabilidade de a casa escolhida ter exatamente 4 moradores?

(A) 2%

(B) 4%

(C) 8%

(D) 10%

(E) 20%

Alternativa **E**.

7 Um casal planeja ter 2 filhos. Qual é a probabilidade de terem um menino e uma menina?

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{4}$

(E) $\frac{3}{4}$

Alternativa **C**.

8 Três moedas são lançadas e, ao caírem, observam-se as faces voltadas para cima. Qual é a probabilidade de, entre as faces voltadas para cima, apenas uma delas ser cara?

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{3}{8}$

(E) $\frac{1}{2}$

Alternativa **D**.

_fique ligado

Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Probabilidade de eventos sucessivos

Para calcular a probabilidade de um evento A ocorrer após outro evento B, $P(A \cap B)$, ou a probabilidade de vários eventos ocorrerem um após o outro, $P(A \cap B \cap C \cap \dots \cap N)$, deve-se primeiro saber se esses eventos ocorrerão de forma dependente ou independente.

Se os eventos ocorrerem de forma **independente**, ou seja, a ocorrência de qualquer um deles não depender das ocorrências dos demais, então basta multiplicar a probabilidade de cada um deles. Assim, a probabilidade de n eventos independentes acontecerem um após o outro é:

$$P(A \cap B \cap C \cap \dots \cap N) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot \dots \cdot P(N)$$

Em geral, os eventos sucessivos são reconhecidos por estarem separados pela conjunção **e** nos enunciados de exercícios. Por exemplo, no enunciado "Qual é a probabilidade de retirar uma bolinha vermelha **e** depois uma azul?" é possível identificar que se trata de eventos sucessivos.

Probabilidade condicional

Caso a ocorrência de um evento A dependa da ocorrência de outro evento B, então a probabilidade de ocorrer A após B ou a **probabilidade de ocorrer *A* dado que *B* ocorreu** é:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

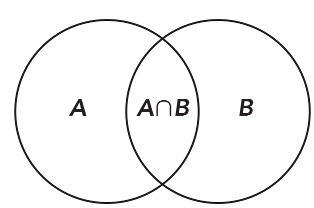
Probabilidade da união de eventos

A probabilidade da união de eventos é calculada quando queremos saber a probabilidade de um primeiro evento A **ou** de um segundo evento B ocorrerem.

De maneira geral, a probabilidade de ocorrer o evento A **ou** o evento B é:

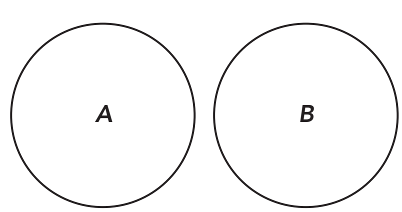
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Utilizando a linguagem de conjuntos, pode-se observar que para saber a probabilidade de ocorrer o evento A ou o B é preciso somar as probabilidades dos dois eventos separados e subtrair desse resultado a probabilidade da intersecção entre esses dois eventos.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Se os eventos A e B forem **mutuamente exclusivos**, ou seja, se eles não puderem ocorrer ao mesmo tempo, então tem-se o seguinte caso:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Podemos observar que $P(A \cap B) = 0$. Logo, a probabilidade de ocorrer o evento A **ou** o evento B quando eles não puderem ocorrer ao mesmo tempo é dada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

_ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Um professor aplica 3 provas em um semestre. O nível de cada prova pode ser classificado como fácil ou difícil. Suponha que a escolha do nível da prova seja por sorteio e que a probabilidade seja de 50% para cada tipo, independentemente de a turma ter estudado ou não.

Qual é a probabilidade de, pelo menos, uma prova ser considerada difícil?

(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{2}{8}$

(C) $\frac{3}{8}$

(D) $\frac{5}{8}$

(E) $\frac{7}{8}$

Alternativa **E.**

_DICA

Lembre-se de que para qualquer evento A tem-se: $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Assim, se A^c for o evento complementar de A, então $P(A^c) = 1 - P(A)$.

2 Uma urna tem 5 bolas vermelhas e 7 bolas azuis. Retiram-se 2 bolas, uma após a outra, sem reposição.

I. Qual é a probabilidade de as 2 bolas retiradas serem vermelhas?

(A) $\frac{5}{33}$

(B) $\frac{20}{64}$

(C) $\frac{5}{64}$

(D) $\frac{20}{66}$

(E) $\frac{5}{66}$

Alternativa **A.**

II. Qual é a probabilidade de somente uma das bolas retiradas ser vermelha?

(A) $\frac{42}{32}$

(B) $\frac{42}{132}$

(C) $\frac{21}{64}$

(D) $\frac{21}{132}$

(E) $\frac{70}{132}$

Alternativa **E.**

3 Dois dados comuns, não viciados, são lançados. Qual é a probabilidade de a soma das quantidades de pontos das faces voltadas para cima ser menor do que 10?

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{2}{6}$

(C) $\frac{3}{6}$

(D) $\frac{4}{6}$

(E) $\frac{5}{6}$

Alternativa **E.**

4 Em determinada empresa, os funcionários trabalham 6 dias por semana. Para aumentar a qualidade de vida dos colaboradores, decidiu-se acrescentar 1 dia de descanso semanal. Assim, cada funcionário terá 2 dias na semana para folgar. Para que todos tenham a chance de folgar no sábado ou no domingo, os dias de folga serão escolhidos por sorteio.

Qual é a probabilidade de pelo menos um dos dias ser sábado ou domingo?

(A) $\frac{2}{7}$

(B) $\frac{3}{7}$

(C) $\frac{12}{42}$

(D) $\frac{11}{42}$

(E) $\frac{11}{21}$

Alternativa **E.**

5 Márcio e Andreia planejam ter 3 filhos. Considere as seguintes afirmações:

I. É mais provável nascerem 2 meninos e 1 menina do que nascerem 2 meninas e 1 menino.

II. A probabilidade de nascerem 3 meninas é $\frac{1}{3}$.

III. A probabilidade de nascerem somente 2 meninos é $\frac{1}{8}$.

IV. A probabilidade de nascerem 2 meninas e 1 menino é $\frac{3}{8}$.

Quantas das afirmações estão corretas?

(A) Nenhuma.

(B) Uma.

(C) Duas.

(D) Três.

(E) Todas.

Alternativa **B**.

_DICA

Para a contagem de todos os subconjuntos com *y* elementos de um conjunto com *x* elementos, pode-se utilizar a combinação de *x* elementos tomados *y* a *y* cuja fórmula é:

$$C_{x,\,y} = \frac{x!}{y!\,(x-y)!}$$

6 Um casal comemorará as bodas de 25 anos de casados com uma viagem para a Itália. Em uma agência de turismo e diante de limitações orçamentárias, eles precisam escolher 3 cidades, entre 6 sugeridas pelo consultor, para montar o roteiro. As cidades sugeridas são Roma, Veneza, Milão, Bolonha, Nápoles e Florença.

Se a escolha das 3 cidades, entre as 6 disponíveis, for aleatória, qual é a probabilidade de escolherem Veneza, mas não escolherem Bolonha?

(A) 10%

(B) 20%

(C) 25%

(D) 30%

(E) 35%

Alternativa **D**.

7 Em uma sala com torcedores de futebol, há 20 vascaínos, 30 corintianos e 10 flamenguistas. Escolhendo uma pessoa ao acaso dessa sala, qual é a probabilidade de ela ser vascaína?

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{2}$

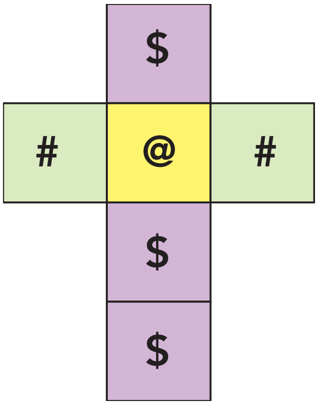
(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{2}{3}$

(E) $\frac{3}{4}$

Alternativa **A**.

8 A figura a seguir é a planificação de um dado utilizado em um jogo de tabuleiro. Nesse jogo, há um caminho com 64 casas a serem percorridas. Em cada rodada, um jogador lança o dado: se tirar $, avança 1 casa; se tirar #, avança 2 casas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Caso tire @, o jogador tem direito a lançar o dado novamente e avançar o dobro do número de casas que esse resultado oferecer. Se tirar @ novamente, deve voltar 1 casa e passar a vez para o jogador seguinte. Ganha o jogo quem chegar primeiro à casa 64.

Arthur encontra-se na casa 62 e está prestes a jogar. Qual é a probabilidade de Arthur ganhar o jogo nessa rodada?

(A) 30%
(B) 37%
(C) 40%
(D) 47%
(E) 53%

Alternativa **D**.

9 Suponha que a probabilidade de um estudante da terceira série do Ensino Médio de um colégio ser aprovado em uma universidade pública por meio do Enem seja de 80%.

Três estudantes da terceira série do Ensino Médio desse colégio são escolhidos ao acaso. Qual é a probabilidade de, entre os 3 escolhidos, somente 2 serem aprovados?

(A) 34,0%
(B) 38,4%
(C) 40,2%
(D) 44,6%
(E) 46,4%

Alternativa **B**.

10 Mariana lançou 5 vezes uma moeda não viciada e observou a face voltada para cima em cada uma das vezes em que a moeda caiu. Qual é a probabilidade de aparecerem pelo menos 3 caras?

(A) $\frac{3}{5}$
(B) $\frac{8}{32}$
(C) $\frac{10}{32}$
(D) $\frac{16}{32}$
(E) $\frac{20}{32}$

Alternativa **D**.

11 A fertilização *in vitro* é uma técnica de reprodução muito empregada por quem opta pela fecundação assistida. Manuel e Maria pretendem ter 2 filhos. Ambos gostariam de que, pelo menos, um fosse do sexo feminino.

Eles decidiram que, se a probabilidade de ter pelo menos uma menina, por meios naturais, fosse menor do que 50%, eles procurariam uma clínica de fertilização para aumentar as chances de alcançar esse desejo. Após estudo, eles concluíram que a probabilidade de isso acontecer é de:

(A) 66,6% e, por isso, não vão a uma clínica de fertilização.

(B) 75% e, por isso, não vão a uma clínica de fertilização.

(C) 90% e, por isso, não vão a uma clínica de fertilização.

(D) 45% e, por isso, vão a uma clínica de fertilização.

(E) 33,3% e, por isso, vão a uma clínica de fertilização.

Alternativa **B.**

12 A distribuição de estudantes, por área de preferência, para acesso ao Ensino Superior e que cursam a terceira série do Ensino Médio em 2023 no Instituto VEP está representada na tabela a seguir.

Turmas – 3ª série do EM – 2023					
		Turma 31	Turma 32	Turma 33	Turma 34
Área	Tecnologia	10	6	12	8
	Biológicas	5	10	4	12
	Humanas	15	14	14	10
Total		30	30	30	30

Elaborada para fins didáticos.

Um estudante desse grupo é escolhido ao acaso. Qual é a probabilidade de esse estudante preferir a área de Tecnologia, sabendo que ele é da Turma 32?

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{3}$

(E) $\frac{1}{2}$

Alternativa **B.**

13 Em uma cidade, 80% das residências assinam o jornal da cidade vizinha, 60% assinam o jornal local e 50% assinam ambos os jornais. Uma residência será selecionada aleatoriamente.

Qual é a probabilidade de que nenhum dos dois jornais sejam assinados nessa residência?

(A) 10%

(B) 15%

(C) 20%

(D) 30%

(E) 35%

Alternativa **A.**

14 Magnólia é uma jogadora profissional de pôquer. Em uma partida, considere que uma carta foi sorteada de um baralho comum, que tem 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas), totalizando 52 cartas.

I. Qual é a probabilidade de que a carta sorteada seja um A (ás)?

(A) $\frac{1}{52}$

(B) $\frac{4}{52}$

(C) $\frac{6}{52}$

(D) $\frac{8}{52}$

(E) $\frac{10}{52}$

Alternativa **B.**

II. Sabendo que a carta sorteada é de copas, qual é a probabilidade de ela ser um A (ás)?

(A) $\frac{1}{13}$

(B) $\frac{2}{13}$

(C) $\frac{3}{13}$

(D) $\frac{8}{13}$

(E) $\frac{10}{13}$

Alternativa **A.**

15 Matheus se deparou com um problema intrigante de probabilidade. Nesse problema, havia dois eventos, denominados A e B, associados a um experimento. Suponha que $P(A) = 0{,}4$, $P(A \cup B) = 0{,}7$ e $P(B) = p$.

I. Determine p, para que os eventos A e B sejam mutuamente exclusivos.

(A) 0,1

(B) 0,2

(C) 0,3

(D) 0,4

(E) 0,5

Alternativa **C.**

II. Determine p para que os eventos A e B sejam independentes.

(A) 0,1

(B) 0,2

(C) 0,3

(D) 0,4

(E) 0,5

Alternativa **E.**

_AMPLIANDO

Por meio do portal do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), é possível acompanhar a previsão do tempo, receber alertas e acessar boletins meteorológicos especiais do Brasil, além de compreender a probabilidade associada a diferentes cenários climáticos.

_ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) O Estatuto do Idoso, no Brasil, prevê certos direitos às pessoas com idade avançada, concedendo a estas, entre outros benefícios, a restituição de imposto de renda antes dos demais contribuintes. A tabela informa os nomes e as idades de 12 idosos que aguardam suas restituições de imposto de renda. Considere que, entre os idosos, a restituição seja concedida em ordem decrescente de idade e que, em subgrupos de pessoas com a mesma idade, a ordem seja decidida por sorteio.

Nome	Idade (em ano)
Orlando	89
Gustavo	86
Luana	86
Teresa	85
Márcia	84
Roberto	82
Heloisa	75
Marisa	75
Pedro	75
João	75
Antônio	72
Fernanda	70

Nessas condições, a probabilidade de João ser a sétima pessoa do grupo a receber sua restituição é igual a

(A) $\frac{1}{12}$

(B) $\frac{7}{12}$

(C) $\frac{1}{8}$

(D) $\frac{5}{6}$

(E) $\frac{1}{4}$

Alternativa **E**.

2 (Enem) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

(A) 0,075

(B) 0,150

(C) 0,325

(D) 0,600

(E) 0,800

Alternativa **C**.

3 (Unicamp-SP) O sistema de segurança de um aeroporto consiste de duas inspeções. Na primeira delas, a probabilidade de um passageiro ser inspecionado é de 3/5. Na segunda, a probabilidade se reduz para 1/4. A probabilidade de um passageiro ser inspecionado pelo menos uma vez é igual a

(A) 17/20.

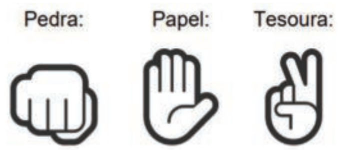
(B) 7/10.

(C) 3/10.

(D) 3/20.

Alternativa **B**.

4 (Unicamp-SP) Pedra-papel-tesoura, também chamado *jankenpon* ou *jokempô*, é um jogo recreativo para duas pessoas. Nesse jogo, os participantes usam as mãos para representar os símbolos de pedra, papel e tesoura, conforme mostrado nos *emojis* a seguir:



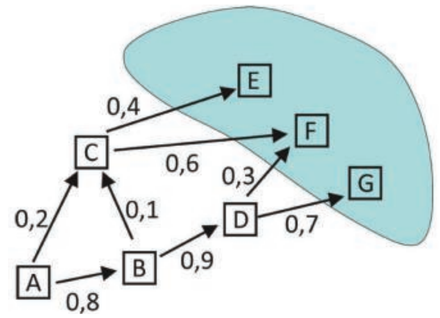
Pelas regras do jogo, o participante que escolher "pedra" ganha do que escolher tesoura; o participante que escolher tesoura ganha do que escolher papel; por fim, o que escolher papel ganha do que escolher pedra. Se ambos escolherem os mesmos símbolos, eles empatam.

Admitindo que os participantes escolhem os símbolos com igual probabilidade, qual a chance de acontecer pelo menos um empate em três partidas?

(A) 16/27.
(B) 17/27.
(C) 18/27.
(D) 19/27.

Alternativa **D**.

5 (Fuvest-SP) Carros que saem da cidade A rumo a alguma das cidades turísticas E, F e G fazem caminhos diversos, passando por pelo menos uma das cidades B, C e D, apenas no sentido indicado pelas setas, como mostra a figura. Os números indicados nas setas são as probabilidades, dentre esses carros, de se ir de uma cidade a outra.



Nesse cenário, a probabilidade de um carro ir de A a F é

(A) 0,120.
(B) 0,216.
(C) 0,264.
(D) 0,336.
(E) 0,384.

Alternativa **E**.

6 (Enem) Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

(A) $\frac{10 \times 2}{3^{10}}$

(B) $\frac{10 \times 2^9}{3^{10}}$

(C) $\frac{2^{10}}{3^{100}}$

(D) $\frac{2^{90}}{3^{100}}$

(E) $\frac{2}{3^{10}}$

Alternativa **A**.

7 (Enem) Suponha que uma equipe de corrida de automóveis disponha de cinco tipos de pneu (I, II, III, IV, V), em que o fator de eficiência climática EC (índice que fornece o comportamento do pneu em uso, dependendo do clima) é apresentado:

- EC do pneu I: com chuva 6, sem chuva 3;
- EC do pneu II: com chuva 7, sem chuva −4;
- EC do pneu III: com chuva −2, sem chuva 10;
- EC do pneu IV: com chuva 2, sem chuva 8;
- EC do pneu V: com chuva −6, sem chuva 7.

O coeficiente de rendimento climático (CRC) de um pneu é calculado como a soma dos produtos dos fatores de EC, com ou sem chuva, pelas correspondentes probabilidades de se ter tais condições climáticas: ele é utilizado para determinar qual pneu deve ser selecionado para uma dada corrida, escolhendo-se o pneu que apresentar o maior CRC naquele dia. No dia de certa corrida, a probabilidade de chover era de 70% e o chefe da equipe calculou o CRC de cada um dos cinco tipos de pneu.

O pneu escolhido foi

(A) I.
(B) II.
(C) III.
(D) IV.
(E) V.

Alternativa **A.**

8 (Enem) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna.

Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

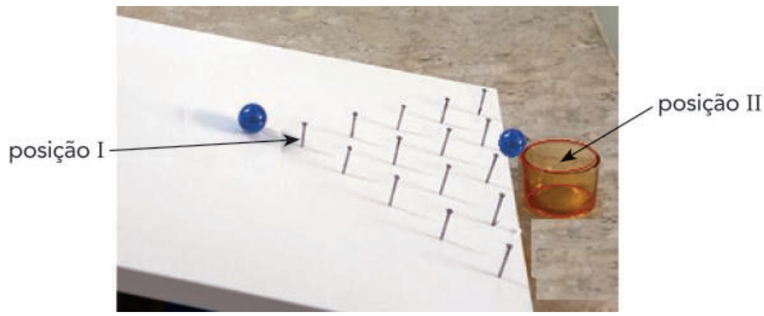
- Opção 1 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 2 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
- Opção 3 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 4 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
- Opção 5 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

(A) 1.
(B) 2.
(C) 3.
(D) 4.
(E) 5.

Alternativa **E.**

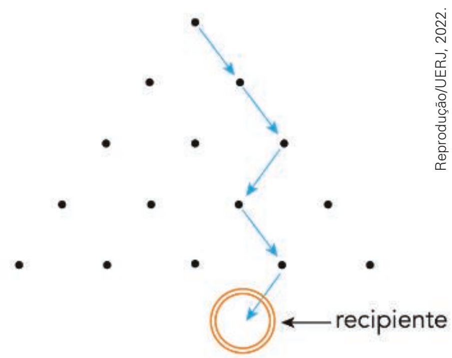
9 (UERJ) A imagem a seguir apresenta cinco linhas horizontais de pregos em uma disposição triangular sobre uma superfície plana, inclinada em relação ao plano horizontal. Ao soltar uma bolinha, ela rola e choca-se com o prego da primeira linha, na posição I. Em seguida, ela continua a rolar, chocando-se com apenas um prego de cada linha subsequente e, dependendo de sua trajetória, poderá cair no recipiente, na posição II.



Reprodução/UERJ, 2022.

Sabe-se que a probabilidade de a bolinha se chocar ou com o prego localizado imediatamente à direita ou com o imediatamente à esquerda é igual a $\frac{1}{2}$.

Uma possível trajetória da bolinha até o recipiente está representada no esquema a seguir.



Reprodução/UERJ, 2022.

A probabilidade de a bolinha cair no recipiente é igual a:

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{3}{8}$

(C) $\frac{5}{16}$

(D) $\frac{7}{12}$

Alternativa **C**.

10 (UFJF-MG) Hoje, o preço do kilo do tomate é **R$ 4,00**. Durante três semanas consecutivas, e a cada semana, esse preço pode aumentar **R$ 1,00** com probabilidade igual a 1/2 ou cair **R$ 0,50** com a mesma chance. Qual a probabilidade do kilo do tomate ser encontrado acima de **R$ 4,01** na terceira semana?

0,5 ou 50%

JORNADA 16

Funções exponenciais e logarítmicas

BW Press/Shutterstock

Indígena Hupda sendo vacinado contra a covid-19 durante ação do Ministério da Saúde. Amazonas, Brasil. Foto de 2021.

No final de dezembro de 2019, a Organização Mundial da Saúde (OMS) foi notificada sobre o surgimento de vários casos de uma pneumonia, na cidade chinesa de Wuhan, que não vinha respondendo aos tratamentos habituais. Era o início da pandemia da covid-19. Uma história que, três anos depois, resultou em 652 milhões de doentes e em 6,7 milhões de mortos no mundo, deixando marcas profundas na sociedade.

Uma das principais ações realizadas durante a pandemia da covid-19 foi o monitoramento do número de infectados, que crescia rapidamente a cada semana. Esse tipo de crescimento, denominado exponencial, pode ser identificado em várias situações do dia a dia, como em investimentos financeiros, na propagação de notícias (incluindo as *fake news*), no decaimento radioativo e no crescimento populacional de colônias de bactérias.

A Matemática desempenhou papel significativo na pesquisa e no desenvolvimento das vacinas, bem como na validação da eficácia do isolamento como medida crucial para conter a expansão da doença.

Com a ampla cobertura dos meios de comunicação, a população como um todo se viu instigada a se familiarizar com conceitos matemáticos, tais como taxas, curvas, média móvel e crescimento exponencial. Essa compreensão foi fundamental para a percepção da gravidade da situação e, como resultado, para a adoção de atitudes responsáveis, baseadas em informações verídicas e em consonância com a Ciência, na tentativa de proteger a própria vida e a de pessoas próximas.

Consulte orientações e sugestões de resposta no **Manual do Professor**.

1. Em sua opinião, quais são os principais fatores que influenciam a velocidade de propagação de notícias nas redes sociais? Resposta pessoal.

2. Você tem conhecimento de alguma doença que tenha se propagado rapidamente no município em que você mora? Qual foi o último surto de gripe na escola em que você estuda? De que maneira sua cidade enfrentou a pandemia da covid-19? Respostas pessoais.

3. Suponha que, em determinado município, o número de casos de covid-19 nas 2 primeiras semanas, após o surgimento do 1º caso confirmado, tenha seguido um padrão de crescimento exponencial. No primeiro dia, foram registradas 2 pessoas infectadas; no segundo dia, 4; e no terceiro dia, 8. Qual seria a quantidade de pessoas infectadas no décimo dia? 1024 pessoas infectadas.

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

Considere que, no colégio em que você estuda, no início da manhã de uma segunda-feira de inverno, um colega de turma apareça com sintomas de gripe na sala de aula. Segundo o Ministério da Saúde, gripe é uma infecção aguda do sistema respiratório, provocada pelo vírus da influenza, com grande potencial de transmissão.

Suponha que esse colega tenha transmitido o vírus para 2 pessoas no mesmo dia e que, ao final de cada dia, cada pessoa infectada com gripe transmita o vírus a outras 2 pessoas não infectadas. Esse processo continuará até a sexta-feira da mesma semana.

a) Preencha a tabela a seguir conforme as informações dadas no enunciado.

Dia	Número de infectados no início do dia	Número de novos infectados no dia	Número de infectados no final do dia
Segunda-feira	1	2	3
Terça-feira			
Quarta-feira			
Quinta-feira			
Sexta-feira			

b) Agora, preencha esta outra tabela, estabelecendo a relação que existe entre a quantidade total de infectados após *x* dias, a partir do início da contagem (segunda-feira é o dia zero).

x (dias da contagem)	y (total de infectados)
0	$3^1 = 3$
1	$3^2 = 9$
2	
3	
4	

c) A cada dia, a quantidade total de infectados é multiplicada por um mesmo número. Qual é esse número? Explique o que isso significa em relação aos dias.

d) Considerando que segunda-feira é o dia zero, determine a quantidade total *y* de infectados, ao final de *x* dias, a partir do início da contagem.

Obs.: A quantidade de infectados se refere ao final de cada dia.

_resolvendo a questão

a) Preenchendo a tabela, conforme as informações dadas, tem-se:

Dia	Número de infectados no início do dia	Número de novos infectados no dia	Número de infectados no final do dia
Segunda-feira	1	2	3
Terça-feira	3	6	9
Quarta-feira	9	18	27
Quinta-feira	27	54	81
Sexta-feira	81	162	243

b) Preenchendo a tabela, tem-se:

x (dias da contagem)	y (total de infectados)
0	$3^1 = 3$
1	$3^2 = 9$
2	$3^3 = 27$
3	$3^4 = 81$
4	$3^5 = 243$

c) Nesse caso, a quantidade é multiplicada por 3, conforme o padrão observado na tabela do item anterior. Isso acontece porque, a cada dia, é acrescentado o dobro da quantidade de infectados do dia anterior ao total de infectados do dia anterior (Q). Logo, tem-se $Q + 2Q = 3Q$ infectados ao final do dia.

d) Pelo padrão observado na tabela, $y = 3^{x+1}$. Pela propriedade da multiplicação de potências de mesma base, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, também pode-se escrever a relação como $y = 3 \cdot 3^x$.

_agora é com você

1 Observe as seguintes igualdades:

I. $a^2 \cdot a^3 = a^5$

II. $\dfrac{a^5}{a^{-2}} = a^3$

III. $\dfrac{1}{a^{-4}} = a^4$

IV. $(a^3)^2 = a^9$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-3} = \dfrac{b^3}{a^3}$

Considerando as propriedades da potenciação, estão corretas as igualdades:

(A) I, II e III.
(B) I, III e V.
(C) II, III e V.
(D) III, IV e V.
(E) I, II, III, IV e V.

Alternativa **B**.

2 Uma pessoa publica um vídeo em uma rede social e, em poucos segundos, ele é visualizado por 10 pessoas. Dez minutos depois, já havia 20 visualizações. Suponha que, a cada 10 minutos, a quantidade de visualizações dobre. Mantendo-se esse padrão, após uma hora da postagem, o número de visualizações será de:

(A) 240.
(B) 640.
(C) 1280.
(D) 2560.
(E) 5120.

Alternativa **B.**

3 O valor de uma empresa dobrou a cada 18 meses durante 15 anos. Se valia 40 mil reais em 2008, o valor da empresa, em milhões de reais, em 2023, era de, aproximadamente:

(A) 20,0.
(B) 34,0.
(C) 41,0.
(D) 45,0.
(E) 48,0.

Alternativa **C.**

4 Em uma lagoa, a quantidade de uma planta aquática, na superfície da água, dobra a cada semana. Na semana 10, a superfície da lagoa ficou completamente preenchida. Em que semana metade da superfície da lagoa estava preenchida?

(A) 5
(B) 6
(C) 7
(D) 8
(E) 9

Alternativa **E.**

5 Uma cidade estava enfrentando um surto de uma doença contagiosa e, inicialmente, havia 2000 pessoas em quarentena. Após 6 meses de medidas rigorosas de isolamento, esse número foi reduzido para 500. Supondo que essa quantidade decresça exponencialmente, quantos meses depois, a partir do início da implantação das medidas de isolamento, haverá menos de 32 pessoas em quarentena?

(A) 60
(B) 36
(C) 24
(D) 18
(E) 12

Alternativa **D.**

6 Qual é o maior valor possível para x na equação $4^{x^2-1} = 64$?

(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8
(E) 10

Alternativa **A.**

7 A meia-vida de uma substância é o tempo necessário para que a quantidade original dela se reduza à metade. Esse conceito é frequentemente usado para explicar o comportamento de substâncias radioativas, o decaimento de medicamentos no corpo humano, na análise de compostos químicos em laboratórios, na datação de material arqueológico e geológico, entre outros.

I. Se 100 mg de um antibiótico foram ingeridos por uma pessoa, e sua meia-vida é de 8 horas, qual é o tempo necessário, em horas, para que restem apenas 12,5% da substância no corpo nessas condições?

(A) 8
(B) 16
(C) 24
(D) 32
(E) 36

Alternativa **C.**

II. Uma pessoa se intoxicou com 8 gramas de um metal pesado. Embora bastante debilitada, ela sobreviveu. Considerando que a meia-vida desse metal no interior do corpo humano seja de 5 anos, após quanto tempo essa carga seria inferior a 0,5 grama?

(A) 15 anos
(B) 20 anos
(C) 25 anos
(D) 30 anos
(E) 35 anos

Alternativa **B.**

III. Em setembro de 1987 ocorreu um acidente radioativo em Goiânia. No evento em questão, uma máquina de raio X não foi devidamente descartada, de forma que seu conteúdo, alguns gramas de césio-137, contaminou muitas pessoas da região. Para conter os danos, as autoridades recolheram e armazenaram todo o lixo radioativo em um local adequado e seguro. Considere a meia-vida do césio-137, que é de 30 anos. Para que o césio chegue a um ponto tolerável, é preciso que emita, aproximadamente, 3% de sua capacidade original de radiação. Sabendo disso, quantos anos serão necessários para que o lixo alcance a faixa tolerável?

Cabeçote da bomba que continha a cápsula com o césio-137 do acidente radioativo ocorrido em Goiânia (GO), em 1987.

(A) 180 anos
(B) 150 anos
(C) 120 anos
(D) 90 anos
(E) 60 anos

Alternativa **A.**

IV. Uma substância passou pelo processo de decaimento exponencial por 48 dias, de maneira que sua massa passou a ser 12,5% da quantidade inicial. Qual seria o tempo de meia-vida dessa substância?

(A) 30 dias
(B) 24 dias
(C) 16 dias
(D) 10 dias
(E) 6 dias

Alternativa **C.**

_AMPLIANDO

Para compreender melhor a cronologia do acidente com o césio-137 em 1987 na cidade de Goiânia, considerado o maior acidente radioativo da história do Brasil, assista ao vídeo disponibilizado no canal do YouTube da *BBC News Brasil*.

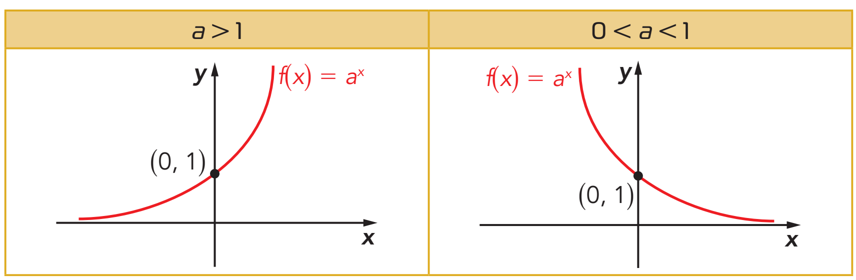
Assista a uma videoaula sobre o tema acessando o *QR code*.

Função exponencial

Uma função exponencial é representada por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{+}^{*}$, geralmente definida por $\boldsymbol{f(x) = a^x}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$.

O gráfico de uma função exponencial corresponde a uma curva que pode ser crescente ($a > 1$) ou decrescente ($0 < a < 1$). Se $a > 1$, a curva aproxima-se de zero quando assume valores negativos cada vez menores; se $0 < a < 1$, a curva aproxima-se de zero quando assume valores positivos cada vez maiores.

Toda função exponencial do tipo $f(x) = a^x$, independentemente de ser crescente ou decrescente, sempre intercepta o eixo y no ponto $(0, 1)$, uma vez que, se $x = 0$, $f(x) = a^0 = 1$, e é representada sempre acima do eixo x.



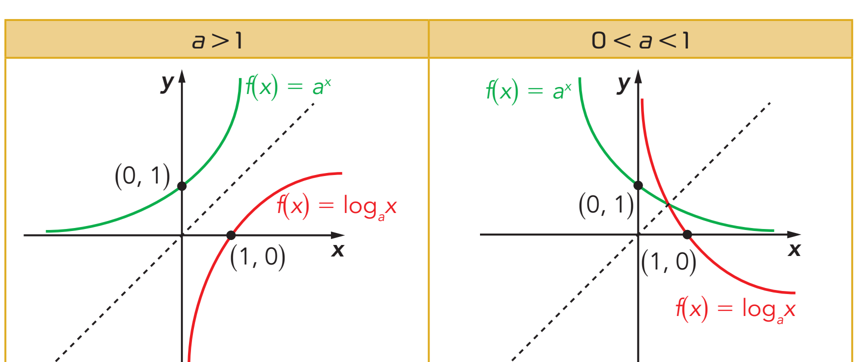
Banco de imagens/Arquivo da editora

O crescimento ou o decrescimento exponencial é característico de diversos fenômenos naturais e de situações do cotidiano, em especial da Matemática Financeira. Logo, algumas constantes são necessárias para modelar determinados tipos de função, como em $f(x) = b \cdot a^{kx}$, com b e $k \in \mathbb{R}$. Nesse caso, $(0, b)$ representa o ponto em que a curva intercepta o eixo y.

Função logarítmica

O **logaritmo** de um número é o expoente que dada base deve ter para resultar em certa potência. Se a (base do logaritmo) e b (logaritmando) são números reais e positivos, com $a \neq 1$ e $x \in \mathbb{R}$, tem-se: $\boldsymbol{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$. Algumas consequências dessa definição são $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ e $\log_a a^n = n$.

Uma função logarítmica $f: \mathbb{R}_{+}^{*} \rightarrow \mathbb{R}$ é geralmente definida por $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, e é considerada inversa da função exponencial de base a. Como consequência, os gráficos dessas duas funções são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares. Logo, uma curva logarítmica intercepta o ponto $(1, 0)$ em vez do ponto $(0, 1)$ e, uma vez que x é um número real positivo, a função logarítmica sempre está à direita do eixo y.



Banco de imagens/Arquivo da editora

_ETAPA 2

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 Considere a função exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 9^x$.

I. Qual é o valor de $\dfrac{f(2)}{f\left(\frac{1}{2}\right)}$?

(A) 1

(B) 3

(C) 9

(D) 27

(E) 81

Alternativa **D.**

II. Em relação ao gráfico associado à função f, é correto afirmar que:

(A) corresponde a uma curva exponencial decrescente.

(B) corresponde a uma curva parabólica crescente.

(C) não intercepta o eixo x em nenhum ponto.

(D) intercepta o eixo y em $(0, 9)$.

(E) não apresenta uma função logarítmica inversa.

Alternativa **C.**

2 Em um experimento, foram inseridas inicialmente 50 bactérias. A cada meia hora, a quantidade de bactérias dobrava. Quantas bactérias havia ao final de 2 horas?

(A) 200.

(B) 400.

(C) 600.

(D) 800.

(E) 1600.

Alternativa **D.**

3 O valor de um imóvel, tendo em vista fatores adversos na localidade onde está situado, sofreu uma redução de 5% a cada intervalo de 3 anos, entre os anos de 2010 e 2019. Sabendo que o preço era 400 mil reais em 2010 e que ele foi vendido no final de 2019, qual foi o valor de venda desse imóvel, em milhares de reais?

(A) R$ 252.100,00

(B) R$ 294.100,00

(C) R$ 342.950,00

(D) R$ 361.000,00

(E) R$ 380.000,00

Alternativa **C.**

4 Determinada revista é disponibilizada nos formatos impresso e digital. A quantidade de assinantes que adquiriram apenas o formato digital no ano de 2023 pôde ser estimada por meio de uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 15\,000 \cdot 0{,}97^x$, em que x é o tempo medido em meses.

I. A quantidade de assinantes que utilizaram apenas o formato digital durante o ano de 2023, a cada mês:

(A) cresceu 0,03%.

(B) cresceu 3%.

(C) decresceu 0,03%.

(D) decresceu 3%.

(E) decresceu 30%.

Alternativa **D.**

II. A quantidade de assinantes que utilizavam somente o formato digital no fim do primeiro semestre era de:

(A) 10 407.

(B) 12 494.

(C) 13 690.

(D) 15 000.

(E) 17 910.

Alternativa **B.**

5 A amoxicilina é um antibiótico de amplo espectro utilizado no tratamento de diversas infecções bacterianas sensíveis a esse medicamento, dentre as quais inclui-se a faringoamigdalite estreptocócica. Considere que uma pessoa receba uma dose com 500 mg de amoxicilina, às 8 h da manhã, na emergência de um hospital. Essa substância é decomposta a uma taxa constante, em função do intervalo de tempo, com meia-vida de aproximadamente 1 h, conforme as informações a seguir.

Medida de intervalo de tempo (em h)	Quantidade da substância no organismo (em mg)
0	500,0
1	250,0
2	125,0
3	62,5
4	31,2
5	15,6
6	7,8

Dados elaborados para fins didáticos.

Com base nas informações, a quantidade de amoxicilina $Q(t)$, em miligramas, em função do intervalo de tempo t, em horas, pode ser expressa por meio da função:

(A) $Q(t) = 500 \cdot 2^t$.

(B) $Q(t) = 500 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$.

(C) $Q(t) = 500 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

(D) $Q(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-t}$.

(E) $Q(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t}$.

Alternativa **E.**

6 Uma empresa imprime folhetos. A cada mês, a produção é triplicada em relação ao mês anterior. Se no primeiro mês foram produzidos 5 folhetos, quantos folhetos terão sido produzidos no total até o terceiro mês?

(A) 60.

(B) 65.

(C) 70.

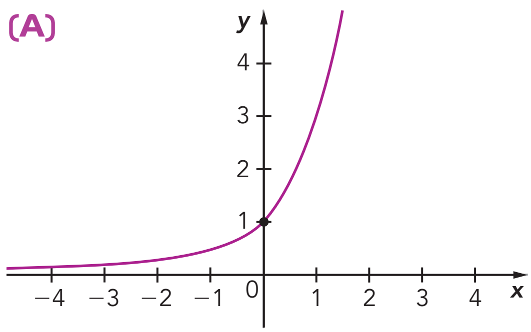
(D) 75.

(E) 105.

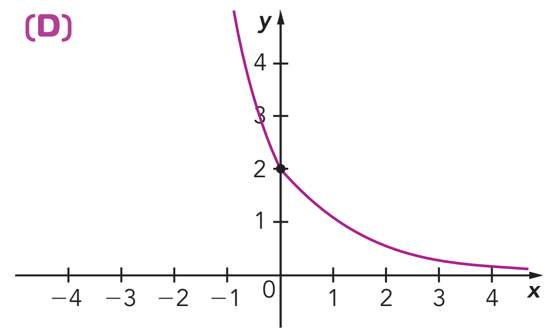
Alternativa **B**.

7 O gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida pela lei de formação $f(x) = 2 \cdot 3^x$ é:

(A)

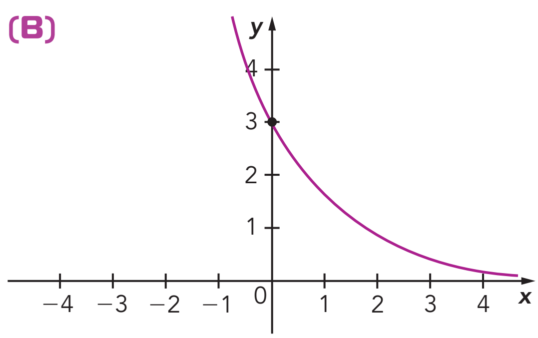


(D)

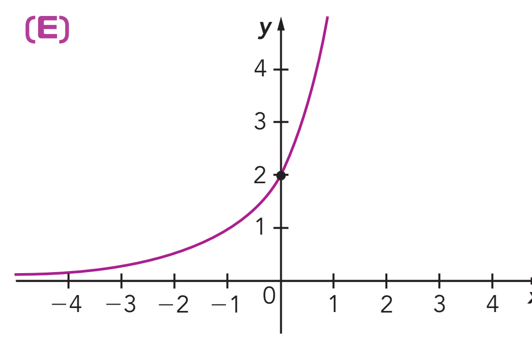


Banco de imagens/Arquivo da editora

(B)

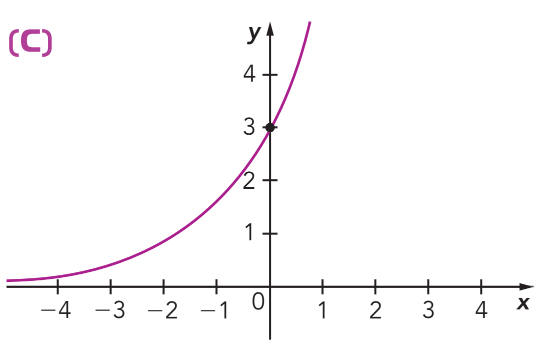


(E)



Alternativa **E**.

(C)



8 Uma função logarítmica $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \log_8 x$.
Se $f(x) = 3$, qual é o valor de x?

(A) 8
(B) 64
(C) 512
(D) 4 096
(E) 32 768

Alternativa **C**.

_DICA

A função inversa de uma função exponencial representada por $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ e definida por $y = b \cdot a^{kx}$, com b e $k \in \mathbb{R}$, pode ser encontrada observando-se os seguintes passos:

1. Troque x por y, e y por x.

$$x = b \cdot a^{ky}$$

2. Isole a^{ky}.

$$a^{ky} = \frac{x}{b}$$

3. Aplique o logaritmo de base a em ambos os lados. Lembre-se de que $\log_a a^n = n$.

$$\log_a a^{ky} = \log_a \frac{x}{b} \Rightarrow ky = \log_a \frac{x}{b}$$

4. Por fim, isole y.

$$y = \frac{1}{k} \cdot \log_a \frac{x}{b}$$

9 Uma pessoa, cuja medida de massa é 128 kg, iniciou um programa de reeducação alimentar com a prática de exercícios físicos regulares. Com isso, ela conseguiu perder massa nos 2 primeiros meses, conforme pode-se ver nesta tabela.

Medida de intervalo de tempo (em meses)	Medida de massa (em kg)
0	128
1	112
2	98

Dados elaborados para fins didáticos.

Supondo que a cada mês a medida de massa continue sendo multiplicada pelo mesmo número real, a função que determina o intervalo de tempo t em que essa pessoa atingirá a massa M é igual a:

(A) $t = \log_{0,875}\left(\frac{M}{128}\right)$.

(B) $t = \log_{0,125}\left(\frac{M}{128}\right)$.

(C) $t = 2 \cdot \log_{0,875}\left(\frac{M}{128}\right)$.

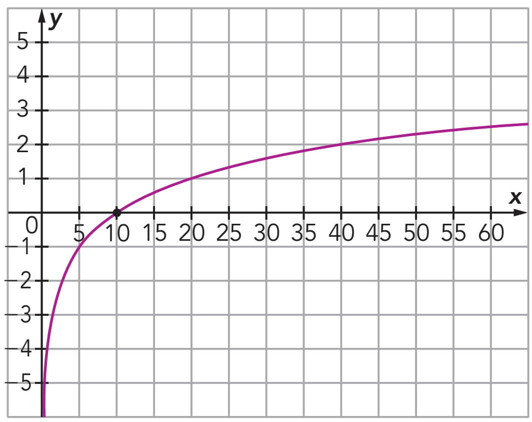
(D) $t = 2 \cdot \log_{0,125}\left(\frac{M}{128}\right)$.

(E) $t = \log_{0,125} M$.

Alternativa **A**.

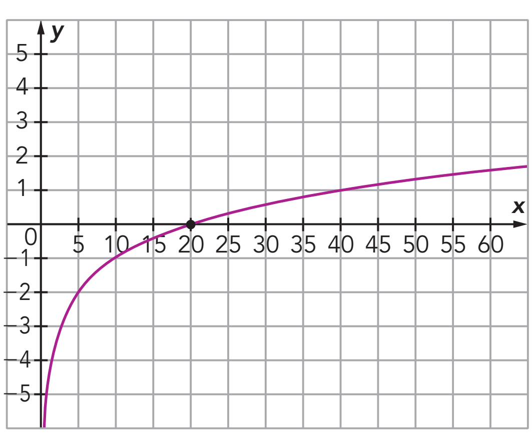
10 O gráfico da função inversa de $f(x) = 10 \cdot 2^x$ está representado em qual alternativa?

(A)



(B)

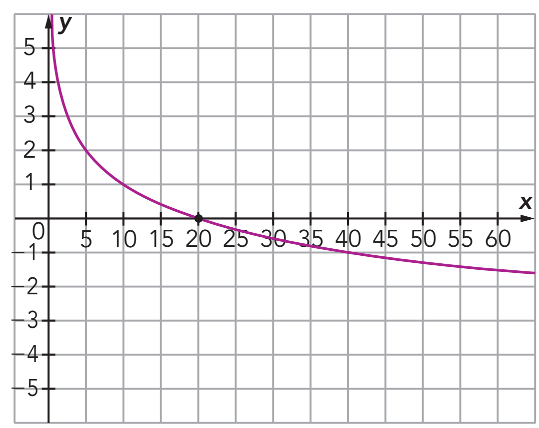
(C)



(D)

Banco de imagens/Arquivo da editora

(E)



Alternativa **A**.

11 Qual é a função inversa de $f(x) = 5\log_2 x$?

(A) $f(x) = 2^{-\frac{x}{5}}$

(B) $f(x) = -2^{\frac{x}{5}}$

(C) $f(x) = -2^x$

(D) $f(x) = 2^{\frac{x}{5}}$

(E) $f(x) = 2^{5x}$

Alternativa **D**.

_ETAPA 3

Consulte orientações e resoluções no **Manual do Professor**.

1 (Enem) Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$ em que t é o tempo, medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de carbono 14 medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente.

Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1 024	512
5	2 048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi

(A) 1.

(B) 2.

(C) 3.

(D) 4.

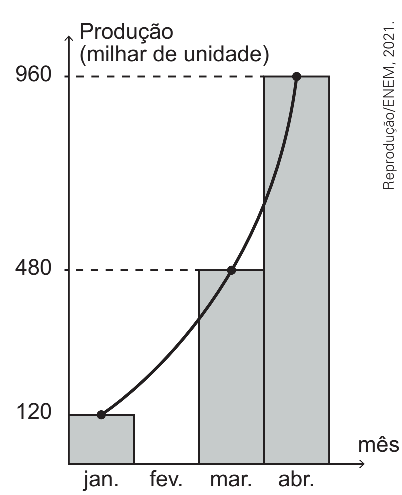
(E) 5.

Alternativa **B**.

2 (Enem) O gráfico informa a produção registrada por uma indústria nos meses de janeiro, março e abril.

Por problemas logísticos, não foi feito o levantamento sobre a produção no mês de fevereiro. Entretanto, as informações dos outros três meses sugerem que a produção nesse quadrimestre cresceu exponencialmente, conforme aponta a curva de tendência traçada no gráfico.

Assumindo a premissa de que o crescimento nesse período foi exponencial, pode-se inferir que a produção dessa indústria no mês de fevereiro, em milhares de unidades, foi



(A) 0.

(B) 120.

(C) 240.

(D) 300.

(E) 400.

Alternativa **C**.

3 (UERJ) Um imóvel perde 36% do valor de venda a cada dois anos. O valor $V(t)$ desse imóvel em t anos pode ser obtido por meio da fórmula a seguir, na qual V_0 corresponde ao seu valor atual.

$$V(t) = V_0 \times (0,64)^{\frac{t}{2}}$$

Admitindo que o valor de venda atual do imóvel seja igual a 50 mil reais, calcule seu valor de venda daqui a três anos.

25 600 reais

4 (Enem) Um laboratório realizou um teste para calcular a velocidade de reprodução de um tipo de bactéria. Para tanto, realizou um experimento para observar a reprodução de uma quantidade x dessas bactérias por um período de duas horas. Após esse período, constava no habitáculo do experimento uma população de 189 440 da citada bactéria. Constatou-se, assim, que a população de bactérias dobrava a cada 0,25 hora.

A quantidade inicial de bactérias era de

(A) 370.

(B) 740.

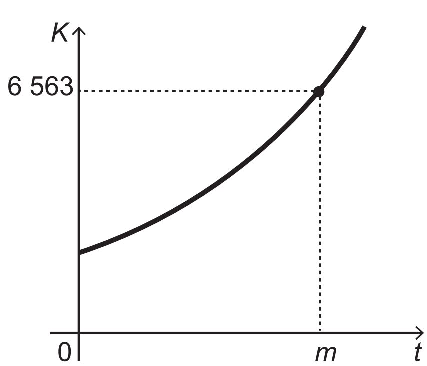
(C) 1 480.

(D) 11 840.

(E) 23 680.

Alternativa **B**.

5 (Enem) O crescimento de uma população de microrganismos é descrito pela expressão $K(t) = 81 \cdot 3^{\frac{1}{3}t} + 2$, em que $K(t)$ indica a quantidade de microrganismos em um meio de cultura em função do tempo t. O gráfico representa a evolução de K em relação ao tempo t.



Com base nos dados, o valor de m é

(A) $\frac{4}{3}$

(B) $\frac{7}{5}$

(C) $\frac{24}{5}$

(D) 12

(E) 81

Alternativa **D**.

6 (Enem) Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

(A) $E_1 = E_2 + 2$

(B) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$

(C) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$

(D) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$

(E) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

Alternativa **C.**

7 (Enem) Em um laboratório, cientistas observaram o crescimento de uma população de bactérias submetida a uma dieta magra em fósforo, com generosas porções de arsênico. Descobriu-se que o número de bactérias dessa população, após t horas de observação, poderia ser modelado pela função exponencial $N(t) = N_0 e^{kt}$, em que N_0 é o número de bactérias no instante do início da observação ($t = 0$) e representa uma constante real maior que 1, e k é uma constante real positiva. Sabe-se que, após uma hora de observação, o número de bactérias foi triplicado. Cinco horas após o início da observação, o número de bactérias, em relação ao número inicial dessa cultura, foi

(A) $3N_0$

(B) $15N_0$

(C) $243N_0$

(D) $360N_0$

(E) $729N_0$

Alternativa **C.**

_DICA

Para calcular a concentração de íons $[H^+]$ sabendo o pH de uma solução, usa-se:

$$pH = -\log [H^+]$$

8 (UERJ) A acidez de frutas cítricas é determinada pela concentração de íons hidrogênio. Uma amostra de polpa de laranja apresenta pH = 2,3.

Considerando log 2 = 0,3, a concentração de íons hidrogênio nessa amostra, em $mol \cdot L^{-1}$, equivale a:

(A) 0,001

(B) 0,003

(C) 0,005

(D) 0,007

Alternativa **C**.

9 (UFRGS-RS) A concentração de alguns medicamentos no organismo está relacionada com a meia-vida, ou seja, o tempo necessário para que a quantidade inicial do medicamento no organismo seja reduzida pela metade.

Considere que a meia-vida de determinado medicamento é de 6 horas. Sabendo que um paciente ingeriu 120 mg desse medicamento às 10 horas, assinale a alternativa que representa a melhor aproximação para a concentração desse medicamento, no organismo desse paciente, às 16 horas do dia seguinte.

(A) 2,75 mg.

(B) 3 mg.

(C) 3,75 mg.

(D) 4 mg.

(E) 4,25 mg.

Alternativa **C**.

10 (Unicamp-SP) Uma pesquisadora está testando o efeito de um medicamento em uma bactéria. Sabe-se que a função que descreve a quantidade de bactérias vivas na amostra em um tempo t, dado em minutos, é $Q(t) = C \cdot 10^{-bt}$, com b e C dependendo de características da bactéria e do medicamento.

a) Para uma certa amostra com 5 milhões de bactérias, verificou-se que, nos primeiros 10 minutos, 9/10 da quantidade de bactérias na amostra morreram. Qual é a quantidade de bactérias vivas que restaram após 20 minutos?

b) Numa outra amostra, onde foi descoberto experimentalmente que $b = 3$, quanto tempo levará para que a quantidade de bactérias fique reduzida à metade?

Dados: $\log_{10} 2 \approx 0,3$.

a) 50 000 bactérias.
b) Aproximadamente 0,1 minuto.

Referências bibliográficas

KANTOWSKI, M. G. Algumas considerações sobre o ensino para resolução de problemas. In: KRULIK, S.; REYS, R. E. (org.). *A resolução de problema na matemática escolar*. Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

Esse livro reúne 22 artigos de diversos especialistas norte-americanos sobre a resolução de problemas na escola.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

A obra apresenta bons parâmetros de conceitos relacionados a conjuntos numéricos e a funções que devem ser revistos e abordados no Ensino Médio.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004. v. 2.

Nesse segundo volume da coleção, os autores exploram dois assuntos principais: a matemática discreta e a geometria espacial. Alguns dos tópicos da matemática discreta são: matemática financeira, combinatória e probabilidade.

MAGALHÃES, M. N.; LIMA, A. C. P. *Noções de probabilidade e estatística*. 7. ed. São Paulo: Edusp, 2015.

Nesse livro, os autores se baseiam na vasta experiência que têm em sala de aula para explorar os principais conceitos de estatística descritiva e, posteriormente, tópicos de probabilidade e variáveis aleatórias.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise combinatória e probabilidade*: com as soluções dos exercícios. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

Nesse livro, os autores exploram a resolução de problemas de análise combinatória e probabilidade, levando em consideração a complexidade desses assuntos para estudantes do Ensino Médio.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. *Progressões e matemática financeira*. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

Nesse livro, os autores apresentam exemplos do dia a dia para discorrer sobre os conceitos de progressões e matemática financeira, incluindo taxas de juros simples e compostos, entre outros tópicos.

MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de matemática elementar*: combinatória. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 4.

Nesse quarto volume da coleção, o autor aborda os conceitos que permeiam a combinatória, como técnicas elementares de contagem, arranjos, combinações, permutações e teoria dos grafos.

MUNIZ NETO, A. C. *Tópicos de matemática elementar:* geometria euclidiana plana. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 2.

Nesse segundo volume da coleção, o autor explora as principais temáticas relacionadas à geometria euclidiana plana, desde os conceitos geométricos básicos e primitivos até alguns conceitos da geometria analítica plana, como o método cartesiano, e vetores no plano.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: Editora da Unesp, 1999.

Esse livro reúne contribuições de pesquisadores do Departamento de Matemática da Unesp, em Rio Claro (SP), testemunhando seus atuais interesses de pesquisa.

ROSS, S. *Probabilidade*: um curso moderno com aplicações. Tradução de Alberto Resende De Conti. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Nesse livro, o autor trata, por meio de exercícios e respostas, de aspectos básicos e avançados de probabilidade univariada.

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

Caro professor,

A coleção **São Paulo em ação** foi cuidadosamente planejada para ser um eficaz instrumento de transformação. Em sua concepção, consideraram-se não apenas os documentos oficiais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as matrizes de avaliações de larga escala, mas também as demandas das salas de aula, os principais desafios em diferentes contextos educacionais e inúmeros casos de sucesso.

Acreditamos que esse conjunto de elementos permitiu a construção de uma solução educacional completa e significativa, capaz de contribuir para a identificação e a superação de defasagens, a revisão de conteúdos essenciais e a preparação dos estudantes do Ensino Médio para as avaliações do Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb).

Nos últimos anos, o Saeb tem passado por mudanças significativas com a reformulação de suas Matrizes de Referência para adequar-se à BNCC. Mesmo sem a publicação de uma nova matriz de Matemática para o Ensino Médio, a coleção já está alinhada às competências e habilidades da BNCC.

Para isso, a coleção revisita conteúdos, traz estratégias de remediação para possíveis lacunas e sugestões de ações que favoreçam a superação de desafios, a construção da autonomia e o fortalecimento da autoestima, aspectos fundamentais nos processos de aprendizagem, principalmente, nos momentos avaliativos.

Um dos principais aspectos desta nova coleção é a presença de uma linguagem mais alinhada às culturas juvenis, inspirada em uma estética futurista. Acreditamos que isso possa motivar os estudantes a perseguir seus objetivos com mais interesse, autonomia e protagonismo.

Para auxiliá-lo na compreensão de cada elemento da coleção e na potencialização dos trabalhos em sala de aula, você pode contar com este **Manual do Professor**. Nele, você encontrará os pressupostos que embasam a coleção, a organização geral da obra, sugestões de planejamento e resolução de todas as atividades. Esperamos que ele seja seu companheiro de viagem rumo ao sucesso de seus estudantes!

Boa jornada!

Sumário

Orientações gerais

Este **Manual do Professor** é indicado aos professores do Ensino Médio e está organizado da seguinte maneira:

- **Orientações gerais:** são apresentados os fundamentos teórico-metodológicos, os documentos legais e as avaliações que norteiam a coleção, a organização geral da obra e as sugestões de planejamento.
- **Orientações específicas:** fornece informações relativas a cada volume, apresentando as habilidades e os conteúdos desenvolvidos ao longo da obra. Traz, também, orientações referentes a cada jornada, com resoluções das atividades.

O que é o Saeb?

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb) é um conjunto de avaliações externas que tem como objetivo realizar o diagnóstico da Educação Básica no Brasil e gerar indicadores que subsidiem a criação, o aprimoramento e o monitoramento das políticas educacionais brasileiras.

Sua organização e realização são feitas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), que, por sua vez, é vinculado ao Ministério da Educação (MEC).

As avaliações aplicadas pelo governo durante as etapas da Educação Básica tinham três denominações diferentes: Prova Brasil, Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA) e Saeb. Esses exames também seguiam calendários distintos. Em 2018, o Ministério da Educação decidiu unificá-los e todos foram incorporados no Saeb. Essa nova versão única do sistema de avaliações ainda está em processo de estruturação e pode passar por novas modificações nos próximos anos.

Como são os testes do Saeb no Ensino Médio?

Os testes da 3ª e da 4ª série do Ensino Médio de Língua Portuguesa e de Matemática de 2025 foram aplicados nos meses de outubro e novembro, compostos de 52 questões de múltipla escolha ainda estruturadas na matriz do Saeb de 2001, ou seja, sem alinhamento à BNCC (2018), sendo 26 itens de Língua Portuguesa e 26 de Matemática. Como esses testes estão passando por um processo de reestruturação, o número e o formato das questões podem ser modificados nas próximas edições.

A avaliação, realizada a cada dois anos, conta também com questionários contextuais, aplicados aos estudantes, professores, diretores e secretários municipais e estaduais de Educação. Nesses questionários, coletam-se informações sobre fatores socioeconômicos e de contexto, que auxiliam na compreensão dos resultados dos testes aplicados.

Matriz de Referência × Matriz Curricular

A Matriz de Referência, denominação utilizada em avaliações em larga escala, como o Saeb, indica as habilidades esperadas para cada etapa da escolarização e orienta a elaboração dos testes.

A Matriz Curricular, por sua vez, especifica os componentes curriculares dentro do Projeto Pedagógico de uma instituição de ensino e estabelece os fundamentos teórico-metodológicos, as metas e os conceitos a serem trabalhados ao longo de cada ano.

É importante compreender que a Matriz de Referência difere da Matriz Curricular de uma instituição e, portanto, do currículo a ser desenvolvido pelo professor em sala de aula, tendo em vista que não contempla na totalidade os conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais imprescindíveis para a formação integral dos estudantes do Ensino Médio.

Matriz de Referência do Saeb para avaliação de Matemática

A Matriz de Referência de Matemática do Saeb de 2001 ainda em vigor, para a 3ª e a 4ª série do Ensino Médio, está organizada de acordo com os seguintes temas:

- espaço e forma;
- grandezas e medidas;
- números e operações / álgebra e funções;
- tratamento da informação.

Com base nesses temas, são definidos 35 descritores que expressam as aprendizagens essenciais para o Ensino Médio e orientam a elaboração das questões dos testes aplicados.

Escala de proficiência

Você pode consultar a escala de proficiência da Matriz Saeb de Matemática para o Ensino Médio no *site* do Inep, disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/centrais-de-conteudo/acervo-linha-editorial/publicacoes-institucionais/avaliacoes-e-exames-da-educacao-basica/escalas-de-proficiencia-do-saeb. Acesso em: 2 nov. 2023.

Resultados do Saeb e do Ideb

O resultado da avaliação do Saeb da 3ª e da 4ª série do Ensino Médio é apresentado por meio de pontos em uma escala de proficiência (níveis 0 a 10), com base na Matriz de Referência. Considerando as respostas dadas às questões, é possível verificar quais descritores previstos na matriz foram de fato desenvolvidos em sua integralidade, quais precisam ser aperfeiçoados e quais devem ser revistos e retrabalhados.

Assim, esse tipo de avaliação fornece subsídios para uma intervenção pedagógica mais precisa, levando o professor e as instituições de ensino a fortalecer ou repensar estratégias de acordo com os pontos fortes e as defasagens encontradas.

A escala de desempenho dos estudantes pode ser comparada a uma régua, cuja base são os padrões selecionados para os itens da avaliação. A descrição desses itens, a cada intervalo da escala, aproxima-se dos descritores esperados. Os resultados são utilizados para calcular o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).

O Ideb é um indicador de desempenho utilizado para avaliar a qualidade da Educação Básica no Brasil. O índice da avaliação varia de 0 a 10 e é calculado com base nos dados do fluxo escolar (reprovação, distorção de idade e série e abandono), obtidos por meio do Censo Escolar, e nas médias de desempenho nos exames do Saeb.

O Ideb estabelece, ainda, metas diferenciadas para cada escola e rede de ensino, calculadas de forma individual de acordo com o contexto local.

J.P. Junior Pereira/Shutterstock

O Saeb fornece subsídios para avaliar, fortalecer ou repensar estratégias em vários níveis, desde práticas docentes em sala de aula até políticas educacionais nacionais.

Escala de proficiência do Saeb: um ponto de partida

Os níveis da **Escala de proficiência do Saeb**, que, a partir do nível 2, são cumulativos, representam habilidades que os estudantes demonstram apresentar nos testes aplicados por essa avaliação, permitindo identificar o estágio do desenvolvimento e/ou as lacunas de aprendizagem dos estudantes. Afinal, ela é

> "[...] uma forma de descrição dos resultados [dos testes do Saeb] para o público de interesse, de forma a proporcionar conclusões e embasar decisões para a melhoria do processo ou dos resultados". (BRASIL, 2020a)

Assim, nesta coleção, compreendemos essa escala como uma importante ferramenta para tomada de decisões e para atuar de maneira positiva nas defasagens dos estudantes. Por essa razão, as atividades deste volume referenciam os **níveis de proficiência** e os **descritores** relacionados a eles (consulte o quadro completo nas **Orientações específicas**).

Fundamentos teórico-metodológicos

A BNCC e a Matriz de Referência do Saeb

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento normativo, elaborado por especialistas de várias áreas do conhecimento em diálogo com educadores e sociedade. O objetivo com esse documento é garantir o desenvolvimento integral dos estudantes, além de definir um conjunto de aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidas ao longo da Educação Básica no Brasil.

A BNCC traz em sua centralidade 10 competências gerais da Educação Básica. Para garantir o desenvolvimento dessas competências, são definidas competências específicas e habilidades, que explicitam como as competências gerais se expressam e são mobilizadas em cada área do conhecimento.

De acordo com o documento, competência é definida como:

> [...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 8.

BNCC

Você pode consultar o documento completo da BNCC no *site* do Ministério da Educação, disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 30 ago. 2023.

As competências da BNCC vão ao encontro dos termos estabelecidos pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) ao articular a construção de conhecimentos, o desenvolvimento de habilidades e a formação de atitudes e valores (BRASIL, 2018).

Segundo os artigos 10 e 11 da Resolução CNE/CEB n. 3/2018, os currículos do Ensino Médio são compostos da formação geral básica e dos itinerários formativos, indissociavelmente, sendo a formação geral básica constituída pelas competências e habilidades previstas na BNCC organizadas pelas áreas do conhecimento a seguir.

EIXOS DO CONHECIMENTO

LINGUAGENS E SUAS TECNOLOGIAS	MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS
CIÊNCIAS DA NATUREZA E SUAS TECNOLOGIAS	CIÊNCIAS HUMANAS E SOCIAIS APLICADAS

Nos últimos anos, as políticas públicas relacionadas ao Ensino Médio foram reformuladas a partir da promulgação da BNCC para o segmento e da implantação do Novo Ensino Médio em 2017, porém rediscutida em 2023. De acordo com a previsão do Inep, os testes do Saeb de Língua Portuguesa e de Matemática para o Ensino Médio serão alinhados à BNCC no futuro.

Mesmo sem a publicação de novas matrizes de Língua Portuguesa e Matemática alinhadas à BNCC, como ocorreu em 2018 com o 2º ano do Ensino Fundamental e em 2022 com o 5º e o 9º ano do Ensino Fundamental, a coleção **São Paulo em ação** está alinhada às competências e habilidades da BNCC do Ensino Médio. Na seção de **Orientações específicas** deste manual estão descritas competências e habilidades relacionadas a cada jornada, bem como os descritores da Matriz de Referência (2001) e os níveis selecionados da Escala de Proficiência do Saeb.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio

A BNCC define como responsabilidade do Ensino Médio o aproveitamento de todo o potencial já construído pelos estudantes no Ensino Fundamental para a promoção de ações que ampliem e aprofundem o **letramento matemático** iniciado anteriormente. De acordo com a matriz do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) 2012:

> Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.

BRASIL. Ministério da Educação. *Matriz de Avaliação de Matemática: Pisa*. Brasília, DF: Inep, 2012.

De acordo com a BNCC, os estudantes do Ensino Médio devem consolidar não apenas os conhecimentos desenvolvidos no Ensino Fundamental, como também devem agregar novos, explorando outros recursos que possibilitem a formulação e resolução de problemas mais complexos e que exijam mais reflexão, abstração e autonomia. É necessário também construir uma visão mais integrada, interdisciplinar e aplicável da Matemática. Logo, é de suma importância a contemplação de diferentes contextos, incluindo aqueles oriundos do desenvolvimento tecnológico, da realidade do estudante e de outras áreas do conhecimento.

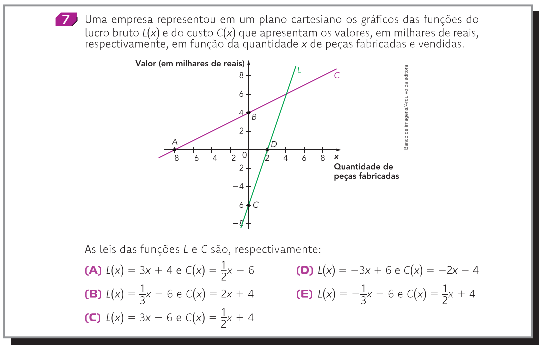
No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias deve garantir o desenvolvimento das seguintes competências específicas, sendo estas articuladas às respectivas competências de Matemática do Ensino Fundamental, com as adaptações necessárias para atender às particularidades de aprendizado dos estudantes da etapa final da Educação Básica.

Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio	
CEMAT01	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
CEMAT02	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
CEMAT03	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
CEMAT04	Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
CEMAT05	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Para cada uma dessas competências, são descritas habilidades a serem desenvolvidas. Para garantir a flexibilização da definição anual dos currículos e das propostas pedagógicas de cada escola, as habilidades são apresentadas sem indicação de seriação, como também possibilitam o desenvolvimento de outras competências específicas, ainda que uma habilidade esteja ligada a determinada competência.

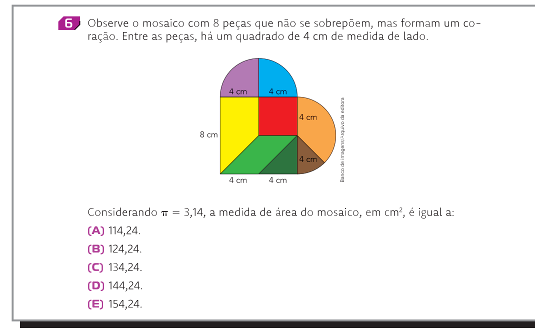
Embora as habilidades da BNCC também possam ser organizadas de acordo com as unidades de conhecimento associadas, **Números e Álgebra**, **Geometria e Medidas** e **Probabilidade e Estatística**, é importante que os estudantes percebam como as habilidades se articulam e se interrelacionam em diferentes contextos e situações-problema.

Nesta coleção, os estudantes são convidados a vivenciar e cumprir **jornadas**. Em cada uma delas são propostas atividades que articulam habilidades associadas a uma ou mais unidades do conhecimento.


7 Uma empresa representou em um plano cartesiano os gráficos das funções do lucro bruto $L(x)$ e do custo $C(x)$ que apresentam os valores, em milhares de reais, respectivamente, em função da quantidade x de peças fabricadas e vendidas.

As leis das funções L e C são, respectivamente:

(A) $L(x) = 3x + 4$ e $C(x) = \frac{1}{2}x - 6$
(B) $L(x) = \frac{1}{3}x - 6$ e $C(x) = 2x + 4$
(C) $L(x) = 3x - 6$ e $C(x) = \frac{1}{2}x + 4$
(D) $L(x) = -3x + 6$ e $C(x) = -2x - 4$
(E) $L(x) = -\frac{1}{3}x - 6$ e $C(x) = \frac{1}{2}x + 4$


6 Observe o mosaico com 8 peças que não se sobrepõem, mas formam um coração. Entre as peças, há um quadrado de 4 cm de medida de lado.

Considerando $\pi = 3{,}14$, a medida de área do mosaico, em cm^2, é igual a:

(A) 114,24.
(B) 124,24.
(C) 134,24.
(D) 144,24.
(E) 154,24.

Reprodução de trechos do Livro 3.

No início de cada jornada, há uma abertura para contextualizar o conteúdo programático, ligando-o à realidade do estudante, o que mostra que os objetos de conhecimento tratados na jornada não são mera teorização desprendida da realidade, ou seja, eles têm relação com o cotidiano.

As escadas rolantes que vemos em diversos lugares foram pensadas com o objetivo de facilitar o deslocamento das pessoas. Mas existe uma discussão sobre o uso dessas escadas: Será que é mais vantajoso caminhar ou permanecer parados enquanto estamos nelas? Para responder a essa pergunta, é preciso levar em conta a dinâmica de cada pessoa e a situação em que ela se encontra. Nas escadas fixas nos deslocamos de um andar para o outro gastando energia. Na escada rolante, se alguém optar por caminhar no mesmo sentido da escada em vez de ficar parado, gastará mais energia do que ficar parado. No entanto, o aumento na velocidade pode compensar esse gasto energético, resultando em um deslocamento mais rápido.

As escadas rolantes realizam um movimento com a mesma velocidade em todos os momentos em que está ligada, sem variação; assim, dizemos que ela tem uma **velocidade constante** e desloca-se em linha reta seguindo determinada direção. Portanto, esse movimento é classificado na Física como **Movimento Retilíneo Uniforme** (ou **MRU**). E o modelo matemático que descreve esse tipo de movimento é conhecido como **função polinomial de 1º grau**, considerando que ele pode fornecer a distância percorrida por um corpo em função do intervalo de tempo. Além disso, a representação gráfica dessa função é uma **reta** que relaciona o espaço que um ponto posicionado na escada percorre em determinado intervalo de tempo.

Reprodução de trecho do Livro 3.

Cada jornada tem objetivos e expectativas de aprendizagem próprias e desempenha um percurso didático com começo, meio e fim. Cada uma delas tem uma ou mais habilidades da matriz de Ensino Médio da BNCC para o atendimento desses objetivos e expectativas. Essa organização em jornadas independentes garante ao professor mais autonomia no planejamento das aulas.

Não podemos nos esquecer de que os estudantes chegam à escola com conhecimentos e concepções formados ao longo de suas experiências, não apenas no contexto escolar, mas também nas vivências familiares e sociais.

Como mostra o exemplo a seguir, diversas atividades propostas ao longo da coleção apresentam situações que articulam os conhecimentos prévios e propõem momentos de socialização, com o objetivo de gerar situações de **aprendizagem significativa**.

Aprendizagem significativa é o processo que ocorre quando um novo conhecimento se relaciona a concepções e conhecimentos prévios, em uma situação que faça sentido para o estudante. Nesse processo, o estudante amplia e atualiza a concepção anterior, atribuindo novos significados aos próprios conhecimentos.

1. Você acha que o oferecimento de *cashback* é vantajoso? Em caso afirmativo, cite uma vantagem para quem compra e uma para quem está vendendo.

2. Como você faria para construir uma expressão matemática que calcule o valor de *cashback* a ser recebido em uma compra?

3. De que maneira você calcularia um *cashback* de 2% do valor de uma compra?

Reprodução de trecho do Livro 3.

A Matemática e suas Tecnologias está diretamente relacionada a diversas situações do cotidiano, como a investigação de fenômenos naturais e a análise de processos políticos, econômicos, sociais, ambientais e culturais. Assim, é preciso considerar que os estudantes já têm conhecimentos de objetos matemáticos de diferentes unidades de conhecimento e que conversam com outras áreas, em especial com Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas. A valorização desse saber é uma das vertentes relevantes à criação de oportunidades significativas de construção e/ou consolidação de novos conceitos.

Ao trabalharem as unidades de conhecimento da Matemática e suas Tecnologias de forma integrada, interdisciplinar e contextualizada, os estudantes passam a compreender que a Matemática não é composta de áreas independentes, e sim de conhecimentos complementares que podem ser articulados em situações reais.

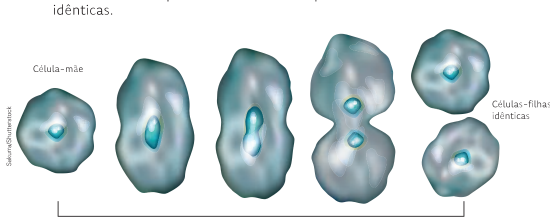
Assim, reforça-se a ideia da ampliação do letramento matemático, com valorização dos conhecimentos prévios e contextualização dos aprendizados em situações cotidianas, permitindo aos estudantes o desenvolvimento prático da Matemática em contextos variados e reais e com outras áreas do conhecimento.

15

A **mitose** é um processo de divisão celular que resulta na formação de duas células-filhas com as mesmas características genéticas e o mesmo número de cromossomos. Esse processo, considerado uma divisão equitativa, promove o desenvolvimento do organismo, manutenção da homeostase, renovação dos tecidos e reprodução assexuada.

BIOLOGIANET. Disponível em: https://www.biologianet.com/biologia-celular/mitose.htm. Acesso em: 9 set. 2023.

O ciclo se inicia a partir de 1 célula-mãe que se transforma em 2 células-filhas idênticas.



Por meio da mitose, cada célula se divide em 2 células novas, que, por sua vez, vão originar 4 outras, e assim sucessivamente. Com isso, ao fim de 6 ciclos de mitose, qual será o total de células?

(A) 15

(B) 16

(C) 31

(D) 32

(E) 64

Reprodução de trecho do Livro 3.

A importância da ludicidade na aprendizagem

O jogo é uma eficaz ferramenta no ensino da Matemática, pois estimula o raciocínio, desenvolve a criatividade, favorece a troca de experiências e faz com que os estudantes construam conhecimentos de forma divertida. Por meio de brincadeiras, os estudantes passam a perceber a importância das regras, da comunicação e do respeito, além de desenvolver estratégias próprias para superar suas dificuldades.

Segundo Antunes (2014), o jogo permite ao estudante construir novas descobertas e desenvolver e enriquecer sua personalidade, além de ser um instrumento pedagógico que leva o professor à condição de condutor, incentivador e avaliador da aprendizagem.

Elementos próprios aos *games*, como objetivos, regras claras, *feedback* imediato, recompensas, motivação, erro, diversão, narrativa, níveis de aprendizagem, abstração da realidade, competição, conflito, cooperação e voluntariedade, podem ser explorados no contexto escolar para promover a aprendizagem (FARDO, 2013).

Além dos pontos pedagógicos, os jogos são componentes importantes da infância e da juventude e estão incorporados, por meio de inúmeras formas de manifestação, nas culturas juvenis.

Considerando tais aspectos, a elaboração desta coleção foi pautada em estratégias de **gamificação** que aproximam a trajetória do aprendizado de um *game*. Acreditamos que essa estratégia pode favorecer o engajamento dos estudantes e o desenvolvimento da autonomia, pois se trata de uma linguagem familiar, com "recompensas" a curto prazo (passagem para outra tarefa ou missão) e um contexto envolvente e atrativo.

Um exemplo da aplicação dessa estratégia na coleção é a organização dos conteúdos de cada volume em **jornadas**, como mencionado anteriormente.

As etapas e os demais componentes de cada missão, assim como outros elementos de gamificação, são mais bem detalhados no tópico **Organização da coleção** deste manual.

Luciana Whitaker/Pulsar Imagens

Para que a observação seja considerada parte relevante do processo avaliativo, é importante realizar registros de maneira sistematizada e definir previamente os critérios avaliativos.

Organização da coleção

Livro do Estudante

Cada um dos volumes do **Livro do Estudante** está organizado em **jornadas**. A abordagem das habilidades da BNCC nessas jornadas é pautada pelas unidades temáticas de Matemática: Números e Álgebra, Geometria e Medidas e Probabilidade e Estatística.

A elaboração desta coleção foi pautada em estratégias de gamificação que aproximam a trajetória do aprendizado de um *game*. Cada jornada é dividida em etapas, criando uma estrutura semelhante às fases de um jogo, o que agrega elementos lúdicos, desafiadores e instigantes, capazes de engajar os estudantes.

Cada jornada tem objetivos e expectativas de aprendizagem próprios que atendem à matriz de Ensino Médio da BNCC e segue um percurso didático com começo, meio e fim. Essa organização de jornadas permite ao professor mais autonomia no planejamento das aulas.

Cada jornada está organizada de acordo com a estrutura a seguir.

Na **abertura da jornada** há uma pequena introdução ao conteúdo programático da jornada por meio de um tema do cotidiano dos estudantes, acompanhada de **questões mobilizadoras** que possibilitem discussões sobre o tema apresentado e resgate de conhecimentos prévios sobre o assunto.

No final de dezembro de 2019, a Organização Mundial da Saúde (OMS) foi notificada sobre o surgimento de vários casos de uma pneumonia, na cidade chinesa de Wuhan, que não vinha respondendo aos tratamentos habituais. Era o início da pandemia da covid-19. Uma história que, três anos depois, resultou em 652 milhões de doentes e em 6,7 milhões de mortos no mundo, deixando marcas profundas na sociedade.

Uma das principais ações realizadas durante a pandemia da covid-19 foi o monitoramento do número de infectados, que crescia rapidamente a cada semana. Esse tipo de crescimento, denominado exponencial, pode ser identificado em várias situações do dia a dia, como em investimentos financeiros, na propagação de notícias (incluindo as *fake news*), no decaimento radioativo e no crescimento populacional de colônias de bactérias.

A Matemática desempenhou papel significativo na pesquisa e no desenvolvimento das vacinas, bem como na validação da eficácia do isolamento como medida crucial para conter a expansão da doença.

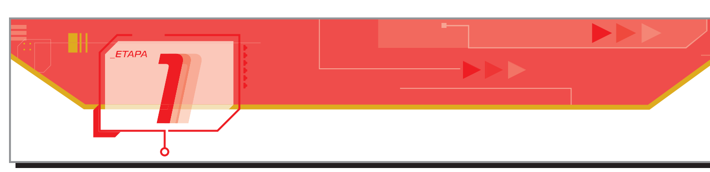
Com a ampla cobertura dos meios de comunicação, a população como um todo se viu instigada a se familiarizar com conceitos matemáticos, tais como taxas, curvas, média móvel e crescimento exponencial. Essa compreensão foi fundamental para a percepção da gravidade da situação e, como resultado, para a adoção de atitudes responsáveis, baseadas em informações verídicas e em consonância com a Ciência, na tentativa de proteger a própria vida e a de pessoas próximas.

1. Em sua opinião, quais são os principais fatores que influenciam a velocidade de propagação de notícias nas redes sociais?
2. Você tem conhecimento de alguma doença que tenha se propagado rapidamente no município em que você mora? Qual foi o último surto de gripe na escola em que você estuda? De que maneira sua cidade enfrentou a pandemia da covid-19?
3. Suponha que, em determinado município, o número de casos de covid-19 nas 2 primeiras semanas, após o surgimento do 1º caso confirmado, tenha seguido um padrão de crescimento exponencial. No primeiro dia, foram registradas 2 pessoas infectadas; no segundo dia, 4; e no terceiro dia, 8. Qual seria a quantidade de pessoas infectadas no décimo dia?

248 249

Reprodução de trecho do Livro 3, **abertura da jornada**.

Na **Etapa 1** são propostas atividades que têm como objetivo mobilizar conhecimentos essenciais do estudante e apresentar os referenciais teóricos necessários para o desenvolvimento da jornada.



Vinheta de abertura da **Etapa 1**.

O **Resolvendo a questão** apresenta o passo a passo de como resolver a atividade proposta, para que os estudantes se familiarizem com conceitos essenciais da jornada e retomem sua resolução sempre que necessário.

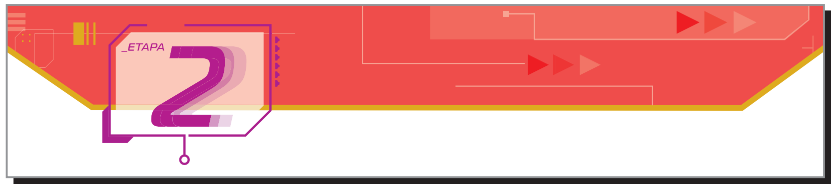
Vinheta do **Resolvendo a questão**.

O **Agora é com você** traz atividades de múltipla escolha no formato Saeb que exploram, de forma mais elementar, a(s) habilidade(s) da BNCC do Ensino Médio da jornada e a(s) respectiva(s) competência(s) específica(s).

Vinheta do **Agora é com você**.

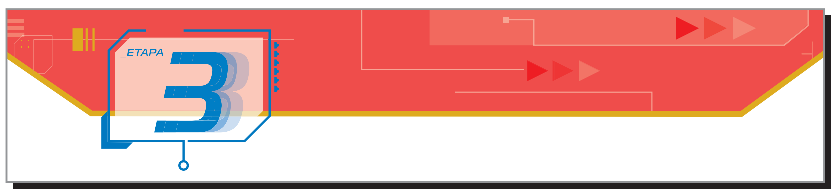
Por fim, a seção **Fique ligado** apresenta conceitos-chave importantes para o seguimento da jornada por meio de um quadro-resumo.

Vinheta da seção **Fique ligado**.



Vinheta de abertura da **Etapa 2**.

Em seguida, na **Etapa 2**, os estudantes são estimulados a desenvolver os referenciais teóricos apresentados na etapa anterior, por meio de atividades de múltipla escolha no formato Saeb que exploram, de maneira mais complexa, a(s) habilidade(s) e competência(s) da BNCC do Ensino Médio da jornada. Algumas dessas atividades se relacionam aos componentes curriculares de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.



Vinheta de abertura da **Etapa 3**.

Na **Etapa 3** são apresentadas atividades de múltipla escolha ou dissertativas de vestibulares e do Enem. O objetivo é que o estudante desenvolva o(s) objeto(s) de conhecimento trabalhado(s) nas etapas anteriores.

Ao longo das etapas, há dois boxes. O **Ampliando** apresenta sugestões de material complementar para ampliação dos objetos de conhecimento trabalhados na jornada: livros, artigos, jogos, vídeos, etc. Já o boxe **Dica** fornece informações relevantes para a resolução de determinada atividade.

_AMPLIANDO

Visualize os principais resultados do Censo Demográfico 2022 promovido pelo IBGE, por meio de mapas e estatísticas sobre população e domicílios no Brasil, nas grandes regiões, nas unidades da federação e nos munícipios.

Reprodução de trecho do Livro 3, boxe **Ampliando**.

_DICA

Na compra e venda de qualquer mercadoria, o preço de venda pode ser expresso em função dos valores do custo e do lucro da seguinte maneira:

$$\text{Venda} = \text{Custo} + \text{Lucro}$$

Além disso, é possível estabelecer relações percentuais do valor do lucro em função do preço de custo ou do preço de venda. Analise o exemplo a seguir.

Quem compra por R$ 500,00 e vende por R$ 800,00 obtém um lucro de R$ 300,00, que representa:

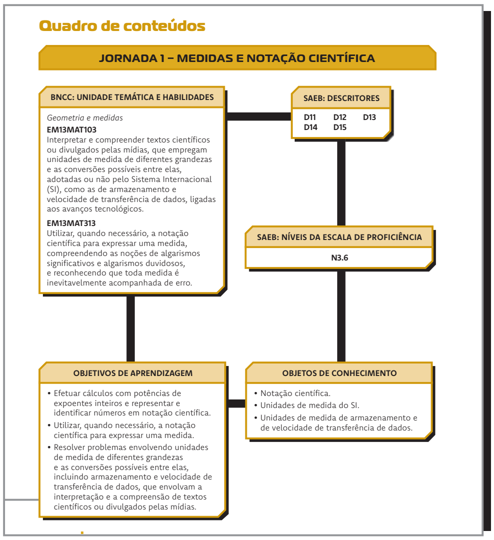
- $\frac{300}{500} = 0{,}60 = 60\%$ sobre o preço de custo;
- $\frac{300}{800} = 0{,}375 = 37{,}5\%$ sobre o preço de venda.

Note que, para o mesmo valor em reais, os percentuais de lucro são diferentes, pois dependem da referência.

Reprodução de trecho do Livro 3, boxe **Dica**.

Manual do Professor – parte específica

As resoluções de todas as atividades de uma jornada e os comentários pertinentes estão indicados nas **Orientações específicas da jornada** deste **Manual do Professor**. Para cada jornada, há também um **quadro de conteúdos** que traz informações relevantes para a organização curricular da jornada. Nele são indicados as competências específicas, unidades temáticas e habilidades da BNCC para o Ensino Médio, os objetos de conhecimento e objetivos de aprendizagem.



Reprodução de trecho do Manual do Professor, da Jornada 1, Livro 3.

A seção **Abertura da jornada**, além de introduzir o tema de abertura, relaciona-o aos objetos de conhecimento da jornada. As orientações ao professor na condução do material durante as aulas estão organizadas de acordo com as etapas da jornada.

Nessa parte específica, é apresentado também o gradiente de dificuldade de cada atividade, organizado a partir dos critérios definidos com apoio da Taxonomia de Bloom (FERRAZ, 2010), em três estágios: **fácil** (atividades que apresentam processos cognitivos/de conhecimento mais simples), **médio** (atividades medianamente complexas) e **difícil** (atividades mais complexas).

Ao longo dessa parte do manual, há ainda o boxe **Dica**, que tem como objetivo apoiar e expandir as orientações para o professor, apresentando indicações pontuais e importantes para atividades, ampliação do tema de abertura ou retomada de conhecimentos já desenvolvidos ao longo da jornada.

_DICA

Para ampliar o trabalho, estimule os estudantes a investigar os crescimentos exponenciais na natureza. O vídeo da série *Isto é Matemática*, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=GThyTefiVlY, é uma excelente oportunidade para isso.

Reprodução de trecho do Manual do Professor, boxe **Dica**, Livro 3.

Além do **Livro do Estudante** e do **Manual do Professor**, a coleção conta com as **Avaliações de Acompanhamento**. O manual também traz sugestões para acompanhamento das aprendizagens e momentos propícios para as aplicações das avaliações no quadro presente na próxima seção.

Planejamento anual

O planejamento deste material corresponde a 32 semanas, divididas em 4 bimestres, compreendendo 4 jornadas por bimestre. A aplicação de cada jornada regular corresponde a 2 semanas ou 4 aulas (veja o quadro de planejamento).

Como comentado anteriormente, as jornadas são organizadas em etapas que podem ser realizadas em sala de aula ou em casa. Essa organização permite ao professor mais autonomia para planejar o uso desse material de maneira adequada a cada contexto escolar. A seguir, sugerimos um modelo de quadro que pode ser usado para planejamento contínuo dos bimestres, de acordo com o calendário escolar ou o cronograma da rede de ensino.

	Planejamento semanal			
	Jornada	**Aplicação**		
		Semanas	**Aulas**	**Número de aulas**
1º bimestre	1	1 e 2	1 a 4	4
	2	3 e 4	5 a 8	4
	3	5 e 6	9 a 12	4
	4	7 e 8	13 a 16	4
2º bimestre	5	9 e 10	17 a 20	4
	6	11 e 12	21 a 24	4
	7	13 e 14	25 a 28	4
	8	15 e 16	29 a 32	4
3º bimestre	9	17 e 18	33 e 36	4
	10	19 e 20	37 a 40	4
	11	21 e 22	41 a 44	4
	12	23 e 24	45 a 48	4
4º bimestre	13	25 e 26	49 a 52	4
	14	27 e 28	53 a 56	4
	15	29 e 30	57 a 60	4
	16	31 e 32	61 a 64	4


TippaPatt/Shutterstock

Orientações específicas

Nesta parte do manual, você pode consultar mais detalhadamente informações específicas sobre o volume da 3ª série de Matemática desta coleção.

A seguir, apresentamos as competências e as habilidades da BNCC, os descritores da Matriz de Referência (2001) e os níveis da Escala de Proficiência do Saeb. Nas próximas páginas, essas informações são articuladas no **Quadro de conteúdos** de cada jornada.

Competências e habilidades da BNCC presentes neste volume

Competência específica de Matemática (CEMAT)	**1.** Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	Unidades temáticas	Números e álgebra Geometria e medidas Probabilidade e estatística
Código e descrição da habilidade			
EM13MAT102	Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.		
EM13MAT103	Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.		
EM13MAT104	Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.		

Competência específica de Matemática (CEMAT)	**2.** Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	Unidades temáticas	Números e álgebra Geometria e medidas Probabilidade e estatística
Código e descrição da habilidade			
EM13MAT201	Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.		
EM13MAT203	Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.		

Competência específica de Matemática (CEMAT)	**3.** Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	Unidades temáticas	Números e álgebra Geometria e medidas Probabilidade e estatística

Código e descrição da habilidade	
EM13MAT301	Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT302	Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT303	Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.
EM13MAT304	Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.
EM13MAT307	Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT310	Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.
EM13MAT311	Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
EM13MAT312	Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
EM13MAT313	Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.
EM13MAT314	Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

Competência específica de Matemática (CEMAT)	**4.** Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	Unidade temática	Números e álgebra Probabilidade e estatística

Código e descrição da habilidade	
EM13MAT401	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

Competência específica de Matemática (CEMAT)	4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	Unidade temática	Números e álgebra Probabilidade e estatística
Código e descrição da habilidade			
EM13MAT402	Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.		
EM13MAT403	Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.		
EM13MAT407	Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.		

Competência específica de Matemática (CEMAT)	5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	Unidade temática	Números e álgebra Geometria e medidas
Código e descrição da habilidade			
EM13MAT502	Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.		
EM13MAT503	Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.		
EM13MAT507	Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.		
EM13MAT508	Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.		
EM13MAT510	Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.		

Temas e descritores do Saeb presentes neste volume

A seguir, estão relacionados os temas e os seus respectivos descritores da **Matriz de Referência de Matemática do Saeb – 3ª série do Ensino Médio** (2001).

Tema	Espaço e forma
Descritor	
D1	Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.
D9	Relacionar a determinação do ponto de interseção de duas ou mais retas com a resolução de um sistema de equações com duas incógnitas.

Tema	Grandezas e medidas
Descritor	
D11	Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.
D12	Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.
D13	Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

Tema	Números e operações/Álgebra e funções
Descritor	
D14	Identificar a localização de números reais na reta numérica.
D15	Resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas.
D16	Resolver problema que envolva porcentagem.
D17	Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.

Tema	Números e operações/Álgebra e funções
Descritor	
D18	Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela.
D19	Resolver problema envolvendo uma função do 1º grau.
D20	Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
D21	Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto.
D22	Resolver problema envolvendo PA/PG dada a fórmula do termo geral.
D23	Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes.
D24	Reconhecer a representação algébrica de uma função do 1º grau dado o seu gráfico.
D25	Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau.
D26	Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.
D27	Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.
D28	Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função logarítmica, reconhecendo-a como inversa da função exponencial.
D29	Resolver problema que envolva função exponencial.
D31	Determinar a solução de um sistema linear associando-o à uma matriz.
D32	Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.
D33	Calcular a probabilidade de um evento.

Tema	Tratamento da informação
Descritor	
D34	Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos.

Níveis da Escala de Proficiência do Saeb

No quadro a seguir, você encontra a Escala de Proficiência do Saeb organizada em níveis para a 3ª série do Ensino Médio. Como foco para o trabalho neste volume, foram selecionadas habilidades dos níveis 1 a 5.

As habilidades foram codificadas para acelerar a associação destas às jornadas nos **Quadros de conteúdos** e nas orientações didáticas de cada uma das atividades, que serão apresentados nas páginas a seguir. Nos casos em que não há uma correspondência direta, os itens são associados parcialmente ou por aproximação dos conteúdos.

É importante salientar que os descritores dos níveis da Escala de Proficiência não configuram uma matriz curricular ou uma matriz avaliativa, mas uma maneira de medir as habilidades esperadas dos estudantes a cada nível, de acordo com os resultados dos testes do Saeb.

Escala de Proficiência do Saeb – Matemática – 3ª série do Ensino Médio		
Nível	**Código**	**Descrição do nível**
Nível 1 Desempenho maior ou igual a 225 e menor que 250	N1.1	Associar uma tabela de até duas entradas a informações apresentadas textualmente ou em um gráfico de barras ou de linhas.
Nível 2 Desempenho maior ou igual a 250 e menor que 275	N2.1	Reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano localizados no primeiro quadrante.
	N2.2	Reconhecer os zeros de uma função dada graficamente.
	N2.3	Determinar o valor de uma função afim, dada sua lei de formação.
	N2.4	Determinar resultado utilizando o conceito de progressão aritmética.
	N2.5	Associar um gráfico de setores a dados percentuais apresentados textualmente ou em uma tabela.
Nível 3 Desempenho maior ou igual a 275 e menor que 300	N3.1	Reconhecer o valor máximo de uma função quadrática representada graficamente.
	N3.2	Reconhecer, em um gráfico, o intervalo no qual a função assume valor máximo.
	N3.3	Determinar, por meio de proporcionalidade, o gráfico de setores que representa uma situação com dados fornecidos textualmente.
	N3.4	Determinar o quarto valor em uma relação de proporcionalidade direta a partir de três valores fornecidos em uma situação do cotidiano.
	N3.5	Determinar um valor reajustado de uma quantia a partir de seu valor inicial e do percentual de reajuste.
	N3.6	Resolver problemas utilizando operações fundamentais com números naturais.
Nível 4 Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325	N4.1	Resolver problemas envolvendo área de uma região composta por retângulos a partir de medidas fornecidas em texto e figura.
	N4.2	Reconhecer o gráfico de função a partir de valores fornecidos em um texto.
	N4.3	Determinar a lei de formação de uma função linear a partir de dados fornecidos em uma tabela.
	N4.4	Determinar a solução de um sistema de duas equações lineares.
	N4.5	Determinar um termo de progressão aritmética, dada sua forma geral.

Escala de Proficiência do Saeb – Matemática – 3ª série do Ensino Médio		
Nível	**Código**	**Descrição do nível**
Nível 4 Desempenho maior ou igual a 300 e menor que 325	N4.6	Determinar a probabilidade da ocorrência de um evento simples.
	N4.7	Resolver problemas utilizando proporcionalidade direta ou inversa, cujos valores devem ser obtidos a partir de operações simples.
	N4.8	Resolver problemas de contagem usando princípio multiplicativo.
Nível 5 Desempenho maior ou igual a 325 e menor que 350	N5.1	Determinar medidas de segmentos por meio da semelhança entre dois polígonos.
	N5.2	Determinar o valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada.
	N5.3	Determinar o percentual que representa um valor em relação a outro.
	N5.4	Determinar o valor de uma expressão algébrica.
	N5.5	Determinar a solução de um sistema de três equações sendo uma com uma incógnita, outra com duas e a terceira com três incógnitas.
	N5.6	Resolver problema envolvendo divisão proporcional do lucro em relação a dois investimentos iniciais diferentes.
	N5.7	Resolver problema envolvendo operações, além das fundamentais, com números naturais.
	N5.8	Resolver problema envolvendo a relação linear entre duas variáveis para a determinação de uma delas.
	N5.9	Resolver problema envolvendo probabilidade de união de eventos.
	N5.10	Avaliar o comportamento de uma função representada graficamente, quanto ao seu crescimento.
Nível 6 Desempenho maior ou igual a 350 e menor que 375	N6.1	Reconhecer as coordenadas de pontos representados em um plano cartesiano e localizados em quadrantes diferentes do primeiro.
	N6.2	Associar um sólido geométrico simples a uma planificação usual dada.
	N6.3	Resolver problemas envolvendo Teorema de Pitágoras, para calcular a medida da hipotenusa de um triângulo pitagórico, a partir de informações apresentadas textualmente e em uma figura.
	N6.4	Determinar a razão de semelhança entre as imagens de um mesmo objeto em escalas diferentes.
	N6.5	Determinar o volume de um paralelepípedo retângulo, dada sua representação espacial.
	N6.6	Determinar os zeros de uma função quadrática, a partir de sua expressão algébrica.
	N6.7	Resolver problemas de porcentagem envolvendo números racionais não inteiros.
Nível 7 Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400	N7.1	Determinar a medida de um dos lados de um triângulo retângulo, por meio de razões trigonométricas, fornecendo ou não as fórmulas.
	N7.2	Determinar, com o uso do Teorema de Pitágoras, a medida de um dos catetos de um triângulo retângulo não pitagórico.
	N7.3	Determinar a área de um polígono não convexo composto por retângulos e triângulos, a partir de informações fornecidas na figura.
	N7.4	Resolver problemas por meio de semelhança de triângulos sem apoio de figura.

Escala de Proficiência do Saeb – Matemática – 3ª série do Ensino Médio		
Nível	**Código**	**Descrição do nível**
Nível 7 Desempenho maior ou igual a 375 e menor que 400	N7.5	Resolver problemas envolvendo perímetros de triângulos equiláteros que compõem uma figura.
	N7.6	Reconhecer gráfico de função a partir de informações sobre sua variação descritas em um texto.
	N7.7	Reconhecer os zeros de uma função quadrática em sua forma fatorada.
	N7.8	Reconhecer gráfico de função afim a partir de sua representação algébrica.
	N7.9	Reconhecer a equação de uma reta a partir de dois de seus pontos.
	N7.10	Reconhecer as raízes de um polinômio apresentado na sua forma fatorada.
	N7.11	Determinar os pontos de máximo ou de mínimo a partir do gráfico de uma função.
	N7.12	Determinar o valor de uma expressão algébrica envolvendo módulo.
	N7.13	Determinar o ponto de interseção de duas retas.
	N7.14	Determinar a expressão algébrica que relaciona duas variáveis com valores dados em tabela ou gráfico.
	N7.15	Determinar a maior raiz de um polinômio de 2º grau.
	N7.16	Resolver problemas para obter valor de variável dependente ou independente de uma função exponencial dada.
	N7.17	Resolver problemas que envolvam uma equação de 1º grau que requeira manipulação algébrica.
	N7.18	Resolver problemas envolvendo um sistema linear, dadas duas equações a duas incógnitas.
	N7.19	Resolver problemas usando permutação.
	N7.20	Resolver problemas utilizando probabilidade, envolvendo eventos independentes.
Nível 8 Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425	N8.1	Reconhecer a proporcionalidade dos elementos lineares de figuras semelhantes.
	N8.2	Determinar uma das medidas de uma figura tridimensional, utilizando o Teorema de Pitágoras.
	N8.3	Determinar a equação de uma circunferência, dados o centro e o raio.
	N8.4	Determinar a quantidade de faces, vértices e arestas de um poliedro por meio da relação de Euler.
	N8.5	Resolver problema envolvendo razões trigonométricas no triângulo retângulo, com apoio de figura.
	N8.6	Associar um prisma a uma planificação usual dada.
	N8.7	Determinar a área da superfície de uma pirâmide regular.
	N8.8	Determinar o volume de um paralelepípedo, dadas suas dimensões em unidades diferentes.
	N8.9	Determinar o volume de cilindros.
	N8.10	Reconhecer o gráfico de uma função trigonométrica da forma y = sen(x).

Escala de Proficiência do Saeb – Matemática – 3ª série do Ensino Médio		
Nível	**Código**	**Descrição do nível**
Nível 8 Desempenho maior ou igual a 400 e menor que 425	N8.11	Reconhecer um sistema de equações associado a uma matriz.
	N8.12	Determinar a expressão algébrica associada a um dos trechos do gráfico de uma função definida por partes.
	N8.13	Determinar o valor máximo de uma função quadrática a partir de sua expressão algébrica e das expressões que determinam as coordenadas do vértice.
	N8.14	Determinar a distância entre dois pontos no plano cartesiano.
	N8.15	Resolver problema usando arranjo.
	N8.16	Resolver problema envolvendo a resolução de uma equação do 2º grau sendo dados seus coeficientes.
	N8.17	Interpretar o significado dos coeficientes da equação de uma reta, a partir de sua forma reduzida.
Nível 9 Desempenho maior ou igual a 425 e menor que 450	N9.1	Reconhecer a equação que representa uma circunferência, dentre diversas equações dadas.
	N9.2	Determinar o centro e o raio de uma circunferência a partir de sua equação geral.
	N9.3	Resolver problemas envolvendo relações métricas em um triângulo retângulo que é parte de uma figura plana dada.
	N9.4	Determinar o volume de pirâmides regulares.
	N9.5	Resolver problema envolvendo áreas de círculos e polígonos.
	N9.6	Resolver problema envolvendo semelhança de triângulos com apoio de figura na qual os dois triângulos apresentam ângulos opostos pelos vértices.
	N9.7	Resolver problema envolvendo cálculo de volume de cilindro.
	N9.8	Reconhecer o gráfico de uma função exponencial do tipo $f(x) = 10^{x+1}$.
	N9.9	Reconhecer o gráfico de uma função logarítmica dada a expressão algébrica da sua função inversa e seu gráfico.
	N9.10	Determinar a expressão algébrica correspondente a uma função exponencial, a partir de dados fornecidos em texto ou gráfico.
	N9.11	Determinar a inversa de uma função exponencial dada, representativa de uma situação do cotidiano.
	N9.12	Determinar inclinação ou coeficiente angular de retas a partir de suas equações.
	N9.13	Determinar um polinômio na forma fatorada, dadas as suas raízes.
Nível 10 Desempenho maior ou igual a 450	N10.1	Determinar a solução de um sistema de três equações lineares, a três incógnitas, apresentado na forma matricial escalonada.

Quadro de conteúdos

JORNADA 1 – MEDIDAS E NOTAÇÃO CIENTÍFICA

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Geometria e medidas

EM13MAT103
Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

EM13MAT313
Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

SAEB: DESCRITORES

D11 **D12** **D13**
D14 **D15**

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N3.6

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e representar e identificar números em notação científica.
- Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida.
- Resolver problemas envolvendo unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, incluindo armazenamento e velocidade de transferência de dados, que envolvam a interpretação e a compreensão de textos científicos ou divulgados pelas mídias.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Notação científica.
- Unidades de medida do SI.
- Unidades de medida de armazenamento e de velocidade de transferência de dados.

JORNADA 2 – TABELAS E GRÁFICOS

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Probabilidade e estatística

EM13MAT102

Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

EM13MAT407

Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

SAEB: DESCRITORES

D34

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N1.1 **N2.5** **N3.3**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Interpretar e relacionar tabelas a gráficos (e vice-versa), incluindo gráficos de setores, por meio do cálculo do ângulo de cada setor para construção do gráfico (proporcionalidade).
- Analisar tabelas e gráficos de pesquisas estatísticas divulgadas por diferentes mídias.
- Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos com base nas respectivas distribuições de frequência representadas por histogramas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Tabelas e gráficos (barras, colunas, de linha e de setores).
- Frequências absoluta e relativa.
- Histogramas.

JORNADA 3 – PORCENTAGEM

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Números e álgebra

EM13MAT104
Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos.

EM13MAT203
Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

SAEB: DESCRITORES

D16

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N3.5 **N5.3**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Calcular porcentagens, aumentos e descontos no contexto de educação financeira, entre outros.
- Resolver problemas envolvendo a regra de sociedade.
- Resolver problemas que envolvam porcentagens, aumentos e descontos sucessivos, lucro e prejuízo, no contexto de educação financeira e controle de orçamento familiar.
- Resolver problemas que envolvam cálculos de taxas e índices socioeconômicos.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Porcentagem.
- Variação percentual.
- Aumentos e descontos sucessivos.
- Regra de sociedade.

JORNADA 4 – JUROS SIMPLES E COMPOSTOS

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADE

Números e álgebra

EM13MAT303

Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

SAEB: DESCRITORES

D16

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N3.5

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Calcular diferenças entre pagamentos feitos à vista e a prazo, envolvendo porcentagens.
- Resolver problemas que envolvam cálculos de juros simples e juros compostos.
- Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, compreendendo o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Taxa de variação percentual.
- Juros simples.
- Juros compostos.

JORNADA 5 – EQUAÇÕES E FUNÇÕES DE 1º GRAU

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADE

Números e álgebra

EM13MAT302

Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

SAEB: DESCRITORES

D18 D19

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N2.3 N4.3 N5.4 N5.8

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Resolver problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas.
- Resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau.
- Analisar situações que envolvam dependências lineares entre duas variáveis.
- Modelar situações-problema utilizando funções polinomiais de 1º grau.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Valor numérico de expressões algébricas.
- Equação de 1º grau.
- Definição de função.
- Função de 1º grau.

JORNADA 6 – GRÁFICOS DE FUNÇÕES DE 1º GRAU

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Números e álgebra

EM13MAT401
Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

EM13MAT404
Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT501
Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

SAEB: DESCRITORES

D18	**D19**	**D20**
D21	**D24**	**D23**

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N2.2	**N4.2**	**N5.10**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Associar valores numéricos expressos em tabelas a pontos do plano cartesiano, reconhecendo quando essa representação é de uma função de 1º grau.
- Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano.
- Reconhecer o gráfico de uma função de 1º grau e identificar sua representação algébrica.
- Analisar funções de 1º grau definidas por partes.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Gráfico da função de 1º grau.
- Taxa de variação.
- Função de 1º grau definida por partes.

JORNADA 7 – EQUAÇÕES E FUNÇÕES DE 2º GRAU

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Números e álgebra

EM13MAT302
Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT502
Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

EM13MAT503
Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

SAEB: DESCRITORES

D17	**D18**
D20	**D21**

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N5.4 **N6.6**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Determinar as raízes de uma equação polinomial completa de 2º grau.
- Reconhecer as raízes de um polinômio de 2º grau apresentado na sua forma fatorada.
- Fatorar polinômios de 2º grau.
- Investigar pontos de máximo e de mínimo de funções quadráticas.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Equações de 2º grau completas.
- Máximo e mínimo da função de 2º grau.

JORNADA 8 – GRÁFICOS DE FUNÇÕES DE 2º GRAU

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Números e álgebra

EM13MAT402
Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

EM13MAT503
Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

SAEB: DESCRITORES

D17 D18 D20
D25 D26

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N2.2 N3.1 N3.2
N4.2 N5.10

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Determinar as raízes de uma equação polinomial completa de 2º grau.
- Reconhecer as raízes de um polinômio de 2º grau apresentado na sua forma fatorada.
- Fatorar polinômios de 2º grau.
- Investigar pontos de máximo e de mínimo de funções quadráticas.
- Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano e vice-versa.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Equações de 2º grau completas.
- Gráfico da função de 2º grau.
- Máximo e mínimo da função de 2º grau.

JORNADA 9 – PERÍMETRO E SEMELHANÇA

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Geometria e medidas

EM13MAT201
Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

SAEB: DESCRITORES

D1 D11

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N2.1 N5.1 N7.5

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Calcular perímetro de polígonos e do círculo.
- Resolver problemas envolvendo medições e cálculos de perímetro de figuras que podem ser decompostas em outras.
- Reconhecer a proporcionalidade e determinar a razão de semelhança entre figuras planas em situações de ampliação e de redução.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Perímetro de polígonos e do círculo.
- Figuras planas semelhantes.

JORNADA 10 – ÁREA

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Geometria e medidas

EM13MAT201
Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

EM13MAT307
Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

SAEB: DESCRITORES

D11 **D12**

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N2.1 **N4.1** **N7.3**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Calcular área de polígonos e do círculo.
- Resolver problemas envolvendo medições e cálculos de área de figuras que podem ser decompostas em outras.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Área de polígonos e do círculo.

JORNADA 11 – RAZÃO E PROPORÇÃO

BNCC: UNIDADES TEMÁTICAS E HABILIDADES

Geometria e medidas

EM13MAT314
Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

Números e álgebra

EM13MAT510
Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

SAEB: DESCRITORES

D15

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N3.4 **N4.7** **N5.6**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas utilizando recursos da regra de três simples.
- Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas utilizando recursos da regra de três composta.
- Resolver problemas que envolvam grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Razão e proporção.
- Grandezas diretamente e inversamente proporcionais.
- Regra de três simples e composta.

JORNADA 12 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADE

Números e álgebra

EM13MAT301

Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

SAEB: DESCRITORES

D9 **D31**

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N4.4 **N5.5**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Resolver problemas que possam ser representados por sistemas de 2 equações de 1º grau com 2 incógnitas.
- Representar e interpretar, graficamente, sistemas de equações de 1º grau com 2 incógnitas, reconhecendo a solução do sistema como a intersecção entre duas retas.
- Resolver problemas que possam ser representados por sistemas de 3 equações de 1º grau com 3 incógnitas, escalonados ou não.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Sistemas de 2 equações e 2 incógnitas.
- Ponto de intersecção entre duas retas.
- Sistemas de 3 equações e 3 incógnitas.

JORNADA 13 – PROGRESSÃO ARITMÉTICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Números e álgebra

EM13MAT507
Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT508
Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

SAEB: DESCRITORES

D22

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N2.4 **N4.5**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas, nos casos em que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma.
- Resolver problemas utilizando os conceitos de razão, termo geral e soma dos termos de uma progressão aritmética.
- Resolver problemas utilizando a definição de uma progressão geométrica.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Sequências.
- Progressões aritméticas.
- Progressões geométricas.

JORNADA 14 – ANÁLISE COMBINATÓRIA

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADE

Probabilidade e estatística

EM13MAT310
Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

SAEB: DESCRITORES

D32

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N4.8 **N7.19** **N8.15**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Resolver problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo, com o apoio, ou não, do diagrama de árvore.
- Calcular o fatorial de um número.
- Resolver problemas envolvendo agrupamentos ordenáveis (arranjo simples e permutação simples) ou não de elementos (combinação simples e permutação com repetição).

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Princípio fundamental da contagem.
- Arranjo simples.
- Combinação simples.
- Permutação simples e com repetição.

JORNADA 15 – PROBABILIDADE

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Probabilidade e estatística

EM13MAT311
Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

EM13MAT312
Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

SAEB: DESCRITORES

D32 **D33**

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N4.6 **N4.8** **N5.9** **N7.20**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Resolver problemas que envolvam noções de probabilidade (experimento aleatório, espaço amostral, evento aleatório e evento complementar) e o cálculo de probabilidades simples.
- Diferenciar eventos dependentes de eventos independentes.
- Resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade da união e da intersecção de eventos e probabilidade condicional.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Noções de probabilidade.
- Probabilidade da união e da intersecção de dois eventos.
- Probabilidade condicional.

JORNADA 16 – FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

BNCC: UNIDADE TEMÁTICA E HABILIDADES

Números e álgebra

EM13MAT304
Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

EM13MAT403
Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

SAEB: DESCRITORES

D27 **D28** **D29**

SAEB: NÍVEIS DA ESCALA DE PROFICIÊNCIA

N5.2 **N5.7**

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

- Utilizar as propriedades de potenciação e dos logaritmos para resolver problemas.
- Resolver problemas com funções exponenciais, utilizando, quando necessário, logaritmos.
- Analisar e estabelecer relações entre as funções exponencial e logarítmica.

OBJETOS DE CONHECIMENTO

- Potenciação e logaritmos.
- Função exponencial.
- Relação entre a função exponencial e a função logarítmica.

Jornada 1 – Medidas e notação científica

Abertura da jornada

Nesta jornada, além das grandezas mais tradicionais e das unidades de medida delas, são abordadas duas grandezas mais recentes: capacidade de armazenamento de dados e velocidade de transmissão de dados em sistemas computacionais. Essas duas grandezas estão diretamente ligadas ao cotidiano da maioria das pessoas, por exemplo, ao contratar um plano de internet, ao comprar um novo *smartphone*, ao enviar e receber arquivos, etc. Também é abordado o conceito de notação científica aplicado em diversas áreas e, sempre que possível, para auxiliar nas medições.

Na abertura desta jornada, a imagem de um computador típico da década de 1990 e início dos anos 2000 ilustra a época em que a medida de velocidade de transmissão de dados era muito baixa. Se possível, relembre casos curiosos relacionados à conexão discada, desde o ruído que o *modem* fazia até as restrições de acesso. Pergunte aos estudantes, por exemplo, se sabem o que é um disquete ou se já tiveram contato com um deles, ou de que maneira eles percebem a evolução da internet nos últimos 20 anos. Proponha um diálogo para que compreendam a importância do entendimento e do uso adequado dos termos e das unidades de medida.

As unidades de medida de capacidade de armazenamento de dados que são múltiplos do *bit* têm prefixos definidos pelo Sistema Internacional de Unidades (SI), que se baseia no sistema métrico decimal; por exemplo, *kilo* (k) antes de uma unidade significa 1000 vezes a unidade. Porém, como os computadores trabalham com o sistema binário (potências de 2), geralmente são usadas as equivalências 1 kB = 1024 B, 1 MB = 1024 kB, 1 GB = = 1024 MB, etc. Há fabricantes ou organizações que utilizam outros termos para as unidades de medida, como *kibibyte* (KiB), em vez de *kilobyte* (kB), *mebibyte* (MiB), *gibibyte* (GiB), etc. para diferenciar a escala binária da escala decimal.

É importante ressaltar a diferença entre as unidades de medida de capacidade de armazenamento e as de velocidade de transmissão, mostrando que termos como *mega* e *giga* são usados abreviados em ambos os casos, mas têm significados diferentes: armazenamento é *megabyte*, enquanto velocidade é *megabit*.

Na questão **1**, espera-se que os estudantes respondam que, com o aumento da medida de velocidade de transmissão, tornou-se possível consumir conteúdo via *streaming*, sem a necessidade de baixar os arquivos.

Na questão **2**, a internet de Pedro tem medida de velocidade de transmissão de dados de 1 Gbps, ou seja, transmite 1 *gigabit* por segundo. Já o celular de Marina pode armazenar 256 GB (*gigabytes*) de informação.

Na questão **3**, quanto maior for a resolução do vídeo, maior será a velocidade necessária. A oscilação da velocidade da internet indica que os dados estão sendo transmitidos mais lentamente, e isso impacta a experiência do espectador.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

Essa atividade e as que seguem têm 3 objetivos: efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros; utilizar, quando necessário, a notação científica como uma ferramenta facilitadora e de representação de medida; e compreender os conceitos de algarismos significativos e duvidosos.

Incentive os estudantes a apresentar outros exemplos de cálculos com notação científica, ensinando-os a utilizar as ferramentas básicas de uma calculadora científica. Em alguns *smartphones*, o aplicativo da calculadora, quando no modo paisagem, demonstra funcionalidades de uma calculadora científica.

DICA

Comparação dos tamanhos de diversos corpos celestes, desde planetas-anões até o próprio Universo observável.

GLOBAL Data. Universe Size Comparison | 3d Animation Comparison | Stars Real Scale Comparison *YouTube*. Vídeo 4 min 27 s. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=5zlcWdTs2-s. Acesso em: 17 out. 2023.

1. Como a medida do diâmetro é 0,0000001 mm, tem-se em notação científica: 0,0000001 mm = $= 1 \cdot 10^{-7}$ mm. Logo:

$1 \cdot 10^{-7}$ mm $\cdot 10 \cdot 10^{9} = 10^{3}$ mm $= 1000$ mm $= 1$ m

Alternativa **B**. | D11 - Fácil

2. Multiplicando os números decimais e somando os expoentes da base 10, tem-se, aproximadamente:

$5{,}4396 \cdot 10^{-4} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} \simeq 51 \cdot 10^{8} = 5{,}1 \cdot 10^{9}$

Logo, a medida da distância aproximada é $5{,}1 \cdot 10^{9}$ km.

Alternativa **E**. | D11 - Fácil

3. Algarismos significativos são aqueles que nos auxiliam na precisão de medições e cálculos. Com exceção de zeros à esquerda, todo dígito é um algarismo significativo, ou seja, o zero não é significativo quando estiver à esquerda do primeiro algarismo diferente de zero.

- O número 126,40 tem 5 algarismos significativos (1, 2 ,6, 4 e 0).
- O número 852,021 tem 6 algarismos significativos (8, 5, 2, 0, 2 e 1).
- Como os zeros à esquerda não contam, o número 0,002340 tem 4 algarismos significativos (2, 3, 4 e 0).

Alternativa **B**. | D14 - Fácil

4. Algarismo duvidoso é o último dos algarismos significativos em uma medição. Assim, como o preço considera somente os 2 primeiros dígitos depois da vírgula, estamos excluindo o algarismo duvidoso (que é o quarto algarismo significativo).

Alternativa **C**. | D15 - Fácil

5. Nas alternativas **C** e **E**, os números têm 7 algarismos significativos. Nas alternativas **A** e **D**, os números têm zeros à esquerda, que não são algarismos significativos; logo, possuem 4 e 6 algarismos significativos, respectivamente. Como o número 12,341000 tem 8 algarismos significativos, a alternativa correta é:

Alternativa **B**. | D14 - Fácil

6. Em notação científica, é necessário um número maior ou igual a 1 e menor do que 10, multiplicado por uma potência de base 10. Logo:

$225\,407\,863 = 2{,}25407863 \cdot 10^{8}$

Alternativa **D**. | D15 - Fácil

7. Primeiramente, é preciso compor esses números em potência de base 10, assim tem-se:

$0{,}0001545 = 1545 \cdot 10^{-7}$
$150\,000 = 15 \cdot 10^{4}$

Assim, fazendo a divisão proposta, tem-se:

$1545 \cdot 10^{-7} : 15 \cdot 10^{4} = 103 \cdot 10^{-11}$

Alternativa **D**. | D14 - N3.6 - Fácil

8. Segundo os dados da atividade, tem-se:

$10^{100} : 10^{80} = 10^{20}$

Alternativa **E**. | D14 - N3.6 - Fácil

9. Compondo o número decimal em potência de base 10, para facilitar os cálculos, tem-se:

$$\frac{2{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{12}}{0{,}000025} = \frac{5 \cdot 10^{5}}{2{,}5 \cdot 10^{-5}} = 2 \cdot 10^{10}$$

Alternativa **C**. | D14 - N3.6 - Fácil

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. Como 8 *megabits* equivalem a 1 *megabyte*, ao dividir a medida de velocidade em Mbps por 8, tem-se:

$141{,}02 : 8 = 17{,}6275$, ou seja, aproximadamente, 17,6 *megabytes* por segundo.

Como o enunciado pede o tempo de *download* de 176 MB, é possível concluir que são necessários, aproximadamente, 10 segundos.

Alternativa **B**. | D15 - Médio

2. Como 1 ha equivale a 1 hm^2, tem-se:

1 ha = 1 hm^2 = 10 000 m^2

Assim, dividindo R$ 53,3 mil por 10 000 tem-se:

$$\frac{53\,300}{10\,000} = 5{,}33$$

Logo, o preço médio do metro quadrado é R$ 5,33.

Alternativa **E**. | D12 - N3.6 - Médio

3. Sabendo que 40 mm de medida de altura é igual a 0,4 dm e que a medida de volume é o produto da medida de área da base pela medida de altura, então:

1 m^2 = 100 dm^2

100 $dm^2 \cdot$ 0,4 dm = 40 dm^3 = 40 L

Alternativa **D**. | D13 - Médio

4. Como em 1 GB há 1024 MB, em 30 GB há $1024 \cdot 30 = 30\,720$ MB. Temos que 1 MB = 8 Mb, logo:

$30\,720 \cdot 8 = 245\,760$, ou seja, 245 760 Mb. Assim:

$$\frac{245\,760 \text{ Mb}}{51{,}2 \text{ Mb/s}} = 4800 \text{ s} = 80 \text{ min}$$

Alternativa **A**. | D15 - N3.6 - Médio

5. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT202**.

Encontramos a razão realizando a divisão entre as medidas:

$10 \text{ m} : (10 \cdot 10^{-6}) \text{ m} = 10 \text{ m} : 10^{-5} \text{ m} =$

$= 10 : 10^{-5} = 10^6$

Alternativa **E**. | D11 - N3.6 - Fácil

6. Transformando a capacidade de uma piscina olímpica para a forma de notação científica, tem-se:

$2\,500\,000 = 2{,}5 \cdot 10^6$

$2{,}5 \cdot 10^6 \text{ L} \cdot 5700 = 14\,250 \cdot 10^6 \text{ L} = 1{,}425 \cdot 10^{10} \text{ L}$

Alternativa **B**. | D13 - Médio

7. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT204**.

$384\,400 = 3{,}844 \cdot 10^5$

$3{,}844 \cdot 10^5 \text{ km} \cdot 10^3 = 3{,}844 \cdot 10^8 \text{ m}$

Alternativa **A**. | D14 - Fácil

8. Tem-se 1 TB = 1024 GB, logo:

$1024 \text{ GB} - 2{,}88 \text{ GB} = 1021{,}12 \text{ GB}$

Alternativa **D**. | D15 - N3.6 - Fácil

9. Com os dados do enunciado, tem-se:

$90 \cdot 35 = 3150$, logo serão 3150 mL = 3,15 L

Alternativa **D**. | D15 - N3.6 - Médio

10. Com os dados do enunciado, tem-se:

$7000 \text{ t} = 7\,000\,000 \text{ kg} = 7 \cdot 10^6 \text{ kg}$

$7 \cdot 10^6 : 70 = 1 \cdot 10^5 = 100\,000$ pessoas

Alternativa **E**. | D15 - N3.6 - Médio

11. Fazendo as transformações de unidades de medida, tem-se: $85 \text{ kg} = 85\,000 \text{ g} = 850 \cdot 100 \text{ g}$

Logo, como descrito no texto, o besouro levanta 850 vezes o próprio peso.

$70 \text{ kg} \cdot 850 = 59\,500 \text{ kg} = 59{,}5 \text{ t}$

Alternativa **E**. | D15 - N3.6 - Médio

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Segundo a prescrição dos médicos, serão ministrados 500 mg do medicamento a cada quilograma. Para transformar miligramas em gramas, é necessário dividir por 1000. Assim, tem-se 0,5 g para cada kg.

Como a criança tem 20 kg:

$0{,}5 \cdot 20 = 10$, ou seja, 10 g do medicamento por dia.

O tratamento durará 5 dias e, até a suspensão do medicamento, será ingerido um total de:

$10 \text{ g} \cdot 5 = 50 \text{ g}$

Sabendo que 1 g corresponde a 1 cm^3 e 1 cm^3 corresponde a 1 mL, então 50 g correspondem a um frasco de 50 mL.

Alternativa **B**. | D15 - N3.6 - Difícil

2. O projeto visa retirar 26,4 m^3/s de água e, uma vez que 1 m^3 corresponde a 1000 L, então a retirada será de $26{,}4 \cdot 1000$ L/s.

Sabendo que 1 min equivale a 60 s, o total de água retirada em litros é:

$26{,}4 \cdot 1000 \cdot 60$

Alternativa **E**. | D15 - Difícil

3. Deve-se primeiro converter cL em mL multiplicando por 10:

$2{,}95 \text{ cL} \cdot 10 = 29{,}5 \text{ mL}$

Sabendo que o volume de uma lata de refrigerante é 355 mL, é preciso dividir por 29,5 para encontrar o volume em fl oz:

$355 : 29{,}5 \simeq 12{,}03$

Alternativa **C**. | D15 - N3.6 - Difícil

4. Quanto à medida de capacidade:

$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

X: $4 \text{ dm}^3 = 4 \text{ L}$

Y: $7000 \text{ cm}^3 = 7 \text{ L}$

Z: 20 L

Portanto, Z tem a maior medida de capacidade.

Quanto à medida de altura:

1 m = 100 cm = 1000 mm

X: 0,6 m

Y: 120 cm = 1,2 m

Z: 900 mm = 0,9 m

Y é o mais alto.

Assim, os vasos que têm maior medida de capacidade e de altura são, respectivamente, Z e Y.

Alternativa **D**. | D15 - Médio

5. Com os dados do enunciado, tem-se:

$100 \ \mu\text{m} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Alternativa **C**. | D11 - Fácil

6. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:

$N = V \cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow N = 5\,000 \cdot 5\,200\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow N = 260 \cdot 10^8 \Rightarrow$

$\Rightarrow N = 2{,}6 \cdot 10^{10}$

Alternativa **D**. | D15 - N3.6 - Fácil

7. Com os dados do enunciado, tem-se:

$1 \text{ UA} = 1{,}496 \cdot 10^2$ milhões de km $=$
$= 1{,}496 \cdot 10^2 \cdot 10^6$ km

De km para m, deve-se multiplicar por 1000.

$1{,}496 \cdot 10^2 \cdot 10^6 \cdot 10^3 \text{ m} = 1{,}496 \cdot 10^{11}$

Alternativa **A**. | D11 - Fácil

8. a) A medida de massa do beija-flor com a toalha menos a medida de massa da toalha é igual à massa corporal do beija-flor (m).

$m = 129{,}6 \text{ g} - 125{,}9 \text{ g} = 3{,}7 \text{ g}$

Já que a maior porcentagem que representa a massa do coração de um beija-flor equivale a 2,5%:

$0{,}025 \cdot 3{,}7 \text{ g} = 0{,}0925 \text{ g} = 92{,}5 \text{ mg}$

b) Sendo i a idade de João, tem-se:

$i \cdot 70 = 4 \cdot 1015 \Rightarrow i = 58$ anos

| D15 - N3.6 - Difícil

9. a) $600 = k \cdot 16^{\frac{3}{4}} \Rightarrow 600 = k \cdot (2^4)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow k = \dfrac{600}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 75 \dfrac{\text{kcal}}{\text{dia} \cdot \sqrt[4]{\text{kg}^3}}$

b) Se $M_G = 10^6 \cdot M_P$ e $\sqrt{10} \simeq 3{,}1623$, então:

$$\frac{B_G}{B_P} = \frac{k \cdot M_G^{\frac{3}{4}}}{k \cdot M_P^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow \frac{B_G}{B_P} = \left(\frac{10^6 \cdot M_P}{M_P}\right)^{\frac{3}{4}} = 10^{\frac{9}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{B_G}{B_P} = 10^4 \cdot \sqrt{10} \Rightarrow \frac{B_G}{B_P} = 31\,623$$

| D15 - N3.6 - Difícil

Anotações

Jornada 2 – Tabelas e gráficos

Abertura da jornada

A interpretação e a representação de dados de pesquisas estatísticas são habilidades fundamentais que requerem dos estudantes o uso coordenado de diversas habilidades. Quando os objetos de estudo são gráficos e tabelas, o Censo Demográfico Brasileiro tem a capacidade de evidenciar a realidade de nossa sociedade e propiciar diversos cenários importantes. A utilização desses dados não apenas contribui para a aprendizagem de Estatística, mas também para o entendimento e o questionamento crítico do mundo ao redor.

Em uma era dominada pela informação, a capacidade de analisar dados e tirar conclusões sólidas é altamente valorizada no mercado de trabalho. São as carreiras de futuros cientistas de dados, analistas de mercado e pesquisadores sociais que estão sendo formadas, e essas são as ferramentas necessárias que os estudantes precisam dominar.

Na questão **1**, espera-se que os estudantes acessem o conhecimento prévio que têm sobre o tema e citem diferentes tipos de gráfico, como o de setores, o de linhas, o de barras, etc.

Na questão **2**, a consolidação e a divulgação de resultados e cenários diversos demandam diferentes tipos de gráfico e tabela. Essas ferramentas visuais transformam dados complexos em narrativas significativas.

Na questão **3**, é importante ressaltar a complexidade das etapas de uma pesquisa estatística. Destaque que as etapas são planejadas em sequência e utilizam técnicas de amostragem. O planejamento consiste na definição do objetivo da pesquisa e das variáveis que se deseja pesquisar, do público-alvo e da coleta de dados (questionário, entrevista presencial, por telefonema ou formulário *on-line*).

> **DICA**
> O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) tem um *site* com diversos tipos de material (vídeos, gráficos, tabelas, etc.) orientados para a sala de aula e associados às habilidades da BNCC. Há também uma seção dedicada ao Enem, com todas as questões desse exame que mencionam os dados do IBGE. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/professores. Acesso em: 5 out. 2023.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

A calculadora e o transferidor são recursos importantes, mas podem não ser suficientes para a construção de gráficos de setores. Para ampliar e aprofundar a execução dos conhecimentos adquiridos, ponha em prática tecnologias digitais, como planilhas eletrônicas e *softwares* de Geometria dinâmica. Essa é uma oportunidade de construir a flexibilidade e a fluidez requeridas na CEMAT01 da BNCC para diferentes registros de representação.

1. I. Como são 6 semanas, cada dia tem 6 registros. Assim, a maior média corresponde ao dia em que o somatório de horas for o maior.

- Segunda-feira:
  $18{,}5 + 13{,}0 + 15{,}0 + 11{,}0 + 12{,}1 + 15{,}5 = 85{,}1$
- Terça-feira:
  $17{,}0 + 4{,}0 + 12{,}5 + 9{,}0 + 12{,}0 + 7{,}0 = 61{,}5$
- Quarta-feira:
  $13{,}0 + 7{,}0 + 11{,}0 + 8{,}1 + 9{,}5 + 12{,}0 = 60{,}6$
- Quinta-feira:
  $9{,}0 + 17{,}0 + 12{,}0 + 0{,}6 + 17{,}0 + 8{,}1 = 63{,}7$
- Sexta-feira:
  $6{,}0 + 16{,}2 + 9{,}5 + 20{,}0 + 8{,}0 + 21{,}0 = 80{,}7$
- Sábado:
  $7{,}5 + 3{,}0 + 11{,}0 + 0{,}0 + 16{,}5 + 9{,}4 = 47{,}4$
- Domingo:
  $2{,}0 + 0{,}0 + 0{,}0 + 0{,}0 + 3{,}0 + 1{,}0 = 6{,}0$

Nesse caso, trata-se da segunda-feira.

Alternativa **A**.

II. Após o preenchimento da tabela, conclui-se que o total de horas foi o menor na semana 4.

- Semana 1: $18{,}5 + 17{,}0 + 13{,}0 + 9{,}0 + 6{,}0 + 7{,}5 + 2{,}0 = 73{,}0$
- Semana 2: $13{,}0 + 4{,}0 + 7{,}0 + 17{,}0 + 16{,}2 + 3{,}0 + 0{,}0 = 60{,}2$
- Semana 3: $15{,}0 + 12{,}5 + 11{,}0 + 12{,}0 + 9{,}5 + 11{,}0 + 0{,}0 = 71{,}0$
- Semana 4: $11{,}0 + 9{,}0 + 8{,}1 + 0{,}6 + 20{,}0 + 0{,}0 + 0{,}0 = 48{,}7$
- Semana 5: $12{,}1 + 12{,}0 + 9{,}5 + 17{,}0 + 8{,}0 + 16{,}5 + 3{,}0 = 78{,}1$
- Semana 6: $15{,}5 + 7{,}0 + 12{,}0 + 8{,}1 + 21{,}0 + 9{,}4 + 1{,}0 = 74{,}0$

Alternativa **C**.

III. Sabendo que o ângulo de medida 72° corresponde a $\frac{1}{5}$ de 360° e que 4 horas correspondem a 240 minutos, então o intervalo de tempo médio de estudo semanal com o computador será de:

240 min · 6 dias · $\frac{1}{5}$ = 288 minutos por semana.

Alternativa **C**. | D34 - N1.1 - N2.5 - N3.3 - Médio

2. Segundo os dados do gráfico, o percentual de negros na população economicamente ativa no Distrito Federal, no primeiro semestre de 2019, era de 70%. Então, o ângulo do setor correspondente mede:

70% de 360° = 252°

Alternativa **E**. | D34 - N2.5 - N3.3 - Fácil

3. Pela análise do gráfico, houve menor incremento de desmatamento do bioma amazônico no estado do Pará em 2012.

Alternativa **B**. | D34 - Fácil

4. Ao analisar os gráficos, é possível observar que o Brasil está projetado para ser o 4º maior produtor e o 1º maior exportador de milho.

Alternativa **D**. | D34 - N2.5 - Fácil

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

Nesta etapa, as atividades privilegiam fontes da internet e outros veículos, trazendo contextos pertinentes para que os estudantes revejam o conceito de histograma, diferenciando-o de outros gráficos. Os contextos selecionados evidenciam situações nas quais a análise da distribuição de frequências é um fator importante.

1. A alternativa **A** é falsa. Em 2020, a razão entre os percentuais era de $\frac{49{,}7}{41{,}5} \simeq 1{,}2$ e, em 2021/2022, era de $\frac{53{,}2}{35} = 1{,}52$.

A alternativa **B** é falsa. De 2020 para 2021/2022, o percentual de brancos em segurança alimentar aumentou.

A alternativa **C** é falsa. Os percentuais das populações branca e negra em insegurança alimentar aumentou, e a razão entre os percentuais de negros e brancos aumentou de $\frac{10{,}4}{6{,}8} \simeq 1{,}53$ para $\frac{18{,}1}{10{,}6} \simeq 1{,}71$.

A alternativa **D** é verdadeira. A razão entre os percentuais de brancos e negros em segurança alimentar, nessa ordem, é de $\frac{53{,}2}{35} = 1{,}52$. Isso significa que o percentual de brancos é 52% maior. A razão entre o percentual de negros e brancos em insegurança alimentar grave nos dados de 2021/2022, nessa ordem, é de $\frac{18{,}1}{10{,}6} \simeq 1{,}71$, ou seja, para esse período, o percentual de negros em situação de insegurança alimentar grave é, aproximadamente, 71% maior do que o de brancos nessa condição.

A alternativa **E** é falsa. Os dados de 2020 indicam que o percentual de brancos em condição de segurança alimentar era maior do que o de negros nessas condições.

Alternativa **D**. | D34 - Médio

2. Ao ordenar os dados da tabela, tem-se:

0, 0, 4, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 15, 15, 17, 17, 17, 17, 18, 20, 21, 21, 21, 21, 23, 23, 23, 27, 29

A mediana desses dados é:

$$\frac{13 + 13}{2} = 13$$

A média é:

$$\frac{84 + 101 + 80 + 80 + 96 + 67}{36} = 14{,}\overline{1}$$

Portanto, a linha da média estará no retângulo que representa $]7{,}5; 15]$ atendimentos/dia. E a linha da mediana estará nesse mesmo retângulo, mais próxima do eixo vertical (frequência).

Alternativa **D**. | D34 - N1.1 - Médio

3. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT309**.

Segundo a matriz energética mundial de 2020:

B = 2,5% (outras fontes renováveis) + 9,8% (biomassa) + 2,7% (hidráulica)

B = 15% de fontes renováveis.

Segundo a matriz energética brasileira de 2022:

A = 7,0% (outras fontes renováveis) + 3,5% (eólica e solar) + 9,0% (lenha e carvão vegetal) + 12,5% (hidráulica) + 15,4% (derivados da cana-de-açúcar)

A = 47,4% de fontes renováveis.

Portanto, $A > 3B$.

Alternativa **E**. | D34 - N2.5 - Médio

4. Pela tabela de frequências, o percentual de votos nos quais o eleitor, entre A e C, prefere o candidato A é igual a:

$(9 + 1 + p + 1)\%$

Já pelo gráfico, esse percentual é igual a 45%.

Como $(11 + p)\% = 45\%$, então $p = 34$.

Alternativa **E**. | D34 - N1.1 - Médio

5. O histograma mostra, aproximadamente, 50 municípios com IHHn menor ou igual a 0,10.
Logo, há aproximadamente 5520 municípios (5570 − 50) no final de 2020 com IHHn maior que 0,10.

Alternativa **C**. | D34 - Fácil

6. I. Pelo gráfico, verifica-se que 2018 foi o único ano em que o índice de negros e indígenas foi o dobro do índice de brancos e amarelos. Logo, a maior razão foi observada nesse ano.

Alternativa **B**.

II. O índice "Brancos e amarelos" mais do que dobrou, indo de 1,5% para 3,1%. E o índice "Negros e indígenas" quase dobrou, de 2,4% para 4,5%.

Alternativa **D**. | D34 - Médio

7. De acordo com o gráfico, 50,2% dos jovens da faixa etária entre 18-29 anos se sentiram muitas vezes ansiosos ou nervosos no período da pandemia e 19,3% se sentiram ansiosos ou nervosos o tempo todo.

$50{,}2\% + 19{,}3\% = 69{,}5\%$

Logo, 69,5% sofreram com frequência.

Alternativa **E**. | D34 - Fácil

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Para chegar ao resultado, deve-se supor que, sem perda de generalidade, a quantidade total de perfumes vendidos foi de 100 unidades. Consequentemente, se r_k corresponde à arrecadação do perfume k, então:

- $r_{\text{I}} =$ R\$ 200,00 $\cdot$ 13 = R\$ 2.600,00;
- $r_{\text{II}} =$ R\$ 170,00 $\cdot$ 10 = R\$ 1.700,00;
- $r_{\text{III}} =$ R\$ 150 $\cdot$ 16 = R\$ 2.400,00;
- $r_{\text{IV}} =$ R\$ 100,00 $\cdot$ 29 = R\$ 2.900,00;
- $r_{\text{V}} =$ R\$ 80,00 $\cdot$ 32 = R\$ 2.560,00.

O tipo de perfume que deverá ter maior reposição de estoque é o IV.

Alternativa **D**. | D34 - N2.5 - Médio

2. Se a produção nacional, em milhões de toneladas, é x, então:

$(0{,}383 + 0{,}372)x = 119{,}8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 158{,}7$

Consequentemente, a estimativa de produção de cereais, leguminosas e oleaginosas, no ano de 2012, na região Sudeste do país, será:

$0{,}114 \cdot 158{,}7 \simeq 18{,}1$ milhões de toneladas

Alternativa **D**. | D34 - N2.5 - Médio

3. Na receita de setembro para outubro, a taxa de crescimento foi de:

$$\frac{3500 - 1400}{1400} = 1{,}5$$

Consequentemente, a receita, em R\$, esperada para dezembro é:

$(1 + 1{,}5) \cdot 2000 = 5000$

Assim, o resultado financeiro a ser obtido no semestre de julho a dezembro será:

$$(1200 - 700) + (2300 - 3900) + (1400 - 1350) + \\ + (3500 - 1500) + (2000 - 3800) + \\ + (5000) - 3800) = 500 - 1600 + 50 + \\ + 2000 - 1800 + 1200 = 350$$

Ou seja, o resultado financeiro será um lucro de R\$ 350,00.

Alternativa **E**. | D34 - Difícil

4. A empresa gastou, em 2013, com os funcionários que tinham Ensino Fundamental:

$0{,}125 \cdot$ R\$ 400.000,00 = R\$ 50.000,00

E gastou o mesmo valor com aqueles que tinham Ensino Superior. Já com os funcionários que tinham Ensino Médio, a despesa foi de:

$0{,}75 \cdot$ R\$ 400.000,00 = R\$ 300.000,00

Assim, para manter o lucro, a empresa deve aumentar a receita em:

$$\frac{70 - 50}{50} \cdot \text{R\$ } 50.000,00 + \frac{180 - 150}{150} \cdot \\ \cdot \text{R\$ } 300.000,00 + \frac{20 - 10}{10} \cdot \text{R\$ } 50.000,00 = \\ = \text{R\$ } 130.000,00$$

Alternativa **B**. | D34 - N2.5 - Difícil

5. Em janeiro, fevereiro, março, abril e maio, os lucros mensais foram, respectivamente:

- $10 - 5 = 5$;
- $20 - 10 = 10$;
- $15 - 10 = 5$;
- $20 - 15 = 5$;
- $28 - 25 = 3$.

Então, o maior lucro obtido nesse período ocorreu em fevereiro.

Alternativa **B**. | D34 - Médio

6. No período de 2005 a 2009, o aumento foi de:

$$\frac{519{,}2 - 236}{236} \cdot 100\% = 120\%$$

Alternativa **C**. | D34 - Médio

7. É possível afirmar que o imóvel com valor mediano é o de ordem 53:

$$\frac{105 + 1}{2} = 53$$

Dessa forma, já que existem 35 imóveis (5 + 10 + + 5 + 15) com valor menor do que R$ 700.000,00 e 55 (35 + 20) apartamentos com valor menor ou igual a R$ 800.000,00, pode-se concluir que *p* corresponde a R$ 800.000,00.

Alternativa **C**. | D34 - Difícil

8. I. Considerando o polígono formado pelas colunas do gráfico, é possível calcular sua área *A*:

$$A = 0{,}1 \cdot (3 + 9 + 6 + 2) = 2$$

Visto que o gráfico tem concentração à esquerda:

$$1{,}7 < x_0 < 1{,}8$$

Dessa maneira, metade da área do gráfico será dada por:

$$0{,}1 \cdot 3 + (x_0 - 1{,}7) \cdot 9 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{16}{9} = 1{,}\overline{7}$$

II. Considerando a proporcionalidade entre as grandezas "Quantidade de estudantes" e "Medida do ângulo", pode-se fazer a seguinte regra de três:

Quantidade de estudantes		Medida do ângulo (em grau)
20	——	360°
9	——	x

$$x = \frac{9 \cdot 360°}{20} = 162°$$

Consequentemente, o maior ângulo central mede 162°.

| D34 - N2.5 - N3.3 - Difícil

Anotações

Jornada 3 – Porcentagens e variações percentuais

Abertura da jornada

Porcentagem e variações percentuais são dois conceitos muito utilizados tanto em Matemática como em cálculos de taxas de crescimento, acréscimos e decréscimos de transações financeiras e regra de sociedade.

Nesta jornada, os estudantes terão oportunidade de conhecer aspectos da economia e das finanças, como o índice IPCA e outras taxas e índices, que podem causar impactos diretamente na vida das pessoas e na sociedade, enquanto aplicam importantes conceitos matemáticos.

Na questão **1**, espera-se que os estudantes respondam que já tiveram contato com a taxa Selic e o índice IPCA por meio de telejornais e outros veículos de mídia associados a notícias de cunho financeiro.

Na questão **2**, espera-se que o texto inspire as respostas dos estudantes, como a baixa do custo de bens e serviços, o aumento do crédito visando estimular investimentos em negócios e produção e a geração de empregos.

Na questão **3**, incentive e oriente os estudantes a compartilhar as maneiras que eles e seus familiares se organizam financeiramente, explorando as estratégias de organização das despesas em relação aos ganhos.

_DICA

Aproveite para trabalhar o tema Educação Financeira com os estudantes. Para isso, podem-se usar cálculos de juros praticados atualmente, tornando as situações reais no período em que eles estiverem trabalhando esse tema. Simule situações tanto de empréstimos para compra de automóveis, casas, entre outros, como aplicações financeiras, calculando o valor que poderá ser recebido em determinado tempo de aplicação.

Nesse momento, também há a oportunidade para explorar a porcentagem envolvendo os setores da economia da região.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

Reforce a importância do **fator de atualização**, ou seja, que toda quantia, ao ser aumentada por uma taxa i, é multiplicada por $(1 + i)$. Encoraje o uso de calculadoras não como forma de substituir habilidades de cálculos mentais ou operacionais mais complexos, mas para permitir discussões sobre arredondamentos, aproximações e interpretação de resultados.

1. Para calcular o novo valor do salário mínimo, com aumento de 9%, é necessário multiplicar o valor de 2022 por $(1 + 9\%) = 1{,}09$:

$1212 \cdot 1{,}09 = 1321{,}08$

Alternativa **D**. | D16 - N3.5 - Fácil

2. Para encontrar a porcentagem que 600 representa em um total de 2000, deve-se dividir 600 por 2000:

$\frac{600}{2000} = 0{,}30 = 30\%$

Alternativa **C**. | D16 - N5.3 - Fácil

3. Determinando o valor x tal que 7,5 milhões correspondam a 7,5% de x (número atual de empregados no Brasil):

$x \cdot 7{,}5\% = 7{,}5 \Rightarrow x \cdot 0{,}075 = 7{,}5 \Rightarrow x = \frac{7{,}5}{0{,}075} = 100$

Logo, o número de empregados no Brasil no momento em que o texto foi escrito era de 100 milhões.

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Fácil

4. Calculando o valor correspondente a 10% do valor utilizado na operação, isto é, a diferença entre o valor que Marcos ganhou e o que ele gastou:

$10\% \cdot (5000 - 3500) = 0{,}1 \cdot 1500 = 150$

Logo, o valor adicional cobrado pelo banco foi de 150 reais.

Alternativa **A**. | D16 - N3.5 - Médio

5. Para encontrar o percentual da população que não trabalha nem estuda, deve-se calcular 40% de 20%:

$40\% \cdot 20\% = 0{,}40 \cdot 0{,}20 = 0{,}08 = 8\%$

Assim, se a população tem 300 mil habitantes, então $0{,}08 \cdot 300$ mil = 24 mil desses habitantes, ou seja, 24 mil jovens que não trabalham nem estudam.

Alternativa **E**. | D16 - N5.3 - Médio

6. Um valor que aumenta 20% é o mesmo que ser multiplicado por 1,2. E um valor que aumenta 10% é o mesmo que ser multiplicado por 1,1.

Então, para calcular o valor após dois aumentos sucessivos, tem-se:

$1{,}1 \cdot 1{,}2 = 1{,}32$

Logo, se o plano de saúde custava 800 reais, ele passou a custar $800 \cdot 1{,}32 = 1056$ reais.

Alternativa **B**. | D16 - N3.5 - Médio

7. **I.** Os gastos com restaurantes correspondem a 40% de 30%:

$40\% \cdot 30\% = 0{,}40 \cdot 0{,}30 = 0{,}12 = 12\%$

Assim, 12% do salário corresponde a:

$0{,}12 \cdot 8\,000 = 960$.

Logo, Eduardo gasta 960 reais por mês com essa atividade.
Alternativa **A**.

II. Os gastos com passeios correspondem a 30% do salário de Eduardo. Logo, corresponde a: $0{,}30 \cdot 8\,000 = 2\,400$.

Assim, Eduardo gasta 2400 reais por mês com passeios.
Alternativa **E**. | D16 - N5.3 - Médio

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais, mobilizando a habilidade **EM13CHS402**.

I. Se os membros da família separam 10% para aplicações, consequentemente sobram 90% do total. Desses 90%, a família usa 20% com passeios e lazer. Calculando 20% sobre os 90% do total, tem-se: $0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 6\,000 = 1\,080$.
Dessa forma, eles pretendem destinar R$ 1.080,00 para passeios e lazer.
Alternativa **C**.

II. Para verificar quanto a família pretende destinar a despesas fixas, calcula-se:

$0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 6\,000 = 4\,320$.

Logo, eles pretendem destinar R$ 4.320,00 para as despesas fixas.
Alternativa **D**. | D16 - N5.3 - Médio

2. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:
$(1{,}12)^1 \cdot 50\,000 = 56\,000$

Após um aumento de 12%, a aplicação terá o valor total de R$ 56.000,00.

Alternativa **A**. | D16 - N3.5 - Fácil

3. Efetuando os aumentos e as reduções, tem-se:
$(1{,}3)^2 \cdot (1 - 0{,}2) \cdot 100\,000 = (1{,}3)^2 \cdot 0{,}8 \cdot 100\,000 = 135\,200$

Assim, o valor total das vendas da lojista foi de R$ 135.200,00.
Alternativa **E**. | D16 - N3.5 - Médio

4. Após 3 aumentos sucessivos de 10%, tem-se:
$1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = (1{,}1)^3 \cdot 100 = 133{,}10$

Logo, a variação percentual foi de, aproximadamente, 33%.
Alternativa **B**. | D16 - N5.3 - Fácil

5. Em 2 anos de aumentos sucessivos de 20%, tem-se:

$(1{,}2)^2 = 1{,}44$

Logo, o aumento total da renda da família foi de 44%.
Alternativa **C**. | D16 - N5.3 - Fácil

6. Primeiramente, deve-se calcular o imposto estadual de 10% sobre o preço inicial:

$0{,}10 \cdot 500{,}00 = 50{,}00$

Então, o preço com o imposto estadual já incluso é: $500{,}00 + 50{,}00 = 550{,}00$.

Agora, é preciso calcular o imposto municipal de 5% sobre o preço com o imposto estadual já incluso: $0{,}05 \cdot 550{,}00 = 27{,}50$. Assim, o preço final com imposto municipal será: $550{,}00 + 27{,}50 = 577{,}50$.

Por fim, a taxa de processamento de 2% sobre o preço final com todos os impostos é: $0{,}02 \cdot 577{,}50 = 11{,}55$.

$577{,}50 + 11{,}55 = 589{,}05$

Portanto, o valor total a ser pago de impostos é R$ 89,05.

Alternativa **E**. | D16 - N3.5 - Difícil

7. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais, mobilizando a habilidade **EM13CHS402**.

O valor final é de: $200\,000 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = 345\,600$.

A rentabilidade bruta é de: $345\,600 - 200\,000 = 145\,600$.

Assim, o valor do IR após 3 anos corresponde a: $15\% \cdot 145\,600 = 21\,840$. Portanto, R$ 21.840,00.

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Difícil

8. Utilizando as relações apresentadas no boxe **Dica**, tem-se:

Venda = Custo + Lucro

Venda $= 230 + 0{,}65 \cdot 230 = 379{,}50$

Logo, o preço de venda da mercadoria é R$ 379,50.

Alternativa **B**. | D16 - N3.5 - Fácil

9. Utilizando as informações do enunciado, tem-se:

Venda = Custo + Lucro ⇒ Venda = 600 + 70% Venda ⇒ 30% Venda = 600 ⇒ Venda = 2 000

Logo, o preço de venda para que a meta seja atingida é de R$ 2.000,00.

Alternativa **E**. | D16 - N3.5 - Fácil

10. De acordo com as informações do enunciado, tem-se:

Valor líquido = Valor do aluguel · (1 − 10%)

1800 = Valor do aluguel · 0,9

Valor do aluguel = 2000

Arthur precisa alugar a sala por 2 mil reais.

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Médio

11. Encontrando o valor do faturamento da empresa (*FE*):

Participação de Roberto nos lucros =
$= FE \cdot 15\% \cdot 80\% \cdot 30\% \Rightarrow$
$\Rightarrow 108\,000 = FE \cdot 15\% \cdot 80\% \cdot 30\% \Rightarrow$
$\Rightarrow FE = \dfrac{108\,000}{15\% \cdot 80\% \cdot 30\%} = \dfrac{108\,000}{0{,}15 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3} \Rightarrow$
$\Rightarrow FE = 3\,000\,000.$

Portanto, o faturamento da empresa naquele ano foi de 3 milhões de reais.

Alternativa **D**. | D16 - N3.5 - Médio

12. O novo valor após o aumento e o desconto sucessivos será: 1,25 · 0,8 = 1.

Logo, o novo valor é igual ao valor antigo, sendo a variação percentual igual a 0%.

Alternativa **A**. | D16 - N5.3 - Médio

13. O cálculo do valor recebido por Carlos, V_C, pode ser feito da seguinte maneira:

$V_C = 2\,000\,000 \cdot 20\% \cdot 60\% \cdot \dfrac{70\%}{70\% + 30\%}$

$V_C = 2\,000\,000 \cdot 20\% \cdot 60\% \cdot 70\% = 168\,000$

Portanto, Carlos recebeu 168 mil reais na repartição de 60% do lucro.

Alternativa **B**. | D16 - N3.5 - Médio

14. Para um aumento de 40%, é necessário multiplicar o valor por 1,4. E para aplicar um desconto de 30%, multiplica-se o valor por 0,7 (1 − 0,3). Logo:

1,4 · 0,7 = 0,98 ⇒ Valor do desconto = 0,98 − 1 = = −0,02 = −2%

Assim, o atacadista ofereceu, efetivamente, um desconto de 2%.

Alternativa **B**. | D16 - N5.3 - Médio

15. Considere os valores recebidos por Valéria, V_V, e por Isabel, V_I. Assim, tem-se:

$V_V = 200\,000 \cdot 30\% \cdot \dfrac{100\,000}{100\,000 + 50\,000} = 40\,000$

$V_I = 200\,000 \cdot 30\% \cdot \dfrac{50\,000}{100\,000 + 50\,000} = 20\,000$

Dos 60 mil reais de lucro (30% de 200 mil reais), Valéria recebeu 40 mil reais, e Isabel, 20 mil reais.

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Médio

16. A variação percentual do produto foi de:
$\dfrac{250 - 200}{200} = \dfrac{50}{200} = 25\%.$

Alternativa **D**. | D16 - N5.3 - Fácil

17. O primeiro rendimento, considerando o valor inicial de 50 mil reais, foi de: 0,06 · 50 mil = 3 mil.

Agora, já considerando o valor rendido em 2022, tem-se o total de 53 mil; logo: 0,07 · 53 mil = = 3,71 mil.

Assim, o valor total é 56,71 mil, portanto o rendimento é de 6,71 mil reais.

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Médio

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Sendo $\dfrac{1}{5} = 0{,}2 = 20\%$, pode-se concluir que o maior percentual possível de recompensa é 100% − 20% = 80%.

Alternativa **E**. | D16 - N5.3 - Fácil

2. Após o pagamento da entrada, o saldo devedor é: 1000 − 600 = 400, ou seja, R$ 400,00.
Consequentemente, a taxa de juros na mensalidade corresponde a: $\dfrac{420 - 400}{400} \cdot 100\% = 5\%.$

Alternativa **B**. | D16 - N5.3 - Médio

3. Calculando:

site U: $\dfrac{56 - 40}{40} = 0{,}4$

site X: $\dfrac{21 - 12}{12} = 0{,}75$ (maior taxa de aumento)

site Y: $\dfrac{51 - 30}{30} = 0{,}7$

site Z: $\dfrac{11 - 10}{10} = 0{,}1$

site W: $\dfrac{57 - 38}{38} = 0{,}5$

Alternativa **A**. | D16 - N3.5 - Difícil

4. A medida de volume, em bilhões de litros, de cada reservatório é:

I. 0,2 · 105 = 21
II. 0,3 · 100 = 30
III. 0,5 · 20 = 10
IV. 0,4 · 80 = 32
V. 0,6 · 40 = 24

Dessa maneira, o reservatório IV é o que apresenta maior medida de volume.

Alternativa **D**. | D16 - N3.5 - Difícil

5. Quando a geladeira está fora da promoção, seu preço é: $1{,}1 \cdot 1000 = 1100$, ou seja, R$ 1.100,00.

No cartão de crédito, o preço da geladeira é: $0{,}98 \cdot 1100 = 1078$, ou seja, R$ 1.078,00.

Segundo o cálculo da cliente, o preço da geladeira no cartão de crédito é: $1{,}08 \cdot 1000 = 1080$, ou seja, R$ 1.080,00.

Consequentemente, o valor apresentado pela loja, comparado ao valor calculado pela cliente, foi: $1080 - 1078 = 2$, ou seja, R$ 2,00 menor.

Alternativa **A**. | D16 - N3.5 - Médio

6. A projeção era de que, em 2020, o rendimento médio mensal dos brasileiros seria de:
$1{,}072 \cdot 1{,}1 \cdot 1250 = 1474$, ou seja, R$ 1.474,00.

Alternativa **E**. | D16 - N3.5 - Médio

7. Considerando que c é o custo original da refeição:
$p = 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot c \Rightarrow c = \dfrac{p}{1{,}21}$

Alternativa **B**. | D16 - N3.5 - Médio

8. O número de compradores do produto foi igual a:
- $3000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}03 = 9$ pessoas da rede social A;
- $1000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}02 = 6$ pessoas da rede social B.

Acrescentando mais R$ 300,00 de investimento nas redes A e B, o número de compradores passou a ser:

- Rede A: $300 \cdot \dfrac{9}{100} = 27$ pessoas;
- Rede B: $300 \cdot \dfrac{6}{200} = 9$ pessoas.

Assim, sendo 15 $(9 + 6)$ a quantidade inicial de compradores e 36 $(27 + 9)$ a quantidade de compradores relativa ao investimento de R$ 300,00 em cada rede social, tem-se:

$Q = \dfrac{36 - 15}{15} \cdot 100\% = 140\%.$

Ou seja, o aumento na quantidade de compradores foi classificado como bom.

Alternativa **C**. | D16 - N5.3 - Difícil

9. Os acréscimos aos valores gastos com internet e mensalidade escolar são: $0{,}2 \cdot 120 + 0{,}1 \cdot 700 = 94 \Rightarrow 24 + 70 = 94$, resultando em R$ 94,00.

Consequentemente, o percentual de redução da mesada deve ser de: $\dfrac{94}{400} \cdot 100\% = 23{,}5\%$.

Alternativa **B**. | D16 - N5.3 - Médio

10. Cada um dos três primeiros sócios contribuiu com um total, em reais, de: $\dfrac{10 \cdot 10^5}{3} + 2 \cdot 10^5 = \dfrac{16 \cdot 10^5}{3}$.

Dessa maneira, o percentual em relação ao valor total distribuído é igual a: $\dfrac{\dfrac{16 \cdot 10^5}{3}}{18 \cdot 10^5} \cdot 100\% \simeq 29{,}63$, ou seja, mais próximo de 29,60.

Assim, conclui-se que a porcentagem do quarto sócio é: $\dfrac{2 \cdot 10^5}{18 \cdot 10^5} \cdot 100\% \simeq 11{,}11\%$.

Alternativa **A**. | D16 - N5.3 - Difícil

11. Totalizado, o orçamento inicial, em reais, foi de:
$10\,000 + 40\,000 + 40 \cdot 2500 = 150\,000$
Considerando p o percentual solicitado:
$(0{,}5 \cdot 10\,000 + 1{,}25 \cdot 100\,000) + (1 - p) \cdot 40\,000 = 0{,}9 \cdot 150\,000 \Rightarrow 5 + 125 + 40 - 40p = 135 \Rightarrow p = 0{,}875$.

Consequentemente, o percentual de desconto que a construtora deverá conceder nos custos fixos é de 87,5%.

Alternativa **D**. | D16 - N5.3 - Difícil

12. Considerando que n é o número de pontos obtidos pelo estudante na quarta avaliação, tem-se:
$46 \cdot 0{,}2 + 60 \cdot 0{,}1 + 50 \cdot 0{,}3 + n \cdot 0{,}4 \geqslant 60 \Rightarrow 0{,}4n \geqslant 29{,}8 \Rightarrow n \geqslant 74{,}5$.

Logo, para ser aprovado, o mínimo de pontos que esse estudante necessita obter na quarta avaliação é 74,5.

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Difícil

13. **a)** Calculando o valor que o cliente pagaria por 2 produtos de cada, sem o desconto, em função de x (preço de custo da calça):
$2 \cdot x \cdot 1{,}20 + 2 \cdot \dfrac{x}{3} \cdot 1{,}40 + 2 \cdot \dfrac{x}{2} \cdot 1{,}30 = 2{,}4x + 2{,}8 \cdot \dfrac{x}{3} + 1{,}30x = 13{,}90 \cdot \dfrac{x}{3}$

Dessa forma, aplicando o desconto de 10%, o valor desembolsado pelo cliente, em função de x, é:
$13{,}90 \cdot \dfrac{x}{3} \cdot 0{,}9 = 4{,}17x$.

b) Primeiramente, é necessário encontrar o preço de custo dos produtos dessa compra do cliente em função de x:
$2 \cdot x + 2 \cdot \dfrac{x}{3} + 2 \cdot \dfrac{x}{2} = \dfrac{6x + 2x + 3x}{3} = \dfrac{11x}{3}$

Calculando o valor do lucro:
Lucro = Venda − Custo
Lucro $= 4{,}17x - \dfrac{11x}{3} = \dfrac{1{,}51x}{3}$

Logo, tem-se:
$$\frac{\dfrac{1{,}51x}{3}}{\dfrac{11x}{3}} = \frac{1{,}51}{11} \simeq 0{,}1372$$

Consequentemente, o lucro aproximado, em porcentagem, obtido pelo comerciante nessa venda foi de 13,72%. | D16 - N3.5 - N5.3 - Difícil

Jornada 4 – Juros simples e compostos

Abertura da jornada

Esta jornada aborda um tópico da Matemática financeira que se refere a empréstimos e ao custo do dinheiro: o juro, isto é, o "aluguel do dinheiro". Para iniciar o estudo, o conceito de juro é explorado por meio do uso de cartão de crédito, um método de pagamento muito usado por consumidores. Reforce com os estudantes que uma boa gestão dos recursos financeiros depende do uso equilibrado de cartões.

Comente que o valor do dinheiro se transforma ao longo do tempo e, para usufruir do benefício de pagar por algo apenas depois de 30 dias, em geral é preciso pagar um valor por esses dias de espera.

Comente também que, hoje em dia, após a criação do Pix, os meios de pagamento digitais são cada vez mais usados em compras *on-line*, assinatura de serviços de *streaming*, entre outras.

Na questão **1**, espera-se que os estudantes comentem que, na modalidade de juro simples, a correção é aplicada a cada período e considera apenas o montante inicial; por sua vez, na modalidade de juro composto, a correção é feita sobre os valores já corrigidos, ou seja, o valor é corrigido sobre um valor que já foi corrigido.

Pode ser que os estudantes também comentem que, em operações financeiras, geralmente é utilizada a correção pela modalidade de juro composto. Já a modalidade de juro simples é utilizada com mais frequência para operações de curto período.

Na questão **2**, o texto da abertura pode contribuir para as respostas dos estudantes. É possível que eles comentem que a queda de taxa na modalidade de juro composto pode ser tanto positiva como negativa, dependendo do cenário da família. Para famílias que buscam empréstimos ou crédito, isso é uma boa notícia, pois os juros caem, e as parcelas de financiamentos são suavizadas. Por outro lado, para quem investe, trata-se de uma notícia ruim, pois as aplicações vinculadas a essa taxa passam a render menos.

Na questão **3**, estimule a investigação e a comparação de diferentes taxas, como as do cheque especial e do cartão de crédito.

A Educação financeira na escola deve ser um convite à reflexão acerca do uso saudável do dinheiro para o atendimento de necessidades e a satisfação pessoal. Essa reflexão deve envolver aspectos matemáticos e não matemáticos, além de ser feita de maneira crítica e fundamentada.

Por meio do texto de abertura desta jornada e dos conceitos sobre juros, espera-se que os estudantes relembrem aspectos importantes relacionados ao tema, como porcentagem, aumentos e descontos sucessivos, crescimento linear e crescimento exponencial. Acredita-se também que o conteúdo de Matemática financeira contribuirá para a construção de uma criticidade responsável e fundamentada, desenvolvida de maneira articulada com os saberes da escola, em uma perspectiva multidisciplinar.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

Decisões financeiras são influenciadas por aspectos culturais, comportamentais e sociais. É importante que se discuta com os estudantes os métodos de cálculo, assim como as estratégias. É preciso demonstrar que, dependendo da taxa, a decisão e a estratégia podem mudar.

Certifique-se da compreensão do fator de atualização, ou seja, que toda quantia, ao ser aumentada de uma taxa i, fica multiplicada por $(1 + i)$. Esse resultado é muito relevante para a resolução de problemas.

Incentive o uso de calculadoras, não para substituir habilidades de cálculo mental ou operacional mais complexo, mas para possibilitar discussões mais abrangentes e embasadas.

1. Fazendo uso do pagamento à vista por Pix, o valor do produto é:

$680 \cdot (1 - 0{,}10) = 612$; R$ 612,00

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Fácil

2. Como os juros são sobre o período, calcula-se:

$400 \cdot 1{,}08 = 432$

Logo, Mariana recebeu R$ 432,00 pelo serviço.

Alternativa **D**. | D16 - N3.5 - Fácil

3. A taxa que transforma R$ 2.000,00 em R$ 2.500,00 é dada por:

$2000 \cdot (1 + i) = 2500 \Rightarrow i = 0{,}25 = 25\%$

Alternativa **C**. | D16 - Médio

4. Valor total da atualização monetária em 20 dias:
R\$ 0,79 · 20 = R\$ 15,80

Valor da multa:
R\$ 2.392,29 · 2% ≃ R\$ 47,85

Assim, no total, Roberto vai pagar:
R\$ 2.392,29 + R\$ 15,80 + R\$ 47,85 ≃ R\$ 2.455,94

Alternativa **A**. | D16 - N3.5 - Médio

5. 5% de 3 000 = 150
Um ano tem 12 meses, então:
12 · 150 = 1800
Logo, Marcelo vai economizar R\$ 1.800,00.
Alternativa **A**. | D16 - N3.5 - Fácil

6. Primeiramente, é preciso interpretar as informações apresentadas na tabela. O índice é de 6,81% no acumulado de 12 meses para quem tem data base em março de 2019.
Logo, o valor V do novo aluguel, em reais, será aproximadamente:
$V = 2400 \cdot 1{,}0681 \simeq 2563$
Alternativa **B**. | D16 - N3.5 - Médio

7. Considerando que x é o valor inicial do produto, após o aumento, o produto vai custar $1{,}3x$.
Aplicando 20% de desconto no valor atualizado desse produto:
$1{,}3x \cdot (1 - 0{,}2) = 1{,}04x$
Logo, o aumento real do produto foi de 4%.
Alternativa **D**. | D16 - Médio

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

> **_DICA**
> Aproveite para acessar o *site* ou o aplicativo Calculadora do Cidadão, uma ferramenta desenvolvida pelo Banco Central do Brasil, disponível em: https://www.bcb.gov.br/meubc/calculadoradocidadao (acesso em: 28 set. 2023). Ao longo da jornada, há questões que podem ser resolvidas usando essa ferramenta.

1. Sendo i a taxa de juro, J o valor do juro (que é a diferença entre os valores final e inicial) e C o capital (valor inicial), tem-se:

$$i = \frac{J}{C} \Rightarrow i = \frac{2400 - 2000}{2000} \Rightarrow i = \frac{400}{2000} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i = 0{,}2 = 20\%$$

Portanto, a taxa de juro, nesse período, foi de 20%.
Alternativa **B**. | D16 - Fácil

2. Conforme as informações, a taxa de juros recebida por Murilo em 1 ano foi de:
$20\,000 \cdot (1 + i) = 23\,000 \Rightarrow i = 0{,}15 = 15\%$
Alternativa **D**. | D16 - Médio

3. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais, mobilizando a habilidade **EM13CHS103**.
Sendo J o valor dos juros, tem-se:

$$J = 4000 \cdot 6\% \cdot \frac{20}{30} = 160$$

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Fácil

4. O montante de cada trimestre é calculado pelo fator: $(1 + 0{,}1) = 1{,}1$.
No semestre, ele é dado por: $1{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}21$.
Logo, a taxa de juro no semestre é 21%.
Alternativa **C**. | D16 - Médio

5. Utilizando a fórmula de juro composto:
$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow 20\,000 = 10\,000\,(1 + 0{,}01)^t \Rightarrow$
$\Rightarrow (1 + 0{,}01)^t = 2 \Rightarrow (1{,}01)^t = 2$
Consultando o quadro: $(1{,}01)^t = 2$ para $t = 70$.
Logo, essa pessoa vai levar, aproximadamente, 70 meses para atingir o montante.
Alternativa **D**. | D16 - Fácil

6. Utilizando a fórmula de juro composto:
$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 5\,000(1 + 0{,}04)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 5\,000 \cdot 1{,}04^3 \Rightarrow M = 5\,624{,}32$
Logo, Vânia terá R\$ 5.624,32 após 3 anos.
Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Fácil

7. Utilizando a fórmula de juro composto:
$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow M = 1000 \cdot (1 + 0{,}06)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 1000 \cdot 1{,}06^2 \Rightarrow M = 1123{,}6$
Logo, após 2 anos, você terá R\$ 1.123,60.
Alternativa **B**. | D16 - N3.5 - Fácil

8. Utilizando a fórmula de juro composto:
$M = C \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 100\,000 = C \cdot (1 + 0{,}08)^{10} \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \frac{100\,000}{(1 + 0{,}08)^{10}}$$

Considerando que $1{,}08^{10} \simeq 2{,}208040$, tem-se:

$$C = \frac{100\,000}{(1{,}08)^{10}} \Rightarrow C \simeq \frac{100\,000}{2{,}208040} \Rightarrow C \simeq 45\,289{,}03$$

Alternativa **A**. | D16 - N3.5 - Fácil

9. Arthur teve um retorno anual de R$ 35.000,00, que representa uma taxa anual a juro simples de, aproximadamente, 5,8% ao ano, pois:

$$i = \frac{35}{600} = 0{,}058\overline{3}$$

Bruno teve um retorno anual de R$ 15.000,00, que representa uma taxa anual a juro simples de, aproximadamente, 2,3% ao ano, pois:

$$i = \frac{15}{665} \simeq 0{,}0226 \simeq 2{,}3\%$$

Alternativa **B**. | D16 - Médio

10. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais, mobilizando a habilidade **EM13CHS103**.

O montante (M) de Bianca em função do intervalo de tempo investido na poupança será:

$$M_B = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}006)^t = 10\,000(1{,}006)^t$$

Enquanto a dívida (D) de Gabriel é dada por:

$$D_G = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}1)^t = 10\,000(1{,}1)^t$$

Como Gabriel pagou sua dívida após 4 meses, tem-se:

$$D_G = 10\,000 \cdot (1{,}1)^4 = 14\,641$$

Igualando, obtém-se:

$$M_B = D_G \Rightarrow 10\,000 \cdot (1{,}006)^t = 14\,641 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1{,}006)^t = 1{,}4641 \Rightarrow t \simeq 63{,}7$$

Logo, no 64º mês, o montante do investimento de Bianca será maior do que o valor que Gabriel pagou pela dívida.

Alternativa **B**. | D16 - Difícil

11. O valor total (F) do financiamento é dado por:

$$F = 48\,000 \cdot (1 + 0{,}0061)^{84} \Rightarrow F = 48\,000 \cdot 1{,}0061^{84} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F \simeq 48\,000 \cdot 1{,}67 \Rightarrow F \simeq 80\,160$$

Alternativa **E**. | D16 - N3.5 - Médio

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. O saldo devedor após o pagamento da entrada é de $1200 - 800 = 400$ reais. O juro aplicado é de $450 - 400 = 50$ reais. Assim, a taxa de juros mensal é: $50 = 400 \cdot 2 \Rightarrow i = 0{,}0625 = 6{,}25\%$

Alternativa **A**. | D16 - Médio

2. Do gráfico, é possível observar que o saldo devedor inicial é R$ 500,00.

Como a capitalização é composta, a parcela mensal de juros é variável. Supondo uma taxa de juros constante e igual a 10% ao mês, é possível concluir que, após 6 meses, haverá um saldo devedor, em reais, de:

$$500 \cdot (1 + 0{,}1)^6 \simeq 885{,}78$$

Portanto, ao comparar esse resultado com o gráfico, a taxa de juros mensal será superior a 10%.

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Difícil

3. A primeira parcela de R$ 460,00 será paga à vista. Portanto, não há incidência de juros.

A segunda parcela, caso não houvesse incidência de juros, seria de R$ 400,00, pois o preço do fogão à vista é R$ 860,00. No entanto, há um acréscimo de R$ 60,00 na segunda parcela, representando os juros após 30 dias.

Logo, os juros correspondem a:

$$\frac{60}{400} = 0{,}15 = 15\%$$

Alternativa **C**. | D16 - Difícil

4. Após um mês:

- o rendimento para a aplicação básica será:

$$\frac{0{,}542}{100} \cdot \text{R\$ } 10.000{,}00 - \text{R\$ } 0{,}30 = \text{R\$ } 53{,}90$$

- o rendimento para a aplicação pessoal será:

$$\frac{0{,}560}{100} \cdot \text{R\$ } 10.000{,}00 - \frac{3{,}8}{100} \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{0{,}560}{100} \cdot \text{R\$ } 10.000{,}00\right) = \text{R\$ } 53{,}87$$

Então, a aplicação que fornecerá maior valor de rendimento líquido é a básica, com rendimento de R$ 53,90.

Alternativa **A**. | D16 - N3.5 - Difícil

5.

- Dívida em 01/03: R$ 1.000,00
  Pagamento mínimo: 20% · R$ 1.000,00 =
  = R$ 200,00
- Dívida em 01/04: R$ 1.000,00 − R$ 200,00 = = R$ 800,00; 10% · R$ 800,00 = R$ 80,00. Então: R$ 800,00 + R$ 80,00 = R$ 880,00

  Pagamento mínimo: 20% · R$ 880,00 =
  = R$ 176,00
- Dívida em 01/05: R$ 880,00 − R$ 176,00 = = R$ 704,00; 10% · R$ 704,00 = R$ 70,40. Então: R$ 704,00 + R$ 70,40 = R$ 774,40

Alternativa **D**. | D16 - N3.5 - Difícil

6. Calculando saldo a saldo, tem-se:

- Saldo após o 1º mês:
R$ 10.404,00 · 1,02 = R$ 10.612,08
- Saldo após o pagamento da 1ª parcela:
R$ 10.612,08 − R$ 5.202,00 = R$ 5.410,08
- Saldo após o 2º mês:
R$ 5.410,08 · 1,02 = R$ 5.518,28
- Saldo após o pagamento da 2ª parcela:
R$ 5.518,28 − R$ 5.202,00 = R$ 316,28

Esse valor equivale a um desconto de:

$\frac{316{,}28}{10.404{,}00} \cdot 100\% \simeq 3\%$

Alternativa **A**. | D16 - Difícil

7. Sendo $i = 0{,}0132$ ao mês:

$P < 0{,}75 \cdot V \Rightarrow P < 0{,}75 \cdot P(1 + i)^n \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}0132)^n > \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell n\ (1{,}0132)^n > \ell n\ \frac{4}{3} \Rightarrow n \cdot 0{,}0131 > 0{,}2877 \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \frac{2\,877}{131} \Rightarrow n > 21 + \frac{126}{131}$

O menor inteiro maior do que $21 + \frac{126}{131}$ é 22.

Assim, a primeira parcela que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a 52ª, pois 30 + 22 = 52.

Alternativa **C**. | D16 - Difícil

8. O lucro L, em reais, do banco foi de:

$L = 1000 \cdot 1{,}05^{12} - 1000 \cdot 1{,}01^{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow L = 1000 \cdot (1{,}05^{12} - 1{,}01^{12}) \Rightarrow$

$\Rightarrow L = 1000 \cdot (1{,}80 - 1{,}13) \Rightarrow$

$\Rightarrow L = 1000 \cdot 0{,}67 \Rightarrow L = 670{,}00$

Alternativa **C**. | D16 - Difícil

9. Valor presente da parcela 202,00:

$202 : (1 + 0{,}1) = 200$

Valor presente da parcela 204,02:

$204{,}02 : (1 + 0{,}1)^2 = 200$

O valor à vista, em reais, é: 200 + 200 = 400.

Alternativa **B**. | D16 - N3.5 - Difícil

10. Sendo a taxa 4% ao ano, tem-se:

$100\,000 = 50\,000(1 + 0{,}04)^x \Rightarrow 1{,}04^x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 1{,}04^x = \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \log 1{,}04 = \log 2 \Rightarrow x \simeq \frac{0{,}301}{0{,}017} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \simeq 17{,}7$

Logo, o valor inteiro mais próximo de x é 18.

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Difícil

11.

- Total, em reais, a ser desembolsado na loja A:
$(28\,500 - 13\,500) \cdot 1{,}18 = 17\,700$
- Total, em reais, a ser desembolsado na loja B:
$(27\,000 - 13\,000) \cdot 1{,}2 = 16\,800$
- Total, em reais, a ser desembolsado na loja C:
$(26\,500 - 12\,000) \cdot 1{,}19 = 17\,255$

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Difícil

12. Sendo $i = 10\% = 0{,}1$ e $n = 3$:

$53\,240 = C(1 + 0{,}1)^3 \Rightarrow C = \frac{53\,240}{1{,}331} \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 40\,000$

Logo, o valor do capital inicial era R$ 40.000,00.

| D16 - N3.5 - Médio

13. Ao final do primeiro mês, a dívida referente ao primeiro contrato era igual a:

R$ 1.400,00 · 1,15 = R$ 1.610,00

Renato pagou apenas R$ 750,00 dessa dívida. Assim, o valor emprestado no novo contrato foi igual a:

R$ 1.610,00 − R$ 750,00 = R$ 860,00

Como o valor foi pago um mês depois, com taxa de juros de 15%, o valor do último pagamento foi:

R$ 860,00 · 1,15 = R$ 989,00

Alternativa **C**. | D16 - N3.5 - Difícil

Jornada 5 – Equações e funções de 1º grau

Abertura da jornada

Iniciamos a jornada com um tema recorrente no cotidiano dos estudantes e no qual é perceptível a aplicação da matemática: o *cashback*. Assim, de maneira contextualizada, o objetivo é relacionar o cálculo de *cashback* a expressões algébricas e a equações de 1º grau, temas importantes para o desenvolvimento de outros conceitos matemáticos, em particular a função polinomial de 1º grau, também apresentada na jornada. Procure diferenciar esses conceitos matemáticos durante as atividades a fim de que os estudantes consolidem o aprendizado.

Comece perguntando sobre o termo *cashback* para verificar o que eles já sabem desse conceito. É provável que já conheçam algum programa de *cashback*, mas não tenham refletido sobre a matemática na aplicação dele. Assim, promova as questões e instigue os estudantes a refletir sobre esse assunto.

Na questão **1**, é provável que os estudantes mencionem que há vantagens para o consumidor, pois ele obtém desconto em uma futura compra. Para quem vende, o ponto positivo é a fidelização do cliente, que acaba voltando a consumir na loja para utilizar o crédito que recebeu.

Busca-se com a questão **2** aproximar o tema à matemática. Explique aos estudantes que, sempre que houver um padrão numérico, é possível representá-lo por meio de uma expressão matemática. Nesse caso, o valor do *cashback* é igual à porcentagem de desconto multiplicada pelo valor da compra.

A questão **3** traz uma situação hipotética na qual a ideia é apresentar uma expressão que represente o valor ganho, no caso para um ganho de 2% sobre o valor da compra. Assim, uma possível maneira é usar a expressão algébrica $0{,}02 \cdot x$, em que x representa o valor da compra.

_DICA

É interessante mostrar aos estudantes que a representação da incógnita da equação ou mesmo da letra utilizada na expressão algébrica pode ser qualquer símbolo, não apenas x e y.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

1. A dosagem do medicamento é de 15 mg mais 10 mg para cada quilograma do paciente. Assim, sendo x o "peso" (a massa) do paciente, o cálculo se dá pela expressão $15 + 10x$. Assim, para $x = 58$, tem-se: $15 + 10 \cdot 58 = 595$. Logo, o paciente deverá tomar 595 mg.

Alternativa **C**. | D19 - N5.4 - N5.8 - Fácil

2. Para saber o custo total que a empresa teve ao produzir 700 produtos, substitui-se essa quantidade na expressão que foi dada. Sendo assim, $C = 200 + 10 \cdot 700 \Rightarrow C = 200 + 7000 \Rightarrow C = 7200$.

Alternativa **E**. | D19 - N5.4 - N5.8 - Fácil

3. Para saber a medida de distância em metros para $t = 50$, deve-se calcular $10 + 5 \cdot 50 = 260$. Logo, a posição do objeto é 260 m.

Alternativa **D**. | D19 - N5.4 - N5.8 - Fácil

4. O preço do produto que custava x e sofreu um desconto de 5% quando pago à vista é calculado por $x - 0{,}05x = 0{,}95x$.

Alternativa **D**. | D19 - Fácil

5. A quantia, em reais, paga aos revisores que recebem por capítulo semanalmente é:

$(x - 2) \cdot 100 \cdot 3 = 300x - 600$

Somando esse valor com a quantia que os outros 2 revisores recebem:

$300x - 600 + 2 \cdot 2000 = 300x - 600 + 4000 = 300x + 3400$

Alternativa **E**. | D19 - Médio

6. Considerando x a idade da irmã mais nova, $x + 1$ a idade da irmã do meio e $x + 2$ a idade da irmã mais velha, tem-se:

$$\frac{x + x + 1 + x + 2}{3} = 22 \Rightarrow 3x = 66 - 3 \Rightarrow x = \frac{63}{3} = 21$$

Logo, a idade da irmã mais velha é $21 + 2 = 23$.

Alternativa **C**. | D19 - N5.4 - Fácil

7. Como a soma dos dois números é 52:

$x + \frac{x}{2} + 7 = 52 \Rightarrow 3x = 90 \Rightarrow x = 30$

Logo, o valor do menor número é $\frac{30}{2} + 7 = 22$.

Alternativa **C**. | D19 - N5.4 - Fácil

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. Sendo $f: A \to B$, tal que $f = 2x + 1$, para cada valor do conjunto A, tem-se:

- $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$;
- $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$;
- $f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$;
- $f(4) = 2 \cdot 4 + 1 = 9$;
- $f(6) = 2 \cdot 6 + 1 = 13$.

Assim, a imagem I da função é $I = \{3, 5, 7, 9, 13\}$.

Alternativa **B**. | D18 - N2.3 - Fácil

2. Uma relação entre os conjuntos pode ser expressa pela lei que calcula o valor da metade de cada número do domínio mais 1. Logo, $f(x) = \frac{x}{2} + 1$.

Alternativa **E**. | D18 - N4.3 - Fácil

3. Uma vez que cada pão custa R\$ 0,66 e não há um termo independente, o preço total a ser pago por qualquer quantidade de pão que for comprada pode ser calculado por $R(p) = 0{,}66 \cdot p$, em que p é o número de pães, e $R(p)$, o valor total a ser pago.

Alternativa **A**. | D19 - N4.3 - Fácil

4. Na tabela apresentada, os dados seguem um padrão linear, em que a quantidade de quilômetros percorridos é igual a 25 vezes o total de litros consumidos de gasolina. Logo, a função é $f(x) = 25x$.

Alternativa **E**. | D18 - N4.3 - Fácil

5. No início, a banheira estava preenchida com 30 litros de água e teve um aumento de 20 litros a cada minuto. Logo, a função que relaciona o intervalo de tempo com o volume é dada por: $V(t) = 20t + 30$.

Alternativa **B**. | D18 - N4.3 - Fácil

6. A função que representa o valor é dada pela taxa fixa mais o produto de 5,5 por metro quadrado. Logo, $V(x) = 45 + 5{,}5x$.
Alternativa **B**. | D19 - N4.3 - Fácil

7. André cobra $C_1(h) = 900 + 150h$ e Arthur cobra $C_2(h) = 750 + 200h$

Fazendo a relação $C_1(h) < C_2(h)$, tem-se:

$900 + 150h < 750 + 200h \Rightarrow 150 < 50h \Rightarrow 3 < h$.
Ou seja, o número mínimo de horas é igual a 4.

Alternativa **D**. | D19 - N5.8 - Médio

8. Considerando $L(n) = 1900$, tem-se:
$L(n) = 10n - 2100 \Rightarrow 1900 = 10n - 2100 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10n = 4000 \Rightarrow n = 400$
Alternativa **E**. | D19 - N2.3 - N5.8 - Fácil

9. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT307**.
$\Delta L = L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$
Substituindo cada um dos valores dados no problema, tem-se:
$\Delta L = 6{,}5 \cdot 22 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 2{,}86 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta L = 2{,}86\ \text{mm}$
Alternativa **B**. | D19 - N2.3 - N5.8 - Médio

10. Como $\frac{600}{12} = 50$, a função que descreve o problema é:
$y = 50x$, em que x corresponde ao total de semanas a serem cursadas. Como já se passaram 3 semanas, falta cursar $12 - 3 = 9$ semanas, e a taxa a ser paga é calculada por:
$y = 50 \cdot 9 = 450$
Assim, o valor da taxa será R\$ 450,00.
Alternativa **E**. | D19 - N4.3 - N5.8 - Médio

11. I. Para produzir x peças, o custo total é igual a 8.000 reais mais 2 reais por cada peça, logo:
$C(x) = 8000 + 2x$
Alternativa **C**.
II. Se $x = 960$, tem-se:
$C(960) = 8000 + 2 \cdot 960 = 9920$
Logo, o custo total será de R\$ 9.920,00
Alternativa **D**.
III. Se $C(x) = 4 \cdot 8000 = 32000$, tem-se que o número de peças que precisam ser vendidas é de:
$32000 = 8000 + 2x \Rightarrow x = \frac{24000}{2} = 12000$
Alternativa **E**. | D19 - N2.3 - N4.3 - N5.8 - Médio

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Se c_i é o gasto total com o hotel i, então:
- $c_1 = 180 + 6 + 2{,}5 \cdot 7 = 203{,}50$;
- $c_2 = 200 + 6 + 2{,}5 \cdot 1{,}6 = 210{,}00$;
- $c_3 = 199 + 6 + 2{,}5 \cdot 4{,}5 = 216{,}25$;
- $c_4 = 190 + 6 + 2{,}5 \cdot 1{,}5 = 199{,}75$;
- $c_5 = 205 + 6 + 2{,}5 \cdot 1{,}2 = 214{,}00$.

Como o menor valor é R\$ 199,75, o hotel escolhido foi o H4.
Alternativa **D**. | D18 - N5.4 - N5.8 - Fácil

2. Para determinar o lucro da produção, calcula-se o valor recebido pelas vendas das sacas menos o custo da produção dessas sacas:
Valor recebido = (preço da saca) · (quantidade de sacas vendidas) = $50 \cdot x$

Custo total = (preço do hectare) · (quantidade de hectares plantados) = $1200 \cdot 10$

Logo, o lucro foi determinado por:

$L(x) = 50x - 12\,000$

Alternativa **B**. | D19 - N4.3 - Médio

3. Considere a função afim $Q(t) = a \cdot t + b$, com Q sendo a quantidade de gases do efeito estufa, e t, o intervalo de tempo (em anos), com $t = 0$ em 2010 e $t = 1$ em 2011 e assim por diante.
Quando $t = 0$ (ano de 2010), tem-se $Q(0) =$ $= 49$ bilhões de toneladas.

Quando $t = 10$ (ano de 2020), tem-se $Q(10) =$ $= 44$ bilhões de toneladas.

Substituindo 49 e 0 e depois 44 e 10 na função $Q(t) = a \cdot t + b$, obtém-se:

$49 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 49$

Note que b é o termo independente, determinado quando $t = 0$.

$Q(t) = a \cdot t + b \Rightarrow 44 = a \cdot 10 + 49 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5 = 10a \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Note que a é o coeficiente angular. Ele é negativo, pois a meta é reduzir as emissões de gases.

Logo, a função é $Q(t) = -\dfrac{1}{2}t + 49$.

Alternativa **B**. | D19 - N4.3 - Difícil

4. O valor total gasto apenas com os diaristas, em reais, pela empresa pode ser expresso por:
$(X - 1) \cdot 80 \cdot 2 = 160X - 160$

Aplicando os conceitos de equação e somando esse valor com o valor pago ao gerente, obtém-se:

$Y = 160X - 160 + 1000 = 160X + 840$

Alternativa **D**. | D19 - N4.3 - Médio

5. A anuidade é o valor fixo de 24 dólares pago pelo ciclista. A esse valor são acrescidos 3 dólares por cada hora extra utilizada.
Logo, a função que pode representar essa situação é:

$f(x) = 3x + 24$

Alternativa **D**. | D19 - N4.3 - Fácil

6. De acordo com o enunciado, nenhum dos 3 estacionamentos fraciona a cobrança, ou seja, se o veículo de um cliente permanecer por 10 minutos, por 45 minutos ou por 60 minutos, será cobrado o valor de uma hora completa. Observe o quadro.

	Lucas (40 minutos)	**Clara (6 horas)**
Verde	R$ 5,00	R$ 5,00 · 6 = R$ 30,00
Amarelo	R$ 6,00	R$ 6,00 + R$ 2,50 · 2 = R$ 11,00
Preto	R$ 7,00	R$ 7,00 + R$ 1,00 · 3 = R$ 10,00

Analisando os dados, percebe-se que os estacionamentos que melhor atendem a Lucas e Clara são, respectivamente, o Verde e o Preto.

Alternativa **A**. | D18 - N5.8 - Médio

7. Considere x o total de quilômetros rodados e y o valor da corrida, que poderá ser expresso por meio da função afim $y = ax + b$, em que a é o preço por quilômetro rodado e b o valor fixo da bandeirada. De acordo com as informações do problema, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 8 \cdot a + b = 28{,}50 \\ 5 \cdot a + b = 19{,}50 \end{cases}$$

Isolando b em ambas as expressões e igualando, obtém-se:

$$\begin{cases} b = 28{,}50 - 8 \cdot a \\ b = 19{,}50 - 5 \cdot a \end{cases}$$

$28{,}50 - 8a = 19{,}50 - 5a \Rightarrow$

$\Rightarrow 8a - 5a = 28{,}50 - 19{,}50 \Rightarrow 3a = 9{,}00 \Rightarrow a = 3$

Substituindo o valor obtido em qualquer uma das equações, tem-se:

$8 \cdot 3 + b = 28{,}50 \Rightarrow 24 + b = 28{,}50 \Rightarrow b = 4{,}50$

Portanto, o valor da bandeirada é R$ 4,50.

Alternativa **D**. | D19 - N2.3 - N4.3 - N5.8 - Difícil

8. Tomando 1980 como o ano $x = 0$ e 1985 como o ano $x = 5$, percebe-se que a taxa de variação do número de médicos é dada por:

$\dfrac{162 - 137}{5 - 0} = 5$

Desse modo, a lei da função f que exprime o número de médicos x anos após 1980 é $f(x) = 5x + 137$.

Em consequência, para o ano de 2040 ($x = 60$), o número de médicos será:

$f(60) = 5 \cdot 60 + 137 = 437$

Alternativa **C**. | D18 - N2.3 - N4.3 - N5.8 - Difícil

9. Seja $c_i(x) = (x - M) \cdot T1 + V + O \cdot T2$ o custo no plano i, em que x é o intervalo de tempo de uso e O é o intervalo de tempo de ligação para outra operadora. Logo, tem-se:

- $c_A = (75 - 20) \cdot 1{,}5 + 25 + 50 \cdot 2 = 207{,}50$;
- $c_B = (75 - 65) \cdot 1 + 60 + 50 \cdot 1{,}2 = 130{,}00$;
- $c_C = (75 - 75) \cdot 1 + 60 + 50 \cdot 1{,}5 = 135{,}00$;
- $c_D = 120 + 50 \cdot 0{,}9 = 165{,}00$;
- $c_E = 120 + 50 \cdot 1{,}2 = 180{,}00$.

Portanto, o cliente deverá escolher o plano B.

Alternativa **B**. | D18 - N2.3 - N4.3 - N5.8 - Difícil

10. A medida de volume inicial da caixa às 8 h era de 600 L.

Com o acréscimo de 20 L por minuto durante 2 horas, tem-se:

$600 + 20 \cdot 120 = 3000$ L

Assim, o intervalo de tempo para esvaziar pode ser calculado por:

$f(x) = 15x - 3000$

Fazendo $f(x) = 0$, obtém-se:

$0 = 15x - 3000 \Rightarrow 15x = 3000 \Rightarrow x = 200$ min

Como 200 min é igual a 3 horas e 20 min, ao somar essa quantidade ao horário inicial de 10 h, tem-se que o esvaziamento da caixa-d'água foi às 13 h 20 min.

| D19 - N2.3 - N4.3 - N5.8 - Difícil

11. a) A tarifa cobrada pela empresa *A*, em R$, é dada por:

$y_A = 4x + 30$

b) Tarifa cobrada pela empresa *B*:

$$y_B = \begin{cases} 6x, & x \leqslant 30 \\ 2x + 120, & x > 30 \end{cases}$$

Para que a entrega feita pela empresa *A* seja mais barata que a feita pela empresa *B*, é preciso que $y_A(x) < y_B(x)$.

Supondo $0 \leqslant x \leqslant 30$, tem-se:

$y_A(x) < y_B(x) \Rightarrow 4x + 30 < 6x \Rightarrow 2x > 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > 15$

Portanto: $x \in]15, 30]$ (I)

Supondo agora $x > 30$, obtém-se:

$y_A(x) < y_B(x) \Rightarrow 4x + 30 < 2x + 120 \Rightarrow 2x < 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 45$

Portanto: $x \in]30, 45[$ (II)

De (I) e (II), conclui-se que $x \in]15, 45[$.

c) Sejam x_A e x_B, respectivamente, as medidas de massa transportadas pela empresa *A* e pela empresa *B*. As medidas de massa somadas devem totalizar 200 kg, e os preços do transporte somados devem totalizar R$ 850,00. Assim:

Supondo $0 \leqslant x_B \leqslant 30$, na primeira equação do sistema, tem-se:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 200 \\ 4x_A + 30 + 6x_B = 850 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 200 \\ 2x_A + 3x_B = 410 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_A = 190$ e $x_B = 10$

Supondo $x_B > 30$, novamente na primeira equação do sistema, tem-se:

$$\begin{cases} x_A + x_B = 200 \\ 4x_A + 30 + 2x_B + 120 = 850 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B = 200 \\ 2x_A + x_B = 350 \end{cases} \Rightarrow x_A = 150 \text{ e } x_B = 50$$

Portanto, há duas maneiras de transportar 200 kg de mercadoria utilizando as empresas *A* e *B* de forma que o gasto final totalize R$ 850,00:

1ª maneira: a empresa *A* transporta 190 kg de mercadoria e a empresa *B*, 10 kg;

2ª maneira: a empresa *A* transporta 150 kg de mercadoria e a empresa *B*, 50 kg.

| D19 - N2.3 - N4.3 - N5.8 - Difícil

Anotações

Jornada 6 – Gráficos de funções de 1º grau

Abertura da jornada

A função polinomial de 1º grau é aplicada em inúmeras situações cotidianas, sendo usada em diversas áreas do conhecimento. O gráfico de uma função polinomial é sempre uma reta porque está relacionado à taxa constante de variação média, o que facilita a modelagem e os cálculos nas aplicações.

O modelo desse tipo de função, por ser um dos mais simples, também é utilizado para conjuntos de pontos que se posicionam em uma reta. Como a margem de erro é segura, a aproximação entre esses pontos e os pontos da reta também nos ajuda a fazer diversas inferências sobre a situação a ser modelada (veja regressão linear).

Espera-se que, por meio do texto apresentado na abertura desta jornada e das inúmeras aplicações da função afim, os estudantes se lembrem de conceitos importantes sobre o estudo das funções como um todo e, principalmente, percebam que uma função afim se caracteriza pela constância de sua taxa de variação média.

A seguir, apresenta-se algumas sugestões de como trabalhar as questões propostas.

Na questão **1**, para calcular a velocidade de um móvel, deve-se usar 2 grandezas: o **comprimento (distância percorrida)** e o **intervalo de tempo (duração do percurso)**.

Na questão **2**, no caso da escada rolante, é preciso estipular um ponto de partida e um ponto de chegada e saber a medida da distância entre esses pontos (em metros), ou seja, a distância percorrida por uma pessoa que partiu de um ponto da escada e chegou a outro. Além disso, é preciso saber a medida do intervalo de tempo (em segundos) necessário para percorrer essa distância. Ao dividir uma medida pela outra, tem-se a medida da velocidade da escada:

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t - t_0}$$

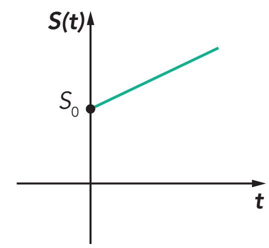
E, considerando $t_0 = 0$, tem-se:

$$V = \frac{S - S_0}{t} \Rightarrow V_m \cdot t = S - S_0 \Rightarrow S = S_0 + V_m \cdot t$$

Essa relação é uma função afim em que:

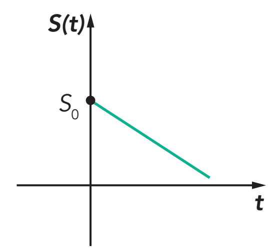
$$\begin{array}{ccccc} S & = & S_0 & + & Vt \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f(x) & = & b & + & a \cdot x \end{array}$$

Na questão **3**, para um observador posicionado ao pé da escada, na situação em que a escada está subindo, tem-se o MRU progressivo, ou seja, o móvel caminha na mesma direção e sentido da orientação da trajetória. O gráfico é uma reta crescente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Já na descida da escada, o movimento é retrógrado, ou seja, o móvel caminha no sentido contrário ao da orientação da trajetória. O gráfico é uma reta decrescente.



Banco de imagens/Arquivo da editora

O tema desta jornada permite o trabalho com modelagem matemática, porque várias situações podem ser modeladas por funções afim. Alguns exemplos dessa aplicação são as contas de água, luz, telefonia móvel, entre outras possibilidades, pois qualquer situação de pagamento de serviço ou consumo em que haja uma taxa fixa e outra que varia de acordo com o consumo pode ser modelada por essas funções.

Procure sempre fontes confiáveis e modelagens já existentes nos diversos materiais didáticos para enriquecer as aulas e repertoriar os estudantes. Assim, eles poderão compreender a aplicação da Matemática no cotidiano.

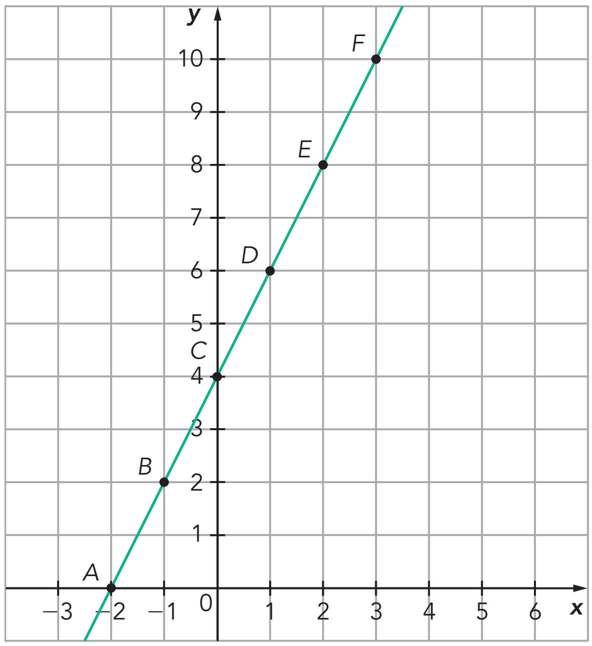
DICA

Para ampliar o trabalho, estimule os estudantes a pesquisar as diversas aplicações de função afim, despertando a atenção deles sobre a função linear ($b = 0$), sobretudo no que diz respeito a grandezas diretamente proporcionais.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

1. Nesta atividade, note que os seis pontos da tabela estão representados em destaque nesta reta.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Alternativa **B**. | D18 - N4.2 - Fácil

2. Note que o gráfico intersecta os eixos nos pontos (0, 3) e (3, 0), e a única tabela que contém esses pontos é esta:

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	5	4	3	2	1	0	−1

Alternativa **D**. | D18 - N4.2 - Fácil

3. De acordo com as informações do enunciado, o tempo começa a contar quando começa o movimento, ou seja, a função passa pela origem do plano cartesiano e pelo ponto (1; 0,5).
Dessa forma, o único gráfico que tem essas características é o da alternativa **B**. | D21 - N4.2 - Fácil

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

Verifique se os detalhes da representação de uma função definida por mais de uma sentença foram adequadamente associados ao gráfico, respeitando os intervalos do domínio. Para isso, peça aos estudantes que expliquem e debatam os conceitos. Se necessário, retome o que eles não compreenderam totalmente. Se achar prudente, apresente gráficos com mais de uma sentença em que a função não seja contínua. Aproveite para reforçar os conceitos de função, domínio e imagem.

1. Note que a função afim tem $a < 0$; logo, é decrescente. Como $b = 3$, a reta intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0, 3). Além disso, pode-se perceber também que, quando $y = 0$, o gráfico intercepta o eixo x em $x = -1{,}5$.
Alternativa **D**. | D23 - N2.2 - N5.10 - Fácil

2. Note que, para $f(x) = 0$, tem-se:

$$-4x + 12 = 0 \Rightarrow 12 = 4x \Rightarrow x = \frac{12}{4} = 3$$

Logo, a função intersecta o eixo x no ponto (3, 0).

Alternativa **B**. | D20 - N2.2 - Fácil

3. Como se pode observar no gráfico, f intersecta o eixo das ordenadas no ponto (0, 3). Com isso, seu termo independente é igual a 3 ($b = 3$). Então, a lei que define f é dada por $f(x) = ax + 3$. Também se pode notar que, quando $x = 1$, $f(x) = 0$, ou seja:

$$a \cdot 1 + 3 = 0 \Rightarrow a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

Portanto, $f(x) = -3x + 3$.

Alternativa **E**. | D24 - N2.2 - N4.2 - Fácil

4. Como o gráfico de f é uma reta, tem-se $f(x) = ax + b$, com $b = 8$. Se f passa pelo ponto (6, 5), tem-se:

$$5 = a \cdot 6 + 8 \Rightarrow 5 - 8 = 6a \Rightarrow a = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Logo, $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 8$. Portanto,

$$f(20) = -\frac{1}{2} \cdot 20 + 8 = -10 + 8 = -2.$$

Alternativa **A**. | D24 - N2.2 - Médio

5. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT307** da BNCC.
Note que a taxa de variação média da função T é constante:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{27{,}6 - 19{,}2}{20 - 10} = \frac{36 - 27{,}6}{30 - 20} = \frac{44{,}4 - 36}{40 - 30} = 0{,}84$$

Logo, $T(x) = 0{,}84x + b$. Substituindo o ponto (30, 36), tem-se:

$$36 = 0{,}84 \cdot 30 + b \Rightarrow b = 36 - 25{,}2 = 10{,}8$$

Portanto, $T(x) = 0{,}84x + 10{,}8$.

Alternativa **A**. | D18 - Médio

6. O início do *show* ocorreu 6,5 horas após a entrada dos artistas e dos colaboradores. Portanto, $f(6{,}5) = p$.
De acordo com o boxe **Dica**, $f(6{,}5)$ será o valor médio do intervalo [300, 400], que é:

$$\frac{300 + 400}{2} = 350.$$

Portanto, $p = 350$.

Analisando o gráfico, nota-se que $f(h) = 180$, valor que representa 80% do intervalo $[100, 200]$. Dessa forma, o valor de h representa 80% do intervalo $[2, 5]$. Para calcular o valor que corresponde a 80% desse intervalo, pode-se calcular 80% de 3 e somar com 2. Assim, sabe-se que 80% de 3 é: $\frac{8}{10} \cdot 3 = 2{,}4$. Logo, o valor que corresponde a 80% do intervalo $[2, 5]$ é: $2 + 2{,}4 = 4{,}4$.

Portanto: $h = 14\,\text{h} + 4\,\text{h} + \frac{4}{10} \cdot 60\,\text{min} =$
$= 18\,\text{h} + 24\,\text{min} = 18\,\text{h}\ 24\,\text{min}$.

Alternativa **B**. | D19 - N2.2 - Difícil

7. Como os gráficos são retas, as funções são de 1º grau, então:

$L(x) = ax + b \qquad C(x) = dx + e$

Considere primeiro a lei que define $L(x)$ que intersecta o eixo das ordenadas em $C = (0, -6)$.

Logo: $b = -6$. Como $L(x)$ passa pelo ponto $(2, 0)$, obtém-se:

$L(2) = 0 \Rightarrow 0 = a \cdot 2 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6 = 2 \cdot a \Rightarrow a = 3$

Portanto, $L(x) = 3x - 6$.

Agora, é preciso encontrar $C(x)$ que intersecta o eixo das ordenadas em $B = (0, 4)$. Logo, $e = 4$. Como -8 é raiz de $C(x)$, obtém-se:

$C(-8) = 0 \Rightarrow 0 = d \cdot (-8) + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -8d + 4 \Rightarrow 8d = 4 \Rightarrow d = \frac{1}{2}$.

Portanto, $C(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

Alternativa **C**. | D24 - N2.2 - Difícil

8. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT204** da BNCC.

Note que a vazão é dada em L/h, ou seja, a vazão é a taxa de variação da função em foco. Assim, pode-se analisar trecho a trecho o texto, comparando-o com os gráficos exibidos.

- Inicialmente, a piscina encontra-se com 10 000 L; isso significa que, quando o tempo é zero ($x = 0$), a medida de volume é igual a 10 000 L ($y = 10$). Ou seja, $A = (0, 10)$. Com isso, descarta-se a alternativa **E**, em que $A = (0, 0)$.
- Após essas 4 h, todas as 3 torneiras ficaram fechadas durante 2 h. Isso significa que não houve alteração na medida de volume entre 4 h e 6 h, ou seja, trata-se de uma função constante no intervalo $[4, 6]$. Com isso, descarta-se a alternativa **B**.
- Depois, a torneira de vazão V_2 é aberta e abastece a piscina durante 2 h. Como $V_1 < V_2$ e agora só a torneira de vazão V_2 enche a piscina, a reta volta a ser crescente com inclinação maior do que a da primeira etapa, e isso ocorre no intervalo de 2 h $[6, 8]$, o que descarta a alternativa **C**, pois o segmento de reta $\overline{CD}$ é vertical, ou seja, o volume de água não foi colocado de uma única vez.
- Após o momento anterior, também é aberta a torneira de vazão V_3. Se a torneira de vazão V_2 não foi fechada e V_3 foi aberta, a última reta terá de estar mais inclinada que a anterior. Com isso, descarta-se a alternativa **D**.

Portanto, o gráfico da única alternativa que atende às condições do texto é o da alternativa **A**. | D21 - - N2.2 - N4.2 - N5.10 - Difícil

9. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT204** da BNCC.

Como visto no boxe **Ampliando**, a força elástica (F_{EL}) dada em Newton é diretamente proporcional à deformação (d) dada em metros, ou seja:

$F_{EL} = k \cdot d$

Considere uma função $F_{EL}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que forneça a força elástica aplicada na mola em função da sua deformação d, ou seja, F_{EL} é definida por:

$F_{EL}(d) = k \cdot d$

Analisemos o texto em conjunto com a imagem:

- na situação 1, uma mola e uma esfera estão em repouso, assim não há F_{EL} exercendo nenhuma deformação d na mola ($F_{EL} = 0$ N e $d = 0$ m), ou seja, $F_{EL}(d)$ passa por $(0, 0)$.
- na situação 2, é aplicada uma força elástica de 90 N na mola, que promove uma deformação de 0,1 m (50 cm − 40 cm = 10 cm = 0,1 m), ou seja, $F_{EL}(d)$ passa por $(0{,}1; 90)$.
- na situação 3, é aplicada uma força de 135 N, que promove uma nova deformação na mola. Ou seja, $F_{EL}(d)$ passa por $(x, 135)$. Note, porém, que a deformação x na situação 3 é de $(40 - d)$ cm, ou $(0{,}4 - d)$ m. Logo, o ponto em questão é $(0{,}4 - d; 135)$.

Como $F_{EL}(d) = k \cdot d$, substituindo o ponto $(0{,}1; 90)$, obtém-se:

$90 = k \cdot 0{,}1 \Rightarrow 900 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 900$ N/m

Logo: $F_{EL}(d) = 900 \cdot d$. Substituindo o ponto $(0{,}4 - d; 135)$:

$135 = 900 \cdot (0{,}4 - d) \Rightarrow \frac{135}{900} = 0{,}4 - d \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25 \Rightarrow d = 25$ cm

Alternativa **B**. | D19 - N2.2 - Difícil

10. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais, mobilizando a habilidade **EM13CHS101** da BNCC.

I. Tem-se que $\overline{AB}$ é um segmento de reta no intervalo [2015, 2017]; logo, a função é afim. Como em toda função afim a taxa de variação é constante, é possível saber que o valor, em bilhões de reais, do saldo da balança comercial do 2º trimestre de 2016 é a média aritmética dos valores dos segundos trimestres de 2015 e 2017. Sendo esse saldo S, tem-se:

$S = \frac{21 + 8}{2} = 14{,}5 \Rightarrow S = 14{,}5$ bilhões de reais, que corresponde a: R$ 14.500.000.000,00.

Alternativa **D**.

II. A taxa de variação da função de 1º grau que passa pelos pontos A e B pode ser calculada por:

$$a = \frac{(21 - 8)}{(2017 - 2015)} = \frac{13}{2} = 6{,}5$$

Logo, a função é $f(x) = 6{,}5x + b$. Para calcular o valor de b pode-se substituir um dos pontos:

$8 = 6{,}5 \cdot 2015 + b \Rightarrow b = -13\,089{,}5.$

Assim, a função é $f(x) = 6{,}5x - 13\,089{,}5$.

Alternativa **C**. | D19 - N2.2 - Difícil

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Nesta atividade, é possível utilizar os conhecimentos prévios dos estudantes, por exemplo: a função tangente de um ângulo, como tg 45° = 1. Então, pode-se assumir que os fatores são $m_1 = 1$ e $m_2 = -1$. Assim:

$f_1(x) = x + p_1$ e $f_2(x) = -x + p_2$

Para o ponto $P(5, 10)$, obtém-se:

$f_1(x) = x + p_1 \Rightarrow 10 = 5 + p_1 \Rightarrow p_1 = 10 - 5 = 5$

$f_2(x) = -x + p_2 \Rightarrow 10 = -5 + p_2 \Rightarrow p_2 = 10 + 5 = 15$

Somando os valores: $p_1 + p_2 = 5 + 15 = 20$

Alternativa **A**. | D20 - N2.2 - Fácil

2. Encontrando as interseções com os eixos, tem-se:

Eixo x ($y = 0$): $f(x) = -4x + 12 \Rightarrow 0 = -4x + 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{-4} = 3 \Rightarrow P_x(3, 0)$

Eixo y ($x = 0$): $f(x) = -4x + 12 \Rightarrow y = -4 \cdot 0 + 12 =$

$= 12 \Rightarrow P_y(0, 12)$

Utilizando esses 2 pontos nos gráficos apresentados, pode-se concluir que o mais indicado é o da alternativa **A**. | D23 - N2.2 - N4.2 - Fácil

3. Por se tratar de uma reta, a taxa de acréscimo é sempre constante. Dessa maneira, quando o consumo de água dobra no mês seguinte, indo para 14 m^3, ocorre também um aumento igual ao que ocorreu de R$ 17,00 para R$ 42,20. Daí, tem-se o acréscimo de $42{,}20 - 17 = 25{,}20$.

Assim, o valor da fatura no mês de dezembro será de:

$42{,}20 + 25{,}20 = 67{,}40$

Com isso, conclui-se que o valor da fatura ficou entre R$ 65,00 e R$ 70,00.

Alternativa **A**. | D19 - N2.2 - N5.10 - Médio

4. Pela análise do que o texto apresenta sobre a faixa 1, a primeira parte do gráfico é de uma função constante $y = 12$, o que elimina a alternativa **E** como opção.

Já pelo que foi dito das faixas 2 e 3, a tarifa (inclinação) da faixa 3 é maior do que a da faixa 2. Portanto, o único gráfico que apresenta a inclinação da segunda reta maior do que a da primeira é o da alternativa **A**. | D21 - N4.2 - N5.10 - Fácil

5. De acordo com o quadro, no intervalo de $[0, 5\,000]$, $R = 0$, o que exclui as alternativas **C** e **E**.

Depois, no intervalo de $[5\,000, 10\,000]$, tem-se que 10% de $(R - 5\,000) = 0{,}1R - 500$, o que elimina a alternativa **D**.

Já no intervalo de $[10\,000, 15\,000]$, tem-se que $500 + 30\%$ de $(R - 10\,000) = 0{,}3R - 2\,500$.

Observando que a taxa de variação (ou inclinação) da terceira reta é maior do que a da segunda, o único gráfico que atende às condições apresentadas no quadro é o da alternativa **A**. | D21 - N4.2 - N5.10 - Difícil

6. a) Quando a torneira é fechada e o registro é aberto, tem-se:

$V_1(t_1) = V_2(t_1) \Rightarrow 3t_1 + 13 = -2t_1 + 58 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5t_1 = 45 \Rightarrow t_1 = \frac{45}{5} = 9$ h

Assim, a medida de volume máxima é:

$V_1(9) = 3 \cdot 9 + 13 = 40 \Rightarrow V_1(9) = 40$ L

b) Calculando o tempo:

$V_2(t) = -2t + 58$

$0 = -2t + 58 \Rightarrow 2t = 58 \Rightarrow t = \frac{58}{2} = 29$ h

Retirando do valor inicial, obtém-se:

$t - t_1 = 29 - 9 = 20$

Logo, depois de fechada a torneira, o tanque esvaziará em 20 horas. | D19 - N2.2 - Médio

Jornada 7 – Equações e funções de 2º grau

Abertura da jornada

A representação gráfica de uma função é sempre uma possibilidade de explorar, a partir do caráter geométrico, características, fatos e propriedades da relação existente entre dois conjuntos. Mas, no caso da representação gráfica para uma função de 2º grau, essas possibilidades são, em muitos aspectos, mais interessantes. As curvas parabólicas desempenham papel crucial no estudo da Matemática, e sua aplicação no ensino de funções no nível médio é uma oportunidade empolgante para cativar e inspirar os estudantes. Ao apresentar o conceito de função por meio das propriedades das curvas parabólicas, pode-se abrir portas para uma compreensão mais profunda e envolvente da Matemática ao mesmo tempo que demonstramos a sua relevância no mundo real.

As curvas parabólicas são ligadas a uma série de tópicos-chave no currículo de Matemática do Ensino Médio, desde a análise e determinação de domínios e contradomínios até a interpretação de gráficos, suas consequências sobre as relações entre variáveis e grandezas, na resolução de equações e inequações.

1. Intuitividade visual: As curvas parabólicas são amplamente reconhecidas e encontradas em diversos contextos. Desde arcos de lançamento em esportes até a trajetória de projéteis, as curvas parabólicas capturam nossa atenção e nos ajudam a visualizar a relação entre variáveis. Ao introduzirem funções por meio dessas curvas, os estudantes podem começar a entender como diferentes variáveis se relacionam em um cenário familiar.

2. Variação e transformações: A manipulação de parâmetros em uma equação quadrática pode levar a transformações interessantes na forma da curva. Isso permite que os estudantes explorem como as mudanças nos coeficientes afetam a orientação, a abertura e a posição da parábola. Essa experimentação prática pode facilitar a compreensão de conceitos abstratos, os diferentes modos de variação do crescimento, a existência e a identificação de valores extremos e ainda relativos a fatores de escala e translações.

3. Resolução de problemas do mundo real: Ao conectarem as curvas parabólicas a situações do cotidiano, como lançamento de projéteis, trajetórias de movimento e padrões de crescimento, os estudantes podem observar como as funções matemáticas são usadas para modelar e resolver problemas reais. Isso ajuda a eliminar a pergunta "Quando vou usar isso na vida real?".

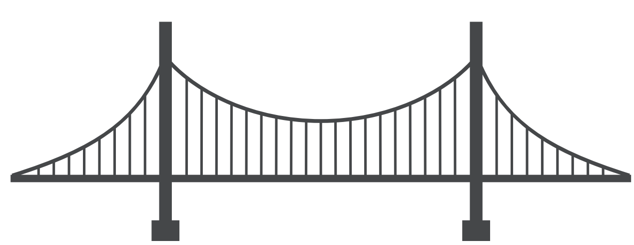
4. Abordagem interdisciplinar: Explorar curvas parabólicas oferece oportunidade para explorar tópicos interdisciplinares, por exemplo Física e Engenharia, como é o caso que será explorado nesta jornada. Isso pode inspirar estudantes a ver a Matemática como uma ferramenta poderosa em várias áreas de interesse.

5. Preparação para funções quadráticas: Ao começarem a trabalhar com curvas parabólicas, os estudantes podem desenvolver uma compreensão mais sólida que facilita a transição para o estudo detalhado das propriedades das funções quadráticas e suas soluções.

Acrescenta-se a esse farto cardápio a simetria axial da parábola e a propriedade da reflexão serem alguns fatos que podem ser facilmente explorados em contextos de geometria dinâmica. Assim, a aproximação dos estudantes ao conceito de função pode ampliar suas experiências de mundo, suas perspectivas com o conhecimento matemático a partir de investigações geométricas e algébricas em explorações simples e agradáveis.

No texto apresentado na abertura, a propriedade da parábola conhecida como "propriedade ótica de reflexão" é a que fundamenta o equilíbrio e a estabilidade das pontes pênseis. Essas construções belíssimas, de arquitetura e estética admiráveis, carregam em si o enlace com a curva catenária e com a parábola.

Na questão **1**, espera-se que o estudante desenhe a vista frontal de uma ponte pênsil por meio de uma representação próxima da ilustração a seguir. Por meio da dobradura, ele conseguirá identificar tanto o eixo de simetria da curva parabólica principal quanto seu vértice, que poderá ser identificado pelo ponto de encontro do eixo de simetria com a curva parabólica.


Igor_N/Shutterstock

Na questão **3**, o estudante poderá identificar as seguintes aplicações:

- movimento de projéteis na Física;
- modelagem de custos e receitas na Economia;
- análise de estruturas na Engenharia.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção.

A resolução de equações polinomiais de 2º grau incompletas tem especial ênfase no momento de estudo das funções polinomiais de 2º grau e estarão ligadas a problemas reais e interdisciplinares que podem ser muito significativos.

Em seguida, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

1. Para determinar as dimensões do mosaico, é suficiente observar que ele é um quadriculado de quadrados congruentes de 8×12. Uma vez que todos os quadrados estão decompostos da mesma maneira por 4 triângulos retângulos isósceles congruentes, cada um deles tem área que mede $4 \cdot 6{,}25 = 25$ cm^2. Então, o lado do quadrado pode ser obtido pela equação:

$\ell^2 = 25 \Rightarrow \ell = 5$

Considerando a moldura, o quadro decorativo tem $8 \cdot 5$ cm $+ 2 \cdot 3$ cm $= 46$ cm de medida de altura e $12 \cdot 5$ cm $+ 2 \cdot 3$ cm $= 66$ cm de medida de comprimento.

Alternativa **B.** | D17 - N5.4 - Médio

2. Como $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow ax \cdot \left(x + \frac{b}{a}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = 0$ e $x'' = -\frac{b}{a}$, tem-se $-\frac{b}{a} = 7$, ou seja, $b = -7a$.

Entre as opções, a única que satisfaz essa condição é a equação $x^2 - 7x = 0$.

Alternativa **C.** | D17 - Fácil

3. Resolvendo a equação polinomial de 2º grau apresentada:

$20i^2 - 4500 = 0 \Rightarrow 20i^2 = 4500 \Rightarrow i^2 = 225 \Rightarrow i = \pm 15$

Como a atividade pede a solução positiva, então $i = 15$.

Alternativa **B.** | D17 - N5.4 - Médio

4. Vamos manipular a equação dada para isolar H:

$H^2 \cdot I - M = 0 \Rightarrow H^2 = \frac{M}{I} \Rightarrow H = \sqrt{\frac{M}{I}}$

Como I e H representam grandezas inversamente proporcionais, ao considerar a altura máxima de uma pessoa, é preciso levar em conta o menor valor de I associado à faixa. No caso de uma pessoa acima do peso, de acordo com o quadro, I será 25. Logo:

$H = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$

Alternativa **E.** | D17 - D18 - N5.4 - Médio

5. Sendo a um número ímpar positivo e maior ou igual a 3, tem-se:

$\frac{a^2 + 1}{2} = 145 \Rightarrow a^2 + 1 = 290 \Rightarrow a^2 = 289 \Rightarrow a = 17$

Alternativa **A.** | D17 - N5.4 - Médio

6. Resolvendo a equação apresentada, tem-se:

$x^2 - 10x + 100 = 5x(x - 2) \Rightarrow 4x^2 = 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

Como a atividade pede o menor valor, então a resposta é -5.

Alternativa **B.** | N5.4 - Fácil

7. Resolvendo a equação dada, tem-se:

$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow x' = 0$ e $x'' = -2$

Alternativa **A.** | N5.4 - Fácil

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

> **DICA**
> Os problemas propostos nesta etapa incluem situações interdisciplinares que permitem o diálogo com conhecimentos de Física e de História. No que se refere ao componente História, é possível, além de um diálogo sobre construções históricas no Brasil e no mundo, ao explorar suas peculiaridades, trazer à tona as aplicações dos conhecimentos sobre curvas e formas na Arquitetura e na Engenharia.

1. Se a altura H do objeto é 0, tem-se

$-x^2 + 25x = 0 \Rightarrow -x \cdot (x - 25) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = 0$ e $x'' = 25$.

Portanto, o objeto retornou à altura zero (ao chão) depois de se deslocar horizontalmente 25 metros.

Alternativa **E.** | D17 - Fácil

2. I. A área residual e o preço são grandezas proporcionais. Se uma chapa quadrada que tem medida de lado 1 m e de área 1 m^2 custa R$ 32,00, o preço de uma chapa 0,2 m $\times$ 0,2 m com área medindo 0,04 m^2 será igual a $0{,}04 \cdot 32 = 1{,}28$.

Alternativa **C.**

II. Considerando x^2 a área residual da chapa que custa R$ 2,88, tem-se:

$\frac{2{,}88}{x^2} = \frac{32}{1} \Rightarrow x^2 = 0{,}09 \Rightarrow x = \pm 0{,}3$

Como x deve ser positivo, $x = 0{,}30$ m.
Alternativa **E**.

III. Para cada chapa de lado medindo x metros, sendo a área dada por x^2 e o preço $f(x)$ proporcionais, tem-se:

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{32}{1} \Rightarrow f(x) = 32x^2$$

Alternativa **C**.

IV. Considerando $x = 0{,}60$:

$f(0{,}60) = 32 \cdot (0{,}60)^2 = 11{,}52$

Logo, o preço é R$ 11,52.

Alternativa **C**.

V. Uma vez que a função que relaciona a medida do lado do pedaço de chapa quadrada com o preço é uma função polinomial de 2º grau na forma $f(x) = ax^2$, o gráfico dessa função será representado por uma curva parabólica com concavidade para cima cujo vértice passa pela origem. Isso descarta os gráficos das alternativas *B*, *C*, *D* e *E*.

Alternativa **A**.

| D17 - D18 - D20 - D21 - N5.4 - Difícil

3. Organizando em tabelas os pontos destacados nos gráficos, observa-se que para todo x do domínio de g tem-se $g(x) = f(x) + 1$. Logo, $g(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

x	$f(x)$
-2	1
0	0
2	1

x	$g(x)$
-2	$1 + 1 = 2$
0	$0 + 1 = 1$
2	$1 + 1 = 2$

Alternativa **B**. | D17 - D18 - Médio

4. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT204**.

Substituindo $x = 0{,}4$ e $E_p = 8{,}8$, temos:

$$8{,}8 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (0{,}4)^2 \Rightarrow k = \frac{17{,}6}{0{,}16} = 110$$

Alternativa **C**. | D17 - D18 - N5.4 - Médio

5. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais, mobilizando a habilidade **EM13CHS104**.

Como $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$ são os zeros de f, então a lei da função deve ser $f(x) = ax \cdot (x - 6)$ e $x_v = 3$. Uma vez que o gráfico passa pelo ponto (4, 8), tem-se $f(4) = 8$, logo:

$$4a \cdot (4 - 6) = 8 \Rightarrow a = -\frac{8}{8} = -1$$

Assim, a lei da função f é $f(x) = -x(x - 6)$, e tem-se:

$y_v = f(3) = -3 \cdot (3 - 6) = 9$

Portanto, a altura do arco parabólico no desenho é 9 m.

Alternativa **D**. | D17 - D20 - N6.6 - Médio

6. Como a curva passa pela origem, a lei da função cujo gráfico é representado por essa curva é $f(x) = ax^2$. Pelo gráfico, tem-se também, por exemplo, $f(5) = 50$, logo:

$a \cdot 5^2 = 50 \Rightarrow a = 2$

Portanto, tem-se $f(x) = 2x^2$.

Alternativa **A**. | D20 - Fácil

7. Se as imagens são iguais, então os valores de x são equidistantes do vértice. Como a distância entre eles é 10 e $x_v = 0$, então $x_1 = -5$ e $x_2 = 5$. Logo: $f(x_1) = f(x_2) = 40 \cdot 5^2 + 200 = 1200$.

Alternativa **A**. | N5.4 - Médio

8. Analisando a nova curva apresentada, observa-se que sua concavidade é para baixo, o que indica que $a < 0$. Como a curva corta o eixo y acima da origem, tem-se $c > 0$. Por fim, depois de interceptar o eixo y, a curva sobe, portanto, $b > 0$. Além disso, x_v é deslocado positivamente e tem-se $c > 0$; como b precisa ser o inverso de a, então $b > 0$.

Alternativa **D**. | D20 - Fácil

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. O preço de um bombom com desconto será de $2\left(1 - \frac{x}{100}\right) = 2 - \frac{x}{50}$. Assim, o valor V a ser pago por x bombons será $V = x \cdot \left(2 - \frac{x}{50}\right) = 2x - \frac{1}{50}x^2$.

Alternativa **C**. | D17 - Médio

2. De acordo com o gráfico, $x_1 = 0$ e $x_2 = 150$ são os zeros de f, então $x_v = \frac{0 + 150}{2} = 75$, e a expressão da função f deve ser na forma $f(x) = ax(x - 150)$. Além disso, o gráfico mostra que $y_v = 25$. Então, $25 = a \cdot 75 \cdot (75 - 150) \Rightarrow a = -\frac{1}{225}$

Portanto, $y = -\frac{1}{225}x(x - 150) \Rightarrow 225y = -x^2 + 150x$

Alternativa **E**. | D17 - D20 - N6.6 - Médio

3. Como a base retangular tem perímetro que mede 100 m, tem-se $x + y = 50$, ou seja, $y = 50 - x$. Então, a expressão da área dessa base será $A = x(50 - x)$; por isso, A é uma função polinomial de 2º grau tal que $x = 0$ e $x = 50$ são os zeros; portanto $x_v = 25$. Assim, a área A será máxima quando $x = 25$. Nesse caso, tem-se $y = 50 - 25 = 25$ também.

Alternativa **D**. | D17 - N5.4 - N6.6 - Fácil

4. Considerando a parábola em um sistema de coordenadas cartesiano cujo eixo y coincide com o eixo de simetria da parábola, obtém-se os zeros da função: $(-5, 0)$ e $(5, 0)$. Observa-se também que a parábola passa pelo ponto $(4, 3)$. Assim, $y = a(x - x')(x - x'')$ e substituindo os pontos, tem-se: $3 = a(4 - 5)(4 + 5) \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$.

Como $x_V = 0$,

$y_v = -\frac{1}{3} \cdot (-5) \cdot (+5) \Rightarrow y_v = \frac{25}{3}$.

Alternativa **D**. | D17 - D20 - N6.6 - Médio

5. Considerando que $x_v = 0$, $y_v = 30$ e que a função é do tipo $f(x) = ax^2 + c$, tem-se:

$30 = a \cdot 0^2 + c \Rightarrow c = 30$

Então $f(x) = ax^2 + 30$. Agora, considerando o ponto $(450, 280)$, é possível determinar a:

$280 = a \cdot 450^2 + 30 \Rightarrow a \cdot 450^2 = 250 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{250}{202\,500} = \frac{1}{810}$

Então $f(x) = \frac{1}{810}x^2 + 30$. Para saber a distância do x_v até o ponto de 70 m, faz-se o ponto $(x, 70)$, em que se obtém:

$70 = \frac{1}{810}x^2 + 30 \Rightarrow \frac{1}{810}x^2 = 40 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 32\,400 \Rightarrow x = 180$

Como é solicitada a distância entre os dois pontos, é preciso multiplicar essa distância por 2 e, assim, tem-se o valor de 360 m.

Alternativa **C**. | D17 - D20 - Médio

6. Sabendo que a receita r é dada por $r = p \cdot x$, tem-se:

$r = (100 - x) \cdot x \Rightarrow r = 100x - x^2$

Como a função r é de 2º grau e o coeficiente a que acompanha x^2 é negativo, basta obter o vértice dessa função.

Calculando o vértice, tem-se:

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{2 \cdot (-1)} = 50$

Alternativa **C**. | D17 - Médio

7. Queremos calcular o valor de t para o qual se tem $f(t) = 0$. Logo, tem-se:

$-2t^2 + 120t = 0 \Rightarrow t^2 - 60t = 0 \Rightarrow t \cdot (t - 60) = 0$

Daí obtém-se $t = 0$ e $t = 60$, como os zeros da função. Logo, $t = 30$ gera o f máximo, sem precisar saber fórmulas de máximo ou mínimo, apenas usando as raízes de uma equação de 2º grau incompleta.

Portanto, o número de infectados alcança o máximo para $t = 30$.

Alternativa **D**. | D17 - N6.6 - Médio

8. (F) Sabendo que a parábola tem concavidade para baixo, conforme gráfico apresentado, então $a < 0$.
(F) Sabendo que a parábola tem concavidade para baixo, conforme gráfico apresentado, então $a < 0$.

(V) Calculando:

$H = ax^2 + bx + c$

Pontos $(0, 0)$ e $(5, 5)$:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 0$

$5 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \Rightarrow 5 = 25a + 5b \Rightarrow 5a + b = 1$

$x_v = 5 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow b = -10a \Rightarrow 5a - 10a = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5a = 1 \Rightarrow a = -0{,}2$

$5 \cdot (-0{,}2) + b = 1 \Rightarrow b = 2$

(F) Conforme cálculos do item anterior, tem-se:

$H = -0{,}2x^2 + 2x$

Para o ponto $(1, 2)$, tem-se:

$2 = -0{,}2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \Rightarrow 2 \neq 1{,}8$

(V) Se o sarrafo está posicionado a uma distância horizontal de 4,9 metros do ponto de impulsão, então a altura máxima do atleta atingida nesse instante será:

$H = -0{,}2x^2 + 2x = -0{,}2 \cdot 4{,}9^2 + 2 \cdot 4{,}9 = 4{,}998$

Como $4{,}998 > 4{,}9$ m (altura do sarrafo), o atleta consegue ultrapassar o sarrafo.

| D17 - D20 - N5.4 - Difícil

Jornada 8 – Gráficos de funções de 2º grau

Abertura da jornada

Os valores de máximo e mínimo em uma função polinomial de 2º grau não apenas oferecem informações sobre o vértice de uma função, como também têm aplicações práticas em uma variedade de campos, desde a resolução de problemas de otimização até a modelagem de fenômenos do mundo real.

A função polinomial de 2º grau, também conhecida como função quadrática, é representada por uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Seu gráfico é representado por uma curva parabólica que pode ter concavidade para cima ($a > 0$) ou concavidade para baixo ($a < 0$). Se a concavidade for voltada para baixo, a função apresenta ponto de máximo. Se a concavidade for voltada para cima, a função apresenta ponto de mínimo.

Na questão **1**, aumente o repertório dos estudantes citando algumas áreas em que os conceitos de valores máximo e mínimo de funções quadráticas podem ser aplicados. Por exemplo:

- Ao projetar um tanque, o engenheiro civil procura o volume máximo (maior capacidade de armazenamento) com o menor custo de fabricação (menor área de superfície total do sólido projetado);
- Já o engenheiro mecânico ou elétrico busca a geração de potência máxima de um motor com o menor consumo de energia (elétrica ou de combustão);
- Na Farmacologia, processos de otimização prolongam a ação do fármaco;
- Nas Ciências atuariais, a análise e o gerenciamento de riscos financeiros buscam maximizar a arrecadação minimizando os riscos;
- Já na Ciência da computação, os processos de otimização utilizam métodos funcionais de minimização de variáveis quando essas são contínuas e não discretas (no caso de discretas, veja otimização combinatória). Se quiser se aprofundar no assunto, pesquise "tomada de decisão com teste A/B" em *data science*, programação linear e não linear.

Na questão **2**, vale propor debates à turma, levando em consideração as mais variadas respostas dos estudantes. Procure sempre relacionar as respostas ligadas a situações matemáticas com as de cunho sociológico, geralmente sobre a consequência que uma acarreta à outra.

Na questão **3**, o ponto de intersecção em questão é o vértice da parábola, já que a reta perpendicular ao eixo das abscissas que passa pelo vértice define o eixo de simetria de uma curva parabólica. Espera-se que os estudantes apontem que o vértice desempenha um papel fundamental na identificação do valor máximo ou mínimo da função quadrática, dependendo da direção da abertura da parábola. Se a parábola se abre para baixo, o vértice representa o valor máximo da função quadrática; se a parábola se abre para cima, o vértice representa o valor mínimo da função quadrática.

_DICA

Se $a > 0$, a função quadrática cresce à medida que se afasta do vértice (em ambas as direções), e o vértice é o valor mínimo da função. Se $a < 0$, a função quadrática decresce à medida que você se afasta do vértice (em ambas as direções), e o vértice é o valor máximo da função.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

1. Para calcular o valor de x, é necessário utilizar a fórmula de Bhaskara:

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow x' = 5 \text{ e } x'' = -2$$

Alternativa **C**. | D20 - N2.2 - Fácil

2. Calculando o valor de x, temos:

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 100$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 10}{2} \Rightarrow x' = 6 \text{ e } x'' = -4$$

Substituindo os valores das raízes x' e x'' na forma fatorada de uma equação polinomial de 2º grau, temos:

$(x + 4) \cdot (x - 6) = 0$

Alternativa **B**. | D26 - Fácil

3. Analisando o ponto $(0, -3)$, nota-se que $c = -3$. Assim, $t(x) = ax^2 + bx - 3$.

Substituindo os pontos $(-1, 0)$ e $(3, 0)$, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} a - b - 3 = 0 \\ 9a + 3b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ 9a + 3b = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 3 \\ 3a + b = 1 \end{cases}$$

Portanto, $a = 1$, $b = -2$ e $t(x) = x^2 - 2x - 3$.

Alternativa **E**. | D18 - Fácil

4. Com base no gráfico, é possível identificar os zeros da função -2 e 4. Logo, a forma fatorada da função dada é:

$f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 4)$

Ao substituir o ponto $(0, 8)$ na função anterior, temos $a = -1$. Assim:

$f(x) = -(x + 2) \cdot (x - 4)$

Alternativa **A**. | D20 - N2.2 - N5.10 - Fácil

5. Considerando $f(x) = 0$, é possível determinar o valor de x (zeros da função). Dividindo todos os membros da equação polinomial por -3, temos $x^2 - 6x - 18 = 0$.

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18) = 108$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{108}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x' = 3 + 3\sqrt{3} \text{ e}$$

$x'' = 3 - 3\sqrt{3}$

Alternativa **D**. | D20 - N2.2 - Fácil

6. Os valores que zeram $f(x) = -2(x + 2) \cdot (x - 12)$ são $x = -2$ e $x = 12$. Já que $y = 0$, temos $(-2, 0)$ e $(12, 0)$ como pontos de interseção de f com o eixo das abscissas.

Alternativa **E**. | D20 - N2.2 - Fácil

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. Como $a = -2$, temos $a < 0$ (concavidade para baixo) e y_V sendo o valor máximo de f. Logo:

$$y_V = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 7}{4 \cdot (-2)} = -\frac{16 + 56}{-8} = \frac{72}{8} = 9$$

Alternativa **E**. | D20 - N5.10 - Fácil

2. Pelo gráfico, é possível identificar que $c = 7$; logo, $C = (0, 7)$.

Se $f(x) = 0$, temos $x^2 - 8x + 7 = 0$, cujas raízes são 7 e 1. Assim, $A = (1, 0)$ e $B = (7, 0)$.

Por fim, calculando o valor das coordenadas dos vértices:

$$x_V = -\frac{(-8)}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$

$$y_V = -\frac{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}{4 \cdot 1} = -\frac{64 - 28}{4} =$$

$$= -\frac{36}{4} = -9$$

$V = (4, -9)$

Alternativa **E**. | D20 - N2.2 - N3.1 - Fácil

3. A parábola está voltada para baixo, indicando que o vértice representa o valor máximo da função. O vértice está no ponto $(2, 9)$. Portanto, o valor máximo que a função atinge é 9.

Alternativa **C**. | D20 - N3.1 - Fácil

4. A trajetória é uma parábola voltada para baixo. O valor máximo corresponde à altura do vértice da parábola. O vértice está no intervalo $[6, 7]$ no eixo y, ou seja, a altura máxima corresponde a um valor entre 6 e 7 metros.

Alternativa **E**. | D20 - N3.2 - Fácil

5. Como $L(x) = V(x) - C(x)$:

$L(x) = 3x^2 + 4x - (4x^2 - 20x + 37) =$

$= 3x^2 + 4x - 4x^2 + 20x - 37 = -x^2 + 24x - 37$

Para calcular o número de peças que devem ser produzidas para maximizar o lucro L, é necessário calcular o valor de x_V:

$$x_V = -\frac{24}{2 \cdot (-1)} = \frac{-24}{-2} = 12$$

Como a quantidade de peças está em milhões, temos 12 milhões de peças.

Alternativa **C**. | D25 - N3.1 - Médio

6. Se $T(h_1) = T(h_2) = 0$, então h_1 e h_2 são raízes de T. Fazendo $h^2 - 18h + 32 = 0$, temos $h_1 = 2$ e $h_2 = 16$. Sendo a $T_{mín}$ a coordenada y do vértice, tem-se:

$$y_V = -\frac{(-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32}{4 \cdot 1} = -\frac{384 - 128}{4} =$$

$$= -\frac{196}{4} = -49$$

Alternativa **B**. | D25 - N3.2 - Médio

7. Como $V(3, 4)$ e $A(4, 3)$ pertencem à curva, aplicando a fórmula canônica, é possível determinar a lei associada à função f:

$f(x) = a \cdot (x - 3)^2 + 4$

Substituindo as coordenadas de A, temos:

$3 = a \cdot (4 - 3)^2 + 4 \Rightarrow 3 = a + 4 \Rightarrow a = -1$

Logo:

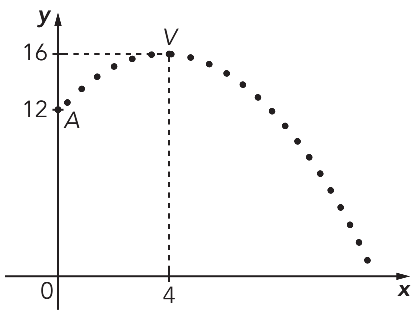
$f(x) = -(x - 3)^2 + 4 = -x^2 + 6x - 9 + 4 =$

$= -x^2 + 6x - 5$

Alternativa **D**. | D20 - N2.2 - N4.2 - Fácil

8. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT204**.

Sendo y a altura da bala do canhão dada em função do deslocamento horizontal x, temos:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $V(4, 16)$ e $A(0, 12)$ passam pela parábola, utilizando a fórmula canônica, temos:

$y = a \cdot (x - 4)^2 + 16$

Substituindo as coordenadas de A, temos:

$12 = a \cdot (0 - 4)^2 + 16 \Rightarrow 12 = a \cdot 16 + 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 16a = -4 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{4}$

Logo:

$y = -\dfrac{1}{4} \cdot (x - 4)^2 + 16$

Para descobrir os zeros da função para $y = 0$:

$-\dfrac{1}{4} \cdot (x - 4)^2 + 16 = 0 \Rightarrow \dfrac{(x-4)^2}{4} = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 4)^2 = 64 \Rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = 12$ e $x'' = -4$

Logo, o canhão estava posicionado no ponto (12, 0).

Alternativa **C**. | D25 - N2.2 - N3.1 - Difícil

9. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT204**.

I. Como os zeros da função são $x = -3$ e $x = 5$, usando a forma fatorada de uma função de 2º grau, temos:

$S(t) = a \cdot (t + 3) \cdot (t - 5)$

Substituindo o ponto (0, 15):

$15 = a \cdot (0 + 3) \cdot (0 - 5)$

$15 = -15a$

$a = -1$

Logo:

$S(t) = -(t + 3) \cdot (t - 5) = -(t^2 - 2t - 15) =$

$= 15 + 2t - t^2$

Alternativa **A**.

II. Comparando a função horária do MUV com o resultado anterior, temos $S_0 = 15$ m; $v_0 = 2$ m/s e $a = -2$ m/s^2.

Alternativa **B**. | D25 - N4.2 - Médio

10. I. Como x representa a quantidade de centavos que será descontada dos 36 reais, sabemos que x deve ser dividido por 100. Logo, o preço de cada litro pode ser representado por $36 - \dfrac{x}{100}$.

Se para cada x centavos descontados são vendidos 50 litros a mais, sabemos que a quantidade total de litros vendidos é representada por $40\,000 + 50x$.

Levando em consideração os dois itens anteriores, temos:

$V(x) = \left(36 - \dfrac{x}{100}\right) \cdot (40\,000 + 50x) =$

$= 1\,440\,000 + 1800x - 400x - \dfrac{1}{2}x^2 =$

$= -\dfrac{1}{2}x^2 + 1400x + 1\,440\,000$

Alternativa **E**.

II. Para que V seja máximo, devemos encontrar a coordenada x do vértice:

$x_V = -\dfrac{1400}{2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{-1400}{-1} = 1400$

Logo, o melhor desconto deverá ser de 1400 centavos, ou R$ 14,00.

Alternativa **D**.

III. Considerando $x = 1400$:

$V(1400) = -\dfrac{1}{2}(1400)^2 + 1400 \cdot (1400) + 1\,440\,000 =$

$= 2\,420\,000$

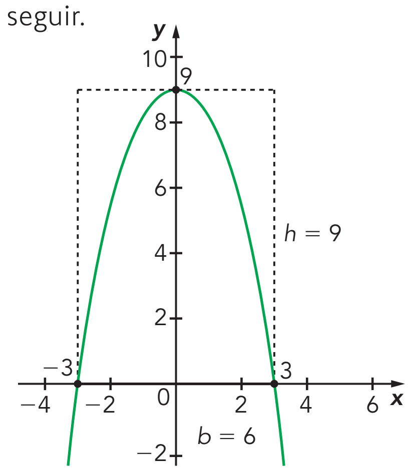
Assim, o valor máximo arrecadado será de R$ 2.420.000,00.

Alternativa **D**. | D25 - N3.1 - Difícil

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Como $c = 9$ e os zeros da função são 3 e -3, sabe-se que o eixo de simetria da curva parabólica associada à função é o próprio eixo y, e o vértice é representado pelo ponto (0, 9). Logo, a altura do retângulo é de 9 m e a base tem 6 m, conforme o gráfico a seguir.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Como a área (A) da parte frontal da tampa de concreto é $\frac{2}{3}$ da área do retângulo, temos:

$A = \frac{2}{3} \cdot (6 \cdot 9) = 36 \text{ m}^2$

Alternativa **C**. | D17 - N3.1 - Difícil

2. Como o vértice tangencia o eixo das abscissas, sabemos que f tem um único zero. Se $f(x) = 0$ tem $\Delta = 0$, temos:

$(-6)^2 - 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot C = 0 \Rightarrow 36 - 6C = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 36 = 6C \Rightarrow C = 6$

Alternativa **E**. | D25 - N2.2 - Médio

3. Para classificar a temperatura no interior da estufa, é necessário achar a temperatura máxima da função T:

$$T_{máx} = y_V = -\frac{22^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-85)}{4 \cdot (-1)} =$$
$$= -\frac{484 - 340}{-4} = \frac{144}{4} = 36$$

Pelo quadro apresentado, a classificação é alta.

Alternativa **D**. | D17 - N3.2 - Médio

4. Para saber em quais estádios o saque foi invalidado, é necessário achar a altura máxima da bola.

$H_{máx} = y_V + 1,5$

$$y_V = -\frac{\left(\frac{7}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) \cdot 12}{4 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)} = -\frac{\frac{121}{9}}{-\frac{4}{6}} = \frac{121}{6}$$

$$H_{máx} = \frac{121}{6} + 1,5 \simeq 21,7 \text{ m}$$

Logo, o saque foi invalidado nos estádios I, II, III e IV.

Alternativa **D**. | D25 - N3.1 - Médio

5. A área (A) do espaço retangular é dada por $A = x \cdot y$. Como é informado que o lado x utilizará um tipo de cerca A que custa 20 reais o metro, e o lado y utilizará um tipo de cerca B que custa 5 reais o metro, a expressão do custo (C) para cercar o perímetro desse terreno é dada por:

$C = 20x + 20x + 5y + 5y$

$C = 40x + 10y$

O custo deve ser, no máximo, de R$ 5.000,00. Logo:

$5\,000 = 40x + 10y$

Isolando y e substituindo-o na fórmula da área:

$A = x \cdot (500 - 4x)$

$A = -4x^2 + 500x$

Como o enunciado diz que queremos o maior valor possível da área para o público, é necessário calcular as coordenadas do vértice dessa parábola.

$$x_V = \frac{-500}{2 \cdot (-4)} = 62,5$$

$y_V = 500 - 4 \cdot 62,5 = 250$

Como temos dois lados com medida x e dois lados com medida y, vamos precisar de 125 metros de cerca do tipo A e de 500 de cerca do tipo B.

Alternativa **D**. | D17 - N3.1 - Difícil

6. Seja x o número de reduções de R$ 1,00 no preço do *combo*, a arrecadação diária, $A(x)$, é dada por:

$A(x) = (10 - x) \cdot (200 + 100x) = -100x^2 + 800x + 2\,000$

O valor máximo para a arrecadação é igual a:

$$y_V = -\frac{800^2 - 4 \cdot (-100) \cdot 2\,000}{4 \cdot (-100)} =$$
$$= \frac{1\,440\,000}{400} = 3\,600$$

Alternativa **C**. | D17 - N3.1 - Difícil

7. Como o ponto V pertence à $f(x) = -x^2 + 14x - 40$, sabemos que suas coordenadas são:

$$x_V = -\frac{14}{2 \cdot (-1)} = \frac{14}{2} = 7$$

$$y_V = -\frac{14^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-40)}{4 \cdot (-1)} = -\frac{196 - 160}{-4} =$$
$$= \frac{36}{4} = 9$$

Logo, $V = (7, 9)$.

Como P pertence à $f(x)$ e tem valores associados às coordenadas x e y iguais, temos:

$x = -x^2 + 14x - 40 \Rightarrow -x^2 + 14x - 40 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x' = 5$ e $x'' = 8$

Como $x_P < x_V$:

$P = (5, 5)$

Em relação ao solo, do ponto P para o ponto V, a altitude do avião aumentou: $9 - 5 = 4$ km.

Alternativa **D**. | D25 - N2.2 - N3.1 - N5.10 - Difícil

8. Se $C = (6; 1,8)$, as raízes, de acordo com o gráfico, são $x_1 = 0$ e $x_2 = 12$. Logo, a curva parabólica associada pode ser representada por $y = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 12)$.

Substituindo as coordenadas do ponto C, temos:

$1,8 = a \cdot 6 \cdot (6 - 12) \Rightarrow 1,8 = -36a \Rightarrow a = -\frac{1}{20}$

Logo:

$y = -\frac{1}{20}x \cdot (x - 12)$

Como $B = (x_B, 1)$, substituindo-o na função, tem-se:

$1 = -\frac{1}{20}x \cdot (x - 12) \Rightarrow x_B^2 - 12x_B + 20 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_B' = 2$ ou $x_B'' = 10$

Note que, pelo gráfico $x_B' = 2$, não convém. Logo, $B = (10, 1)$, e a largura do rio mede 10 m.

| D25 - N2.2 - N3.1 - N5.10 - Difícil

Jornada 9 – Perímetro e semelhança

Abertura da jornada

A relação entre fronteiras de países e linhas de contorno estudadas na Matemática está na maneira como essas linhas delimitam o território de uma nação. Assim como o contorno de uma figura geométrica, a fronteira representa o perímetro que separa um país do outro. A compreensão desse conceito é fundamental tanto na Geografia, para medir a extensão dos limites territoriais, quanto na Matemática, para calcular o comprimento total de uma linha que contorna uma forma. Essa conexão permite que os estudantes percebam que o estudo do perímetro não se restringe às figuras geométricas planas.

Nas questões **1** e **2**, espera-se que os estudantes reflitam sobre como se mede uma fronteira em um mapa e estabeleçam relações entre representações geográficas e medidas matemáticas. Essa discussão favorece a compreensão conceitual de perímetro, mostrando que ele representa o comprimento total de uma borda ou limite. Ao comparar as fronteiras territoriais com o contorno de figuras geométricas planas, os estudantes percebem como a Matemática está presente na representação e na descrição do espaço que nos cerca.

Na questão **3**, espera-se que os estudantes reconheçam diferentes situações em que a medida de perímetro é aplicada no cotidiano, relacionando-a a exemplos práticos além das fronteiras de um país, como o contorno de um terreno, de uma quadra esportiva ou de uma figura geométrica plana.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

Se necessário, disponibilize transferidores para que meçam os ângulos e percebam quando são e quando não são congruentes.

1. O perímetro é a soma das medidas de todos os lados da residência. Portanto:

$P = 10 + 8 + 6 + 8 + 4 + 16 = 52$

Logo, o perímetro da residência é 52 metros.

Alternativa **B**. | D11 - Fácil

2. Considerando que cada lado de cada quadrado da malha representa uma unidade de comprimento, tem-se:

$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{4}{7}$

Alternativa **A**. | D1 - N5.1 - Médio

3. Observando a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes e a congruência dos ângulos, as três figuras são semelhantes entre si. A figura *C* tem o dobro das medidas da figura *A*, e a figura *B* tem a metade das medidas da figura *A*.

Alternativa **E**. | D1 - N5.1 - Fácil

4. Seja x a medida do segmento de reta $\overline{CE}$.

Da semelhança de triângulos, tem-se:

$\frac{20}{40} = \frac{24}{x} \Rightarrow 20x = 40 \cdot 24 \Rightarrow 20x = 960 \Rightarrow x = 48$

Alternativa **B**. | D1 - N5.1 - Médio

5. O comprimento total da cerca é igual à medida de perímetro do trapézio. Então, para calcular, basta somar as medidas de todos os lados do trapézio.

$P = 7 + 10 + 7 + 18 = 42$

Logo, o comprimento da cerca é 42 metros.

Alternativa **D**. | D11 - Fácil

6. A fórmula para calcular o perímetro de uma circunferência é:

$P = 2 \cdot \pi \cdot r$

Considerando $\pi = 3{,}14$ e substituindo os valores na fórmula, tem-se:

$P = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 32{,}5 = 204{,}1$

O comprimento total do fio de luzes na roda-gigante será 204,1 metros.

Alternativa **B**. | D11 - Médio

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. O losango tem lado (L) medindo 2,3 metros. Para calcularmos o perímetro (P), usamos:

$P = 4 \cdot L$

$P = 4 \cdot 2{,}3 = 9{,}2$

Portanto, o comprimento total da faixa metálica para contornar o logotipo é de 9,2 metros.

Alternativa **D**. | D11 - N7.5 - Fácil

2. O painel é um paralelogramo com base $B = 3{,}2$ m e lado inclinado $L = 2$ m.

Perímetro do paralelogramo: $P = 2 \cdot (B + L)$

$P = 2 \cdot (3{,}2 + 2) = 2 \cdot 5{,}2 = 10{,}4$

Portanto, serão necessários 10,4 metros de moldura.

Alternativa **B**. | D11 - Fácil

3. Cada figurinha é um pentágono regular com lado $L = 3$ cm.

Perímetro do pentágono: $P = 5 \cdot L$

$P = 5 \cdot 3 = 15$

Portanto, o perímetro de cada figurinha é de 15 cm.

Alternativa **E**. | D11 - N.7.5 - Fácil

4. O perímetro de um triângulo equilátero é obtido pela soma dos três lados de mesma medida.

$P = 60 + 60 + 60 = 180$, ou seja, 180 m.

Então, o perímetro do palco é: $3 \cdot 180$ m $= 540$ m.

Convertendo para centímetros:

540 m = 5 400 cm

Portanto, o perímetro do palco é de 5 400 centímetros.

Alternativa **E**. | D11 - N7.5 - Médio

5. Nesta questão, é necessária uma comparação entre o perímetro do triângulo equilátero e o do círculo.

Perímetro do triângulo equilátero: $P = 3 \cdot L$

$P = 3 \cdot 7 = 21$

Perímetro da circunferência: $P = 2 \cdot \pi \cdot r$

Considerando $\pi = 3$ e substituindo esse valor na fórmula, tem-se:

$P = 2 \cdot 3 \cdot r \Rightarrow P = 6 \cdot r$

Como as duas figuras têm o mesmo perímetro, tem-se:

$21 = 6 \cdot r \Rightarrow r = 3{,}5$

Portanto, o raio da circunferência é 3,5 cm.

Alternativa **B**. | D11 - N7.5 - Médio

6. Na malha quadriculada, cada quadradinho mede 0,5 cm. Ao conectar os pontos, o contorno totaliza 32 segmentos (cada um com comprimento 0,5 cm), então:

$P = 32 \cdot 0{,}5 = 16$

Portanto, o perímetro do polígono formado é 16 cm.

Alternativa **C**. | D11 - N2.1 - Fácil

7. Triângulos semelhantes (rampa menor e rampa maior).

Dados da rampa menor: base $b_1 = 1{,}2$ m, altura $h_1 = 0{,}8$.

Dados da rampa maior: base $b_2 = 6$ m, altura h_2 desconhecida.

Proporção:

$$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2}$$

$$\frac{0{,}8}{1{,}2} = \frac{h_2}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{h_2}{6} \Rightarrow h_2 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$$

Portanto, a altura da rampa gigante é 4 metros.

Alternativa **A**. | D1 - N5.1 - Média

8. É necessário primeiro calcular o perímetro do pátio, somando as medidas dos quatro lados.

$P = 3{,}7 + 4 + 4{,}2 + 5{,}1 = 17$

Como ele comprou o dobro do perímetro, tem-se: $17 \cdot 2 = 34$

Portanto, Gabriel comprou 34 m de fita para a decoração do pátio.

Alternativa **D**. | D11 - Fácil

9. O comprimento do pedaço de corda representa o perímetro da bola, que é circular. A fórmula para o cálculo do perímetro de uma circunferência é:

$P = 2 \cdot \pi \cdot r$

Sabendo que o comprimento é 94,20 cm e considerando $\pi = 3{,}14$, tem-se:

$94{,}20 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$

$94{,}20 = 6{,}28 \cdot r$

$r = 94{,}20 : 6{,}28$

$r = 15$

Portanto, o raio da bola é mede 15 cm.

Alternativa **A**. | D11 - Médio

10. Para determinar as medidas dos lados do estacionamento, usamos a fórmula do perímetro do retângulo:

$P = 2 \cdot (B + H)$

Sabemos que $P = 92$ m, $B = (x + 5)$ m e $H = x$ m. Substituindo na fórmula:

$92 = 2 \cdot (x + x + 5) \Rightarrow 92 = 2 \cdot (2x + 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow 92 = 4x + 10 \Rightarrow 4x = 82 \Rightarrow x = 20{,}5$

Assim, o lado menor mede 20,5 m e o lado maior mede 25,5 m.

Alternativa **A**. | D11 - Fácil

11. O perímetro de terreno é obtido somando as medidas de todos os lados da figura e, para isso, é necessário determinar os valores de a e b.
Para determinar o valor de a, é necessário adicionar: $20,3 + 5,0 = 25,3$, ou seja, $a = 25,3$ m.

Para determinar o valor de b, é necessário subtrair: $11,2 - 6,8 = 4,4$, ou seja, $b = 4,4$ m.

Agora, basta adicionar as medidas de todos os lados da figura:

$P = 20,3 + 4,4 + 5,0 + 6,8 + 25,3 + 25,3 + 11,2 = 73,0$

Assim, o perímetro do terreno é 73,0 m.

Alternativa **D**. | D11 - Médio

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. O suporte central forma um triângulo com hipotenusa de $\frac{x}{2}$ m, cateto oposto de 0,5 m e ângulo de 30°. Quando o assento está na altura máxima (1 m), forma-se um triângulo semelhante.

Usando o seno:

$$\text{sen } 30° = \frac{0,5}{\frac{x}{2}}$$

Como sen 30° = 0,5, tem-se: $0,5 \cdot x = 1 \Rightarrow x = 2$

Logo, o comprimento da gangorra é 2 m.

Alternativa **D**. | D1 - N5.1 - Médio

2. Perímetro real do campo: 250 m.
Escala da planta: 1 : 2000 (ou seja, 1 unidade na planta representa 2000 unidades reais).

Perímetro na planta (em metros):

$$P_{\text{planta}} = \frac{250}{2000} = 0,125$$

Portanto, a medida do perímetro na planta é 0,125 m.

Alternativa **B**. | D11 - N5.1 - Médio

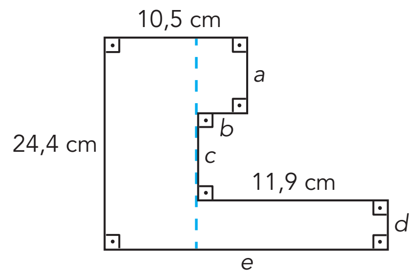
3. Para determinar o perímetro real da construção, é necessário considerar a escala 1 : 500, que indica que 1 cm no desenho representa 500 cm ou 5 m.
Fazendo as conversões:

10,5 cm na planta $\Rightarrow 10,5 \cdot 5 = 52,5$ m

11,9 cm na planta $\Rightarrow 11,9 \cdot 5 = 59,5$ m

24,4 cm na planta $\Rightarrow 24,4 \cdot 5 = 122,0$ m

Nomeando os lados da figura de que não se sabem as medidas, e fazendo um corte para calcular essas medidas, tem-se:



Banco de imagens/Arquivo da editora

Percebe-se que a soma das medidas dos lados, $a + c + d$ será igual à medida do lado oposto, ou seja, $a + c + d = 24,4$ cm.

Para os lados de medidas b e e, basta calcular a diferença entre 11,9 cm e 10,5 cm, assim, tem-se a medida do lado b e, consequentemente, ao calcular a soma de 10,5 e 11,9 menos esse valor de b, tem-se a medida do lado e:

$b = 11,9 - 10,5 = 1,4$, ou seja, 1,4 cm;

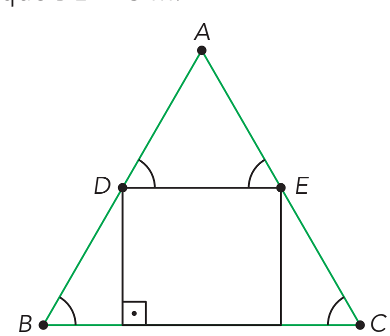
$e = 10,5 + 11,9 - 1,4 = 21$, ou seja, 21 cm.

Para calcular o perímetro da figura, somam-se as medidas de todos os lados:

$24,4 + 24,4 + 10,5 + 1,4 + 11,9 + 21 = 93,6$, ou seja, 93,6 cm, que equivale a $93,6 : 0,2 = 468,0$ m na realidade.

Alternativa **E**. | D11 - N5.1 - Médio

4. Observe, na figura a seguir, que $AB = AC = BC = 6$ m e que $DE = 3$ m.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Visto que a entrada do túnel tem formato de triângulo equilátero, a medida da altura dela pode ser calculada assim:

$$H = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Pela semelhança dos triângulos ABC e ADE:

$$\frac{H}{BC} = \frac{H-h}{DE} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}-h}{3} \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Alternativa **E**. | D1 - N5.1 - Médio

5. Para determinar o perímetro, primeiro se deve perceber que todos os lados dos dois quadrados valem 6 cm e, portanto, do ponto C até o fio tracejado, da figura, tem-se 3 cm, o restante do lado, que vai até o ponto D, será denotado por x. Com isso, tem-se então que:

$P = 6 + 6 + 6 + 6 + 3 + DE + GH + AH + x$

Para determinar o valor x, basta aplicar relações trigonométricas com o triângulo retângulo composto com o ponto O e D:

$tg\ 30° = \frac{co}{ca}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{3} \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$P = 27 + DE + GH + AH + \sqrt{3}$

Para descobrir a medida de $\overline{DE}$, é necessário achar a do segmento $\overline{OD}$. Utilizando o valor de x e o teorema de Pitágoras, tem-se que $OD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ cm. Como $OE = 6$ cm, tem-se que $DE = 6 - 2\sqrt{3}$.

$P = 27 + 6 - 2\sqrt{3} + GH + AH + \sqrt{3}$

Agora, para calcular as medidas de $\overline{GH}$ e $\overline{AH}$, basta perceber que o triângulo retângulo composto pelos pontos O, H e uma reta descendo do ponto O, paralela aos lados desse quadrado, é semelhante ao triângulo visto anteriormente, pois compartilham de ângulos com a mesma medida e têm um dos lados que mede 3 cm, oposto ao ângulo de 60°. A partir disso, tem-se que:

$OH = 2\sqrt{3}$

Portanto, a medida de $\overline{GH}$ é $6 - 2\sqrt{3}$.

E, considerando o primeiro triângulo, a medida de $\overline{AH}$ é $3 - \sqrt{3}$, logo:

$P = 27 + 6 - 2\sqrt{3} + 6 - 2\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} + \sqrt{3}$

$P = 42 - 4\sqrt{3}$

Alternativa **E**. | D11 - N5.1 - Difícil

6. O círculo está inscrito em um triângulo retângulo, e o raio do círculo é de 1 cm. Sabendo que o raio de um círculo inscrito em um triangulo retângulo é dado pela soma das medidas dos catetos (a e b) menos a medida da hipotenusa (c), tudo dividido por 2, tem-se:

$r = \frac{a + b - c}{2} \Rightarrow 1 = \frac{a + b - 10}{2} \Rightarrow a + b = 12$

Utilizando teorema de Pitágoras:

$a^2 + b^2 = 10^2 = 100$

Obtem-se então um sistema de duas equações:

$\begin{cases} a + b = 12 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases}$

Substituindo $b = 12 - a$ na segunda equação:

$a^2 + (12 - a)^2 = 100$

$a^2 + 144 - 24a + a^2 = 100$

$2a^2 - 24a + 44 = 0$

$a^2 - 12a + 22 = 0$

Aplicando fórmula de Bhaskara:

$a = 6 \pm \sqrt{14}$

Logo, $b = 12 - 6 \pm \sqrt{14}$

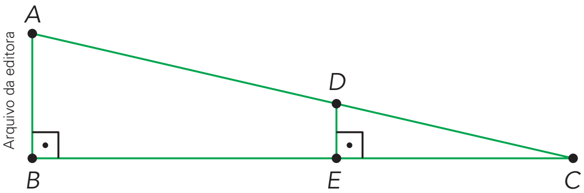
Calculando o perímetro, tem-se:

$P = 10 + 12 - 6 \pm \sqrt{14} + 6 \pm \sqrt{14}$

$P = 10 + 12 = 22$

Alternativa **C**. | D11 - Difícil

7. Observe esta figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

ABC e DEC são triângulos retângulos e semelhantes, pois têm ângulos correspondentes congruentes.

Assim, entendendo que $AB = 21$ dm, $DE = 9$ dm e $BE = 120$ dm, tem-se:

$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EC} \Rightarrow \frac{21}{9} = \frac{120 + EC}{EC} \Rightarrow$

$\Rightarrow 7 \cdot EC = 360 + 3 \cdot EC \Rightarrow EC = 90$ dm $= 9$ m

| D1 - N5.1 - Difícil

8. Sabe-se que $A = (0, 0)$, $B = (0, 8)$, $C = (15, 8)$ e $D = (9, 0)$.

a) Considerando o segmento de reta que une A e B, pontos pertencentes ao eixo das ordenadas, a mediatriz de $\overline{AB}$ é a reta $y = 4$.

E, sendo $1 \leqslant x \leqslant 3$, uma possível localização do ponto de observação no setor I é em $(1, 4)$.

Semelhantemente, a mediatriz do segmento $\overline{BC}$ é a reta $x = \frac{15}{2}$. Assim, considerando que $5 \leqslant y \leqslant 7$, uma possível localização do ponto de observação no setor II é $\left(\frac{15}{2}, 7\right)$.

b) Considerando $H = (15, 0)$, pode-se afirmar que os triângulos retângulos DHC e GFD são semelhantes, pois, sendo $FG /\!/ DE$, os ângulos $C\hat{D}H$ e $D\hat{G}F$ são alternos internos, ou seja, $C\hat{D}H = D\hat{G}F$.

Dessa maneira:

$\frac{FG}{DH} = \frac{DF}{CH} \Rightarrow \frac{FG}{6} = \frac{6}{8} \Rightarrow FG = \frac{9}{2}$ u.d.

Além disso, como são semelhantes os triângulos mencionados anteriormente e o triângulo pitagórico de lados 3, 4 e 5, tem-se que $CD = 10$ u. d., DH $= 6$ u. d. e CH $= 8$ u. d.

Assim: $\frac{FE}{CD} = \frac{3}{4} \Rightarrow FE = \frac{15}{2}$ u.d.

Logo, a medida de perímetro, em metros, é:

$200 \cdot 2 \cdot \left(\frac{9}{2} + \frac{15}{2}\right) = 4\,800$

| D1 - D11 - N2.1 - N5.1 - Difícil

Jornada 10 – Área

Abertura da jornada

É interessante que se inicie uma conversa com os estudantes sobre o conceito geométrico de área, mencionando, para isso, a utilização da tecnologia dos *drones*. Esse conteúdo e abordagem são usados em diversas aplicações cotidianas, profissionais e científicas. Reforce a importância do uso da tecnologia nas mais diversas atividades humanas para monitorar situações delicadas, como queimadas ilegais e até combate a crimes ambientais, contudo isso também levantará debates sobre privacidade e a capacidade de vigilância do Estado.

Na questão **1**, espera-se que os estudantes citem usos como: entretenimento (filmagem, produção de vídeos, gravação de eventos culturais), arquitetura e engenharia (monitoramento de obras e construções), esporte, agricultura, segurança, etc.

Na questão **2**, eles podem falar sobre determinar as coordenadas de um local, calcular medidas de área e perímetro de terrenos, incluindo acompanhar desmatamentos, monitorar regiões de destruição ambiental, lixões, ilhas de resíduos plásticos nos oceanos, etc.

Na questão **3**, os estudantes são convidados a pensar geometricamente na divisão de uma figura em partes. Dividindo o terreno em "pedaços", ou seja, em figuras geométricas cujas medidas de área se sabe calcular utilizando fórmulas, é possível obter medidas de regiões com as formas mais "estranhas" para as quais não há relações matemáticas predefinidas.

Comente ainda a respeito de aplicativos que podem fazer isso com o emprego de ferramentas de seleção de regiões em mapas. Pesquisar, como proposto na questão **4**, pode ser um excelente caminho de aprendizagem.

A plataforma *TerraBrasilis* apresenta informações acerca de desmatamentos e queimadas, entre outros impactos ambientais. Esse monitoramento é feito em todas as regiões e biomas do Brasil e é fundamental para a tomada de decisões pelos governos e instituições de proteção ambiental. Também disponibiliza mapas, gráficos, relatórios, publicações, etc.

_DICA

Oriente os estudantes a pesquisar diferentes maneiras de realizar o monitoramento ambiental buscando identificar a presença da Matemática nesse contexto. Sugestões de *sites* de pesquisa: http://terrabrasilis.dpi.inpe.br/ e http://www.dpi.inpe.br/DPI/. Acesso em: 25 out. 2023.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

A atividade do **Resolvendo a questão** tem como objetivo:

- mostrar como as imagens aéreas podem ajudar no mapeamento de regiões em que se deseja estimar as medidas de perímetro e área;
- apresentar uma maneira de modelagem matemática utilizando, para isso, a Geometria. Nela, a construção do modelo não se limita a resolver um problema, mas sim a possibilitar a aprendizagem durante o processo da modelagem;
- abordar os cálculos das medidas de área e perímetro, resgatando fórmulas de áreas de triângulos, retângulos e trapézios.

1. Como a medida de área do retângulo é calculada em metros por $20 \cdot 30$, e a medida de área de cada quadrado é calculada em metros por $0{,}2^2$; então, para saber a quantidade mínima de quadrados N necessária para cobrir toda a área do retângulo, deve-se calcular:

$$N = \frac{20 \cdot 10}{0{,}2^2} = 5\,000;\ 5\,000 \text{ quadrados}$$

Alternativa **E**. | D12 - N4.1 - Fácil

2. Observando a imagem, é possível perceber que 2 peças ocupam metade da área do quadrado maior. Como são congruentes, a peça triangular de maior área ocupa $\frac{1}{4}$ da área; logo, ocupa 25%.

Alternativa **C**. | D12 - N4.1 - Fácil

3. O lado do quadrado coincide com o diâmetro do círculo. Dessa maneira, a medida do raio do círculo será: $\frac{10\text{ cm}}{2} = 5$ cm. Portanto, a medida de área A do círculo em cm^2 será:

$A = \pi R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$

Alternativa **B**. | D12 - Médio

4. Como o diâmetro do círculo mede 70 cm, então a diagonal do quadrado inscrito no círculo mede 70 cm. Portanto, sendo L a medida do lado do quadrado, tem-se:

$L\sqrt{2} = 70 \Rightarrow L = 50$

Logo, a medida de área da toalha quadrangular é: $2500\text{ cm}^2 = 0{,}25\text{ m}^2$

Alternativa **B**. | D12 - N4.1 - Médio

5. A medida da distância percorrida foi de 260 m.

Para determinar a posição no plano cartesiano dado, calcula-se: $260 : 20 = 13$. Logo, o entregador se movimentou por 13 lados de quadrados da malha, chegando ao ponto H.

Alternativa **D**. | D11 - N2.1 - N7.3 - Fácil

6. A medida de área do quadrado é dada pela multiplicação de seus lados, ou seja, $20\text{ m} \cdot 20\text{ m} = 400\text{ m}^2$.

Como há 7 áreas quadrangulares de mesma medida, a área total é: $7 \cdot 400\text{ m}^2 = 2800\text{ m}^2$.

Alternativa **C**. | D12 - N4.1 - Fácil

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos os estudantes compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

Busque verificar se todos os estudantes compreenderam o tópico apresentado sobre área de figuras planas, em especial delimitadas por polígonos. Reforce que compor triângulos para formar polígonos em geral é uma boa estratégia para resolver problemas.

1. Do enunciado, tem-se: $AB = 4JH$

Então: $A_{ABC} = 4^2 \cdot A_{GHJ}$

$A_{ABC} = 16 \cdot 2 = 32$, ou seja, 32 m^2

Alternativa **E**. | D12 - Fácil

2. Considerando o custo da região R_3 como CR_3, tem-se: $CR_3 = \frac{1350}{9} = 150$

Dessa maneira, cada quadradinho representado na malha custa R$ 150,00. Somando o número de quadradinhos de cada região, obtém-se:

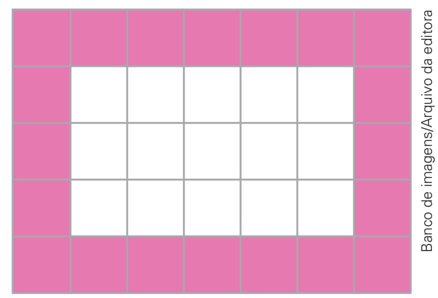
$1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$

Logo:

$CR_1 + CR_2 + CR_3 + CR_4 + CR_5 = 55 \cdot 150$ reais $=$ $= 8250$ reais

Alternativa **A**. | D12 - N4.1 - Médio

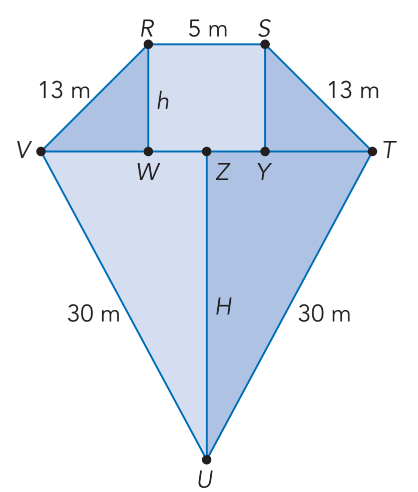
3. Para encontrar a área que corresponde à borda, é preciso subtrair a área interna (espelho d'água) da área total do retângulo $ABCD$.



Com isso temos: $70 \cdot 50 - 50 \cdot 30 = 3500 - 1500 = 2000$. A área da borda mede 2000 m^2.

Alternativa **E**. | D12 - N4.1 - Médio

4. Observe as divisões feitas na figura a seguir.



Com base nessas construções auxiliares, e pelo fato de ser um trapézio isósceles, observa-se que os triângulos VWR e TYS são congruentes, logo $VW = YT = 5$ m.

Além disso, utilizando o teorema de Pitágoras, nos triângulos destacados, tem-se:

$h^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow h^2 = 169 - 25 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12$

$H^2 + 7{,}5^2 = 30^2 \Rightarrow H = \frac{15\sqrt{15}}{2}$

Assim, a área do terreno mede:

$A = A_{trapézio} + A_{triângulo}$

$A = \dfrac{(15 + 5) \cdot 12}{2} + \dfrac{15 \cdot 7{,}5\sqrt{15}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 120 + 219{,}375 = 339{,}375 \Rightarrow A \simeq 340 \text{ m}^2$

Alternativa **A**. | D12 - N4.1 - Difícil

5. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais Aplicadas, mobilizando a habilidade **EM13CHS302**.

De acordo com os dados fornecidos no enunciado e na figura, tem-se:

$A_{milho} = \dfrac{(B + b) \cdot h}{2}$

$A_{milho} = \dfrac{(550 + 250) \cdot 400}{2} \Rightarrow A_{milho} = 800 \cdot 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{milho} = 160\,000 \text{ m}^2$

Como 1 hectare é igual a 10 000 m², tem-se:

$A_{milho} = 16 \text{ ha}$

Alternativa **D**. | D12 - N4.1 - Médio

6. As 8 peças formam um círculo de raio medindo 4 cm e um quadrado de lado medindo 8 cm. Logo, a medida de área total, em cm², é:

$8^2 + \pi \cdot 4^2 = 114{,}24.$

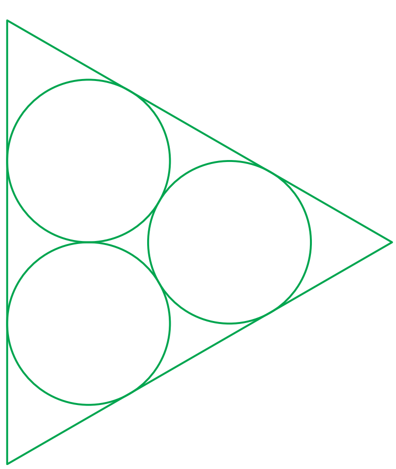
Alternativa **A**. | D12 - N4.1 - Médio

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Considerando que os recipientes têm todos 6 cm de medida de diâmetro, então no suporte III caberia apenas um recipiente inteiro, e no suporte IV não caberia nenhum dos recipientes.

Por outro lado, analisemos figura.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Pode-se observar que o suporte com a área da base mínima é um triângulo equilátero cujo lado mede $6(\sqrt{3} + 1)$ cm.

Dessa maneira, já que a área da base desse suporte mede $\dfrac{[6(\sqrt{3} + 1)]^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \simeq 115{,}2 \text{ cm}^2$, o tipo I também não serve de gabarito para a questão, pois tem medida de área inferior a 115,2 cm².

No que se refere aos outros suportes:

- II tem área medindo $122 = 144 \text{ cm}^2$;
- V tem área medindo $\dfrac{1}{4} \cdot \pi \cdot 132 \simeq 132{,}67 \text{ cm}^2$.

Então, é possível concluir que a proprietária comprou o suporte V.

Alternativa **E**. | D12 - N4.1 - Difícil

2. Para descobrir o modelo do cartão, é necessário calcular as seguintes medidas de área em cm²:

- do triângulo equilátero: $\dfrac{12^2\sqrt{3}}{4} \simeq 61{,}2$;
- do quadrado: $8^2 = 64$;
- do retângulo: $11 \cdot 8 = 88$;
- do hexágono regular: $\dfrac{3 \cdot 6^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \simeq 91{,}8$;
- do círculo: $\pi \cdot \left(\dfrac{10}{2}\right)^2 \simeq 75$.

Como R\$ 0,01 · 88 = R\$ 0,88 e R\$ 0,01 · 91,8 = = R\$ 0,918, valores que superam R\$ 0,80, o dono da loja deverá escolher o cartão que tem como face útil um círculo.

Alternativa **E**. | D12 - N4.1 - Médio

3. Para obter a medida de área de uma das placas descritas no enunciado, deve-se somar as medidas de área de um quadrado de lado 40 cm e de um semicírculo de raio 20 cm (40 : 2).

E, para obter a soma das medidas de área das 10 placas, basta multiplicar a medida de área de uma delas por 10. Logo:

$10 \cdot \left(40 \cdot 40 + \dfrac{\pi \cdot 20^2}{2}\right) \simeq 10 \cdot 2228$, ou seja, $22\,280 \text{ m}^2$.

Alternativa **B**. | D12 - N4.1 - Difícil

4. A medida de área total pode ser calculada da seguinte maneira:

$12 \cdot [(26 - 8) \cdot (22 - 8) - 32] = 12 \cdot (18 \cdot 14 - 32) =$
$= 2\,640$

Alternativa **A**. | D12 - N4.1 - Fácil

5. A planta da casa 4 será rejeitada porque não tem o afastamento mínimo de 4 m da rua.
A medida de área total, A, construída de cada casa deve pertencer ao intervalo:

$0,4 \cdot 200 \leqslant A \leqslant 0,5 \cdot 200 \Rightarrow 80\ m^2 \leqslant A \leqslant 100\ m^2$

Desse modo, em m^2, tem-se:

- $A_1 = 5 \cdot 15 = 75$;
- $A_2 = 8 \cdot 15 = 120$;
- $A_3 = 5 \cdot 12 = 60$;
- $A_5 = 5 \cdot 18 = 90$.

A única planta aprovada será a da casa 5.

Alternativa **E**. | D12 - N4.1 - Difícil

6. No projeto **A**:

- A quantidade de quadrados necessários é $1,25 \cdot \dfrac{36}{0,6^2} = 125$

Como são 10 peças por caixa, serão necessárias 13 caixas ao custo total de $13 \cdot 60 = 780$, ou seja, R$ 780,00.

No projeto **B**:

- A quantidade de quadrados necessários é $1,1 \cdot \dfrac{36}{(0,4)^2} = 247,5$

Como são 12 peças por caixa, serão necessárias 21 caixas ao custo total de $21 \cdot 40 = 840$, ou seja, R$ 840,00.

Logo, o custo mínimo será de R$ 780,00.

Alternativa **D**. | D12 - N4.1 - Difícil

7. Considerando que $\sqrt{2}$ é equivalente a 1,41 e que x é a medida, em metros, do cabo extensor, de acordo com as informações do enunciado, tem-se:

$\pi \cdot (6 + x)^2 = 2 \cdot \pi \cdot 6^2 \Rightarrow 6 + x = 6\sqrt{2} \Rightarrow x \simeq 2,5$; 2,5 m.

Alternativa **E**. | D12 - Fácil

8. Inicialmente, calcula-se a medida de área da figura B, dividindo-a em dois triângulos retângulos, sendo um com medida da base igual a 3 m e a medida da altura igual a 21 m; o outro tem a medida da base igual à medida da altura, que é 15 m. Assim, temos a área total da figura B:

$A_B = \dfrac{3 \cdot 21}{2} + \dfrac{15 \cdot 15}{2} = 31,5 + 112,5 = 144$, ou seja, 144 m^2.

Sabe-se, também, que a medida de área dos dois terrenos é a mesma, então:

$A_A = A_B$

$x(x + 7) = 144$

As raízes dessa equação são −16 e 9. Como a lateral do terreno precisa ter um valor positivo, então $x = 9$. Assim, um lado do terreno deve medir 9 m e o outro, 16 m (9 + 7).

Alternativa **B**. | D12 - N4.1 - Médio

9. Inicialmente, deve-se calcular a área, em centímetros quadrados, dos dois garrafões representados nos dois esquemas.
No esquema I, o contorno do garrafão lembra um trapézio, cuja área é:

$A_I = \dfrac{(600 + 360) \cdot 580}{2} = 278\,400$

No esquema II, o contorno do garrafão lembra um retângulo, cuja área é:

$A_{II} = 580 \cdot 490 = 284\,200$

A diferença entre essas áreas é:

$284\,200\ cm^2 - 278\,400\ cm^2 = 5\,800\ cm^2$

Alternativa **A**. | D12 - N4.1 - Médio

10. Os triângulos APB, APD, CQD e CQB são congruentes, logo têm a mesma área. Assim, a área da região clara pode ser calculada a partir do quádruplo da área do triângulo APB. Assim, tem-se que a área do região clara é:

$A_C = 4 \cdot (0,25 \cdot 0,5 \cdot 0,5) = 0,25$; 0,25 m^2

A área da região sombreada pode ser calculada pela diferença entre as áreas do quadrado e da região clara:

$A_S = 1 - 0,25 = 0,75$; 0,75 m^2

O custo C do vitral é calculado pela soma entre os produtos da área de cada região pelo preço do m^2 correspondente:

$C = 0,25 \cdot 50 + 0,75 \cdot 30 = 12,5 + 22,5 = 35$; 35 reais.

Alternativa **B**. | D12 - N7.3 - Difícil

11. **a)** Observando a figura, percebe-se que, em 60 cm, há 6 raios; então: 60 : 6 = 10. Logo, cada raio mede 10 cm.

b) A medida de área desperdiçada (A_d) é a medida de área do quadrado menos a medida de área dos 8 círculos:

$A_d = 60 \cdot 54 - 8 \cdot \pi \cdot 10^2 = 3\,240 - 2\,512 = 728$; 728 cm^2

| D12 - N4.1 - Difícil

Jornada 11 – Razão e proporção

Abertura da jornada

O estudo de razões e proporções, bem como de regra de três simples e regra de três composta, auxilia no entendimento e na tomada de decisões acerca da otimização e da minimização de determinados fatores que influenciam nosso cotidiano, por exemplo a emissão de gases poluentes, o planejamento dos sistemas viário e de trânsito, a densidade demográfica, entre outros.

Na questão **1**, espera-se que os estudantes calculem o tempo que levam para chegar à escola, para voltar para casa e outros deslocamentos que realizam no cotidiano, por exemplo cursos extracurriculares, práticas esportivas, etc.

Na questão **2**, estimule uma pesquisa rápida e efetiva em fontes confiáveis da internet, como *sites* de institutos ambientais, ONGs, universidades, centros de pesquisa, etc. Acolha as contribuições e as relações que os estudantes estabelecerem entre soluções ambientais e conhecimentos matemáticos.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

1.

Quantidade de bois		Quantidade de dias	
800	↓	21	↑
1200		x	

$\frac{800}{200} = \frac{x}{21} \Rightarrow 1200x = 800 \cdot 21 \Rightarrow x = 14$

Alternativa **C**. | D15 - N4.7 - Médio

2. Sabendo que 1 hora corresponde a 3 600 segundos, é possível montar o seguinte quadro:

Quantidade de gotas		Medida de intervalo de tempo (em s)	
15	↓	30	↓
x		3 600	

$\frac{15}{x} = \frac{30}{3600} \Rightarrow 30x = 15 \cdot 3600 \Rightarrow x = 1800$

Assim, uma torneira goteja 1 800 gotas em 1 hora.

Portanto, o volume total gotejado, em mL, mede:

$V = 1800 \cdot 0{,}05 = 90$ mL

Alternativa **C**. | D15 - N3.4 - Fácil

3.

Quantidade de páginas		Quantidade de linhas	
80	↓	30	↑
x		24	

$\frac{80}{x} = \frac{24}{30} \Rightarrow 24x = 80 \cdot 30 \Rightarrow x = 100$

Alternativa **D**. | D15 - N4.7 - Difícil

4. Considerando que 3 potes correspondem a 450 g (3 · 150), é possível montar o seguinte quadro:

Quantidade de enzimas (em g)		Medida de intervalo de tempo (em h)	
150	↓	6	↑
450		x	

$\frac{150}{450} = \frac{x}{6} \Rightarrow 450x = 6 \cdot 150 \Rightarrow x = 2$

Alternativa **E**. | D15 - N4.7 - Médio

5. Sabendo que 1 ano corresponde a 12 meses, é possível montar o seguinte quadro:

Aumento (em R$)		Medida de intervalo de tempo (em mês)	
500	↓	4	↓
x		12	

$\frac{500}{x} = \frac{4}{12} \Rightarrow 4x = 12 \cdot 500 \Rightarrow x = 1500$

Alternativa **E**. | D15 - N3.4 - Fácil

6.

Rendimento (em km/L)		Preço (em R$)	
12	↑	6	↑
9		x	

$\frac{12}{9} = \frac{6}{x} \Rightarrow 12x = 9 \cdot 6 \Rightarrow x = 4{,}5$

Alternativa **C**. | D15 - N3.4 - Fácil

7.

Quantidade de caminhões		Medida de capacidade (em m³)	
50	↓	4 000	↓
x		6 000	

$\frac{50}{x} = \frac{4000}{6000} \Rightarrow 4000x = 50 \cdot 6000 \Rightarrow x = 75$

Alternativa **D**. | D15 - N3.4 - Fácil

8.

Quantidade de trabalhadores		Quantidade de dias	
10	↓	30	↑
12		x	

$\frac{10}{12} = \frac{x}{30} \Rightarrow 12x = 10 \cdot 30 \Rightarrow x = 25$

Alternativa **B**. | D15 - N4.7 - Médio

9.

Quantidade de canais		Valor (em reais)	
150	↓	90	↓
210		x	

$\frac{150}{210} = \frac{90}{x} \Rightarrow 150x = 90 \cdot 210 \Rightarrow x = 126$

Alternativa **A**. | D15 - N3.4 - Fácil

10.

Valor investido (em reais)		Lucro obtido (em reais)	
120 000	↓	60 000	↓
80 000		x	

$\frac{120\,000}{80\,000} = \frac{60\,000}{x} \Rightarrow 120\,000x = 80\,000 \cdot 60\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 40\,000$

Valéria investiu R$ 80.000,00, logo a parte correspondente ao seu lucro é R$ 40.000,00. Eduardo investiu metade do valor de Valéria, logo ele receberá de lucro metade do dela, ou seja, R$ 20.000,00.

Alternativa **E**. | D15 - N5.6 - Fácil

11. Em 25 g, há 3,3 g de carboidratos e 11 g de gorduras totais, totalizando 14,3 g.

Porção (em g)		Quantidade total (em g)	
25	↓	14,3	↓
150		x	

$\frac{25}{150} = \frac{14{,}3}{x} \Rightarrow 25x = 14{,}3 \cdot 150 \Rightarrow x = 85{,}8$

Alternativa **E**. | D15 - N3.4 - Fácil

12. Sabendo que 1 hora corresponde a 60 minutos, é possível montar o seguinte quadro:

Quantidade de páginas		Medida de intervalo de tempo (em min)	
300	↓	5	↓
x		60	

$\frac{300}{x} = \frac{5}{60} \Rightarrow 5x = 60 \cdot 300 \Rightarrow x = 3\,600$

Alternativa **D**. | D15 - N3.4 - Fácil

13.

Quantidade de proteínas (em g)		Medida de massa (em kg)	
1,8	↓	1	↓
x		85	

$\frac{1{,}8}{x} = \frac{1}{85} \Rightarrow x = 85 \cdot 1{,}8 \Rightarrow x = 153$

Alternativa **C**. | D15 - N3.4 - Fácil

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. Maçã: 50% de 200 = 0,50 · 200 = 100 estudantes.
Banana: 25% de 200 = 0,25 · 200 = 50 estudantes.
Laranja: 15% de 200 = 0,15 · 200 = 30 estudantes.
Uva: 10% de 200 = 0,10 · 200 = 20 estudantes.
Razão banana para maçã: 50 : 100 = 1 : 2

Alternativa **A**. | D15 - N3.4 - Fácil

2. Sendo i a intensidade luminosa, d a distância da lâmpada e k a constante, temos:

$i \cdot d^2 = k$

Substituindo os valores:

$400 \cdot 2^2 = i \cdot 4^2 \Rightarrow i = 100$

Alternativa **A**. | D15 - N4.7 - Médio

3. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT310**.

Quantidade de agentes		Quantidade de residências		Quantidade de dias		Quantidade de horas por dia	
20	↑	3 000	↓	10	↓	8	↑
16		4 500		x		10	

$\frac{10}{x} = \frac{16}{20} \cdot \frac{3\,000}{4\,500} \cdot \frac{10}{8} \Rightarrow 480\,000x = 7\,200\,000 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 15$

Alternativa **B**. | D15 - N4.7 - Médio

4. Primeiro, é necessário determinar o que já foi concluído pelos 20 operários nos 4 primeiros dias.

Medida de área (em m²)		Quantidade de dias	
800	↑	10	↑
x		4	

$\frac{800}{x} = \frac{10}{4} \Rightarrow 10x = 800 \cdot 4 \Rightarrow x = 320$

Então, já foram construídos 320 m², ou seja, ainda falta construir uma área que mede 480 m².

As novas condições exigem o acréscimo de 200 m², totalizando 680 m² de medida de área não construída.

Medida de área (em m²)		Quantidade de operários		Quantidade de dias	
480	↓	20	↓	6	↑
680		x		5	

$$\frac{20}{x} = \frac{480}{680} \cdot \frac{5}{6} \Rightarrow 2400x = 81600 \Rightarrow x = 34$$

Como já foram contratados 20 operários:
$34 - 20 = 14$

Alternativa **D**. | D15 - N4.7 - Médio

5. As motocicletas se encontram após a motocicleta **A** percorrer $\frac{2}{5}$ do comprimento da ponte. Assim, **B** percorreu $\frac{3}{5}$ do comprimento da ponte. A medida de intervalo de tempo das motos foi a mesma. Assim, quanto maior for a distância percorrida, maior será a velocidade.

Distância percorrida		Velocidade média	
$\frac{3}{5}$	↑	v_B	↑
$\frac{2}{5}$		v_A	

$$\frac{v_B}{v_A} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{3}{2} \Rightarrow v_B = 1{,}5v_A$$

Alternativa **D**. | D15 - N3.4 - Fácil

6.

Medida de velocidade média (em km/h)		Quantidade de horas		Medida de distância percorrida (em km)	
60	↓	3	↑	180	↓
x		5		360	

$$\frac{60}{x} = \frac{5}{3} \cdot \frac{180}{360} \Rightarrow 900x = 64800 \Rightarrow x = 72$$

Alternativa **B**. | D15 - N4.7 - Médio

7. I. Para produzir água sanitária forte:
15 L de hipoclorito de sódio + $(3 \cdot 15)$ L de água = 60 L
Para produzir água sanitária fraca:
15 L de hipoclorito de sódio + $(5 \cdot 15)$ L de água = 90 L
Assim, a quantidade total é de:
60 L + 90 L = 150 L
Alternativa **C**.

II. Como $d = \frac{m}{V}$, então $m = d \cdot V$.

Medida de massa de água sanitária forte:
$m = 1{,}2 \cdot (60 : 1000) = 0{,}072$

Medida de massa de água sanitária fraca:
$m = 1{,}1 \cdot (90 : 1000) = 0{,}099$

Medida de massa total:
0,072 g + 0,099 g = 0,171 g

Alternativa **E**. | D15 - N4.7 - Difícil

8.

Quantidade de garrafas		Quantidade de máquinas		Quantidade de minutos	
100	↓	6	↑	40	↓
250		4		x	

$$\frac{40}{x} = \frac{100}{250} \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow 400x = 60000 \Rightarrow x = 150$$

150 minutos correspondem a 2 horas e 30 minutos.

Alternativa **D**. | D15 - N4.7 - Médio

9. I. $d_{2010} = \frac{190755799}{8510000} \simeq 22{,}42$

Logo, a densidade em 2010 era de, aproximadamente, 22,42 pessoas por quilômetro quadrado.

Alternativa **A**.

II. $d_{2022} = \frac{203062512}{8510000} \simeq 23{,}86$

Logo, sendo a o aumento percentual, tem-se:

$$a = \frac{23{,}86}{22{,}42} - 1 = 0{,}0642 = 6{,}42\%$$

Alternativa **B**. | D15 - N4.7 - Difícil

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. É necessário definir a quantidade de vezes que o borrifador é acionado:

$$\frac{60 \cdot 24 \cdot 60}{48} = 1800$$

Dessa forma, a quantidade, em mililitro, é:

$$\frac{360}{1800} = 0{,}2$$

Alternativa **B**. | D15 - N4.7 - Médio

2. No planeta Z, um dia corresponde a 73 dias terrestres. Assim, cada ano terrestre corresponde a 5 dias do planeta Z:

1 ano terrestre $= \frac{365}{73} =$ 5 dias do planeta Z

Outra informação dada no enunciado é que 2 anos do planeta Z equivalem a 1 ano da Terra, ou seja, 1 ano do planeta Z é equiparável a 0,5 ano terrestre. Então:

1 ano do planeta Z = 0,5 ano terrestre = = 0,5 · (5 dias do planeta Z) = 2,5 dias do planeta Z

Alternativa **A**. | D15 - N4.7 - Médio

3. Visto que o número de pessoas foi reduzido para $\frac{2}{3}$ da quantidade inicial, o intervalo de tempo aumentará para $\frac{3}{2}$ do valor inicial.
Assim, o intervalo de tempo gasto para trocar os quatro pneus será:

$\frac{3}{2} \cdot 4 = 6$

Alternativa **A**. | D15 - N4.7 - Médio

4. Para atingir a quantidade mínima de cada mineral e gastar menos dinheiro possível, é preciso primeiro calcular a quantidade mínima de sachês de cada suplemento:

	Quantidade mineral A	Quantidade mineral B	Quantidade mineral C	Quantidade mínima
Suplemento I	$\frac{800}{50} = 16$	$\frac{1000}{100} = 10$	$\frac{1200}{200} = 6$	16
Suplemento II	$\frac{800}{800} = 1$	$\frac{1000}{250} = 4$	$\frac{1200}{200} = 6$	6
Suplemento III	$\frac{800}{250} = 3{,}2$	$\frac{1000}{1000} = 1$	$\frac{1200}{300} = 4$	4
Suplemento IV	$\frac{800}{600} \simeq 1{,}33$	$\frac{1000}{500} = 2$	$\frac{1200}{1000} = 1{,}2$	2
Suplemento V	$\frac{800}{400} = 2$	$\frac{1000}{800} = 1{,}25$	$\frac{1200}{1200} = 1$	2

Com a quantidade mínima de sachês, deve-se, então, multiplicá-la pelo preço de cada sachê:

Suplemento	Gasto em reais
Suplemento I	$16 \cdot 2 = 32$
Suplemento II	$6 \cdot 3 = 18$
Suplemento III	$4 \cdot 5 = 20$
Suplemento IV	$2 \cdot 6 = 12$
Suplemento V	$2 \cdot 8 = 16$

Assim, o menor gasto seria atingido com a compra de sachês do suplemento IV.
Alternativa **D**. | D15 - N4.7 - Difícil

5. Sendo:
- K o módulo volumétrico de um fluido;
- v a velocidade do som;
- d a densidade.

Temos:
$\frac{K}{v^2 \cdot d} = k,$
em que k é a constante de proporcionalidade.
Desdobrando:

$[K] = [v^2] \cdot [d] = \left[\frac{m^2}{s^2}\right] \cdot \left[\frac{kg}{m^3}\right] = \frac{kg}{s^2 \cdot m}$ ou $kg \cdot s^{-2} \cdot m^{-1}$.

Alternativa **B**. | D15 - N4.7 - Médio

6. mmc(16, 20) = 80
Dessa maneira, o motor antigo consome 5 litros:
$\frac{80}{16} = 5$
O novo motor, em 80 km, proporciona uma economia de 0,4 litro:
$\frac{80}{20} \cdot 0{,}1 = 0{,}4$
Seguindo esse raciocínio, o novo motor apresentará um desempenho médio, em km/L, de:
$\frac{80}{5 - 0{,}4} \simeq 17{,}4$
Alternativa **D**. | D15 - N4.7 - Médio

7. $4 < \frac{10\,800}{2\,650} < 5{,}2 < \frac{40\,400}{19\,900} < 3{,}2 < \frac{110\,450}{41\,900} < $
$< 3{,}1 < \frac{3\,000}{2\,120} < 2$ e $1 < \frac{3\,300}{3\,140} < 2$
Assim, a unidade federativa com maior densidade médica é o Distrito Federal.
Alternativa **A**. | D15 - N4.7 - Fácil

8. A área total das folhas A4, em m², mede:
$A_T = 20\,000 \cdot 0{,}062 = 1240$
Para calcular a medida de massa, em gramas:
$d_S = \frac{m_T}{A_T} \Rightarrow 75 = \frac{m_T}{1240} \Rightarrow m_T = 93\,000;\ 93\,000$ g
Em quilogramas, tem-se o resultado de 93 kg de papel.
Alternativa **E**. | D15 - N4.7 - Médio

9. Primeiro, é preciso calcular a quantidade atual de energia luminosa no escritório:
$40 \cdot 600 = 24\,000$
Para chegar ao resultado esperado:
$1{,}5 \cdot \frac{24\,000}{1\,600} = 23$
Alternativa **E**. | D15 - N4.7 - Difícil

10. No intervalo de 2 h, a caixa-d'água recebeu 2400 L (20 · 120 min) e passou a conter 3000 L (600 + 2400) de água.
Para a caixa esvaziar totalmente, foram necessários 200 min (3000 : 15) ou 3 h e 20 min.
Então, o horário final foi às 13 h 20 min (8 h + + 5 h 20 min). | D15 - N4.7 - Difícil

11. É necessário calcular o preço de cada mililitro. Consideremos cada lata separadamente.
- Lata pequena:
  $\frac{R\$\ 3{,}00}{250\ mL} = 0{,}012$ R$/mL
- Lata grande:
  $\frac{R\$\ 4{,}90}{350\ mL} = 0{,}014$ R$/mL

  $0{,}014 = 0{,}012 \cdot (1 + i) \Rightarrow 1 + i = \frac{0{,}014}{0{,}012} \Rightarrow$
  $\Rightarrow i \simeq 1{,}167 - 1 = 0{,}167 = 16{,}7\%$
  | D15 - N4.7 - Difícil

Jornada 12 – Sistemas de equações lineares

Abertura da jornada

Determinar a quantidade de cada alimento para satisfazer a ingestão de mais de um nutriente é uma excelente oportunidade para a abordagem de sistemas de equações lineares.

Se achar necessário, comente com os estudantes que **caloria** é uma unidade de medida de energia que determinado alimento fornece depois de ser consumido, contribuindo para as funções essenciais do organismo, como respiração, produção de hormônios e funcionamento do cérebro. Desse modo, eles podem estabelecer relações entre a matemática e o cotidiano.

Na questão **1**, espera-se que os estudantes reflitam sobre a relação de proporcionalidade direta entre a quantidade do alimento ingerido e a quantidade de calorias ingeridas.

Na questão **2**, espera-se que os estudantes, sem montar sistemas lineares, busquem uma solução para a situação apresentada. Três respostas possíveis são:

- 162,5 g de frango, 100 g de arroz e 100 g de salada;
- 100 g de frango, 225 g de arroz e 100 g de salada;
- 50 g de frango, 100 g de arroz e 400 g de salada.

_DICA

Por meio das 3 respostas presumíveis da questão **3**, seria possível criar o seguinte sistema linear 3×3:

$$\begin{cases} 1,625x + y + z = 600 \\ x + 2,25y + z = 600 \\ 0,5x + y + 4z = 600 \end{cases}$$

Resolvendo-o, seria possível encontrar o terno (240, 120, 90), que corresponde às quantidades de calorias do frango, do arroz e da salada, respectivamente.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

1. Na equação $6x + 7y = 60$, tem-se:

Para $x = 10$, $y = 0$. Para $x = 3$, $y = 6$.

Alternativa **A**. | D9 - Fácil

2. Considerando R a quantidade de copos de refrigerante e S a quantidade de salgados, tem-se:

$$\begin{cases} R + 2S = 17 \\ 2R + 3S = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2R - 4S = -34 \\ 2R + 3S = 28 \end{cases}$$

Assim, $S = 6$ e $R = 5$. Logo: $4R + 6S = 20,00 + 36,00 = 56,00$

Alternativa **B**. | D9 - N4.4 - Fácil

3. Considerando V a quantidade de blocos vermelhos e A a quantidade de blocos azuis:

$$\begin{cases} 2A + 3V = 128 \\ A + 2V = 82 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + 3V = 128 \\ -2A - 4V = -164 \end{cases}$$

Assim, $V = 36$ e $A = 10$. Logo: $V + A = 46$

Alternativa **B**. | D9 - N4.4 - Fácil

4. Considerando E o valor cobrado por Ester, L o valor cobrado por Laura e x a quantidade de horas do evento:

$E = 900 + 150x$ e $L = 750 + 200x$

Para $E = L$, tem-se:

$900 + 150x = 750 + 200x \Rightarrow 50x = 150 \Rightarrow x = 3$

Alternativa **C**. | D9 - Médio

5. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:

- $M = 3L + 5 \Rightarrow M - 3L = 5$
- $M + 2L = 120$

Assim, o sistema linear é:

$$\begin{cases} M - 3L = 5 \\ M + 2L = 120 \end{cases}$$

Alternativa **D**. | D9 - N4.4 - Fácil

6. De acordo com os dados do enunciado, pode-se montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 4y \\ x + 20 = 6 \cdot (y - 20) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x - 6y = -140 \end{cases}$$

Substituindo o valor de x da equação 1 na equação 2, obtém-se o valor de y:

$4y - 6y = -140 \Rightarrow -2y = -140 \Rightarrow y = 70$

Substituindo o valor de y em uma das equações, chega-se a $x = 280$. Logo: $x + y = 350$

Alternativa **E**. | D9 - N4.4 - Fácil

7. A reta crescente passa pelos pontos $(-5, -15)$ e $(0, -5)$. E a reta decrescente passa pelos pontos $(-5, 5)$ e $(0, -10)$. Considerando $y = mx + n$ a equação reduzida de uma reta, é possível encontrar os coeficientes angular e linear associados a cada uma das retas, como também as equações delas.
Para a reta crescente:

$$n = -5;\ m = \frac{-5-(-15)}{0-(-5)} = 2;\ y = 2x - 5$$

Para a reta decrescente:

$$n = -10;\ m = \frac{-10-5}{0-(-5)} = -3;\ y = -3x - 10$$

Portanto, o sistema linear é:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -3x - 10 \end{cases}$$

Igualando, tem-se $2x - 5 = -3x - 10 \Rightarrow x = -1$.
Substituindo x em qualquer uma das equações, encontra-se $y = -7$. Logo, as coordenadas do ponto de intersecção são $(-1, -7)$.
Alternativa **D**. | D9 - N4.4 - Médio

8. Considerando C o número de acertos, E o número de erros e x a quantidade de questões:

$$\begin{cases} C + E = 45 \\ 5C - 2E = 134 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C + 2E = 90 \\ 5C - 2E = 134 \end{cases}$$

Somando as duas equações, tem-se:
$7C = 224 \Rightarrow C = 32$
Alternativa **C**. | D9 - N4.4 - Médio

9. Pode-se isolar y da equação 2 e substituir na equação 1:

$$4x + 7 \cdot (10 - 2x) = 22 \Rightarrow 4x + 70 - 14x = 22 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x = 48 \Rightarrow x = 4{,}8$$

Substituindo o valor de x em uma das equações, tem-se $y = 0{,}4$. Logo:

$$10x + 10y = 10 \cdot 4{,}8 + 10 \cdot 0{,}4 = 52$$

Alternativa **B**. | D9 - N4.4 - Médio

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. Da última equação, tem-se: $z = 2$.
Substituindo na 2ª equação: $y + 2 \cdot 2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y + 4 = 2 \Rightarrow y = -2$
E substituindo os valores de z e y na 1ª equação:
$2x + (-2) + 2 = 10 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$
Logo, a resposta é o terno $(x, y, z) = (5, -2, 2)$.
Alternativa **C**. | D31 - N5.5 - Fácil

2. Para eliminar x na 2ª equação, multiplica-se a 1ª equação por -2 e soma-se com a 2ª equação.

$$\begin{cases} -2x - 4y - 6z = -12 \\ 2x + 5y + 7z = 14 \\ 5x + 7y + 11z = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + z = 2 \\ 5x + 7y + 11z = 23 \end{cases}$$

Agora, pode-se eliminar x na 3ª equação. Para isso, multiplica-se a 1ª equação por -5 e soma-se com a 3ª equação.

$$\begin{cases} -5x - 10y - 15z = -30 \\ y + z = 2 \\ 5x + 7y + 11z = 23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + z = 2 \\ -3y - 4z = -7 \end{cases}$$

Na sequência, elimina-se a incógnita y na 3ª equação, multiplicando a 2ª equação por 3 e somando com a 3ª equação. Obtendo-se assim um sistema escalonado.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 3y + 3z = 6 \\ -3y - 4z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Assim, $z = 1 \Rightarrow y = 1$ e $x = 1$. Logo, o terno $(1, 1, 1)$ é a solução do sistema.
Alternativa **C**. | D31 - N5.5 - Médio

3. Considerando x o valor do prato da pessoa X, y o da pessoa Y e z o da pessoa Z e construindo o sistema linear, tem-se:

$$\begin{cases} x + y + z = 105 \\ x = 2y + z \\ y + 2z = 75 \end{cases}$$

$$x = 2 \cdot (75 - 2z) + z \Rightarrow x = 150 - 4z + z = 150 - 3z$$

Substituindo essa relação e a 3ª equação do sistema na 1ª equação, é possível chegar a:

$$150 - 3z + 75 - 2z + z = 105 \Rightarrow -4z = -120 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z = 30$$

Então, a pessoa Z gastou R$ 30,00. Substituindo nas demais equações, tem-se:
$x = 150 - 3 \cdot 30 = 60$
$y = 75 - 2 \cdot 30 = 15$
Assim, a pessoa X gastou R$ 60,00 e a pessoa Y gastou R$ 15,00.
Alternativa **D**. | D31 - N5.5 - Médio

4. Montando o sistema linear, obtém-se:

$$\begin{cases} 3x + 3y = 30 \\ 2y + 4z = 72 \\ x + y + 5z = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{30 - 3y}{3} \\ z = \dfrac{72 - 2y}{4} \end{cases}$$

Substituindo na 3ª equação do 1º sistema:

$$\frac{30-3y}{3}+y+5\cdot\frac{72-2y}{4}=90\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\cdot(30-3y)+12y+3\cdot 5\cdot(72-2y)=90\cdot 12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 120-12y+12y+1\,080-30y=1080\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=4$$

Assim, é possível concluir que $y = 4$, $x = 6$ e $z = 16$.

Alternativa **B**. | D31 - N5.5 - Difícil

5. Escalonando o sistema linear, temos:

$$\begin{cases}2x-y+z=-7\\5y-3z=3\\z(-a-1)=0\end{cases}$$

Se $a = -1$, $0z = 0$ e o sistema terá mais de uma solução. Caso contrário, o sistema terá solução única, com $z = 0$.

Alternativa **A**. | D31 - N5.5 - Médio

6. É possível montar o sistema linear:

$$\begin{cases}A+2B+3C=32\\A+B+C=18\\2A+2C=24\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+2B+3C=32\\B+2C=14\\2A+2C=24\end{cases}$$

Assim, $B = 14 - 2C$ e $A = 12 - C$. Substituindo os valores isolados na 1ª equação do 1º sistema, é possível montar a seguinte equação:

$$12-C+2\cdot(14-2C)+3C=32\Rightarrow C=4$$

Logo, $A = 8$.

Alternativa **D**. | D31 - N5.5 - Médio

7. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT101**.

A corrente que passa pelo resistor de 11 Ω é a I_2. Isolando I_1 da 2ª equação e I_2 da 3ª:

$$I_1=\frac{30-3I_3}{7};\ I_2=\frac{50+3I_3}{11}$$

Substituindo os valores na 1ª equação, tem-se:

$$\frac{30-3I_3}{7}-\frac{50+3I_3}{11}-I_3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 330-33I_3-350-21I_3-77I_3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 131I_3=-20\Rightarrow I_3=-\frac{20}{131}$$

Substituindo esse valor na 3ª equação, tem-se:

$$11I_2-3\cdot-\frac{20}{131}=50\Rightarrow\frac{131\cdot 11I_2}{131}+\frac{60}{131}=\frac{131\cdot 50}{131}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1441I_2+60=6\,550\Rightarrow 1441I_2=6\,490\Rightarrow I_2\simeq 4{,}5$$

Alternativa **C**. | D31 - N5.5 - Difícil

8. Considerando L o valor calórico do lanche, M da maçã e S do suco, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases}2L+M+S=510\\L+2M+2S=420\\L+M+3S=430\end{cases}$$

Para eliminar L na 2ª equação, vamos multiplicar a 2ª equação por -2 e somar com a 1ª equação.

$$\begin{cases}2L+M+S=510\\-2L-4M-4S=-840\\L+M+3S=430\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2L+M+S=510\\-3M-3S=-330\\L+M+3S=430\end{cases}$$

Eliminando L na 3ª equação:

$$\begin{cases}2L+M+S=510\\3M+3S=330\\-2L-2M-6S=-860\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2L+M+S=510\\3M+3S=330\\-M-5S=-350\end{cases}$$

Eliminando M na 3ª equação:

$$\begin{cases}2L+M+S=510\\3M+3S=330\\-3M-15S=-1050\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2L+M+S=510\\3M+3S=330\\S=60\end{cases}$$

Alternativa **B**. | D31 - N5.5 - Difícil

9. Pela 1ª equação tem-se $Q(0, 255)$; pela 2ª equação, tem-se $R(260, 0)$.

$$\begin{cases}3x_1+4x_2=1020\\3x_1+2x_2=780\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chega-se a $P(180, 120)$.

Comparando as receitas nos 3 casos, tem-se:

180 kg $\cdot$ 20 = 3 600 e 120 $\cdot$ 12,5 = 1 500

0 kg $\cdot$ 20 = 0 e 255 $\cdot$ 12,5 = 3 187,5

260 $\cdot$ 20 = 5 200 e 0 $\cdot$ 12,5 = 0

Assim, o valor máximo será igual a R$ 5.200,00 e ocorre para o ponto $R(260, 0)$.

Observação: os dados sobre a quantidade de empadas estocadas (130 kg de queijo e 170 kg de frango) são irrelevantes.

Alternativa **C**. | D9 - D31 - N4.4 - Difícil

10. Da última equação do sistema mostrado, tem-se que $w = -3$.

Substituindo $w = -3$ na 3ª equação, tem-se:

$$-z-2(-3)=1\Rightarrow z=5$$

Substituindo $w = -3$ e $z = 5$ na 2ª equação, tem-se:

$$y+5-3=5\Rightarrow y=3$$

Por fim, substituindo as incógnitas restantes na 1ª equação, tem-se:

$$x-3+5-(-3)=0\Rightarrow x=-5$$

Assim, a solução é $S = \{-5, 3, 5, -3\}$.

Alternativa **A**. | D31 - Fácil

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Se a, b e c, respectivamente, são o número de doses das vacinas Alfa, Beta e Gama, tem-se:

$$\begin{cases} a + b + c = 5\,000\,000 \\ 5a + 10b + 20c = 40\,000\,000 \\ b = 3c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 4c = 5\,000\,000 \\ a + 10c = 8\,000\,000 \\ b = 3c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3\,000\,000 \\ b = 1\,500\,000 \\ c = 500\,000 \end{cases}$$

Ou seja, a resposta é 3 milhões de doses.

Alternativa **D**. | D31 - N5.5 - Fácil

2. Multiplicando a 1ª equação por 2 e a 2ª por 3:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 148 \\ 9x - 6y = 60 \end{cases}$$

$13x = 208 \Rightarrow x = 16$

Substituindo esse valor na 1ª equação:

$2 \cdot 16 + 3y = 74 \Rightarrow 3y = 74 - 32 \Rightarrow y = 14$

Assim, $x - y = 16 - 14 = 2$

Alternativa **A**. | D9 - N4.4 - Fácil

3. Se x, y e z são, respectivamente, a massa de uma camiseta, a massa de uma calça e a massa de um sapato, e se n é o número máximo de camisetas que a pessoa poderá levar, então, tem-se:

$$\begin{cases} z + 2y + nx = 10 \\ 2z + 3y + 18x = 10 \\ 3z + 4y + 12x = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z + 2y + nx = 10 \\ y - (2n - 18)x = 10 \\ (n - 24)x = 0 \end{cases}$$

Assim, para que o sistema admita solução, é necessário que $n = 24$.

Alternativa **B**. | D31 - N5.5 - Médio

4. Se $a = -1$, então: $\begin{cases} -x - y = 1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$

Logo, o sistema terá infinitas soluções.

Alternativa **C**. | D9 - N4.4 - Médio

5. É possível notar que o sistema não tem solução real, pois não há ponto que pertença simultaneamente às 3 retas.

Alternativa **D**. | D9 - Fácil

6. Se x é a memória ocupada por um minuto de vídeo e y é a memória ocupada por uma foto, tem-se:

$10x + 190y = 15x + 150y \Rightarrow x = 8y$

Portanto, a capacidade total do cartão é $10 \cdot 8y + 190y = 270y$ e, assim, o resultado é 270 fotos.

Alternativa **C**. | D9 - Médio

7. De acordo com os dados do enunciado, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} 2A + B + 3C = 3200 \\ A + 2B + 2C = 2500 \\ A + 3B + C = 2300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 500 \\ B = 400 \\ C = 600 \end{cases}$$

Assim, $3A + 5B + 2C = 4700$, logo 4,7 kg.

Alternativa **C**. | D31 - N5.5 - Médio

8. a) Com os valores fornecidos, é possível montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \\ 2x - z = 1 \Rightarrow z = 2x - 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

$x + 1 - x + 2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Substituindo x nas equações 1 e 2, obtêm-se $y = -\dfrac{1}{2}$ e $z = 2$. Assim, a solução é $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, 2\right)$.

b) No sistema dado, isolando y na 1ª equação e z na 2ª e substituindo ambos na 3ª equação:

$x + \dfrac{q - x}{p} - p + 2x = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (3p - 1) = 3p - q + p^2$

Para que esse sistema tenha infinitas soluções, será preciso que $3p - 1 = 0$ e $3p - q + p^2 = 0$; assim, $p = \dfrac{1}{3}$ e:

$3 \cdot \dfrac{1}{3} - q + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 0 \Rightarrow q = \dfrac{10}{9}$

| D31 - N5.5 - Difícil

9. a) Se os tamanhos P, M e G são, respectivamente, x, y e z, é possível montar o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + y + z = 195 \\ 30x + 35y + 40z = 7250 \\ z = y + 2x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 195 \\ 6x + 7y + 8z = 1450 \\ 2x + y - z = -10 \end{cases}$$

b) No sistema composto no item **a**, ao somar a 2ª equação com a 1ª multiplicada por -6 e somar a 3ª equação com a 1ª multiplicada por -2 e, em seguida, somar a 3ª com a 2ª, tem-se:

$$\begin{cases} x + y + z = 195 \\ y + 2z = 280 \\ -z = -120 \end{cases}$$

Assim, $z = 120$, $y = 40$ e $x = 35$.

| D31 - N5.5 - Difícil

Jornada 13 – Progressão aritmética e progressão geométrica

Abertura da jornada

Conectar o ensino de matemática com temas da atualidade deve ser valorizado na sala de aula. O tema proposto tem como objetivo relacionar o ensino de progressões ao desenvolvimento tecnológico utilizando um tema de importância computacional, a lei de Moore.

Em um primeiro momento, os estudantes são convidados a expor suas próprias impressões sobre as relações que percebem entre a situação proposta e as progressões aritméticas. Pode-se aproveitar a oportunidade para destacar as observações em grupo.

Nos demais questionamentos, os estudantes são convidados a fazer projeções do número de transistores de acordo com o intervalo de tempo indicado. Nesse momento, é interessante destacar a importância dessas projeções para que o investimento das empresas acompanhe as necessidades de desenvolvimento tecnológico de cada momento.

DICA

Para ampliar o trabalho, estimule os estudantes a pesquisarem gráficos sobre o número de transistores nos computadores desenvolvidos por empresas da área.

Alguns desses gráficos podem ser encontrados no arquivo Arquitetura de Computadores da UFPR, disponível em: https://www.inf.ufg.br/~eduardo/arq/Fundamentos1-eduardo.pdf. Acesso em: 2 nov. 2023.

Na questão **1**, espera-se que os estudantes respondam que, se a quantidade de transistores de um circuito integrado dobra a cada ano, a lei de Moore se alinha com as progressões geométricas.

Na questão **2**, o número de computadores vai dobrar 10 vezes, ou seja, $2^{10} = 1024$ vezes maior.

Na questão **3**, basta dividir a quantidade de transistores lançados em 2015 por 2, 3 vezes, para voltar de 2015 para 2009 de 2 em 2.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

1. Os estudantes perceberão que a diferença entre dois termos consecutivos na sequência apresentada é constante, ou seja, trata-se de uma progressão aritmética.

Como a progressão aritmética será explorada, de fato, apenas na próxima etapa, a ideia da atividade é que as funções indicadas sejam testadas. Por fim, a lei que pode ser aplicável aos termos trabalhados e possibilita encontrar o enésimo termo é:

$f(n) = 3n - 2$.

Alternativa **E**. | D22 - Fácil

2. Observando a sequência, cada termo é obtido dividindo o termo anterior por 2 (ou multiplicando por 0,5). Como o terceiro termo é 500, o quarto termo é 250 e o quinto é 125.

Alternativa **C**. | D22 - Fácil

3. Seguindo o mesmo raciocínio de Gauss, é possível perceber que $1 + 50 = 51$, $2 + 49 = 51$, ... e $25 + 26 = 51$. Logo, há 25 parcelas com o mesmo resultado, 51, e o resultado da soma é:

$25 \cdot 51 = 1275$

Alternativa **A**. | D22 - N2.4 - Fácil

4. I. Uma vez que a quantidade de pontos organizados na forma de quadrados corresponde ao quadrado da posição do termo associado, tem-se:

$f(n) = n^2$

Alternativa **D**.

II. Substituindo n por 20:

$f(20) = 20^2 = 400$

Alternativa **E**. | D22 - N4.5 - Médio

5. I. Os estudantes vão perceber que a diferença entre dois termos consecutivos na sequência apresentada é constante, ou seja, trata-se de uma progressão aritmética. Por fim, a lei que pode ser aplicável aos termos apresentados e possibilita encontrar o enésimo termo é:

$$f(n) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Alternativa **C**.

II. Substituindo n por 30:

$$f(30) = \frac{30 \cdot (30 + 1)}{2} = 465$$

Alternativa **A**. | D22 - N4.5 - Médio

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

Se julgar oportuno, explore na lousa diferentes estratégias para encontrar o termo geral e a soma das sequências. Aproveite a oportunidade para reforçar que o raciocínio utilizado por Gauss se aplica a outras sequências.

1. Sabe-se que $a_3 = 5$ e $r = 4$, logo:

$a_1 = a_3 - 2r = 5 - 2 \cdot 4 = -3$

Alternativa **A**. | D22 - N4.5 - Fácil

2. Sabe-se que $a_1 = 7$ e $a_3 = 15$, logo:

$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow 15 = 7 + 2r \Rightarrow 2r = 8 \Rightarrow r = 4$

Alternativa **E**. | D22 - Fácil

3. $r = a_2 - a_1 = -6 - (-10) = 4$

Sabendo que $a_1 = -10$ e $r = 4$, vem:

$a_{10} = a_1 + 9r = -10 + 9 \cdot 4 = 26$

Assim:

$$S_{10} = \frac{(-10 + 26) \cdot 10}{2} = 80$$

Alternativa **D**. | D22 - N2.4 - Fácil

4. Do enunciado, tem-se $a_1 = -5$, $a_n = 95$ e $r = 4$. Logo:

$95 = -5 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 95 = -5 + 4n - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4n = 104 \Rightarrow n = 26$

Alternativa **C**. | D22 - N2.4 - Fácil

5. Sabe-se que $a_1 = 7$ e $r = 4$.

O termo geral da PA é $a_n = 7 + 4(n - 1) = 3 + 4n$.

Assim:

$$S_n = \frac{(7 + 3 + 4n) \cdot n}{2} = \frac{(10 + 4n) \cdot n}{2} = \frac{10n + 4n^2}{2} =$$

$= 5n + 2n^2$.

Alternativa **A**. | D22 - Fácil

6. Pode-se relacionar a_{79} e a_{85} diretamente:

$a_{85} = a_{79} + 6r \Rightarrow 6r = 46 - 112 \Rightarrow 6r = -66 \Rightarrow$

$\Rightarrow r = -11$

Alternativa **D**. | D22 - Fácil

7. Considerando: a_1 a idade da irmã mais nova; a_2 a idade de Natália; a_3 a idade da irmã mais velha. Tem-se:

$a_1 + a_2 + a_3 = 60 \Rightarrow a_2 - r + a_2 + a_2 - r = 60 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a_2 = 60 \Rightarrow a_2 = 20$

Alternativa **C**. | D22 - N2.4 - Médio

8. Na sequência, o primeiro termo é 4 e o terceiro, 36. Sabendo que $36 = 4 \cdot 9$, conclui-se que a razão é 3, pois $36 = 4 \cdot 3 \cdot 3$, ou seja, do primeiro termo para o terceiro houve duas multiplicações por 3.
Logo, o segundo termo é $4 \cdot 3 = 12$.

Alternativa **C**. | D22 - Médio

9. Trata-se de uma PG em que $a_1 = 1$, $a_2 = 1 \cdot 3 = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 = 9$ e $a_4 = 9 \cdot 3 = 27$.

Logo, a razão é 3 e, consequentemente:

$a_5 = 27 \cdot 3 = 81$

$a_6 = 81 \cdot 3 = 243$

$a_7 = 1 \cdot 3^6 = 729$

Alternativa **B**. | D22 - Médio

10. Vendendo 1 doce, Raquel recebe 202 reais. Vendendo 2 doces, Raquel recebe 204 reais. Vendendo 3 doces, Raquel recebe 206 reais.
Pode-se observar uma PA cujo primeiro termo é 202 e a razão é 2.

Assim, para n doces vendidos, Raquel receberá:

$202 + (n - 1) \cdot 2 = 202 + 2n - 2 = 200 + 2n$.

Alternativa **B**. | D22 - Médio

11. O número de páginas lidas por dia cresce segundo uma progressão aritmética de $a_1 = 5$ e $r = 3$. No 20º dia, tem-se $a_{20} = 5 + 19 \cdot 3 = 62$ páginas.

O total é $\dfrac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \dfrac{(5 + 62) \cdot 20}{2} = 670$ páginas.

Alternativa **D**. | D22 - N2.4 - Médio

12. Percebendo que os números aumentam de 2 em 2 partindo do topo da figura, tem-se que a linha 5 é formada pelos números 22, 24, 26, 28 e 30 e a linha 6 é formada pelos números 32, 34, 36, 38, 40 e 42.
Logo, a soma dos números que formam a linha 6 é:

$$S_6 = \frac{(32 + 42) \cdot 6}{2} = 74 \cdot 3 = 222$$

Alternativa **B**. | D22 - N2.4 - Difícil

13. Observando as etapas, é possível notar que a quantidade de círculos aumenta de acordo com uma progressão geométrica (1, 2, 4, 8, ...). Continuando a formação até o 8º termo, tem-se (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128).

Alternativa **D**. | D22 - Difícil

14. Pelo enunciado, $a_{10} - a_8 = a_3 - a_1 = 2r$. Logo:

$2r = 24 - 4 = 20$

Alternativa **D**. | D22 - Fácil

15. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT202**.

O processo de mitose equivale a uma PG na qual, a partir do segundo termo, o valor é o dobro do anterior. Então:

Quantidade de célula inicial: 1.

Ciclo 1: 2

Ciclo 2: 4

Ciclo 3: 8

Ciclo 4: 16

Ciclo 5: 32

Ciclo 6: 64

Alternativa **D**. | D22 - Fácil

16. $a_1 = -7$ e $r = 3$

$a_n = -7 + 3(n - 1) \Rightarrow a_n = -7 + 3n - 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = -10 + 3n$

$$S_n = \frac{(-7 - 10 + 3n) \cdot n}{2} = \frac{(-17 + 3n) \cdot n}{2} = 14150 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-17 + 3n) \cdot n = 28300 \Rightarrow 3n^2 - 17n - 28300 = 0$

Resolvendo a equação do segundo grau e descartando o valor de n negativo (ele não está no domínio da função), encontra-se $n = 100$.

Alternativa **A**. | D22 - Médio

17. A quantidade de árvores em cada fileira forma uma PA de razão 2. Assim:

$a_{20} = 1 + (20 - 1) \cdot 2 = 1 + 19 \cdot 2 = 39$

$$S_{20} = \frac{(1 + 39) \cdot 20}{2} = 400$$

Alternativa **E**. | D22 - N2.4 - Médio

18. Considerando a sequência $(54, x, y, 27, 18)$, tem-se:

$$27 = \frac{y + 18}{2} \text{ e } x = \frac{54 + y}{2}$$

Então:

$$27 = \frac{y + 18}{2} \Rightarrow 54 = y + 18 \Rightarrow y = 36$$

$$x = \frac{54 + 36}{2} = 45$$

Logo, a soma dos termos é: $54 + 45 + 36 + 27 +$
$+ 18 = 180$.

Alternativa **B**. | D22 - Médio

19. Como a_6 é o termo central dessa PA, tem-se:

$$a_6 = \frac{a_1 + a_{11}}{2}$$

Logo: $a_6 = \dfrac{109 + 9}{2} = 59$

Alternativa **C**. | D22 - Médio

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. O número de acessos cresce segundo uma progressão aritmética de primeiro termo 152 e razão igual a 2. Assim, pode-se calcular a_{10}.

$a_{10} = a_5 + 5r = 160 + 5 \cdot 2 = 170$

Alternativa **B**. | D22 - N2.4 - N4.5 - Médio

2. Na primeira tentativa, o tempo é de 30 segundos; na segunda, $(60 + 30)$ segundos; na terceira, $(120 + 30)$ segundos; e, na quarta, $(240 + 30)$ segundos. Com isso, tem-se o total de: $30 + 90 +$
$+ 150 + 270 = 540$ s.

Alternativa **C**. | D22 - N2.4 - Médio

3. Sendo a quilometragem percorrida uma PA, pode-se escrever: $a_1 = 6$, $a_n = 42$ e $r = 2$.
Então:

$42 = 6 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow 42 = 6 + 2n - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2n = 38 \Rightarrow n = 19$

Portanto:

$$S_{19} = \frac{(6 + 42) \cdot 19}{2} = 456\text{; 456 km}$$

Alternativa **C**. | D22 - N2.4 - Médio

4. O número de palitos em cada figura constitui uma progressão aritmética de primeiro termo 3 e razão 4. Portanto, para representar o décimo termo da sequência são necessários:

$a_{10} = a_1 + 9r = 3 + 9 \cdot 4 = 39$ palitos.

Alternativa **B**. | D22 - N4.5 - Médio

5. Tem-se que 5 min 15 s = 315 s é o primeiro termo de uma progressão aritmética de razão 315 s e termo de ordem n igual a 1 h 55 min 30 s = 6930 s.

Logo, $6930 = 315 + (n - 1) \cdot 315 \Rightarrow n = 22$.

Portanto, os tempos obtidos pelo corredor também constituem uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 5 min 27 s = 327 s e razão 327 s.

Assim, o seu tempo total de corrida é igual a:

$a_{22} = 327 + (22 - 1) \cdot 327 \Rightarrow a_{22} = 7194$; 7194 s

Portanto, 1 h 59 min 54 s.

Alternativa **C**. | D22 - N2.4 - N4.5 - Difícil

6. A duração de uma mínima corresponde a $\frac{1}{2}$ da duração de uma semibreve; uma semínima corresponde a $\frac{1}{2}$ da duração de uma mínima, ou seja, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ da duração de uma semibreve; uma colcheia corresponde a $\frac{1}{2}$ da duração de uma semínima, isto é, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ da duração de uma semibreve; e assim sucessivamente, até $\frac{1}{64}$.

Logo, a sequência é: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$.

Alternativa **E**. | D22 - Difícil

7. O custo de construção de cada metro do poço indica uma progressão aritmética de primeiro termo 1000 e razão 200, ou seja, (1000, 1200, 1400, ..., $200n + 800$, ...). Logo, se n é o número de metros construídos, então:

$$48\,600 = \left(\frac{1000 + 200n + 800}{2}\right) \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 9n - 486 = 0 \Rightarrow n = 18$$

Alternativa **B**. | D22 - N2.4 - Difícil

8. As distâncias diárias percorridas correspondem a uma progressão aritmética de primeiro termo 60 km e razão r km. Logo, sabendo que a soma dos n primeiros termos dessa progressão é igual a 1560 km e que a distância percorrida no último dia foi de 180 km, tem-se:

$$1560 = \frac{(60 + 180) \cdot n}{2} \Rightarrow n = 13$$

Portanto, $180 = 60 + (13 - 1) \cdot r \Rightarrow r = 10$; 10 km.

Alternativa **C**. | D22 - N2.4 - Médio

9. Do enunciado pode-se perceber que a quantidade de cartas distribuídas nas colunas segue uma progressão aritmética de 7 termos. Então, a quantidade de cartas nas colunas é:

$$S_7 = \frac{(1 + 7) \cdot 7}{2} = 28$$

Assim, a quantidade de cartas no monte é

$52 - 28 = 24$.

Alternativa **B**. | D22 - N2.4 - Médio

10. a) Considere o quadro a seguir.

1	2	3
8	9	10
15	16	17

Tem-se:

$1 + 2 + 3 + 8 + 9 + 10 + 15 + 16 + 17 = 81 = 9 \cdot 9$, ou seja, a soma dos números do quadro é um múltiplo de 9.

b) Considere o seguinte quadro:

k	$k + 1$	$k + 2$	$k + 3$
$k + 7$	$k + 8$	$k + 9$	$k + 10$
$k + 14$	$k + 15$	$k + 16$	$k + 17$
$k + 21$	$k + 22$	$k + 23$	$k + 24$

Queremos calcular k.

Sabendo que a soma de todos os números do quadro é 1056, temos $16k + 192 = 1056 \Rightarrow k = 54$.

c) Considere o quadro a seguir.

4	5	...	$n + 3$
11	12	...	$n + 10$
⋮	⋮	⋮	⋮
$7n - 3$	$7n - 2$	...	$8n - 4$

Para calcular n, é preciso somar os números da primeira e da última coluna. Logo, tem-se:

$$S_1 = \left(\frac{4 + 7n - 3}{2}\right) \cdot n = \frac{7n^2 + n}{2}$$

$$S_n = \left(\frac{n + 3 + 8n - 4}{2}\right) \cdot n = \frac{9n^2 - n}{2}$$

Desse modo,

$$108\,000 = \frac{(S_1 + S_n) \cdot n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 108\,000 = \left(\frac{7n^2 + n}{2} + \frac{9n^2 - n}{2}\right)\frac{n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 108\,000 = \frac{16n^2}{2} \cdot \frac{n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 108\,000 = 4n^3 \Rightarrow n^3 = 27\,000 \Rightarrow n = 30$$

| D22 - Difícil

Jornada 14 – Análise combinatória

Abertura da jornada

A abertura desta jornada apresenta a atualização do sistema de registro de veículos no Brasil, que teve início em 2019. Vale ressaltar que a identificação e o registro das placas de identificação veicular (PIV) são importantes para o controle da frota de veículos do país. Esse novo modelo, adotado em 2019, é conhecido como "placa Mercosul".

É sabido que a quantidade de sequências distintas possíveis para as placas é limitada, o que leva à necessidade de atualização periódica do formato dessas sequências. Assim, considerando o alfabeto com 26 letras e os números de 0 a 9, tem-se: 26 opções para a 1ª, a 2ª, a 3ª e a 4ª letra e 10 opções para o 1º, o 2º e o 3º algarismo da placa.

Utilizando o princípio multiplicativo, calculam-se todas essas quantidades de opções para obter a quantidade total de placas distintas possíveis:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 456\,976\,000$

Na questão **1**, espera-se que os estudantes mencionem que um dos motivos foi o aumento da frota de veículos. Esse novo modelo permite o registro de uma quantidade maior de veículos.

Na pesquisa feita para a questão **2**, espera-se encontrar informações de que, no novo modelo, para evitar que dois países tenham a mesma placa, foram estabelecidas algumas regras: o Paraguai ficou com o padrão LLLL AAA; o Brasil, com o padrão LLL A L AA; a Argentina, com o padrão LL AAA LL e o Uruguai, com o padrão LLL AAAA.

Na questão **3**, padrão do sistema anterior LLL NNNN permitia a seguinte quantidade máxima de registros de placas:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175\,760\,000$

Na questão **4**, atualmente, 12 países da América do Sul já adotaram de alguma maneira a placa Mercosul; são eles: Argentina, Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, Equador, Guiana, Paraguai, Peru, Suriname, Uruguai e Venezuela. A Bolívia, por exemplo, adotou esse modelo para veículos de carga que realizam transporte internacional. O padrão de sequência das placas desses veículos é LL NNNNN.

_DICA

Para ampliar o trabalho com esse tema, estimule os estudantes a pesquisar como é o registro PIV em países que não sejam da América do Sul.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção.

Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

No item **a**, os estudantes são apresentados ao método da árvore de possibilidades e à solução, sem a necessidade de exibir todos os casos, por meio do princípio multiplicativo. Os itens **b** e **c** demonstram decisões com restrição, ampliando o conceito de raciocínio combinatório. Já no item **d**, o problema é estendido de modo a reforçar o conceito multiplicativo. Uma solução incorreta, mas bastante comum, é considerar que, ao se colocar um segundo grupo de 4 lixeiras do mesmo tipo que as primeiras, pode-se concluir que o total de possibilidades seria: $2 \cdot 24 = 48$. Contudo, ao apenas adicionar as configurações de cada grupo, não é considerado que, para cada possibilidade de ordenação do primeiro ponto, há todas as outras possibilidades de ordenação do segundo ponto, etc.

1. Segundo o enunciado, o número de possibilidades que a pessoa tem para ir do Rio de Janeiro até Porto Alegre são 3; e o número de possibilidades para ir de Porto Alegre até Gramado são 4.
Logo, há $3 \cdot 4 = 12$, ou seja, 12 possibilidades no total.

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Fácil

2. Carlos precisa tomar 3 decisões: a opção para a 1ª etapa, em que há 3 possibilidades; depois, a para a 2ª etapa, com 2 possibilidades; e, por último, a para a 3ª etapa, que tem 1 possibilidade.
Logo, há $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, ou seja, 6 sequências possíveis, cada uma utilizada em um dia. Assim, Carlos treina 6 dias sem descansar.

Alternativa **B**. | D32 - N4.8 - Fácil

3. Para montar o sanduíche, o cliente deve tomar 3 decisões: o tipo de carne, o tipo de queijo e o tipo de molho.
Logo, há $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$, ou seja, 36 maneiras distintas de montar o sanduíche.

Alternativa **C**. | D32 - N4.8 - Fácil

4. Para criar a bandeira, é preciso tomar 3 decisões: a cor da 1ª listra, a cor da 2ª e a cor da 3ª.

Como as listras não podem ter cores iguais seguidas, para a 1ª listra há 5 opções; para a 2ª há 4, pois não pode repetir a 1ª; e para a 3ª há 4, pois não pode repetir a 2ª, mas pode repetir a 1ª.

Logo, há $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$, ou seja, 80 maneiras distintas de se confeccionar a bandeira.

Alternativa **E**. | D32 - N4.8 - Médio

5. Para pintar as casas, é preciso tomar 5 decisões: definir a cor da 1ª casa, a cor da 2ª, a cor da 3ª, a cor da 4ª e a cor da 5ª.
Como não pode haver casas consecutivas de mesma cor, há $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$, ou seja, 48 maneiras diferentes de pintar as casas.

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Médio

6. Existe a possibilidade de usar uma das 2 empresas, sendo 3 opções para uma delas e 4 opções para a outra.
Logo, pelo princípio aditivo, Bruna terá 7 opções de voo.

Alternativa **A**. | D32 - N4.8 - Fácil

7. Segundo o enunciado, deve-se calcular os itens para o seguinte padrão de emplacamento: LL AAAA.

I. Então: $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5\,625$

Alternativa **E**.

II. Como deve começar pela letra K, tem-se:

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1875$

Alternativa **C**.

III. Como deve começar pela letra K e terminar em número par, tem-se:

$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 1500$

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Médio

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. Com base nesses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. Como o nome do parque tem 7 letras e 2 delas são iguais, deve-se escolher qual cor cada uma das 6 letras distintas vai ter. Há 6 cores disponíveis para colorir o letreiro, então:
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 720$, ou seja, há 720 maneiras distintas de colorir o letreiro.

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Fácil

2. Uma partida é disputada por 2 participantes, e todos os 10 participantes vão se enfrentar. Sabendo disso, deve-se calcular quantas partidas terá o torneio.
Sendo *n* a quantidade de participantes, tem-se:
$\underbrace{10}_{\text{participante 1}} \cdot \underbrace{9}_{\text{participante 2}} = 90$; como cada dupla é a mesma, não importando a ordem dos participantes, o torneio terá 45 partidas.

Sabe-se que cada rodada terá 5 partidas. Então, tem-se:

$45 : 5 = 9$, ou seja, o torneio terá 9 rodadas.

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Médio

3. Para 2 passageiros, há 6 possibilidades $(3 \cdot 2)$.

Alternativa **A**. | D32 - N4.8 - Fácil

4. Como são 4 opções de entrada, 6 opções de prato principal e 3 opções de sobremesa, há $4 \cdot 6 \cdot 3 = 72$, ou seja, 72 possibilidades de compor a refeição.

Alternativa **E**. | D32 - N4.8 - Fácil

5. Há 3 opções diferentes a serem consideradas.
Opção 1: XYZ (3 empadas com recheios diferentes)

Como cada trio é o mesmo, não importando a ordem, tendo 4 possibilidades para cada um, fica:

$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 4$

Logo, 4 possibilidades.
Opção 2: XXY (3 empadas, sendo 2 com um tipo de recheio e 1 com outro recheio)
$4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$
Logo, 12 possibilidades.
Opção 3: XXX (todas com o mesmo recheio)
$4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$
Há 4 possibilidades.
Assim: $4 + 12 + 4 = 20$
Portanto, Ivan tem 20 possibilidades de escolher as 3 empadas.

Alternativa **C**. | D32 - N4.8 - Médio

6. Gisele precisa tomar 2 decisões: escolher 6 salgados entre 10 opções disponíveis e escolher 4 doces entre 6 opções disponíveis; porém, para cada decisão, há várias possibilidades de combinação. Então, será necessário, para cada escolha, calcular uma combinação.
Desse modo, pode-se representar as escolhas dela como:
$C_{10,\,6} \cdot C_{6,\,4}$

Alternativa **E**. | D32 - N4.8 - Médio

7. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais, mobilizando a habilidade **EM13CHS106**.

I. Número mínimo de caminhos que ligam a cidade A à cidade B: 6 caminhos para o norte (N) e 8 caminhos para oeste (O). Logo, o caminho pode ser representado pela sequência NNNNNNOOOOOOOO.

Então, o total de caminhos é o número de permutações possíveis dessa sequência: $P_{14}^{8,\,6}$

Alternativa **C**.

II. O caminho que liga a cidade A à cidade B, passando por C, divide o percurso em 2 partes. Logo, deve-se tomar 2 decisões: na 1ª, escolher o caminho para ir da cidade A até a cidade C e, na 2ª, para ir da cidade C até a cidade B.

Assim:

- de A até C, tem-se NNNOOO; daí $P_6^{3,\,3}$.
- de C até B, tem-se NNNOOOOO; daí $P_8^{3,\,5}$.

Então, o total de possibilidades é: $P_6^{3,\,3} \cdot P_8^{3,\,5}$.

Alternativa **E**. | D32 - N4.8 - N7.19 - Difícil

8. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais, mobilizando a habilidade **EM13CHS401**.

$C_{10,\,5} \cdot C_{5,\,3} \cdot C_{2,\,2} = 252 \cdot 10 \cdot 1 = 2\,520$

Alternativa **B**. | D32 - N4.8 - Difícil

9. Deve-se escolher 3 estudantes entre 10. Logo, uma solução é utilizar a combinação:

$$C_{10,\,3} = \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{7!}} = 120$$

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Difícil

10. Primeiro, deve-se calcular todas as permutações sem a restrição:

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!}$$

Em seguida, é preciso subtrair dessa quantidade o total de permutações em que as duas letras I estão juntas:

$$\frac{7!}{2} - 6!$$

Alternativa **B**. | D32 - N4.8 - N7.19 - Difícil

11. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências Humanas e Sociais, mobilizando a habilidade **EM13CHS401**.

Cada fila possível é uma permutação das 6 pessoas.

Logo: $P_6 = 6! = 720$

Portanto, é possível formar 720 filas.

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - N7.19 - Fácil

12. Primeiro, calculam-se todas as possibilidades sem a restrição. Como são 5 quadros, tem-se 5! de possibilidades.

Em seguida, deve-se determinar todos os casos em que os 2 quadros que devem ficar separados ficariam juntos. Nesse caso, é necessário considerá-los em bloco, de modo que se permutam 4 objetos.

Repare que os 2 quadros que estão juntos podem permutar entre si.

Assim, o total de casos possíveis conforme determinado pelo problema é:

$5! - 2 \cdot 4! = 120 - 2 \cdot 24 = 120 - 48 = 72$

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Difícil

13. A ligação não pode ter dois elementos PP juntos; assim, há 5 sequências possíveis de P (positivos) e N (negativos):

PNPNPNPN: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24 \cdot 24 = 576$

PNNPNPNP: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24 \cdot 24 = 576$

PNPNNPNP: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24 \cdot 24 = 576$

PNPNPNNP: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24 \cdot 24 = 576$

NPNPNPNP: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24 \cdot 24 = 576$

Logo, pode haver, no máximo, 2 880 ligações com esses elementos químicos.

Alternativa **C**. | D32 - N4.8 - Difícil

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Conforme as informações do enunciado, o número de códigos possíveis:

- para 3 toques é: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$
- para 4 toques é: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$
- para 5 toques é: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

Portanto, a expressão que representa o total de códigos existentes é:

$4^5 + 4^4 + 4^3$

Alternativa **B**. | D32 - N4.8 - Médio

2. O número de anagramas em que as letras EDU estejam juntas e nessa ordem é dado pela permutação das 4 demais letras com o bloco composto das 3 letras que devem permanecer juntas.

Assim: $5! = 120$

Descontando a sequência EDUARDO, obtém-se:
$120 - 1 = 119$
Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Fácil

3. Pelo princípio multiplicativo, há 12 maneiras ($4 \cdot 3$) de ir de A para C passando por B e 10 maneiras ($5 \cdot 2$) de ir de A para C passando por D. Em consequência, pelo princípio aditivo, tem-se:
$12 + 10 = 22$
Logo, existem 22 trajetos possíveis.
| D32 - N4.8 - Médio

4. Para descobrir o número total de partidas, calcula-se:
$A_{20,\,2} = \dfrac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$
Portanto, se ocorreram 126 empates, houve ganhador em 254 jogos, pois: $380 - 126 = 254$.
Alternativa **C**. | D32 - N4.8 - Médio

5. Para descobrir a diferença, é necessário primeiro calcular a quantidade de placas possíveis de cada sistema.
Quantidade de placas possíveis no sistema anterior:
$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
Quantidade de placas possíveis no sistema Mercosul:
$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$
Portanto, tem-se:
$\dfrac{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10}{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = 2{,}6$
Alternativa **C**. | D32 - N4.8 - Difícil

6. Uma pilha pode ter blocos de 2 ou 3 cores distintas. Para as pilhas de blocos de 2 cores, pode-se fazer 3 escolhas para a cor repetida e 3 escolhas para a segunda cor. Definidos os blocos, é possível dispô-los de 3 maneiras, pois:
$P_3^2 = \dfrac{3!}{2!} = 3$
Logo, pelo princípio multiplicativo, há 18 possibilidades de pilha ($2 \cdot 3 \cdot 3$) com blocos de 2 cores.
Para as pilhas de blocos de 3 cores distintas, sabe-se que existem 4 modos de escolher a primeira cor, 3 modos de escolher a segunda cor e 2 modos de escolher a última cor.
Portanto, pelo princípio multiplicativo, há 24 possibilidades de pilhas, pois:
$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
Finalmente, pelo princípio aditivo, tem-se:
$18 + 24 = 42$
Alternativa **C**. | D32 - N4.8 - Médio

7. O número de partidas disputadas em turno e returno corresponde ao número de arranjos simples de x times tomados 2 a 2.
Assim, tem-se:
$A_{x,\,2} = 380 \Rightarrow \dfrac{x!}{(x-2)!} = 380 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x-1) = 380 \Rightarrow x^2 - x = 380$
Alternativa **B**. | D32 - N4.8 - N8.15 - Difícil

8. Como há na frase 4 vogais e 5 consoantes, a única configuração possível é $C_1V_1C_2V_2C_3V_3C_4V_4C_5$, em que cada C_i representa uma consoante e cada V_i representa uma vogal, com i natural, $1 \leqslant i \leqslant 5$.
Assim, tem-se: $P_5^2 = \dfrac{5!}{2!}$ maneiras de dispor as consoantes e $P_4 = 4!$ maneiras de intercalar as vogais.
Então, pelo princípio multiplicativo, pode-se representar:
$\dfrac{5!}{2!} \cdot 4!$
Alternativa **E**. | D32 - N4.8 - Difícil

9. **I.** Verdadeira.
Sejam os números da forma ABCD:
Número de possibilidades para $A \in \{0, 1\}$ e $B \in \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, com CD equivalente a 25 ou CD equivalente a 52:
$2 \cdot 8 \cdot 2 = 32$
Logo, 32 possibilidades.
Número de possibilidades para $A = 0$ e $B = 2$:
{0205, 0215, 0225, 0235, 0245, 0265, 0275, 0285, 0295, 0250, 0251, 0252, 0253, 0254, 0255, 0256, 0257, 0258, 0259}
Logo, 19 possibilidades.
Para $A = 1$ e $B = 2$ também haverá 19 possibilidades, assim como para $A = 0$ e $B = 5$ ou $A = 1$ e $B = 5$.
Logo, o total de possibilidades é: $32 + 19 \cdot 4 = 108$.
II. Falsa.
Com as cartelas com 1 e 5, João teria comprado mais cartelas devido ao maior número de possibilidades para a casa do milhar com o número 1.
III. Falsa.
A quantidade de cartelas com os números 2, 5 e 3 (sabendo que na casa do milhar pode ter apenas 0 ou 1) é dada por:
$2 \cdot 3! = 12$
Alternativa **B**. | D32 - N4.8 - Difícil

10. Existem $5! = 120$ sequências possíveis para visitar as 5 cidades. Desconsiderando as simétricas, há 60 sequências para visitar.
Logo, o tempo necessário para examinar as sequências será de 90 minutos, pois: $1{,}5 \cdot 60 = 90$.
Alternativa **B**. | D32 - N4.8 - Médio

Jornada 15 – Probabilidade

Abertura da jornada

Nesta jornada, enfatize a importância dos modelos de estatística e de probabilidade na previsão meteorológica, incluindo o monitoramento de tempestades e a geração de alertas que podem salvar vidas. Por meio da análise probabilística, é possível avaliar o risco de eventos extremos, como ciclones e enchentes, e possibilitar ações preventivas das autoridades. Discuta ainda outras aplicações, como combate a epidemias, tratamento de pacientes, formulação de remédios, etc.

Por meio do texto de abertura e dos conceitos sobre probabilidade, espera-se que os estudantes relembrem definições importantes sobre espaço amostral, evento e probabilidade. Explore problemas na perspectiva de frequência, nos quais a frequência relativa pode contribuir para a construção de modelos de probabilidade. Reforce que o ato de jogar uma moeda 10 vezes pode ser algo aparentemente inútil, mas representa um conhecimento matemático importante em situações como a probabilidade de 10 *smartphones* apresentarem defeito nos 2 primeiros anos de uso e isso ser uma informação importante para o consumidor. Ou seja, jogar uma moeda repetidas vezes ajuda a construir modelos que podem ser usados para variadas aplicações.

Como algumas questões desta jornada utilizam exemplos fictícios de apostas, comente sobre o vício em apostas e jogos de azar (que em si pode ser considerado um transtorno psicológico) e atitudes irresponsáveis de desperdício financeiro, conscientizando os estudantes acerca da complexidade desse tema.

Na questão **1**, é abordada a emergência climática dos últimos tempos que tem alterado a intensidade e a frequência de desastres climáticos. Então, é provável que os estudantes respondam que sim, que houve aumento na ocorrência de eventos climáticos extremos, como secas ou chuvas extremas.

Na questão **2**, comente que a soma da probabilidade de um evento acontecer e da probabilidade de um evento não acontecer é igual a 100%.

Na questão **3**, os estudantes devem citar que o Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC, do inglês Intergovernmental Panel on Climate Change) foi criado em 1988 por um programa da Organização das Nações Unidas (ONU) e da Organização Meteorológica Mundial (OMM). Trata-se de um órgão mundial que conta com a adesão de 195 países, incluindo o Brasil. Entre seus objetivos, estão a identificação de consensos na comunidade científica sobre a mudança do clima e a indicação de áreas que necessitam de mais pesquisas.

_DICA

Utilize simulações computacionais para ampliar a visão sobre o conceito de probabilidade. Esse tipo de simulação pode ser encontrado em: https://www.geogebra.org/m/PucJknDN#material/BHV1glZw e também em: https://www.geogebra.org/m/PucJknDN#material/fODN1WhW. Acesso em: 22 nov. 2023.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

1. Considerando cada número um mês do ano, então o espaço amostral é o conjunto:

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Alternativa **A**. | Fácil

2. Considerando que a letra inicial de cada nome representa o respectivo amigo, o espaço amostral para o experimento pode ser representado pelos seguintes pares de amigos: AB, AC, AD, BC, BD e CD.

Alternativa **C**. | Fácil

3. O espaço amostral contém todos os resultados possíveis. Como a moeda lançada pode apresentar cara ou coroa, deve-se multiplicar 2 três vezes, pois foram 3 lançamentos:

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Fácil

4. Na situação apresentada, há 2 possibilidades, dar ou não dar defeito, então, multiplica-se 2 três vezes (uma para cada pessoa: Ana, Bia e Carla). Assim, o número de elementos do espaço amostral é:

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Alternativa **D**. | D32 - N4.8 - Fácil

5. Como 5% dos adultos fazem parte do grupo que detêm 90% da riqueza do país, 95% dos adultos detêm 10% da riqueza restante do país.

Alternativa **E**. | D33 - N4.6 - Médio

6. Para determinar essa probabilidade, deve-se considerar a quantidade de casas com 4 pessoas (2) e dividi-la pelo número total de casas (10):

$P = \frac{2}{10} = 0{,}20 = 20\%$

Alternativa **E**. | D33 - N4.6 - Médio

7. Considerando M para menina e H para menino, as possibilidades são:

MH, MM, HH, HM

Das 4 possibilidades, 2 atendem às condições do enunciado:

$P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Alternativa **C**. | D33 - N4.6 - N7.20 - Médio

8. Ao todo, há 8 resultados possíveis, dos quais apenas 3 são favoráveis: "cara, coroa, coroa"; "coroa, cara, coroa"; "coroa, coroa, cara".

Logo, a probabilidade é $\frac{3}{8}$.

Alternativa **D**. | D33 - N4.6 - N7.20 - Médio

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. A partir desses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. Para nenhuma prova ser considerada difícil, todas as três provas devem ser fáceis. Logo:

$P_{\text{todas fáceis}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Para encontrar a probabilidade de pelo menos uma prova ser difícil, subtrai-se essa probabilidade de 1:

$P_{\text{pelo menos uma difícil}} = 1 - P_{\text{todas fáceis}} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Alternativa **E**. | D33 - N4.6 - Médio

2. I. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:

$P_{2V} = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{20}{132} = \frac{5}{33}$

Alternativa **A**.

II. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:

$P_{1V} = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} = \frac{70}{132}$

Alternativa **E**. | D33 - N4.6 - Médio

3. Há $6 \cdot 6 = 36$ possibilidades ao todo, das quais:

- 3 apresentam soma 10;
- 2 apresentam soma 11;
- 1 apresenta soma 12.

$P_{\text{soma} < 10} = 1 - P_{\text{soma} \geqslant 10} = 1 - \frac{6}{36} = \frac{5}{6}$

Alternativa **E**. | D33 - N4.6 - Médio

4. Como são 7 dias na semana, ao sortear 1, sobram 6. Como é necessário definir 2 dias, então há:

$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ maneiras de escolher 2 dias da semana.

Há 6 maneiras com sábado e 6 com domingo. E há 1 maneira com sábado e domingo. Logo, o total de escolhas com pelo menos um sábado ou um domingo é: $6 + 6 - 1 = 11$. E a probabilidade é calculada por: $P = \frac{11}{21}$

Alternativa **E**. | D33 - N4.6 - Médio

5. Vamos analisar cada uma das afirmativas.

A afirmativa **I** é falsa, pois a probabilidade de nascer 2 meninos e 1 menina $\left(\frac{3}{8}\right)$ e de nascer 2 meninas e 1 menino $\left(\frac{3}{8}\right)$ são iguais.

A afirmativa **II** é falsa. A probabilidade é $\frac{1}{8}$, pois das 8 possibilidades, tem-se apenas uma (MMM) que é favorável.

A afirmativa **III** é falsa. A probabilidade é $\frac{3}{8}$, afinal, das 8 possibilidades, 3 são HHM, HMH, MHH.

A afirmativa **IV** é verdadeira. A probabilidade é $\frac{3}{8}$, pois das 8 possibilidades, têm-se MMH, MHM, HMM.

Logo, apenas uma das afirmativas, a **IV**, está correta.

Alternativa **B**. | D33 - N4.6 - Médio

6. Há $C_{6,\,3} = \frac{6!}{3!\,(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$ maneiras diferentes de escolher 3 cidades entre 6 opções.

Há $C_{4,\,2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ maneiras de escolher 2 cidades, entre Roma, Florença, Nápoles e Milão, pois Veneza será escolhida (compondo a 3ª cidade) e Bolonha não será escolhida.

Logo, a probabilidade é:

$P = \frac{C_{4,\,2}}{C_{6,\,3}} = \frac{6}{20} = 0{,}30 = 30\%$

Alternativa **D**. | D33 - N4.6 - Difícil

7. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:

$P_{\text{vascaíno}} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$

Alternativa **A**. | D33 - N4.6 - Fácil

8. Arthur ganha o jogo se obtiver pelo menos 2 pontos, o que pode acontecer de 2 modos diferentes: 2 pontos na primeira jogada ou, caso tenha a segunda chance, obter qualquer um dos resultados, exceto @ uma segunda vez.
Assim, tem-se:
$P_{\text{avançar pelo menos 2 casas}} = P_{\text{tirar \# ou tirar @ e (\# ou \$)}}$
Logo, a probabilidade de Arthur ganhar nessa rodada é:
$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{17}{36} \simeq 0{,}47 = 47\%$
Alternativa **D**. | D33 - N5.9 - Difícil

9. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:
$P_{2\text{ Ap e }1\text{ Rep}} = 3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 38{,}4\%$
Alternativa **B**. | D33 - N4.6 - Fácil

10. Considerando C para cara e K para coroa, a probabilidade de pelo menos 3 caras é:
$P_{3C2K} + P_{4C1K} + P_{5C0K}$
$P_{3C2K} = \frac{C_{5,\,3} \cdot 1}{2^5} = \frac{10}{32}$
$P_{4C1K} = \frac{C_{5,\,4} \cdot 1}{2^5} = \frac{5}{32}$
$P_{5C0K} = \frac{C_{5,\,5} \cdot 1}{2^5} = \frac{1}{32}$
Somando: $P = \frac{16}{32}$
Alternativa **D**. | D33 - N5.9 - Difícil

11. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT205**.
Consideremos o experimento aleatório: nascerem 2 crianças e observar os sexos.
Espaço amostral do experimento Ω: {(menino, menina); (menina, menino); (menino, menino); (menina, menina)} $\Rightarrow n(\Omega) = 4$
Evento A: nascer, pelo menos, uma criança do sexo feminino.
A = {(menina; menino); (menino; menina); (menina; menina)} $\Rightarrow n(A) = 3$
$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4} = 75\%$
Como a probabilidade é maior do que 50%, eles não vão a uma clínica de fertilização.
Alternativa **B**. | D33 - N4.6 - Médio

12. De acordo com os dados da atividade, tem-se:
$P(\text{TEC} \mid \text{Turma 32}) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
Alternativa **B**. | D33 - N4.6 - Fácil

13. Considerando os eventos: A – assinar o jornal vizinho e B – assinar o jornal local, sabe-se que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Sendo: $P(A \cap B) = 50\%$, $P(A) = 80\%$ e $P(B) = 60\%$, tem-se:
$P(A \cup B) = 80\% + 60\% - 50\% = 90\%$
Logo, 90% assinam pelo menos um dos jornais; portanto, 10% das casas não assinam nenhum dos dois jornais.
Alternativa **A**. | D33 - N5.9 - Médio

14. I. Entre as 52 cartas do baralho, há 4 A (ases). Logo:
$P_A = \frac{4}{52}$
Alternativa **B**.

II. Entre as 13 cartas de copas, há 1 ás de copas. Logo:
$P_A = \frac{1}{13}$
Alternativa **A**. | D33 - N4.6 - Médio

15. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:
I. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}7 = 0{,}4 + p \Rightarrow p = 0{,}3$
Alternativa **C**. | D33 - N5H05 - Médio

II. Para que sejam independentes, é necessário que:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}4p$
Dos dados, sabe-se que:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}7 = 0{,}4 + p - 0{,}4p \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}3 = 0{,}6p$
Logo, $p = 0{,}5$, ou seja, a probabilidade é de 50%.
Alternativa **E**. | D33 - N7.20 - Médio

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Sabendo que:
- Roberto é, necessariamente, o sexto a ser sorteado;
- há 4 pessoas com a mesma idade (incluindo João).

Pode-se concluir que a probabilidade solicitada é de $\frac{1}{4}$.
Alternativa **E**. | D33 - N4.6 - Fácil

2. A probabilidade de o trabalhador se atrasar, chovendo ou não, é de:

$P_{\text{com chuva}} = 30\% \cdot 50\% = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$

$P_{\text{sem chuva}} = 70\% \cdot 25\% = 0,7 \cdot 0,25 = 0,175$

$P = P_{\text{com chuva}} + P_{\text{sem chuva}} = 0,325$

Alternativa **C**. | D33 - N5.9 - Médio

3. Iniciamos o raciocínio calculando a probabilidade de um passageiro não ser inspecionado:

$$\left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{10}$$

Logo, a probabilidade de a inspeção acontecer ao menos uma vez é de:

$$1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

Alternativa **B**. | D33 - N4.6 - Médio

4. De acordo com o princípio multiplicativo, há $3 \cdot 3 = 9$ resultados possíveis. Entre esses 9 resultados, 3 são empates. Portanto, a probabilidade de não ocorrer empate é $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Seguindo essa linha de raciocínio, é possível concluir que a probabilidade de haver pelo menos 1 empate em 3 partidas é igual a:

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

Alternativa **D**. | D33 - N4.6 - Médio

5. Os caminhos possíveis são *ACF*, *ABCF* e *ABDF*. Assim, pode-se concluir que a resposta é:

$$0,2 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,3 = 0,384$$

Alternativa **E**. | D33 - N5.9 - Médio

6. De acordo com os dados do enunciado, tem-se:

$$P = C_{10,\,1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^9 = 10 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3^9} = \frac{10 \cdot 2}{3^{10}}$$

Alternativa **A**. | D33 - N4.6 - Difícil

7. Como a probabilidade de chover é 0,7, a probabilidade de não chover é:

$$1 - 0,7 = 0,3$$

Consequentemente:

- $CRC_{\text{I}} = 6 \cdot 0,7 + 3 \cdot 0,3 = 5,1$;
- $CRC_{\text{II}} = 7 \cdot 0,7 - 4 \cdot 0,3 = 3,7$;
- $CRC_{\text{III}} = -2 \cdot 0,7 + 10 \cdot 0,3 = 1,6$;
- $CRC_{\text{IV}} = 2 \cdot 0,7 + 8 \cdot 0,3 = 3,8$;
- $CRC_{\text{V}} = -6 \cdot 0,7 + 7 \cdot 0,3 = -2,1$.

O pneu I foi o escolhido.

Alternativa **A**. | D33 - N5.9 - Difícil

8. Primeiramente, a probabilidade de extrair uma bola qualquer das urnas *C* ou *D* é de $\frac{1}{2}$.

- Probabilidade na opção 1:

$$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$$

- Probabilidade na opção 2:

$$\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

- Probabilidade na opção 3:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{21}$$

- Probabilidade na opção 4:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

- Probabilidade na opção 5:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3}{14}$$

Consequentemente, como $\frac{3}{14}$ é a maior das probabilidades, a pessoa deve escolher a opção 5.

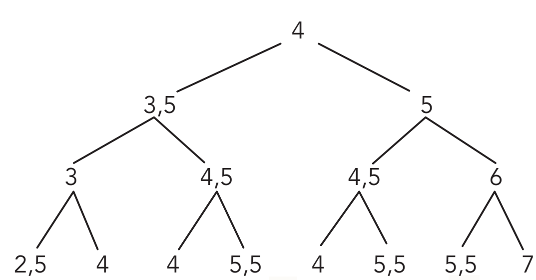
Alternativa **E**. | D33 - N5.9 - Difícil

9. Têm-se $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ possibilidades no total. Dessas possibilidades, 10 são favoráveis:

$$P = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$$

Alternativa **C**. | D33 - N4.6 - Difícil

10. Analise o diagrama de árvore a seguir, com os preços após 3 semanas.



Banco de imagens/Arquivo da editora

Há 4 preços acima de R$ 4,01 dentre os 8 preços possíveis. Então:

$P = \frac{4}{8} = 0,5 = 50\%$ | D33 - N4.6 - Difícil

Jornada 16 – Funções exponenciais e logarítmicas

Abertura da jornada

As funções exponenciais desempenham papel fundamental em várias áreas da Matemática e de outras Ciências. Elas são amplamente utilizadas para modelar fenômenos que envolvem crescimento ou decaimento exponencial. Explore com os estudantes o tema de abertura, sobre pandemia e crescimento exponencial.

Associe a ideia de propagação da covid-19 à função exponencial em que aumentos iguais em x produzem multiplicações iguais em y.

Uma função exponencial geralmente é representada na forma $f(x) = a^x$, em que a é a base da função e x é o expoente. A base a é um número real positivo diferente de 1.

Aproveite para reforçar, de maneira intuitiva inicialmente, algumas propriedades importantes, como as destacadas a seguir.

- Crescimento exponencial: quando a base a é maior do que 1, a função exponencial cresce rapidamente à medida que o valor de x aumenta. Esse conhecimento é útil para modelar, por exemplo, o crescimento populacional e o crescimento de investimentos financeiros, entre outros.
- Decaimento exponencial: quando a base a está entre 0 e 1, a função exponencial decai rapidamente à medida que o valor de x aumenta. Esse conhecimento é útil para modelar, por exemplo, decaimentos radioativos e decaimentos de substâncias químicas.
- Propriedade do expoente zero: qualquer número elevado a zero é igual a 1. Isso significa que $f(0) = a^0 = 1$ para qualquer base a.
- Propriedade do expoente negativo: qualquer número elevado a um expoente negativo é igual ao inverso desse número elevado ao valor absoluto do expoente. Isso significa que $f(-x) = \frac{1}{a^x}$ para qualquer base a.

Em resumo, as funções exponenciais são essenciais para modelar e compreender variados fenômenos naturais e artificiais. Seu uso é fundamental em áreas como matemática, física, biologia, economia e engenharia.

Por meio do texto apresentado na abertura desta Jornada, espera-se que os estudantes percebam que há crescimentos que ocorrem rapidamente, como a propagação de algumas doenças, o crescimento de bactérias, a propagação da informação em alguns contextos de redes sociais. Alguns desses crescimentos, chamados exponenciais, são identificados quando uma variável é multiplicada por uma constante.

Na questão **3**, o número de infectados dobra a cada dia: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 e, finalmente, 1 024.

Aproveite a abertura para comentar o decaimento, no sentido de que a variável pode decair multiplicada por uma constante.

DICA

Para ampliar o trabalho, estimule os estudantes a investigar os crescimentos exponenciais na natureza. O vídeo da série *Isto é Matemática*, disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=GThyTefiVlY, é uma excelente oportunidade para isso.

Etapa 1

No **Resolvendo a questão**, os estudantes vão verificar se suas respostas estão corretas ou não. Converse com eles, auxiliando-os a solucionar as dúvidas que surgirem durante a resolução e a correção. Em seguida, solicite a eles que façam as atividades de múltipla escolha do **Agora é com você**.

Reforce sempre que possível a característica da função exponencial de que aumentos iguais em x produzem multiplicações iguais em y.

1. As igualdades I, III e V estão corretas. Na igualdade II, $\frac{a^5}{a^{-2}} = a^7$; e, na IV, $(a^3)^2 = a^6$.

Alternativa **B**. | D27 - N5.7 - Fácil

2. Se a quantidade de visualizações dobra a cada 10 minutos, em uma hora serão $\frac{60}{10} = 6$; 6 dobras.

Assim, tem-se:

$10 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 10 \cdot 2^6 = 640$

Alternativa **B**. | D29 - N5.7 - Fácil

3. Se o valor da empresa dobra a cada 18 meses, em 15 anos há $\frac{180}{18} = 10$; 10 dobras.

Assim:

$40\,000 \cdot 2^{10} = 40\,960\,000$

Logo, o valor da empresa, em 2023, era de, aproximadamente, 41 milhões de reais.

Alternativa **C**. | D29 - N5.7 - Médio

4. Se a quantidade de plantas aquáticas na superfície da lagoa dobra a cada semana, então na semana 9 (anterior à 10) havia a metade delas.

Alternativa **E**. | D29 - N5.7 - Fácil

5. Se em 6 meses a quantidade de pessoas em quarentena foi reduzida à quarta parte, de 6 em 6 meses a quantidade de pessoas é dividida por 4.
Então, por tentativa, tem-se:

$2000 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 125$

$2000 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = 31{,}25$

Logo, após 3 ciclos = 18 meses, haverá menos de 32 pessoas em quarentena.

Alternativa **D**. | D29 - N5.7 - Médio

6. Simplificando, $64 = 4^3$. Logo:

$4^{x^2-1} = 4^3 \Rightarrow x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x' = -2$ e $x'' = 2$

Alternativa **A**. | D29 - N5.7 - Médio

7. I. Se 100 mg de um antibiótico foram ingeridos por uma pessoa, e a meia-vida dessa substância é de 8 horas, então, tem-se:

- 1º ciclo (+ 8 horas): $100 \cdot \frac{1}{2} = 50$
- 2º ciclo (+ 8 horas): $50 \cdot \frac{1}{2} = 25$
- 3º ciclo (+ 8 horas): $25 \cdot \frac{1}{2} = 12{,}5$

Como 12,5 mg em 100 mg correspondem a 12,5%, o tempo necessário para que restem 12,5% da substância no corpo é de $3 \cdot 8 = 24$ horas.

Alternativa **C**.

II. Considerando que a meia-vida do metal dentro do corpo seja de 5 anos, o ciclo terá de ser realizado 4 vezes, de modo que 8 gramas decairão em:

- 1º ciclo (+ 5 anos): $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$
- 2º ciclo (+ 5 anos): $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$
- 3º ciclo (+ 5 anos): $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
- 4º ciclo (+ 5 anos): $1 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$

Logo, após $4 \cdot 5 = 20$ anos, a quantidade de metal pesado no corpo será menor do que 0,5 g.

Alternativa **B**.

III. Após 30 anos, o lixo radioativo emitirá 50% de sua capacidade original. Aplicando esse mesmo processo repetidas vezes, obtém-se:

- 1º ciclo (+ 30 anos): $100\% \cdot \frac{1}{2} = 50\%$
- 2º ciclo (+ 30 anos): $50\% \cdot \frac{1}{2} = 25\%$
- 3º ciclo (+ 30 anos): $25\% \cdot \frac{1}{2} = 12{,}5\%$
- 4º ciclo (+ 30 anos): $12{,}5\% \cdot \frac{1}{2} = 6{,}25\%$
- 5º ciclo (+ 30 anos): $6{,}25\% \cdot \frac{1}{2} = 3{,}125\%$
- 6º ciclo (+ 30 anos): $3{,}125\% \cdot \frac{1}{2} = 1{,}5625\%$

Ou seja, serão necessários $6 \cdot 30 = 180$ anos para que o lixo radioativo atinja o nível tolerável (< 3%).

Alternativa **A**.

IV. Para resolver esta questão, inicialmente será necessário estabelecer a quantidade de meias-vidas da substância. Para isso, faz-se o processo inverso:

- 1º ciclo ($-x$ dias): $12{,}5\% \cdot 2 = 25\%$
- 2º ciclo ($-x$ dias): $25\% \cdot 2 = 50\%$
- 3º ciclo ($-x$ dias): $50\% \cdot 2 = 100\%$

Portanto, a substância passou por 3 meias-vidas. Dividindo 48 por 3, obtém-se $x = 16$. Logo, a meia-vida da substância é de 16 dias.

Alternativa **C**. | D29 - N5.2 - N5.7 - Difícil

Etapa 2

Após a leitura da seção **Fique ligado**, certifique-se de que todos compreenderam os tópicos apresentados. Com base nesses referenciais teóricos, solicite aos estudantes que façam as atividades de múltipla escolha desta etapa.

1. I. Calculando $f(2)$ e $f\left(\frac{1}{2}\right)$:

$f(2) = 9^2 = 81$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 9^{\frac{1}{2}} = 3$

Logo:

$$\frac{f(2)}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{81}{3} = 27$$

Alternativa **D**.

II. As alternativas **A** e **B** estão erradas, pois a curva associada é exponencial e crescente. A alternativa **D** está errada porque o gráfico intercepta o eixo y em (0, 1), e, por fim, a alternativa **E** também está errada porque toda função exponencial tem uma função logarítmica inversa.

Alternativa **C**. | D27 - N5.2 - Fácil

2. Se a população inicial era de 50 bactérias e dobrava a cada 30 minutos, então basta dividir o tempo total (2 horas) por 0,5 hora. Com isso, temos: $\frac{2}{0,5} = 4$.

A função que descreve o crescimento é $N(t) = 50 \cdot 2^{\left(\frac{t}{0,5}\right)}$. Substituindo $t = 2$, temos: $N(2) = 50 \cdot 2_4 = 50 \cdot 16 = 800$.

Alternativa **D**. | D29 - N5.2 - Médio

3. Se os 400 mil reais se reduzem 5% a cada 3 anos, sabe-se, então, que nesse período se realiza a multiplicação do valor original por 100% − 5% = 95% = 0,95. Dividindo os 9 anos em que o imóvel sofreu redução por 3, o valor $V(t)$ pelo qual o imóvel foi vendido, em milhares de reais, é dado por:

$V(t) = 400 \cdot 0,95^{\frac{t}{3}} \Rightarrow V(9) = 400 \cdot 0,95^{\frac{9}{3}} = 342,95$

Alternativa **C**. | D29 - N5.2 - Médio

4. I. Como $a = 0,97$ em $f(x) = 15\,000 \cdot 0,97^x$, a quantidade de assinantes que utilizaram apenas o formato digital durante o ano de 2023 decresceu a cada mês 3%, já que $1 - 0,97 = 0,03$.

Alternativa **D**.

II. Considerando $x = 6$:

$f(x) = 15\,000 \cdot 0,97^6 \simeq 12\,494,58$

Logo, a quantidade de assinantes que utilizavam somente o formato digital no fim do primeiro semestre era de 12 494.

Alternativa **B**. | D29 - N5.2 - Médio

5. A atividade possibilita uma proposta interdisciplinar com Ciências da Natureza, mobilizando a habilidade **EM13CNT104**.

Analisando os dados da tabela, verifica-se que, a cada hora, a quantidade de amoxicilina se reduz à metade, o que caracteriza uma função exponencial, com taxa de decrescimento constante. Substituindo os parâmetros b e a em $f(x) = b \cdot a^{kx}$, com $b, k \in \mathbb{R}$, tem-se:

$Q(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

Alternativa **E**. | D29 - N5.2 - Médio

6. Pelo enunciado temos que foram impressos:

- no 1º mês 5 folhetos;
- no 2º mês $5 \cdot 3 = 15$;
- no 3º mês $15 \cdot 3 = 45$.

Portanto, o total produzido até o 3º mês é:
$5 + 15 + 45 = 65$.
Alternativa **B**. | D29 - N5.2 - Fácil

7. A solução é encontrada por meio da análise dos gráficos. Como a função exponencial dada é crescente, as alternativas **B** e **D** são desconsideradas. Em seguida, devem ser feitos alguns testes para verificar, por exemplo, o ponto correspondente em $f(x)$ para $x = 0$. Nesse caso, verifica-se que o gráfico passa pelo ponto (0, 2) e as alternativas **A** e **C** também são desconsideradas.

Alternativa **E**. | D27 - N5.2 - Fácil

8. Se $f(x) = 3$, tem-se:

$\log_8 x = 3 \Leftrightarrow 8^3 = x$

Logo, $x = 512$.

Alternativa **C**. | D27 - N5.2 - Fácil

9. A cada mês, o valor da massa foi multiplicado por $\frac{112}{128}$, resultando em 0,875. Logo:

$M = 128 \cdot 0,875^t \Rightarrow \log_{0,875} 0,875^t = \log_{0,875}\left(\frac{M}{128}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \log_{0,875}\left(\frac{M}{128}\right)$

Alternativa **A**. | D28 - N5.2 - Médio

10. Usando a definição de logaritmo, o gráfico da inversa de $f(x) = 10 \cdot 2^x$ é o gráfico associado à função:

$x = 10 \cdot 2^{f(x)} \Rightarrow \log_2 2^{f(x)} = \log_2\left(\frac{x}{10}\right) \Rightarrow f(x) = \log_2\left(\frac{x}{10}\right)$

Como essa é uma função logarítmica crescente, as alternativas **D** e **E** devem ser desconsideradas. Na sequência, podem ser feitos alguns testes para verificar, por exemplo, o ponto correspondente em x para $f(x) = 0$. Nesse caso, o gráfico passa pelo ponto (10, 0) e a alternativa **C** deve ser igualmente desconsiderada. Por fim, o ponto correspondente em $f(x)$ para $x = 40$ é (40, 2), assim, a alternativa **B** também é desconsiderada.

Alternativa **A**. | D28 - N5.2 - Fácil

11. A função inversa de $f(x) = 5 \log_2 x$ pode ser dada por:

$x = 5 \log_2 f(x) \Rightarrow \log_2 f(x) = \frac{x}{5} \Rightarrow f(x) = 2^{\frac{x}{5}}$

Alternativa **D**. | D28 - N5.2 - Fácil

Etapa 3

Com base nos objetos de conhecimento trabalhados nesta Jornada, os estudantes são convidados a resolver diferentes atividades do Enem e de vestibulares.

1. Pode-se contar as meias-vidas e, assim, identificar o mais antigo (com mais meia-vida), ou basta dividir os valores da terceira coluna pelos respectivos valores da segunda, a fim de verificar o menor.

$\frac{32}{128} = 2^{-2} = 0{,}25$ $\frac{512}{1\,024} = 2^{-1} = 0{,}5$

$\frac{8}{256} = 2^{-5} = 0{,}03125$

$\frac{64}{512} = 2^{-3} = 0{,}125$ $\frac{1\,024}{2\,048} = 2^{-1} = 0{,}5$

O fóssil menor é o mais antigo, visto que, quanto maior a idade, menor a quantidade de carbono-14.

Alternativa **B**. | D29 - N5.7 - Médio

2. Se de março para abril a produção dobrou, o mesmo aconteceu de janeiro para fevereiro. Logo, pode-se dizer que a produção foi de 240 milhares de unidades.

Alternativa **C**. | D29 - N5.7 - Médio

3. Se a cada 2 anos se efetua a multiplicação do valor original por 100% − 36% = 64%, em 3 anos será feita a multiplicação por $0{,}64^{1{,}5}$.

Então, tem-se:

$50\,000 \cdot 0{,}64^{1{,}5} = 50\,000 \cdot 0{,}8^3 = 25\,600$; R$25.600,00

| D29 - N5.2 - Médio

4. No enunciado foi informado que a população de bactérias dobra a cada 0,25 · 60 h = 15 min. Logo, se x é a quantidade inicial de bactérias, então a população de bactérias, após t minutos, é dada por $Q(t) = x \cdot 2^{\frac{t}{15}}$.

Sabendo que $Q(120) = 189\,440$ e $t = 120$ (2 horas), tem-se:

$$x \cdot 2^{\frac{120}{15}} = 189\,440 \Rightarrow x = \frac{189\,440}{256} = 740$$

Alternativa **B**. | D29 - N5.2 - Médio

5. Sendo $K(m) = 6\,563$, tem-se:

$$81 \cdot 3^{\frac{1}{3}m} + 2 = 6\,563 \Rightarrow 3^{\frac{1}{3}m} = \frac{6\,561}{81} \Rightarrow 3^{\frac{1}{3}m} = 3^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m = 12$$

Alternativa **D**. | D29 - N5.2 - Médio

6. $M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right) \Rightarrow \log\left(\frac{E}{E_0}\right) = \frac{3M}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{E}{E_0} = 10^{\frac{3M}{2}} \Rightarrow E = E_0 \cdot 10^{\frac{3M}{2}}$$

Para E_1, tem-se:

$$E_1 = E_0 \cdot 10^{\frac{3 \cdot 9}{2}} \Rightarrow E_1 = E_0 \cdot 10^{\frac{27}{2}}$$

Para E_2, tem-se:

$$E_2 = E_0 \cdot 10^{\frac{3 \cdot 7}{2}} \Rightarrow E_2 = E_0 \cdot 10^{\frac{21}{2}}$$

Logo:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_0 \cdot 10^{\frac{27}{2}}}{E_0 \cdot 10^{\frac{21}{2}}} = 10^{\frac{27}{2} - \frac{21}{2}} = 10^3 \Rightarrow E_1 = 10^3 \cdot E_2$$

Alternativa **C**. | D28 - Difícil

7. Sabendo que $N(1) = 3N_0$, tem-se:

$3N_0 = N_0 e^{k \cdot 1} \Leftrightarrow e^k = 3$

Logo:

$N(5) = N_0 e^{k \cdot 5} \Rightarrow N(5) = N_0 (e^k)^5 \Rightarrow N(5) =$
$= N_0 3^5 \Rightarrow N(5) = 243\,N_0$

Alternativa **C**. | D29 - N5.2 - Difícil

8. Sabe-se que pH = 2,3 e que log 2 = 0,3. Representada a concentração de íons hidrogênio na amostra por $[H^+]$, tem-se:

$\text{pH} = -\log_{10}[H^+] \Leftrightarrow [H^+] = 10^{-2{,}3}$

Como $10^{-2{,}3} = 10^{-2} \cdot 10^{-0{,}3}$:

$$[H^+] = 10^{-2} \cdot 10^{-0{,}3} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{10^{0{,}3}}$$

Se $\log 2 = 0{,}3 \Leftrightarrow 10^{0{,}3} = 2$; assim:

$$[H^+] = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{2} = 0{,}005$$

Alternativa **C**. | D28 - N5.2 - Difícil

9. Se 120 mg de um medicamento foram ingeridos por uma pessoa e a meia-vida dele é de 6 horas, às 16 horas do dia seguinte terão se passado 30 horas, ou seja 30 : 6 = 5 ciclos.

- 1º ciclo (+ 6 horas): $120 \cdot \frac{1}{2} = 60$
- 2º ciclo (+ 6 horas): $60 \cdot \frac{1}{2} = 30$
- 3º ciclo (+ 6 horas): $30 \cdot \frac{1}{2} = 15$
- 4º ciclo (+ 6 horas): $15 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}5$
- 5º ciclo (+ 6 horas): $7{,}5 \cdot \frac{1}{2} = 3{,}75$

Alternativa **C**. | D29 - N5.2 - Difícil

10. a) Como a quantidade inicial de bactérias era 5 000 000, tem-se:

$5\,000\,000 = C \cdot 10^{-b \cdot 0} \Rightarrow C = 5 \cdot 10^6$

Como 10 minutos depois $\frac{1}{10}$ das bactérias continuaram vivas:

$$\frac{1}{10} \cdot 5 \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-b \cdot 10} \Rightarrow 10^{-10b} = 10^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{10}$$

Para $t = 20$, tem-se:

$$Q(20) = 5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-\frac{1}{10} \cdot 20} = 5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2} = 50\,000$$

Ou seja, 50 000 bactérias.

b) Para $b = 3$, tem-se: $Q(t) = C \cdot 10^{-3t}$

Para a quantidade de bactérias reduzir-se à metade:

$$\frac{C}{2} = C \cdot 10^{-3t} \Rightarrow \frac{1}{2} = 10^{-3t} \Rightarrow -\log 2 =$$
$$= -3t \Rightarrow -0{,}30 \simeq -3t \Rightarrow t \simeq 0{,}10$$

Ou seja, aproximadamente 0,1 minuto.

| D28 - D29 - N5.2 - Difícil

Referências bibliográficas

ALVES, R. *A alegria de ensinar*. Campinas: Papirus, 2003.

ANTUNES, Celso. *Jogos para a estimulação das múltiplas inteligências*. Petrópolis: Vozes, 2014.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Relatório Saeb*. Brasília, DF: Inep, 2019. Recurso eletrônico.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matrizes e Escalas**. Brasília: MEC/Inep, 2020a. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/matrizes-e-escalas. Acesso em: 31 out. 2025

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 21 nov. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Escalas de proficiência do Saeb*. Brasília, DF: MEC/Inep, 2020b. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/avaliacoes_e_exames_da_educacao_basica/escalas_de_proficiencia_do_saeb.pdf. Acesso em: 21 nov. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de Referência dos Testes do Saeb*. Brasília, DF: MEC/Inep, 2022. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/matriz-de-referencia-de-matematica_2001.pdf. Acesso em: 21 nov. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

FARDO, M. L. A gamificação aplicada em ambientes de aprendizagem. *Renote*, v. 11, n. 1, 2013. Disponível em: https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/41629. Acesso em: 22 nov. 2023.

FERRAZ, A. P. do C. M.; BELHOT, R. V. Taxonomia de Bloom: revisão teórica e apresentação das adequações do instrumento para definição de objetivos instrucionais. *Gestão & Produção*, v. 17, n. 2, p. 421-431, 2010.

KANTOWSKI, M. G. Algumas considerações sobre o ensino para resolução de problemas. *In*: KRULIK, S.; REYS, R. E. (org.). *A resolução de problema na matemática escolar*. Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

LUCKESI, C. C. *Avaliação da aprendizagem na escola*: reelaborando conceitos e criando a prática. 2. ed. Salvador: Malabares Comunicações e Eventos, 2005.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: Editora da Unesp, 1999.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006. Disponível em: http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/eae/arquivos/1275/1275.pdf. Acesso em: 21 nov. 2023.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

POZO, J. I.; ECHEVERRÍA, M. del P. P. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. *In*: POZO, J. I. *A solução de problemas*: aprender a resolver, resolver a aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação do Governo do Estado. *Competências socioemocionais*. São Paulo, 2020. Disponível em: https://www.educacao.sp.gov.br/wp-content/uploads/2021/05/Coletiva-socioemocionais-18-5.pdf. Acesso em: 21 nov. 2023.

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

Anotações

SÃO PAULO EM AÇÃO

A coleção ***São Paulo em ação*** oferece recursos para a revisão e o aprofundamento de conteúdos e de habilidades desenvolvidos ao longo da Educação Básica. Apresenta atividades alinhadas com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e auxilia professores no acompanhamento dos estudantes e na elaboração de estratégias pedagógicas eficientes.

Com esta coleção, os estudantes podem aprimorar conhecimentos e se preparar para os exames e os desafios do mundo atual, progredindo em sua formação e contribuindo para a melhoria da qualidade da educação brasileira.

ISBN: 978-65-267-0544-5

9 786526 705445

editora ática